



**ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

Рубцовский индустриальный институт  
ГОУ ВПО «Алтайского государственного технического  
университета им. И.И. Ползунова»

**И.А. Сорокина, А.А. Кутумов**

**КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ  
РЫЧАЖНЫХ И ЗУБЧАТЫХ  
МЕХАНИЗМОВ**

Методические указания по курсу  
«Теория механизмов и машин»  
для студентов машиностроительных специальностей

Рубцовск 2006

УДК 621.01

Кутумов А.А., Сорокина И.А., Кинематический анализ плоских рычажных и зубчатых механизмов: Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин» для студентов машиностроительных специальностей / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2006. - 39 с.

В данных методических указаниях изложены:

- методика кинематического анализа плоского механизма методом планов скоростей и ускорений, приведены пример выполнения расчетно-графической работы и варианты индивидуальных заданий;

- теоретические сведения по определению передаточных отношений зубчатых механизмов и варианты индивидуальных заданий.

Рассмотрены и одобрены  
на заседании НМС  
Рубцовского индустриального  
института.  
Протокол № 1 от 31.01.06.

Рецензент: к.т.н. профессор

А.К. Фокеев

## ВВЕДЕНИЕ

Настоящие методические указания по курсу теории машин и механизмов предназначены для студентов машиностроительных специальностей.

В первой части рассматривается задача кинематического анализа плоского рычажного механизма методом планов скоростей и ускорений. Изложены краткие теоретические основы определения кинематических параметров и приведен пример кинематического анализа плоского механизма. В конце этой части представлены 24 варианта индивидуальных заданий.

Во второй части рассматриваются задачи по определению передаточных отношений многозвенных зубчатых механизмов. Изложены краткие теоретические основы по их определению. Приведены примеры. В конце этой части представлены 32 варианта индивидуальных заданий.

# 1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЫЧАЖНОГО МЕХАНИЗМА

## 1.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы - освоение приемов кинематического анализа плоских рычажных механизмов.

1.1.1. Выбор, назначение и использование масштабов планов скоростей и ускорений.

1.1.2. Построение плана скоростей и чтение его.

1.1.3. Определение величины и направления линейной скорости любой точки механизма по плану скоростей.

1.1.4. Определение величины и направления угловой скорости любого звена механизма.

1.1.5. Построение плана ускорения.

1.1.6. Определение величины и направления абсолютного, нормального и касательного ускорения любой точки механизма по плану ускорений.

1.1.7. Определение величины и направления углового ускорения любого звена механизма по плану ускорений.

## 1.2. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ

1.2.1. Кинематическая схема механизма в масштабе построения

$$\mu_r = 0,01 \frac{\text{м}}{\text{мм}}.$$

1.2.2. Угловая скорость ведущего звена I:

$$\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}.$$

1.2.3. Угловое ускорение ведущего звена I:

$$\varepsilon_1 = 0, \omega_1 = \text{const}.$$

## 1.3. ВЕЛИЧИНЫ, ПОДЛЕЖАЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЮ

1.3.1. Линейные скорости «ключевых» точек механизма.

1.3.2. Угловые скорости всех звеньев механизма.

1.3.3. Линейные ускорения «ключевых» точек механизма.

1.3.4. Угловые ускорения всех звеньев механизма.

## 1.4. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

1.4.1. Определение скоростей точек.

Зная закон движения ведущего звена и длины всех звеньев механизма или кинематическую схему механизма в заданном масштабе, определить скорости его точек по величине и направлению в любом положении механизма путем

построения плана скоростей для этого положения. Планы скоростей строятся на основании следующих теорем теоретической механики:

Теорема сложения скоростей в плоскопараллельном движении:

$$\overrightarrow{V_M} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{MA}} .$$

Теорема сложения скоростей в сложном движении:

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_\tau} .$$

Построение планов скоростей и чтение их во многом упрощаются при использовании свойств этих планов, которые заключаются в следующем:

а) Векторы, исходящие из полюса, выражают абсолютные скорости соответствующих точек звеньев механизма в масштабе плана скоростей. Точки плана скоростей, соответствующие неподвижным точкам механизма, находятся в полюсе;

б) Векторы, соединяющие концы векторов абсолютных скоростей (векторы, не проходящие через полюс), выражают величины и направления относительных скоростей;

в) Векторы относительных скоростей точек звена на плане скоростей образуют фигуру, подобную одноименной жесткой фигуре, образованной отрезками, соединяющими эти точки звена на плане механизма, повернутую по отношению к последней на 90 градусов в сторону мгновенного вращения данного звена.

#### 1.4.2. Определение ускорений точек.

Ускорения точек звеньев механизма находятся с помощью построения плана ускорений для данного положения механизма. Планы ускорений строятся на основании следующих теорем теоретической механики:

- Теорема сложения ускорений в плоскопараллельном движении:

$$\overrightarrow{a_M} = \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{a^n_{MA}} + \overrightarrow{a^\tau_{MA}} ;$$

- Теорема сложения ускорений в сложном движении:

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_\tau} + \overrightarrow{a_k}$$

По аналогии с планами скоростей при помощи планов ускорений можно найти ускорения любых точек механизма. При построении планов ускорений также следует пользоваться их изображающими свойствами, заключающимися в следующем:

Векторы, исходящие из полюса, представляют собой абсолютные ускорения соответствующих точек в масштабе плана ускорений. Точки плана ускорений, соответствующие точкам, ускорения которых равны нулю, располагаются в полюсе;

- Векторы, соединяющие концы векторов абсолютных ускорений, выражают в том же масштабе полные относительные ускорения;

- Полные относительные ускорения на плане ускорений образуют фигуру, подобную одноименной жесткой фигуре на плане положения механизма, но повернутую по отношению к последней на некоторый угол  $180^\circ - \alpha$  в сторону мгновенного углового ускорения данного звена, где

$$\alpha = \arctg \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

Поскольку полные относительные ускорения состоят из геометрической суммы нормальных и касательных составляющих, то обычно концы векторов абсолютных ускорений означают буквами (строчными), соответствующими названию точек на плане механизма (прописные буквы). Концы векторов нормальных и кориолисовых составляющих ускорений означают соответственно  $n_i$  и  $k_i$  (индекс  $i$  соответствует номеру звена).

## 1.5. ПРИМЕР КИНЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

1.5.1. Дано: на рис. 1.1 изображена кинематическая схема механизма в масштабе  $\mu_r = 0,01 \frac{м}{мм}$ . Угловая скорость входного звена  $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1} = const$ , т.

е. угловое ускорение  $\varepsilon_1 = 0$ . Кинематическому анализу предшествует структурный анализ механизма, согласно которому механизм состоит из входного звена I и трех структурных групп II класса. Структурная формула механизма:

$$I(1,0) \rightarrow II(2,3) \rightarrow II(4,5) \rightarrow II(6,7).$$

Именно в такой последовательности производится кинематический анализ механизма.

1.5.2. Определение линейных скоростей точек звеньев механизма и угловых скоростей звеньев механизма.

а) входное звено - I (1,0)

Находим скорость точки А кривошипа I – OA:

$$V_A = \omega_1 \cdot \ell_{OA} = \omega_1 \cdot OA \cdot \mu_t = 10 \cdot 30 \cdot 0,01 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Вектор  $\overline{V_A}$  направлен перпендикулярно к звену  $OA$  в сторону его вращения -  $\omega_1$ . Задаем длину отрезка  $P_a$  плана скоростей, изображающего скорость точки  $A$ :

$$P_a = 30 \text{ мм.}$$

Масштаб плана скоростей:

$$\mu_v = \frac{V_A}{P_a} = \frac{3}{30} = 0,1 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}.$$

От произвольной точки  $P$ , принятой за полюс плана скоростей, откладываем перпендикулярно к звену  $OA$  отрезок  $P_a$  (рис. 1.2). Согласно свойствам плана скоростей, все аналоги неподвижных точек механизма  $O$ ,  $C$  и  $H$  будут находиться в полюсе  $P$  плана скоростей, т.е.  $P$ ,  $o$ ,  $c$  и  $h$  на плане скоростей - одна точка.

б) группа II класса - II (2.3)

При исследовании этой группы вначале находится скорость «ключевой» точки  $B$  группы.

На основании теоремы сложения скоростей в плоском движении:

$$\overline{\underline{V_B}}_{\perp BC} = \overline{V_A} + \overline{\underline{V_{BA}}}_{\perp BA}, \quad (1.1)$$

где  $\overline{\underline{V_A}}$  - скорость точки  $A$ , она известна по величине и направлению (п. 1.5.2, а), поэтому подчеркнута двумя чертами;

$\overline{\underline{V_{BA}}}$  - относительная скорость точки  $B$  во вращении вокруг точки  $A$ , она известна только по направлению, т.е. перпендикулярна отрезку  $BA$ , поэтому она подчеркнута одной чертой, по которой расшифровано направление -  $\perp BA$ ;

$V_B$  - абсолютная скорость точки  $B$ , она известна по направлению, перпендикулярна отрезку  $BC$ , т.к. точка  $C$  неподвижна, поэтому она подчеркнута одной чертой, под которой указано направление -  $\perp BC$ .

Таким образом, в векторном уравнении (I) неизвестными являются две величины - модули скоростей  $V_B$  и  $V_{BA}$ . Это в данной форме записи уравнения (I) легко обнаруживается по количеству недостающих подчеркиваний, и делается вывод: одного векторного уравнения (I) достаточно для определения неизвестных, если воплотить его в построение плана скоростей, т.е. через точку  $a$  (конец вектора скорости  $V_A$ ), на плане скоростей (рис. 1.2) проводим  $\perp AB$  линию действия скорости  $\overline{\underline{V_{BA}}}_{\perp BA} \perp P$ , а через полюс к звену линию действия

скорости  $\overline{V_B} \perp BC$ . На пересечении этих двух линий действия получим точку  $v$  — конец вектора скорости  $\overline{V_B}$  точки  $B$ :

$$V_B = P\omega \cdot \mu_v = 37 \cdot 0,1 = 3,7 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Направление скорости определяется направлением вектора  $\overline{Pv}$ . Вектор  $av$  изображает скорость  $\overline{V_{BA}}$  точки  $B$  в относительном вращении вокруг точки  $A$ :

$$V_{BA} = av \cdot \mu_v = 10 \cdot 0,1 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Направление скорости  $V_{BA}$  определяется направлением вектора  $\overline{av}$ .

