МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Рубцовский индустриальный институт**
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

**А.С. Шевченко**

# СТРУКТУРЫ ДАННЫХ

Учебное пособие для студентов
направления 09.03.01«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2021

УДК 519.813

Шевченко А.С. Структуры данных: Методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов ИВТ всех форм обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 92 с.

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Структуры данных» содержат правила оформления работы и индивидуальные задания по основным разделам: множества, отношения, комбинаторика и графы. В каждом задании предложено 20 вариантов, сопровождающихся решением подобных примеров.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01«Информатика и вычислительная техника».

.

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.
Протокол № 9 от 18.03.2021 г.

Рецензент: канд. физ. – мат. наук, доцент Дудник В.Г.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ ........ 4
ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ ........ 5
ТЕМА 1: МНОЖЕСТВА ........ 6
**Справочный материал** ........ 6
**Задания** ........ 12
ТЕМА 2: ОТНОШЕНИЯ ........ 33
**Справочный материал** ........ 33
**Задания** ........ 39
ТЕМА 3: КОМБИНАТОРИКА ........ 49
**Справочный материал** ........ 49
**Задания** ........ 52
ТЕМА 4: ГРАФЫ ........ 73
**Справочный материал** ........ 73
**Задания** ........ 88
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ........ 92

# ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания предназначены для изложения требований к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Структуры данных» студентов очной формы обучения направления подготовки 09.03.01«Информатика и вычислительная техника».

Расчетно-графическая работа – это один из видов самостоятельной работы студентов в вузе, направленный на выявление уровня усвоения учебного материала по определенной теме, конкретной учебной дисциплине за определенный период обучения.

Основные цели расчетно-графической работы:

– систематизация, закрепление теоретических и практических знаний студентов по дисциплине;
– развитие навыков самостоятельной работы и овладение методикой исследования при решении конкретных научных и практических задач;
– развитие аналитического мышления и творческого подхода;
– применение системного подхода для решения поставленных задач.

Критериями оценки студента являются:

– уровень освоения студентом учебного материала (качество знаний);
– умение использовать теоретические знания в решении практических задач;
– аргументированность, полнота и логичность изложения решения заданий;
– обоснованность и четкость изложения решения заданий;
– оформление расчетно-графической работы в соответствии с требованиями.

# ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

При выполнении расчетно-графической работы необходимо придерживаться указанных ниже правил. Работы, выполненные без соблюдения этих правил, не зачитываются и возвращаются студенту для переработки.

1. Расчетно-графическая работа должна быть выполнена в отдельной тетради в клетку чернилами любого цвета, кроме красного. Необходимо оставлять поля шириной 1-2 см для замечаний преподавателя.

2. В заголовке работы на обложке тетради должны быть ясно написаны фамилия студента, его инициалы, номер группы, вариант контрольной работы – последняя цифра в зачетке, название дисциплины.

3. Решения задач надо располагать в порядке возрастания их номеров, указанных в заданиях, сохраняя номера заданий.

4. Перед решением каждого задания надо полностью выписать ее условие.

5. Решение задач должно содержать развернутые расчеты, объяснение полученных показателей, формулы, применяемые для решения задач. Формулы при этом приводятся в той записи, которая дана в учебнике или в лекционном курсе.

6. Расчетно-графическую работу студент обязан представить на кафедру не позднее установленного срока. Если в работе сделаны замечания преподавателем, студент обязан учесть их и внести необходимые исправления и дополнения.

# ТЕМА 1: МНОЖЕСТВА

## Справочный материал

**Множество** – некоторая, вполне определенная совокупность объектов или элементов.

Объекты, образующее множество, называют **элементами множества.**

Множества будем обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \ldots$, а элементы множества строчными буквами: $a, b, c, \ldots$

**Определение 1.1.** Если $a$ есть один из объектов множества $A$, мы говорим, что $a$ есть элемент $A$, или $a$ принадлежит $A$. Принадлежность элемента $a$ множеству $A$ записывается как $a \in A$. Если $a$ не является элементом $A$, это записывается как $a \notin A$.

Элементы множества в математике принято заключать в фигурные скобки. Таким образом, совокупность $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ является множеством и оно неотличимо от множества $\{1, 3, 5, 2, 4, 6\}$, поскольку порядок элементов не играет роли.

**Множество может быть представлено в виде:**

1. Путем прямого перечисления его элементов, например $A= \{a, b, c, d, e, f\}$.