Положение точек  $m$  и  $d_3$  (концы векторов скоростей точек  $M$  и  $D_3$ ) определяется на плане скоростей по теореме подобия фигур на плане скоростей и движущейся плоскости. Длина отрезка  $am$  определяется из пропорции:

$$\frac{am}{ab} = \frac{AM}{AB};$$

$$am = \frac{ab \cdot AM}{AB} = \frac{10 \cdot 25}{50} = 5 \text{ мм}.$$

Длину отрезка  $Pd_3$ , перпендикулярного  $CD_3$ , находим из пропорции:

$$\frac{Pd_3}{Pb} = \frac{CD}{CB},$$

$$Pd_3 = \frac{Pb \cdot CD}{CB} = \frac{37 \cdot 50}{30} = 65 \text{ мм}.$$

При построении точки  $d_3$  следует иметь в виду, что  $\triangle Pad_3$  подобен  $\triangle CBD$  и порядок букв при обходе сторон этих треугольников по направлению часовой стрелки одинаковый, т.е.  $C \rightarrow B \rightarrow D$  и  $P \rightarrow v \rightarrow d_3$ , т.к. точки  $D$  звена 3 и 4 движутся совместно, поэтому:

$$V_{d_3} = V_{d_3} = Pd \cdot \mu_v = 65 \cdot 0,1 = 6,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

в) группа II класса - II (4,5)

«Ключевая» точка этой группы – точка  $D_5$ . Точка  $D_5$  находится в сложном движении, поэтому по теореме сложения скоростей в сложном движении, применяя краткую форму записи, имеем:

$$\perp \frac{\overline{V_{D_5}}}{FH} = \frac{\overline{V_{A_4}}}{FH} + \frac{\overline{V_{D_5 A_4}}}{\parallel FH}, \quad (1.2)$$

где  $\overline{V_{D_5}}$  - абсолютная скорость точки  $D_5$ ;

$\overrightarrow{V_{D_4}}$  - переносная скорость точки  $D_3$  в сложном движении;

$\overrightarrow{V_{D_3D_4}}$  - относительная скорость точки  $D_3$  относительно  $D_4$ ;

Согласно векторному выражению (2) на плане скоростей (рис. 1.2) строим вектор  $Pd_3$  ( $d_3d_4 \parallel FH$ ;  $Pd_3 \perp FH$ ) - скорость  $\overrightarrow{V_{D_3}}$ .

Положение точки  $f$  (конец вектора скорости точки  $F$ ) находим на плане скоростей по теореме подобия:

$$\frac{Pf}{Pd_3} = \frac{HF}{HD};$$

$$Pf = \frac{Pd_3 \cdot HF}{HD} = \frac{33 \cdot 60}{30} = 66 \text{ мм.}$$

Пользуясь построенным планом скоростей, определим значения:

$$V_{D_3} = Pd_3 \cdot \mu_V = 33 \cdot 0,1 = 3,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_F = Pf \cdot \mu_V = 66 \cdot 0,1 = 6,6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

г) группа II класса - II (6,7)

«Ключевая» точка этой группы - точка  $G$ ; на основании теоремы сложения скоростей в плоском движении для звена 6 имеем:

$$\frac{\overrightarrow{V_G}}{\parallel} = \frac{\overrightarrow{V_F}}{\parallel} + \frac{\overrightarrow{V_{GF}}}{\perp GF}, \quad (1.3)$$

где  $\overrightarrow{V_G}$  - скорость точки  $G$ , она известна по направлению - параллельна направляющей ползуна 7, т.е. вдоль  $X-X'$ ;

$\overrightarrow{V_F}$  - абсолютная скорость точки  $F$ , она известна по величине и направлению (п. 1.5.2);

$\overrightarrow{V_{GF}}$  - относительная скорость точки  $G$  во вращении вокруг точки  $F$ , она известна по направлению, т.е. перпендикулярна отрезку  $GF$ .

Таким образом, в векторном уравнении (3) неизвестными являются две величины, модули скоростей  $V_G$  и  $V_{GF}$ , которые легко найти достраиванием плана скоростей на рис. 1.2. Т.е. через точку  $f$  (конец вектора скорости  $V_F$ ) на плане скоростей проводим линию  $\perp GF$  и через точку  $P$  проводим линию, параллельную неподвижной направляющей  $X-X'$ . Пересечение указанных линий

дает положение точки  $g$  на плане скоростей, т.е. конец вектора скорости точки  $G$ .

Используя свойства подобия, находим на плане скоростей положение точки  $n$  (конец вектора скорости точки  $N$ ):

$$\frac{fn}{fg} = \frac{FN}{FG};$$

$$fn = \frac{fg \cdot FN}{FG} = \frac{32 \cdot 25}{50} = 16 \text{ мм.}$$

Наконец, находим скорости точек  $N$  и  $G$ :

$$V_N = P_n \cdot \mu_v = 63 \cdot 0,1 = 6,3 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$V_G = P_g \cdot \mu_v = 65 \cdot 0,1 = 6,5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

д) приступаем к определению угловых скоростей звеньев механизма

Угловая скорость  $\omega_1$  входного звена известна по величине и направлению, она задана  $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$ , и звено 1 вращается против часовой стрелки.

Для определения угловой скорости  $\omega_2$  звена 2 рассмотрим вращение точки  $B$  вокруг точки  $A$ .

Направление скорости  $\overline{V_{BA}}$  точки  $B$  вокруг точки  $A$  определяется направлением вектора  $\overline{av}$  на плане скоростей (рис. 1.2). Переносим этот вектор в точку  $B$  механизма и считаем точку  $A$  неподвижной. Точка  $B$  в направлении вектора  $\overline{av}$  вращается относительно точки  $A$  против часовой стрелки, что и определяет направление вращения звена 2. Находим величину угловой скорости звена 2 по формуле:

$$\omega_2 = \frac{V_{BA}}{\ell_{AB}} = \frac{av \cdot \mu_v}{AB \cdot \mu_l} = \frac{10 \cdot 0,1}{50 \cdot 0,01} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

При определении направления угловой скорости  $\omega_3$ , поступаем аналогично.

Перенесенный в точку  $B$  звена 3 вектор  $\overline{F_s}$  показывает, что точка  $B$  вращается относительно точки  $C$  против часовой стрелки. Это определяет направление угловой скорости  $\omega_3$ , а величина ее

$$\omega_3 = \frac{V_B}{\ell_{BC}} = \frac{P_b \cdot \mu_l}{BC \cdot \mu_l} = \frac{37 \cdot 0,1}{30 \cdot 0,01} = 12,3 \text{ с}^{-1}.$$

Угловые скорости звеньев 4 и 5 равны, так как они поворачиваются совместно. Направление  $\omega_4$  и  $\omega_5$  находим, перенося в точку  $F$  звена 5 вектор  $\overline{Pf}$  скорости  $V_F$ , который показывает направление угловой скорости.

$$\omega_4 = \omega_5 = \frac{V_F}{\ell_{dF}} = \frac{Pf \cdot \mu_t}{HF \cdot \mu_t} = \frac{66 \cdot 0,1}{60 \cdot 0,01} = 11 \text{ c}^{-1}.$$

Чтобы определить угловую скорость  $\omega_6$  звена 6, мысленно переносим вектор  $\overline{fg}$  скорости  $V_{GF}$  в точку  $G$  звена 6. В направлении вектора  $\overline{fg}$  точка  $G$  вращается относительно точки  $F$ , которая считается неподвижной в относительном движении, по часовой стрелке, что и определяет направление  $\omega_6$ , величина

$$\omega_6 = \frac{V_{GF}}{\ell_{GF}} = \frac{fg \cdot \mu_v}{GF \cdot \mu_t} = \frac{32 \cdot 0,1}{50 \cdot 0,01} = 6,4 \text{ c}^{-1}.$$

Угловая скорость ползуна 7, совершающего прямолинейное поступательное движение, равна 0,  $\omega_7 = 0$ .

### 1.5.3. Определение линейных ускорений точек звеньев механизма и угловых ускорений звеньев механизма

а) входное звено – I (I)

Находим ускорение точки  $A$  кривошипа I. Поскольку звено I вращается равномерно ( $\epsilon = 0$ ), то точка  $A$  имеет только нормальное ускорение, которое направлено по звену I от точки  $A$  к  $O$ .

Точка  $O$  – центр вращения. Величина ускорения:

$$a_A = a^n = w^2 \cdot \ell_{OA} = 10^2 \cdot OA \cdot \mu_t = 10^2 \cdot 30 \cdot 0,01 = 30 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Принимаем длину отрезка  $\pi a$  (рис. 1.3), изображающего вектор ускорения  $a_A$  точки  $A$ , равной 30 мм. Тогда масштаб плана ускорений

$$\mu_a = \frac{a_a}{\pi a} = \frac{30}{30} = 1 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Из произвольной точки  $\pi$ , принятой за полюс плана ускорений, откладываем параллельно звену  $OA$  в направлении от точки  $A$  к точке  $O$  отрезок  $\pi a$  (рис. 1.3).

Ускорения точек  $O, C$  и  $H$  механизма равны нулю, следовательно, на плане ускорений  $\pi, c, o, h$  – одна точка.

б) группа II класса – II (2,3)

Ускорение любой точки этой группы может быть найдено по теореме подобия плана ускорений и плана механизма, после того как найдется ускорение  $a_B$  «ключевой» точки  $B$  группы. Поэтому составляем и анализируем векторные уравнения для точки  $B$  на основании теорем сложения ускорений в плоском движении

$$\vec{a}_B = \underline{\underline{\vec{a}_A}} + \underline{\underline{\vec{a}^n_{BA}}} + \frac{\vec{a}^r_{AB}}{\perp BA};$$

$$\vec{a}_B = \underline{\underline{\vec{a}_C}} + \underline{\underline{\vec{a}^n_{BC}}} + \frac{\vec{a}^r_{BC}}{\perp BC}.$$

где  $a_A$  - ускорение точки  $A$ , оно известно по величине и направлению (п. 1.5.3, а), поэтому подчеркнуто двумя чертами.

$a^n_{BA}$  - относительное, нормальное ускорение точки  $B$  во вращении относительно точки  $A$ , оно направлено от точки  $B$  к  $A$  и имеет величину

$$a^n_{BA} = \omega_2^2 \cdot \ell_{AB} = \omega_2^2 \cdot AB \cdot \mu_c = 2^2 \cdot 50 \cdot 0,01 = 2 \frac{M}{c^2}.$$

Так как ускорение  $a^n_{BA}$  известно по величине и направлению, оно подчеркнуто двумя чертами. На плане ускорений вектор  $a^n_{BA}$  изображает  $an_1$ , который равен:

$$an_1 = \frac{a^n_{BA}}{\mu_c} = \frac{2}{1} = 2 \text{ мм}.$$

$a^r_{BA}$  - относительное, касательное ускорение точки  $B$  во вращательном движении относительно полюса  $A$ . Оно направлено  $\perp AB$  и, так как величина его неизвестна, подчеркнуто одной чертой.

$a_C$  - ускорение точки  $C$ , оно равно нулю, поэтому подчеркнуто двумя чертами.

$a^n_{BC}$  - относительное, нормальное ускорение точки  $B$  во вращении вокруг точки  $C$ . Оно направлено от точки  $B$  к точке  $C$  и имеет величину

$$a^n_{BC} = \omega_3^2 \cdot \ell_{BC} = \omega_3^2 \cdot BC \cdot \mu_c = 12,3^2 \cdot 30 \cdot 0,01 = 4,5 \frac{M}{c^2}.$$

Это ускорение, как имеющее величину и направление, подчеркнуто двумя чертами. На плане ускорений вектор  $\overline{a''_{BC}}$  изобразим отрезком  $\overline{\pi n_3}$ , который равен:

$$\overline{\pi n_3} = \frac{a_{BC}}{\mu_a} = \frac{4,5}{1} = 4,5 \text{ мм},$$

$a''_{BC}$  - относительное касательное ускорение точки  $B$  во вращательном движении относительно точки  $C$ . Оно направлено  $\perp BC$ , величина его неизвестна.

Анализ векторных уравнений показывает, что изначально имеется четыре неизвестных. Это величина и направление ускорения точки  $B$ , т.е.  $\overline{a_B}$ , и величины касательных ускорений  $\overline{a^r_{BA}}$  и  $\overline{a^r_{BC}}$ . Эти неизвестные могут быть найдены с помощью самих векторных уравнений, т.к. число неизвестных и уравнений совпадает. Решение осуществляем построением плана ускорений, придерживаясь порядка, заложенного в векторных уравнениях.

От точки  $a$  плана ускорений (рис. 1.3) параллельно звену  $AB$  в направлении от точки  $B$  к точке  $A$  откладываем вектор  $\overline{an_2}$  (длиной 2 мм), изображающий ускорение  $\overline{a^r_{BA}}$  в выбранном масштабе.

Через точку  $n_2$  проводим  $\perp$  к  $AB$  - линию действия касательного ускорения  $\overline{a^r_{AB}}$ . В результате получаем графическую реализацию первого векторного уравнения.

Затем из полюса  $\pi$  плана ускорений, параллельно звену  $CB$ , в направлении от точки  $B$  к точке  $C$  откладываем вектор  $\overline{\pi n_3}$  (длиной 4,5 мм), изображающий ускорение  $\overline{a''_{BC}}$ . Через точку  $n_3$  проводим  $\perp$  к  $BC$  линию действия касательного ускорения  $\overline{a^r_{BC}}$ . Это графическая реализация второго векторного уравнения. На пересечении линии действия ускорений  $\overline{a^r_{AB}}$  и  $\overline{a^r_{BC}}$  получаем точку  $v$  - конец вектора  $\overline{\pi v}$ , изображающего ускорение  $\overline{a_B}$  точки  $B$  механизма.

$$a_B = \overline{\pi v} \cdot \mu_a = 22 \cdot 1 = 22 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}.$$

Точка  $B$  определяет такие векторы  $\overline{n_2 v}$  и  $\overline{n_3 v}$  касательных ускорений  $\overline{a^r_{AB}}$  и  $\overline{a^r_{BC}}$ :

$$a^r_{BA} = n_2 v \cdot \mu_a = 37 \cdot 1 = 37 \frac{M}{c^2};$$

$$a^r_{BC} = n_3 v \cdot \mu_a = 21 \cdot 1 = 21 \frac{M}{c^2}.$$

Вектор  $\overline{av}$  на плане ускорений изображает полное относительное ускорение:

$$\overline{a_{BA}} = \overline{a^r_{BA}} + a^r_{BA};$$

$$a_{BA} = av \cdot \mu_a = 38 \cdot 1 = 38 \frac{M}{c^2}.$$

Ускорение точек  $M$  и  $D_3$ , отмеченных на плане механизма и принадлежащих группе II (2,3), находятся, исходя из свойств подобия полных относительных ускорений и плана звеньев механизма.

Длина отрезка  $am$  на плане ускорений (рис. 1.3) определяется из пропорции:

$$\frac{am}{av} = \frac{AM}{AB};$$

$$am = \frac{av \cdot AM}{AB} = \frac{38 \cdot 25}{50} = 19 \text{ мм}.$$

Вектор  $\overline{pm}$  будет теперь изображать абсолютное ускорение точки  $M - a_M$ :

$$a_M = pm \cdot \mu_a = 20 \cdot 1 = 20 \frac{M}{c^2}.$$

Аналогично  $\Delta CVD_3$  звена 3 должен быть подобен  $\Delta pvd_3$  на плане ускорений, т.е. можно составить пропорцию:

$$\frac{pd_3}{pv} = \frac{CD_3}{CB};$$

$$pd_3 = \frac{pv \cdot CD_3}{CB} = \frac{22 \cdot 50}{30} = 36 \text{ мм}$$

и построить на плане ускорений  $\Delta pvd_3$ , подобный  $\Delta CVD_3$ , соблюдая при этом порядок обхода вершин треугольников, т.е. если обход вершин  $C - B - D_3$  по часовой стрелке, то и обход вершин  $p - v - d_3$  также должен быть по часовой стрелке. В результате ускорение точки  $D_3 - a_{D_3}$  равно:

$$a_{D_3} = pd_3 \cdot \mu_a = 36 \cdot 1 = 36 \frac{M}{c^2}.$$

в) группа II класса – II (4,5)

«Ключевая» точка в этой группе – точка  $D_5$ . Ускорение точки  $D_5$  находится графическим решением системы двух векторных уравнений, первое из которых составляется на основании теоремы сложения ускорения в сложном движении звена 5 относительно звена 4, а второе уравнение составляется на основании теоремы сложения ускорений в плоском движении звена 5:

$$\vec{a}_{D_5} = \vec{a}_{D_4} + \vec{a}^k_{D_5, D_4} + \frac{\vec{a}^r_{D_5, D_4}}{DN};$$

$$\vec{a}_{D_5} = \vec{a}_H + \vec{a}^n_{D_5, H} + \frac{\vec{a}^r_{D_5, H}}{DN},$$

где  $\vec{a}_{D_4} = \vec{a}_{D_3}$  – ускорение точки  $D_4$ , оно равно ускорению точки  $D_3$ , т.к. эти точки движутся совместно:

$\vec{a}^k_{D_5, D_4}$  – кориолисово ускорение в движении точки  $D_5$  относительно точки  $D_4$ , оно имеет величину:

$$\vec{a}^k_{D_5, D_4} = 2\omega_4 \cdot V_{D_5, D_4} = 2\omega_4(d_4 d_5) \cdot \mu_v = 2 \cdot 11,57 \cdot 0,1 = 2,314 \frac{M}{c^2}$$

и направлено по правилу Н.Е. Жуковского, т.е. как вектор  $\vec{V}_{D_5, D_4}$  или вектор  $\vec{d}_4 d_5$  на плане скоростей, повернутый на  $90^\circ$  в сторону  $\omega_4$ , т.е. по часовой стрелке.

На плане ускорения вектор  $\vec{a}^k_{D_5, D_4}$  изобразим отрезком  $\vec{d}_4 k_5$ , который равен:

$$d_4 k_5 = \frac{a^k_{D_5, D_4}}{\mu_o} = \frac{2,314}{1} = 2,314 \text{ мм};$$

$\vec{a}_{D_5, D_4}$  – относительное ускорение точки  $D_5$  в движении относительно точки  $D_4$ , это ускорение предварительно известно только по направлению – параллельно  $DN$ ;

$\vec{a}_H = 0$  – ускорение неподвижной точки  $H$ ;

$\vec{a}^n_{D_5, H}$  – относительное, нормальное ускорение точки  $D_5$  во вращении вокруг точки  $H$ , оно направлено от точки  $D_5$  к точке  $H$  и имеет величину

$$a^n_{D_5, H} = \omega_5^2 \cdot \ell_{DN} = \omega_5^2 \cdot DN \cdot \mu_l = 11^2 \cdot 30 \cdot 0,01 = 36,3 \frac{M}{c^2}.$$

На плане ускорений вектор  $\vec{a}^n_{D_5, H}$  изобразим отрезком  $\vec{p}_5$ , который равен.

$$\pi n_3 = \frac{a^n_{D_3H}}{\mu_a} \frac{36,3}{1} = 36,3 \text{ мм}.$$

$\overline{a^r_{D_3H}}$  - относительное касательное ускорение точки  $D_3$  во вращательном движении относительно точки  $H$ , оно направлено  $\perp DH$ , величина его неизвестна.

Проведенный анализ векторных уравнений показывает, что имеется четыре неизвестных: величина и направление ускорения точки  $D_3$  -  $\overline{a_{D_3}}$  и величина относительного ускорения  $\overline{a^r_{D_3D_4}}$ . Для отыскания четырех неизвестных достаточно двух векторных уравнений. Решение осуществляем продолжением построения плана ускорений, руководствуясь векторными уравнениями и данными их анализа.

Из точки  $d_4(d_3)$  плана ускорений (рис. 1.3) в направлении, определенном по правилу Н.Е. Жуковского, откладываем вектор  $\overline{d_4k_5} = 12,54 \text{ мм}$ , изображающий кориолисово ускорение  $\overline{a^c_{D_3D_4}}$  в масштабе плана ускорений.

Через точку  $k_5$  проводим линию действия относительного ускорения  $\overline{a^r_{D_3D_4}}$  - параллельно  $DH$  на плане механизма. Получилась графическая реализация первого векторного уравнения. Аналогично графически воплощаем второе векторное уравнение. Из полюса  $\pi$  плана ускорений, параллельно звену  $DH$  в направлении от точки  $D$  к точке  $H$ , откладываем вектор  $\overline{\pi n_3} = 36,3 \text{ мм}$ , изображающий ускорение  $\overline{a^n_{D_3H}}$ .

Через точку  $n_3$  проводим  $\perp$  к  $DH$  - линию действия касательного ускорения  $\overline{a^r_{D_3H}}$ . На пересечении линий действия

относительного ускорения  $\overline{a^r_{D_3D_4}}$  и касательного ускорения  $\overline{a^r_{D_3H}}$  получим точку  $d_5$  - конец вектора  $\overline{\pi d_5}$ , изображающего величину в масштабе

$\mu_a$  и направление ускорения  $\overline{a_{D_3}}$  точки  $D_3$  механизма.

$$a_{D_3} = \pi d_5 \cdot \mu_a = 37 \cdot 1 = 37 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Точка  $d_5$  определяет векторы  $\overline{k_5 d_5}$ ,  $\overline{n_3 d_5}$ , изображающие ускорения  $\overline{a^r_{D_3D_4}}$  и  $\overline{a^r_{D_3H}}$

$$\overline{a^r_{D_3D_4}} = k_5 d_5 \cdot \mu_a = 70 \cdot 1 = 70 \frac{\text{м}}{\text{с}^2};$$

$$\overline{a^r_{D_3H}} = n_3 d_5 \cdot \mu_a = 3 \cdot 1 = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

После определения ускорения  $a_{D_3}$  «ключевой» точки  $D_3$  можно найти ускорение точки  $F$  группы II (4,5), используя свойства подобия плана ускорений и плана механизма. Длина отрезка  $\pi f$  на плане ускорений, изображающего ускорение точки  $F_1$ , определится из пропорции:

$$\frac{\pi f}{\pi d_3} = \frac{HF}{HD_3};$$

$$\pi f = \frac{HF}{HD_3} \cdot \pi d_3 = \frac{60}{30} \cdot 37 = 74 \text{ мм}.$$

Следовательно,

$$a_F = \pi f \cdot \mu_a = 74 \cdot 1 = 74 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

г) группа II – II (6,7)

Точка  $G$  этой группы является «ключевой». Ускорение точки  $G - a_G$  может быть найдено решением векторного уравнения, составленного по принципу теоремы сложения ускорений в плоском движении звена 6:

$$\overrightarrow{a_G} = \overrightarrow{a_F} + \overrightarrow{a_{GF}^n} + \overrightarrow{a_{GF}^t},$$

где  $\overrightarrow{a_G}$  - направлено  $\parallel \overrightarrow{x-x}$ , т.к. движение точки  $G$  прямолинейно;

$\overrightarrow{a_F}$  - ускорение точки  $F$ , найденное по величине и направлению в предыдущем пункте 1.5.3,в;

$\overrightarrow{a_{GF}^n}$  - относительное, нормальное ускорение точки  $G$  во вращательном движении относительно точки  $F$ , оно направлено от точки  $G$  к точке  $F$  и имеет величину:

$$a_{GF}^n = \omega_6^2 \cdot \ell_{GF} = \omega_6^2 \cdot GF \cdot \mu_t = 6,4 \cdot 50 \cdot 0,01 = 20,5 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

На плане ускорений изобразим вектор  $\overrightarrow{a_{GF}^n}$  отрезком  $\overline{fn_6}$ , который будет равен

$$fn_6 = \frac{a_{GF}^n}{\mu_a} = \frac{20,5}{1} = 20,5 \text{ мм};$$

$\overrightarrow{a_{GF}^t}$  - относительное касательное ускорение точки  $G$  во вращательном движении относительно точки  $F$ , оно направлено  $\perp GF$ , а величина его неизвестна.

Анализ векторного уравнения ускорения «ключевой» точки  $G$  группы II (6,7) указывает, что предварительно имеются две неизвестные величины ускорений  $a_G$  и  $a_{GF}^t$ . Для определения двух неизвестных достаточно одного

векторного уравнения. Решение продолжаем графическим достраиванием плана ускорений (рис. 1.5.3).

Из точки  $f$  плана ускорений параллельно звену  $GF$  в направлении от точки  $G$  к точке  $F$  откладываем вектор  $fn_6 = 20,5 \text{ мм}$ , изображающий ускорение  $\overrightarrow{a''_{GF}}$  в масштабе плана ускорений, через точку  $n_6$  проводим  $\perp$  к  $GF$  – линию действия касательного ускорения  $\overrightarrow{a^r_{GF}}$ . Через точку  $\pi$  проводим линию действия ускорения  $\overrightarrow{a_G}$  параллельно  $X-X$  направляющей ползуна 7. На пересечении линий действия касательного ускорения  $\overrightarrow{a^r_{GF}}$  и ускорения  $\overrightarrow{a_G}$  получим точку  $g$ . Вектор  $\overrightarrow{\pi g}$  плана ускорений будет изображать искомое ускорение  $\overrightarrow{a_G}$  :

$$a_G = \pi g \cdot \mu_a = 7 \cdot 1 = 7 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Вектор  $\overrightarrow{n_6 g}$  плана ускорений будет изображать касательное ускорение  $\overrightarrow{a^r_{GF}}$  ;

$$a^r_{GF} = n_6 g \cdot \mu_a = 6,9 \cdot 1 = 6,9 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

Ускорение  $a_n$  отмеченной на рис. 1.1 точки  $N$  найдется из свойств подобия плана ускорений и плана механизма. Положение точки  $n$  на плане ускорений определится из пропорции

$$\frac{f_n}{fg} = \frac{FN}{FG},$$

$$fn = \frac{FN}{FG} \cdot fg = \frac{25}{50} \cdot 72 = 36 \text{ мм}.$$

Вектор  $\overrightarrow{\pi n}$  на плане ускорений будет изображать ускорение  $a_n$  точки  $N$ :

$$a_n = \pi n \cdot \mu_a = 40 \cdot 1 = 40 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

д) определение угловых ускорений звеньев механизма

Угловое ускорение ведущего звена  $\varepsilon_1 = 0 \text{ с}^{-2}$  задано, т.е. звено 1 вращается равномерно.

Угловое ускорение звена 2 находится по касательному ускорению:

$$\varepsilon_2 = \frac{a^r_{bc}}{\ell_{AB}} = \frac{n_2 v \cdot \mu_a}{AB \cdot \mu_t} = \frac{37 \cdot 1}{50 \cdot 0,01} = 74 \text{ с}^{-2}.$$

Для определения направления углового ускорения  $\varepsilon_2$  звена 2 перенесем мысленно вектор  $\overrightarrow{n_2 v}$ , изображающий на плане ускорений вектор касательного ускорения  $\overrightarrow{a^r_{ba}}$ , к точке  $B$  механизма. В направлении этого

вектора точка  $B$  вращается относительно точки  $A$  против часовой стрелки, следовательно, направление углового ускорения  $\vec{\varepsilon}_2$  - против часовой стрелки.

Угловое ускорение звена 3 находится по касательному ускорению  $\vec{a}_{BC}^r$ :

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{BC}^r}{\ell_{BC}} = \frac{n_3 v \cdot \mu_a}{BC \cdot \mu_t} = \frac{21 \cdot 1}{30 \cdot 0,01} = 70 \text{ c}^{-2}.$$

Направлено  $\vec{\varepsilon}_3$  против часовой стрелки, т.к. вектор  $\vec{n}_3 v$ , перенесенный в точку  $B$ , поворачивает ее относительно точки  $C$  против часовой стрелки.

Угловые ускорения звеньев 4 и 5 равны, т.к. они могут поворачиваться только совместно:

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \frac{a_{DH}^r}{\ell_{DH}} = \frac{n_5 a_5 \cdot \mu_a}{DH \cdot \mu_t} = \frac{3 \cdot 1}{30 \cdot 0,01} = 10 \text{ c}^{-2}.$$

Направление  $\vec{\varepsilon}_4 = \vec{\varepsilon}_5$  - по часовой стрелке (вектор  $\vec{n}_5 a_5$ , перенесенный в точку  $D$ , поворачивает ее относительно точки  $H$  по часовой стрелке).

Угловое ускорение звена 6 находится по касательному ускорению  $\vec{a}_{GF}^r$ :

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{GF}^r}{\ell_{GF}} = \frac{n_6 g \cdot \mu_a}{GF \cdot \mu_t} = \frac{69 \cdot 1}{50 \cdot 0,01} = 138 \text{ c}^{-2}.$$

Направлено  $\vec{\varepsilon}_6$  против часовой стрелки (вектор  $\vec{n}_6 g$ , перенесенный в точку  $G$ , поворачивает ее относительно точки  $F$  против часовой стрелки).

Угловое ускорение  $\vec{\varepsilon}_7 = 0$ , т.к. звено 7 движется поступательно.

$\mu^2 = 0,01 \text{ м/мм}$   
 $\omega_1 = 10 \text{ с}^{-1}$

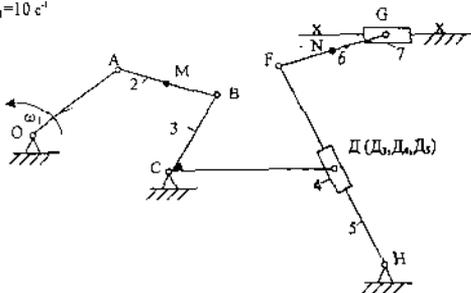


Рис. 1.1. Схема рычажного механизма

$\mu_v = 0,01 \frac{\text{м/с}}{\text{мм}}$

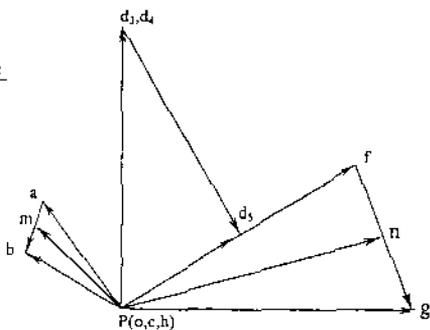


Рис. 1.2. План скоростей механизма

$\mu_a = 1 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$

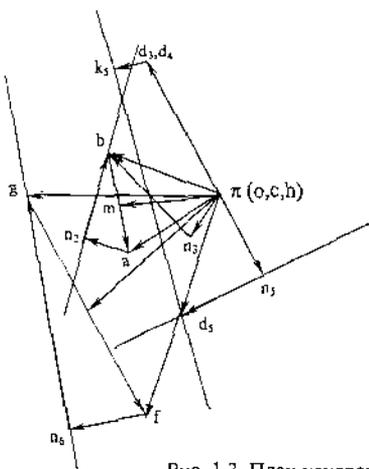
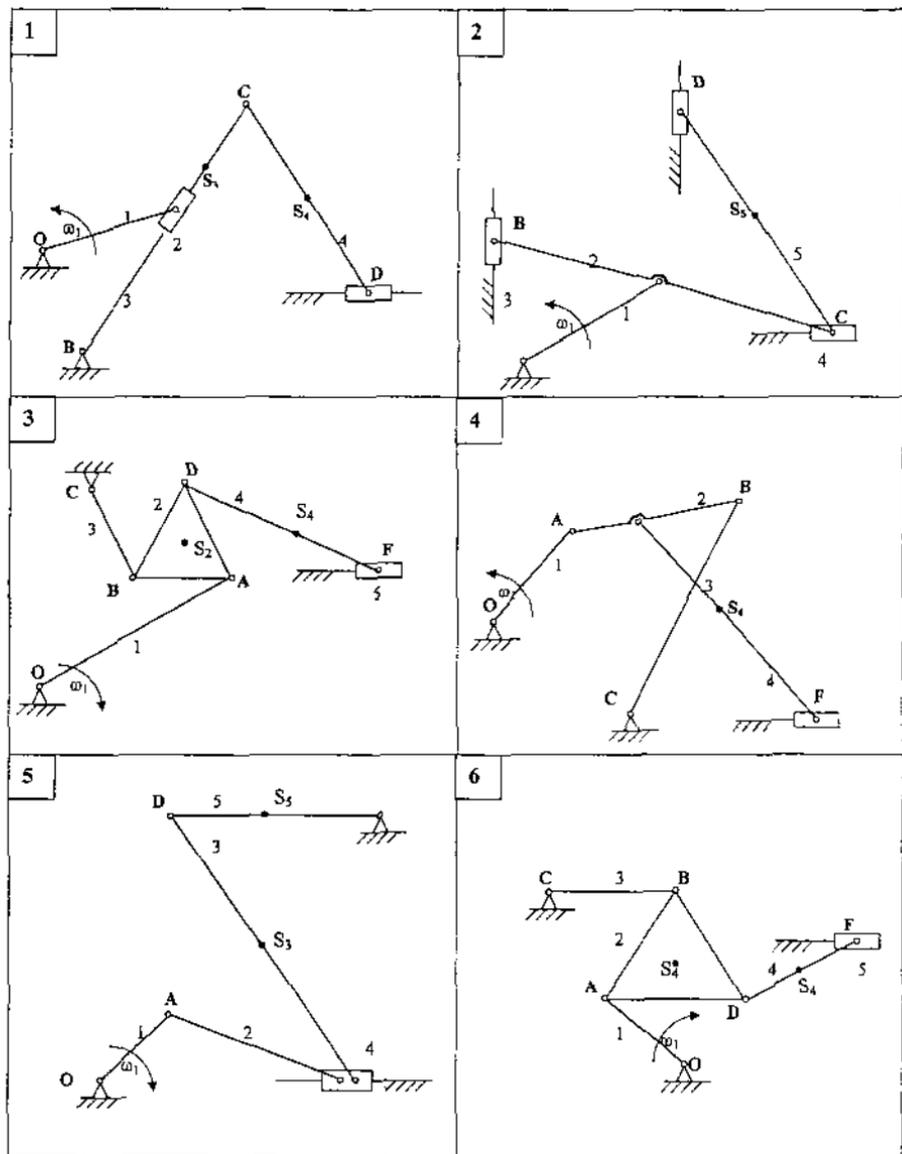
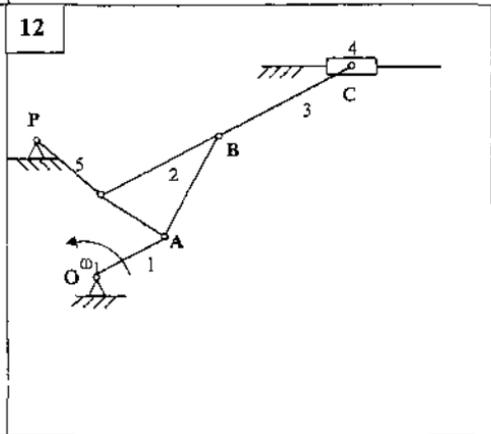
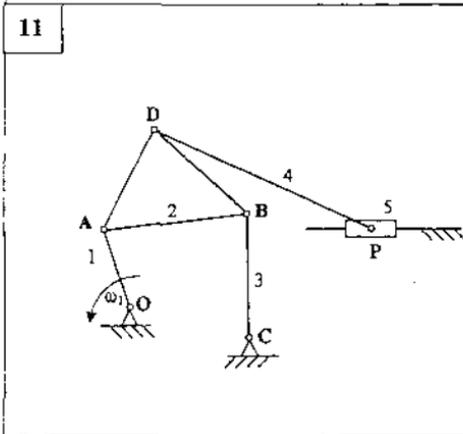
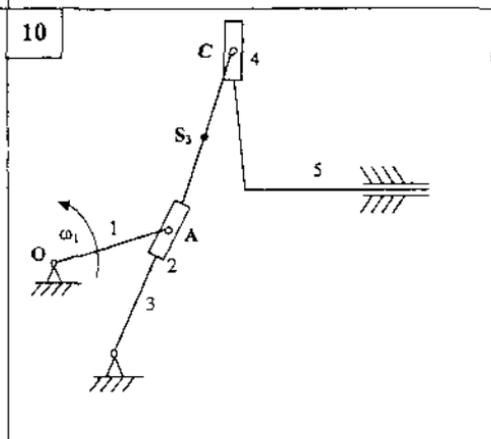
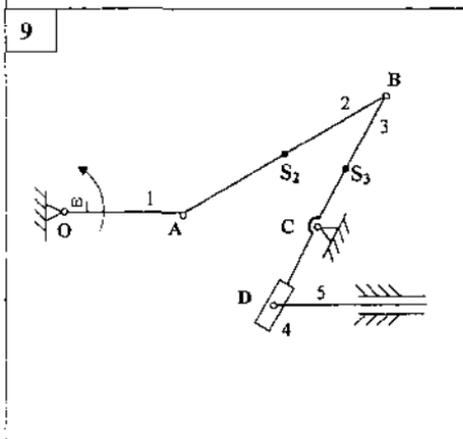
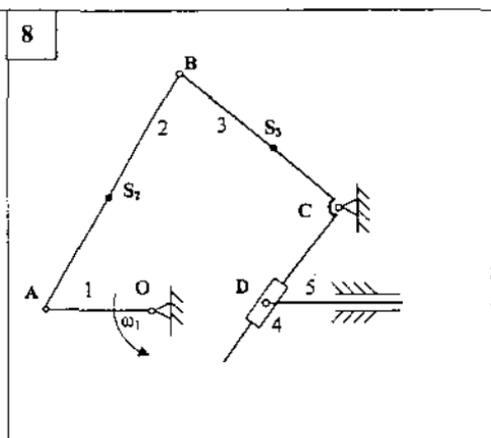
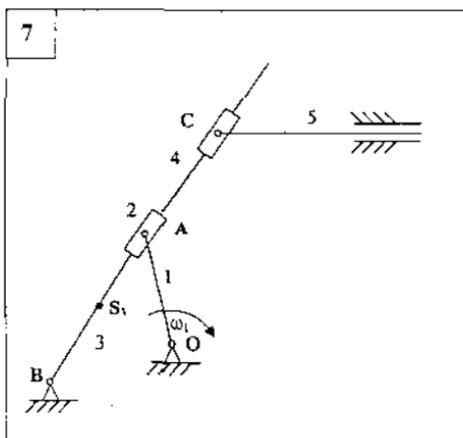


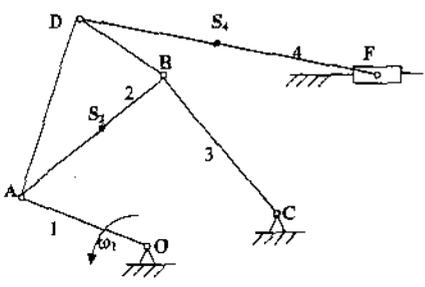
Рис. 1.3. План ускорений механизма

1.6. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ  
ПО КИНЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ УГЛОВЫХ РЫЧАЖНЫХ  
МЕХАНИЗМОВ

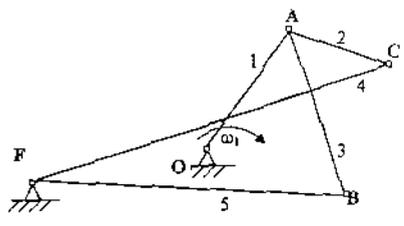




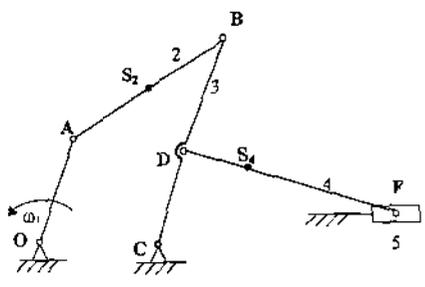
13



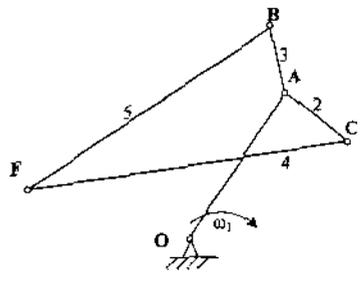
14



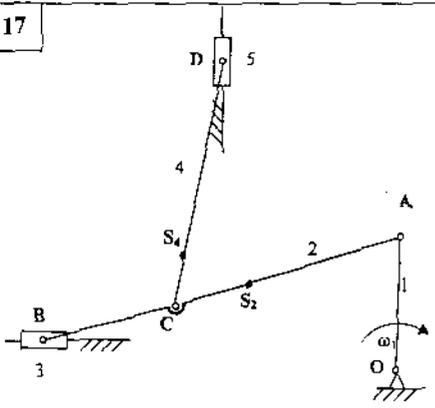
15



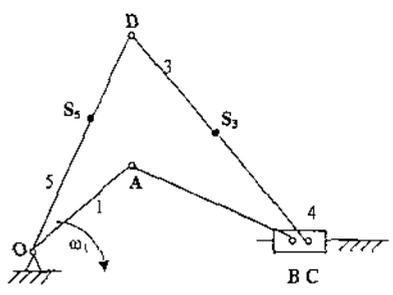
16



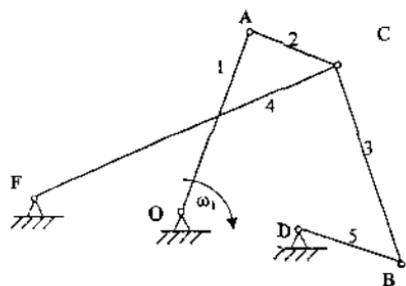
17



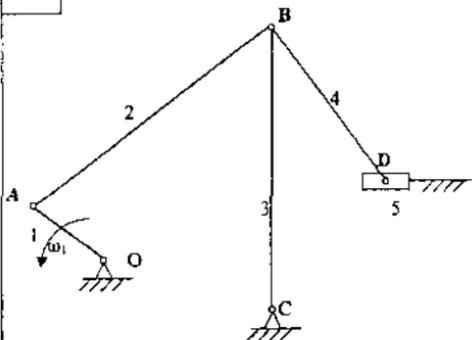
18



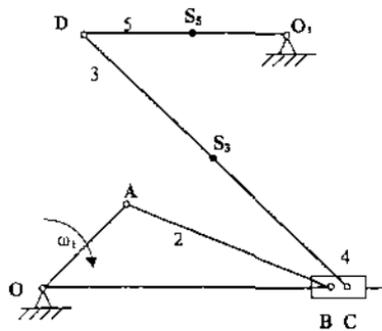
19



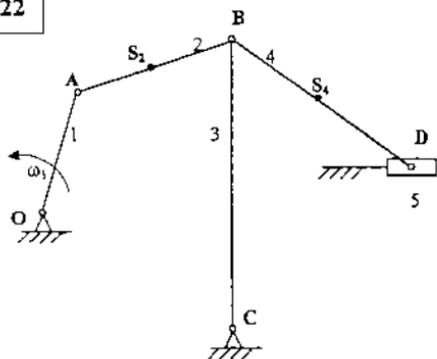
20



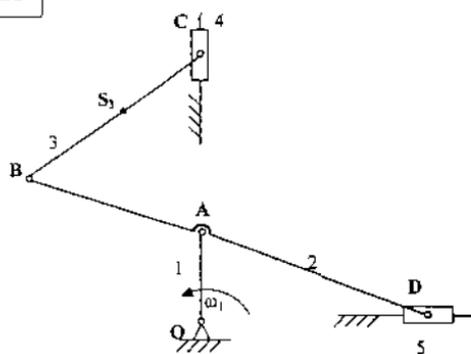
21



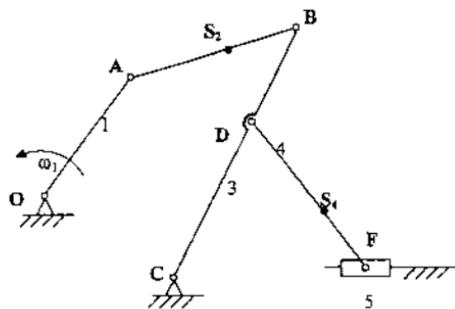
22



23



24



## 2. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

### 2.1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Цель работы - научить студентов определять передаточные отношения многозвенных механизмов.

### 2.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Передачным отношением пары зубчатых колес называется отношение их угловых скоростей:

$$U_{12} = \pm \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{n_1}{n_2},$$

или передаточное отношение равно обратному отношению чисел зубьев этих зубчатых колес:

$$U_{12} = \pm \frac{z_2}{z_1}.$$

Простейший передаточный зубчатый механизм состоит из двух сопряженных зубчатых колес, вращающихся относительно стойки.

На рис. 2.1 показаны схематические изображения трехзвенных зубчатых механизмов.

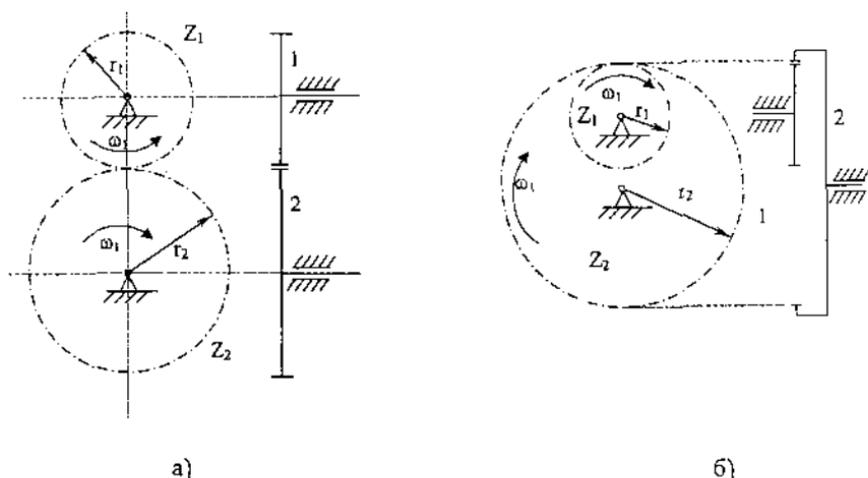


Рис. 2.1 Схематичное изображение зубчатых колес:  
а) внешнее зацепление; б) внутреннее зацепление

а) внешнее зацепление 
$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.1)$$

б) внутреннее зацепление 
$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{r_2}{r_1}, \quad (2.2)$$

где  $U_{12}$  - передаточное отношение от первого колеса ко второму;

$\omega_1$  - скорость входного колеса;

$\omega_2$  - угловая скорость выходного звена;

$r_1$  и  $r_2$  - радиусы начальных окружностей;

$z_1$  и  $z_2$  - числа зубьев колес.

При одинаковом направлении угловых скоростей (внутреннее зацепление) передаточное отношение положительно, при разных (внешнее зацепление) - отрицательное.

## 2.3. ВИДЫ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ МЕХАНИЗМОВ С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСЯМИ КОЛЕС (ПРОСТЫЕ СЕРИИ)

### 2.3.1. Рядовое соединение колес

Особенностью такого соединения является то, что на всех валах находится по одному колесу (рис. 2.2).

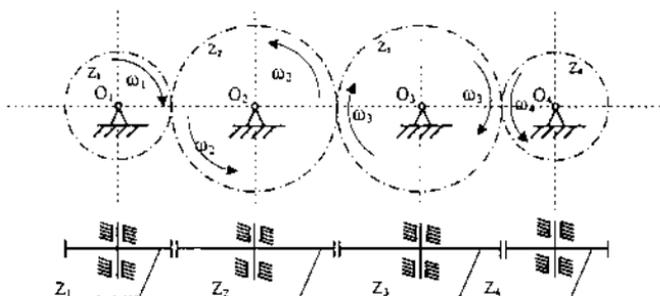


Рис. 2.2. Рядовое соединение зубчатых колес

Пользуясь выражением (1), запишем передаточное отношение соединения:

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} = \left(-\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_2}{\omega_3}\right) \cdot \left(-\frac{\omega_3}{\omega_4}\right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4},$$

или

$$U_{14} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1},$$

тогда в общем виде

$$U_{in} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1},$$

где  $k$  - число пар колес внешнего зацепления, т.е. передаточное отношение рядового соединения равно отношению угловой скорости ведущего звена к угловой скорости последнего ведомого или отношению числа зубьев последнего колеса к числу зубьев первого ведущего колеса. В нашем примере размеры колес 2 и 3 не повлияли на величину передаточного отношения (их можно назвать «паразитными»).

### 2.3.2. Последовательное соединение зубчатых колес

Особенностью такого соединения является то, что на промежуточных валах находится по два колеса (рис. 2.3).

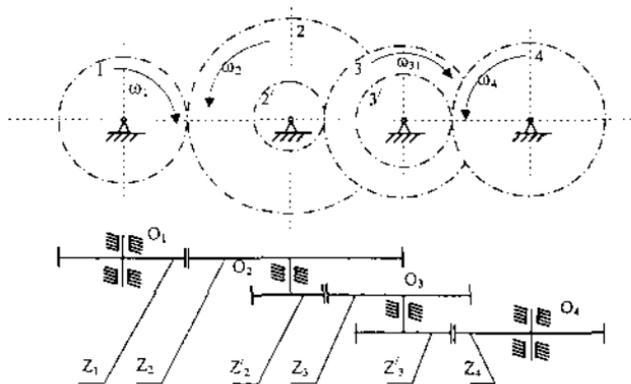


Рис. 2.3. Последовательное соединение зубчатых колес

В этой серии  $\omega_2 = \omega_2$  и  $\omega_3 = \omega_3$ , следовательно,

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} = \left( -\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) \cdot \left( -\frac{\omega_2}{\omega_3} \right) \cdot \left( -\frac{\omega_3}{\omega_4} \right) = -\frac{\omega_1}{\omega_4},$$

или

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} = \left( -\frac{z_2}{z_1} \right) \cdot \left( -\frac{z_3}{z_2} \right) \cdot \left( -\frac{z_4}{z_3} \right) = -\frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}$$

в общем виде для данной серии колес:

$$U_{in} = (-1)^k \cdot \frac{z_n}{z_1} = (-1)^k \cdot \frac{z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 \dots z_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \dots z_{n-1}}. \quad (2.3)$$

где  $k$  – число пар колес внешних зацеплений.

### 2.3.3. Планетарные зубчатые механизмы

Такие многозвенные зубчатые механизмы обязательно имеют колеса с движущимися геометрическими осями, которые называются планетарными или сателлитами. Подвижное звено, в котором помещены оси сателлитов, называется водилом. Вращающееся вокруг неподвижной оси колеса, по которому обкатываются сателлиты, называется центральным; неподвижное центральное колесо называется опорным. Как правило, планетарные механизмы изготавливаются соосными.

Планетарные механизмы подразделяются на планетарные редукторы и мультипликаторы, которые обладают одной степенью свободы и обязательно имеют опорное звено, и зубчатые дифференциальные механизмы (рис. 2.4), число степеней свободы которых два и более ( $W \geq 2$ ) и которые опорного звена обычно не имеют.

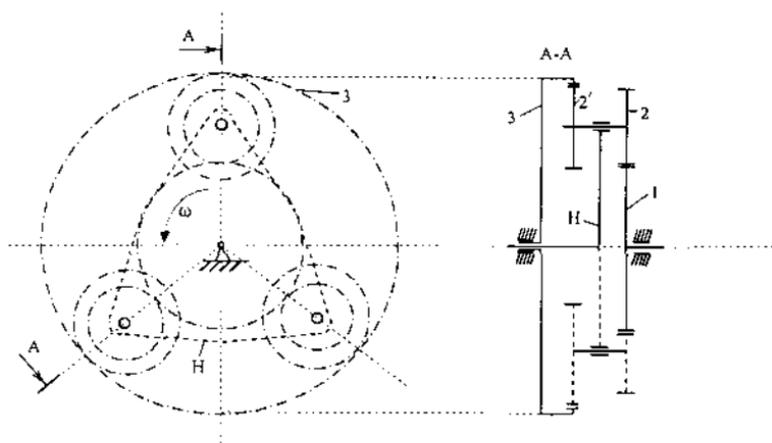


Рис. 2.4. Схема дифференциального механизма

Степень подвижности механизма определяется так:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4, \quad n=4, \quad P_{\text{вращ}}=4, \quad P_{\text{зубч}}=2.$$

$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 - 2 = 2$ . В данном механизме три сдвоенных сателлита.

Планетарным (собственно планетарным) механизмом называют зубчато-рычажный механизм, обладающий одной степенью подвижности. Одно из центральных колес закреплено (рис. 2.5).

В состав дифференциального и планетарного механизмов входят: два центральных колеса (их иногда называют солнечными, коронами и т.д.), рычаг - водило (обычно обозначаемое буквой H) и один или несколько сателлитов (одинарных или сдвоенных), оси вращения которых установлены на водиле.

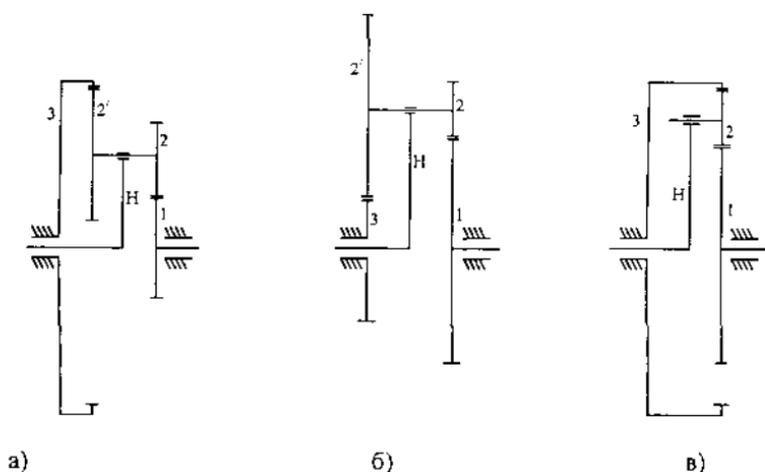


Рис. 2.5. Схема планетарных механизмов

Степень подвижности планетарного механизма определяется так:

$$W = 3n - 2P_5 - P_4, \quad n = 3, \quad P_{5\text{вращ}} = 3, \quad P_{4\text{зубч}} = 3.$$

$$W = 3n - 2P_5 - P_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 3 - 2 = 1.$$

#### 2.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ОТНОШЕНИЯ ПЛАНЕТАРНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ

Существует несколько способов определения передаточных отношений дифференциальных и планетарных механизмов. Нами будет использован аналитический метод с применением универсальной формулы Виллиса для дифференциального механизма:

$$U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H} = \frac{n_1 - n_H}{n_3 - n_H}. \quad (2.4)$$

В этой формуле слева стоит передаточное отношение обращенного механизма (если неподвижным будет водило H, - его принимают условно неподвижным) от центрального колеса 1 к центральному колесу 3. Значение этого передаточного отношения обязательно нужно указывать с его знаком (плюс или минус).

Если вместо дифференциального механизма будет планетарный, то эта формула несколько видоизменится, т.е. если  $\omega_3 = 0$ , то она примет вид:

$$U_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{n_1}{n_H} = 1 - U_{13}^H. \quad (2.5)$$

Этой формулой пользуются в том случае, если входным звеном будет центральное колесо 1, а выходным - водило Н. В правой части выражения значение  $U_{13}^H$  - передаточное отношение обращенного механизма (при неподвижном водиле «Н» и раскрепленном колесе 3 (с его знаком)).

Если же входное будет водило «Н», то формула примет вид:

$$U_{H1} = \frac{1}{U_{1H}} = \frac{\omega_H}{\omega_1} = \frac{1}{1 - U_{13}^H}. \quad (2.6)$$

Если в дифференциальном механизме с двумя степенями подвижности связать угловые скорости каких-либо двух его валов дополнительной передачей, то это уменьшит число степеней свободы на 1. Весь механизм будет обладать одной степенью подвижности и называться замкнутым дифференциальным механизмом.

## 2.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Решим задачи двумя способами: графическим (с помощью картины угловых скоростей) и аналитическим (с помощью формулы Виллиса) (рис. 2.6).

Определить  $U_{1H_2}$ , если число зубцов  $z$  всех колес задано.

**Решение.** Это сложная многоступенчатая серия, можно выделить в ней три ступени колес. I - простая передача, состоящая из колес 1 и 2; II - планетарная состоит из колес 2-3-4 и водила  $H_1$ , а III - тоже планетарная серия, из колес 5-6-7 и водила  $H_2$ . Передаточное число сложной серии равно в общем случае произведению передаточных отношений отдельных ступеней.

$$U_{1H_2} = U_{12} \cdot U_{2H_1} \cdot U_{5H_2},$$

$$\text{где } U_{12} = -\frac{z_2}{z_1}; U_{2H_1} = 1 - U_{24}^{H_1} = 1 - \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(+\frac{z_4}{z_3}\right) = 1 + \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3};$$

$$U_{5H_2} = 1 - U_{57}^{H_2} = 1 - \left(-\frac{z_6}{z_5}\right) \cdot \left(-\frac{z_7}{z_6}\right) = 1 - \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_7}{z_6}, \text{ и окончательно}$$

$$U_{1H_2} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(1 - \frac{z_6}{z_5} \cdot \frac{z_7}{z_6}\right).$$

### Пример 1

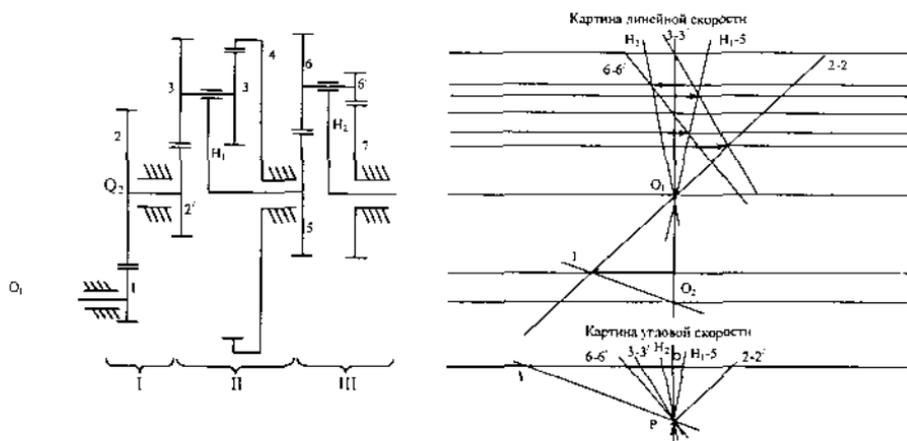


Рис. 2.6. Многоступенчатый зубчатый механизм

### Пример 2

Определить  $U_{13}$  замкнутого дифференциального механизма (рис. 2.7).

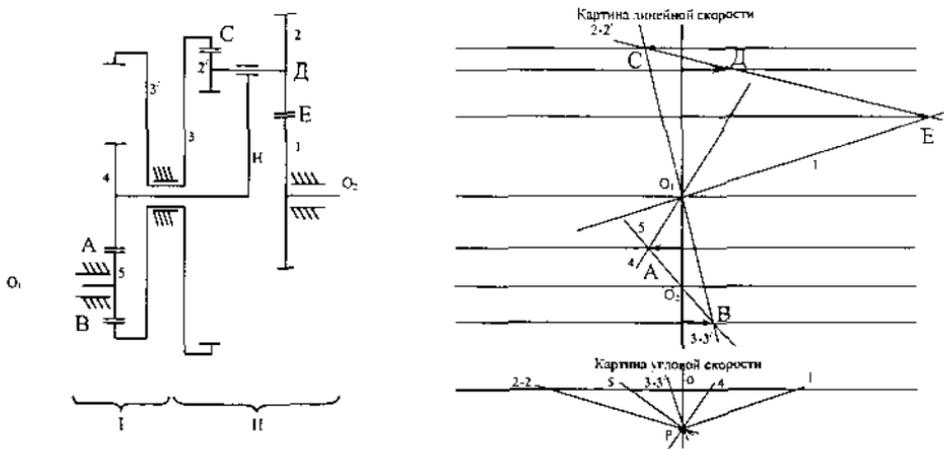


Рис. 2.7. Замкнутый дифференциальный механизм

**Решение.** Данный механизм является сложной серией колес - замкнутый дифференциальный механизм. Дифференциальная часть состоит из колес 1-2-2-

3 и водила Н, замыкающая часть - из колес 4-5-3, при этом из чертежа видно, что  $\omega_H = \omega_4$  и  $\omega_3 = \omega_3$ .

Рассмотрим дифференциальную часть и по формуле (5)  $U_{13}^H = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}$ ,

определим левую часть выражения  $U_{13}^H = U_{12} \cdot U_{23} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right)$ ,

Следовательно,  $\left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}$ .

Рассмотрим замыкающую часть и определим

$U_{43} = U_{45} \cdot U_{53} = \left(-\frac{z_5}{z_4}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_5}\right) = -\frac{z_3}{z_4}$ , т.е.  $U_{43} = -\frac{\omega_4}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4}$ , но выше

было указано  $\omega_H = \omega_4$ , а  $\omega_3 = \omega_3$ . Заменяем их и получим  $\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\omega_H}{\omega_3} = -\frac{z_3}{z_4}$ ,

или  $\omega_H = -\omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}$ .

Далее значение  $\omega_H$  подставим в правую часть уравнения

$$\left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(\frac{z_3}{z_2}\right) = \frac{\omega_1 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}}{\omega_3 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}}$$

Освободимся от знаменателя и вынесем  $\omega_3$  за скобки:

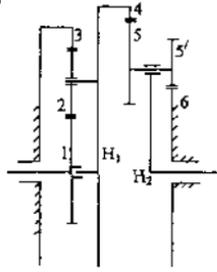
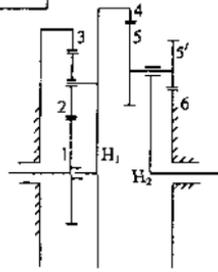
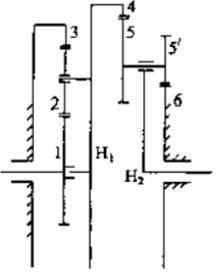
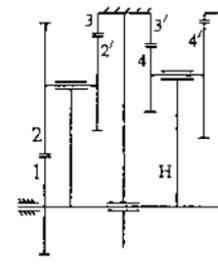
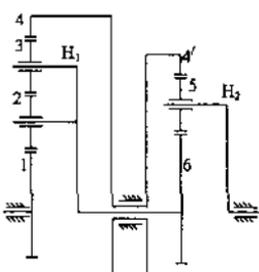
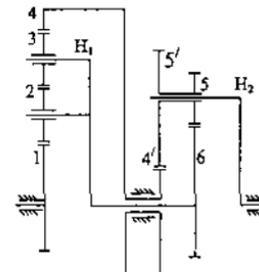
$$-\omega_3 \cdot \left(1 + \frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} = \omega_1 + \omega_3 \cdot \frac{z_3}{z_4}$$

Поделим обе части на  $\omega_1$ :

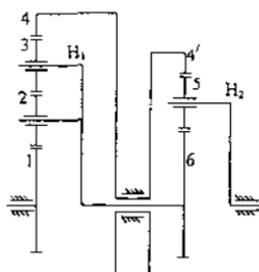
$$-\left[\left(1 + \frac{z_3}{z_4}\right) \cdot \frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_2} + \frac{z_3}{z_4}\right] = -\frac{\omega_1}{\omega_3} = U_{13}$$

Знак минус показывает, что колесо 1 и колесо 3 вращаются друг относительно друга в разные стороны.

## 2.6. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО КИНЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ МНОГОВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

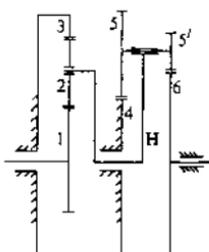
1		$Z_1=20$ $Z_2=50$ $Z_3=?$ $Z_4=?$ $Z_5=76$ $Z_5'=18$ $Z_6=82$ $U_1H_1=?$ $U_1H_2=?$
2		$Z_1=30$ $Z_2=65$ $Z_3=?$ $Z_4=182$ $Z_5=72$ $Z_5'=?$ $Z_6=80$ $U_1H_1=?$ $U_1H_2=?$
3		$Z_1=40$ $Z_2=?$ $Z_3=160$ $Z_4=180$ $Z_5=72$ $Z_5'=22$ $Z_6=?$ $U_1H_1=?$ $U_1H_2=?$
4		$Z_1=20$ $Z_2=30$ $Z_3=?$ $Z_3'=?$ $Z_4=20$ $Z_4'=30$ $Z_5=80$ $U=?$
5		$Z_1=20$ $Z_2=14$ $Z_3=16$ $Z_4=?$ $Z_4'=51$ $Z_5=?$ $Z_6=17$ $n_4=150$ $nH_2=300$ $n_1=?$ $U_1H_2=?$
6		$Z_1=20$ $Z_2=14$ $Z_3=16$ $Z_4=?$ $Z_4'=19$ $Z_5=?$ $Z_5'=30$ $Z_6=25$ $n_4=150$ $nH_1=300$ $n_1=?$ $U_1H_2=?$

7



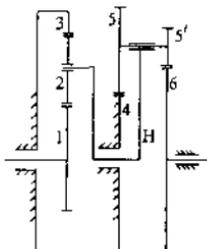
$$\begin{aligned} Z_1 &= 25 \\ Z_2 &= 13 \\ Z_3 &= 12 \\ Z_4 &=? \\ Z_4' &=? \\ Z_5 &= 15 \\ Z_6 &= 20 \\ n_4 &= 200 \\ nH_2 &= 400 \\ n_1 &=? \\ U_1 H_2 &=? \end{aligned}$$

8



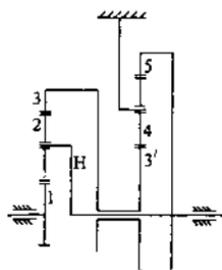
$$\begin{aligned} Z_1 &= 23 \\ Z_2 &=? \\ Z_3 &= 121 \\ Z_4 &= 28 \\ Z_5 &= 42 \\ Z_5' &=? \\ Z_6 &= 36 \\ U_{61} &=? \\ U_1 H &=? \end{aligned}$$

9



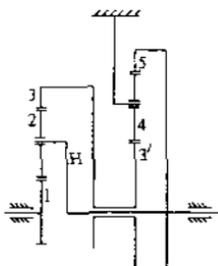
$$\begin{aligned} Z_1 &= 18 \\ Z_2 &= 61 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 38 \\ Z_5 &=? \\ Z_5' &= 28 \\ Z_6 &= 62 \\ U_{61} &=? \\ U_1 H &=? \end{aligned}$$

10



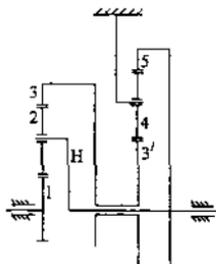
$$\begin{aligned} Z_1 &= 50 \\ Z_2 &= 25 \\ Z_3 &=? \\ Z_3' &= 30 \\ Z_4 &=? \\ Z_5 &= 110 \\ U_{15} &=? \\ U_{41} &=? \end{aligned}$$

11



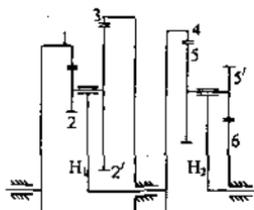
$$\begin{aligned} Z_1 &= 20 \\ Z_2 &=? \\ Z_3 &= 100 \\ Z_3' &=? \\ Z_4 &= 47 \\ Z_5 &= 120 \\ U_{15} &=? \\ U_{41} &=? \end{aligned}$$

12



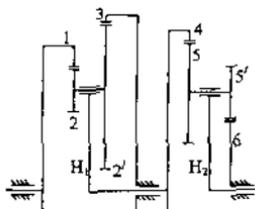
$$\begin{aligned} Z_1 &= 22 \\ Z_2 &= 38 \\ Z_3 &=? \\ Z_3' &= 30 \\ Z_4 &= 40 \\ Z_5 &=? \\ U_{15} &=? \\ U_{41} &=? \end{aligned}$$

13



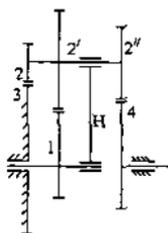
$$\begin{aligned} Z_1 &= 100 \\ Z_2 &= 20 \\ Z_2' &= 30 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 120 \\ Z_5 &= 45 \\ Z_5' &=? \\ Z_6 &= 48 \\ U_1 H_1 &=? \\ U_1 H_2 &=? \end{aligned}$$

14



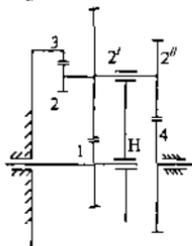
$$\begin{aligned} Z_1 &= 142 \\ Z_2 &= 22 \\ Z_2' &= 45 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 132 \\ Z_5 &= 62 \\ Z_5' &= 56 \\ Z_6 &=? \\ U_1 H_1 &=? \\ U_1 H_2 &=? \end{aligned}$$

15



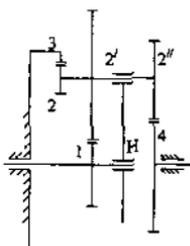
$$\begin{aligned} Z_1 &= 25 \\ Z_2 &= 18 \\ Z_2' &= 65 \\ Z_2'' &= 24 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &=? \\ U_{14} &=? \\ U_1 H &=? \end{aligned}$$

16



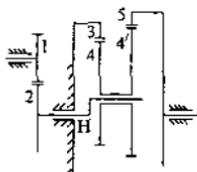
$$\begin{aligned} Z_1 &= 20 \\ Z_2 &= 18 \\ Z_2' &= 60 \\ Z_2'' &= 38 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &=? \\ U_{14} &=? \\ U_1 H &=? \end{aligned}$$

17



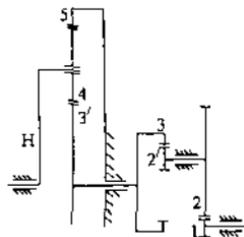
$$\begin{aligned} Z_1 &= 24 \\ Z_2 &= 17 \\ Z_2' &= 66 \\ Z_2'' &= 32 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &=? \\ U_{14} &=? \\ U_1 H &=? \end{aligned}$$

18



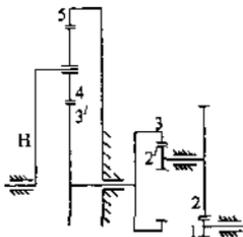
$$\begin{aligned} Z_1 &= 20 \\ Z_2 &= 42 \\ Z_3 &= 80 \\ Z_4 &= 60 \\ Z_4' &=? \\ Z_5 &= 66 \\ U_{15} &=? \\ U_{52} &=? \end{aligned}$$

19



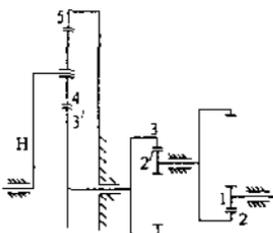
$$\begin{aligned} Z_1 &= 10 \\ Z_2 &= 46 \\ Z_2' &= 9 \\ Z_3 &= 52 \\ Z_3' &= 16 \\ Z_4 &= 22 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ UH_3 &=? \end{aligned}$$

20



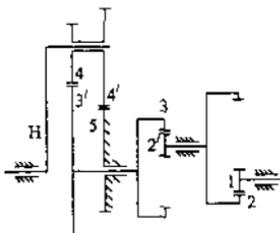
$$\begin{aligned} Z_1 &= 20 \\ Z_2 &= 48 \\ Z_2' &= 21 \\ Z_3 &= 76 \\ Z_3' &= 24 \\ Z_4 &= 53 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ UH_3 &=? \end{aligned}$$

21



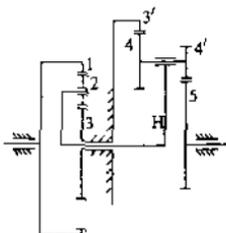
$$\begin{aligned} Z_1 &= 18 \\ Z_2 &= 52 \\ Z_2' &= 21 \\ Z_3 &= 76 \\ Z_3' &= 24 \\ Z_4 &= 53 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ UH_3 &=? \end{aligned}$$

22



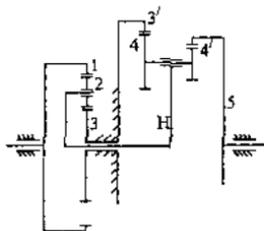
$$\begin{aligned} Z_1 &= 18 \\ Z_2 &= 52 \\ Z_2' &= 21 \\ Z_3 &= 76 \\ Z_3' &= 24 \\ Z_4 &= 53 \\ Z_4' &= 57 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ UH_3 &=? \end{aligned}$$

23



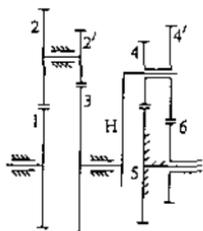
$$\begin{aligned} Z_1 &= 66 \\ Z_2 &= 18 \\ Z_3 &=? \\ Z_3' &= 72 \\ Z_4 &= 20 \\ Z_4' &= 18 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ U_{51} &=? \end{aligned}$$

24



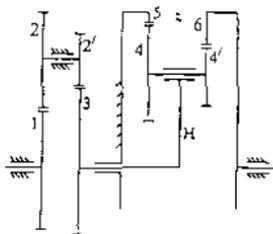
$$\begin{aligned} Z_1 &= 66 \\ Z_2 &= 18 \\ Z_3 &=? \\ Z_3' &= 72 \\ Z_4 &= 20 \\ Z_4' &= 18 \\ Z_5 &=? \\ U_1H &=? \\ U_{51} &=? \end{aligned}$$

25



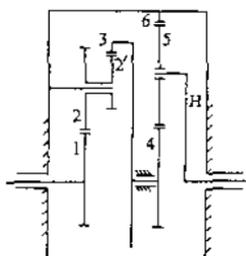
$$\begin{aligned} Z_1 &= 70 \\ Z_2 &= 60 \\ Z_2' &=? \\ Z_3 &= 100 \\ Z_4 &= 48 \\ Z_4' &=? \\ Z_5 &= 62 \\ Z_6 &= 56 \\ U &=? \end{aligned}$$

26



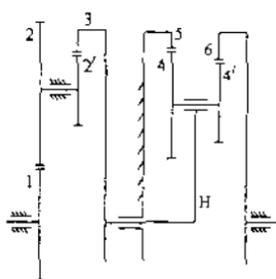
$$\begin{aligned} Z_1 &= 40 \\ Z_2 &= 30 \\ Z_2' &= 18 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 32 \\ Z_4' &= 26 \\ Z_5 &= 82 \\ Z_6 &=? \\ U_{1,6} &=? \\ U_{6,3} &=? \end{aligned}$$

27



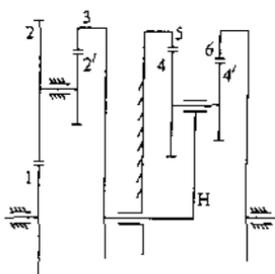
$$\begin{aligned} Z_1 &= 18 \\ Z_2 &=? \\ Z_2' &= 20 \\ Z_3 &= 70 \\ Z_4 &= 24 \\ Z_5 &= 43 \\ Z_6 &=? \\ U_{1,H} &=? \\ U_{H,2} &=? \end{aligned}$$

28



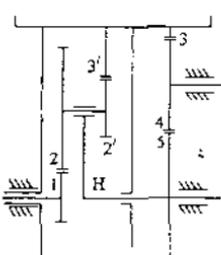
$$\begin{aligned} Z_1 &= 28 \\ Z_1' &= 35 \\ Z_2' &= 28 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 30 \\ Z_4' &=? \\ Z_5 &= 90 \\ Z_6 &= 80 \\ U_{1,5} &=? \\ U_{6,3} &=? \end{aligned}$$

29



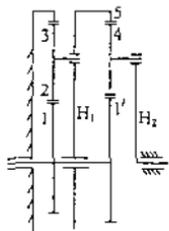
$$\begin{aligned} Z_1 &= 30 \\ Z_2 &= 30 \\ Z_2' &= 20 \\ Z_3 &=? \\ Z_4 &= 22 \\ Z_4' &=? \\ Z_5 &= 72 \\ Z_6 &= 90 \\ U_{1,6} &=? \\ U_{6,3} &=? \end{aligned}$$

30



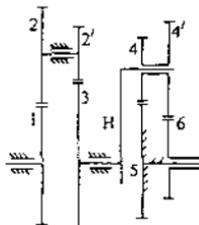
$$\begin{aligned} Z_1 &= 25 \\ Z_2 &= 33 \\ Z_2' &= 22 \\ Z_3 &= 90 \\ Z_3' &=? \\ Z_4 &=? \\ Z_5 &= 28 \\ U_{1,5} &=? \\ U_{3,H} &=? \end{aligned}$$

31



$$\begin{aligned} Z_1 &= 19 \\ Z_1' &= 23 \\ Z_2 &=? \\ Z_3 &= 83 \\ Z_4 &= 28 \\ Z_5 &=? \\ U_1 H_1 &=? \\ U_1 H_2 &=? \end{aligned}$$

32



$$\begin{aligned} Z_1 &= 80 \\ Z_2 &= 50 \\ Z_2' &= 20 \\ Z_3 &= 110 \\ Z_4 &= 44 \\ Z_4' &= 48 \\ Z_5 &= 66 \\ Z_6 &=? \\ U &=? \\ K & \end{aligned}$$

## Список литературы

1. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1988. - 640 с.
2. Артоболевский И.И., Эдельштейн Б.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. – М.: Наука, 1973. – 256 с.
3. Закабунин В.И. Теория механизмов и машин. Структура и анализ механизмов. - Барнаул: Изд-во АлтГТУ, 2004. – 411с.
4. Теория механизмов и механика машин: Учеб. для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов и др. ; Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высшая шк., 1998. – 496 с.

Сорокина Ирина Алексеевна  
Кутумов Алексей Анатольевич

## КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ РЫЧАЖНЫХ И ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Методические указания по курсу «Теория механизмов и машин»  
для студентов машиностроительных специальностей

Редактор Е.Ф. Изотова  
Подготовка оригинала–макета О.В. Щекотихина

Подписано к печати 27.02.06. Формат 60х84 1/16.  
Усл. печ. л. 2,43. Тираж 100 экз. Заказ № 06-474. Рег. № 19.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института.  
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.