2. При помощи специально сформулированного правила, или свойства, общего для всех его элементов, которое обозначается $A=\{x: P(x)\}$ или $A=\{x \mid P(x)\}$ (множество $A$ состоит из элементов $x$ таких, что $x$ обладает свойством $P$).

**Например,** $B=\{x : x$ – футболист, играющий за Юго-западный колледж$\}$ – множество, состоящее из всех футбольных игроков, выступающих за Юго-западный колледж; $D=\{x: x=2n,\ n \in N\}$ или $D=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots\}$ – множество всех натуральных четных чисел.

В математике особую роль играют множества, элементами которых являются числа. Такие множества называются **числовыми**. Некоторые числовые множества имеют специальные обозначения, вводимые для удобства пользования:

1. **Натуральные числа** – числа, использующиеся для счета предметов или указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов. Множество всех **натуральных чисел** бесконечно и обозначается $\mathbf{N}=\{1,2,3,4,\ldots\}$.

2. Множество **целых чисел** $\mathbf{Z}=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$.

3. Множество **рациональных чисел** $\mathbf{Q}=\left\{x:\ x=\dfrac{m}{n},\ m\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N}\right\}$. Например $\dfrac{12}{7},\ -\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{5}$. Целые числа входят в состав рациональных. Выражение $\dfrac{m}{n}$ называют также *обыкновенной дробью*.

4. **Иррациональное число** – это число, которое представимо в виде десятичной непериодической дроби. $\sqrt{2}=1{,}4142135....,\ \pi=3{,}14159265...$

5. Множество **действительных чисел R** – это множество рациональных и иррациональных чисел.

6. **C** – множество комплексных чисел.

**Определение 1.2**. Множество *A* называется **подмножеством** множества *B* (обозначается $A\subseteq B$), если все элементы множества *A* принадлежат *B*: $A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x\left(x\in A\Rightarrow x\in B\right)$.

Другими словами, это означает справедливость следующего утверждения: для любого элемента *x*, если $x\in A$, то $x\in B$. Если $A\subseteq B$, то будем говорить, что множество *A* содержится в *B*, или имеет место включения множества *A в B.*

**Например,** $\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}$, но $\{1,2,5\}\not\subseteq\{1,2,3,4\}$.

**Определение 1.3**. Два множества *A* и *B* называются **равными или совпадающими**, если они состоят из одних и тех же элементов или если $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$ (обозначается *A* = *B*).

**Определение 1.4**. Если $A\subseteq B$ и $A\neq B$, то *A* называют **строгим (собственным) подмножеством** *B* (обозначается $A\subset B$).

**Определение 1.5. Пустое множество**, обозначаемое $\varnothing$ или $\{\}$, это множество, которое не содержит элементов. **Универсальное множество** или универсум ***U*** это множество, обладающее таким свойством, что все рассматриваемые множества являются его подмножествами.

**Например,** универсальным множеством может быть множество студентов факультета, и для него можно рассматривать множества студентов конкретных групп, студентов, получающих именные стипендии и т.п.

**Свойства включения:**

1. $A\subseteq A$ ;
2. Для любых множеств *A, B, C*, если $A\subseteq B$ и $B\subseteq C$, то $A\subseteq C$;
3. $\varnothing\subseteq A$для всякого множества *A*.

**Определение 1.6.** Множество, содержащее конечное число элементов, называют **конечным**.

**Определение 1.7.** Число элементов конечного множества $A$ называют мощностью и обозначают $|A|$. $|\varnothing| = 0$.

**Определение 1.8.** Совокупность всех подмножеств множества $A$ называется его **булеаном** или **множеством-степенью** и обозначается через $P(A)$ или $2^A$. Т.о. $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

**Например,** если $A = \{1,2,3\}$, то $P(A) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, A\}$.

Понятие мощности множества рассматривается и для бесконечных множеств. Бесконечности могут быть очень разными. Например, мощность множества натуральных чисел – это совсем не то же, что мощность множества вещественных чисел. Множество натуральных чисел является бесконечным, но счетным, а множество вещественных чисел имеет мощность континуум.

Рассмотрим **операции над множествами.** Чтобы наглядно представить операции, будем изображать их на диаграмме, называемой диаграммой Эйлера-Венна. Пусть прямоугольник обозначает универсальное множество, а круги внутри прямоугольника – подмножества.

**Определение 1.9. Пересечением** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов, которые принадлежат и $A$, и $B$. Пересечение множеств $A$ и $B$ обозначается $A \cap B$. Это определение равносильно следующему: $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$. Диаграмма Эйлера-Венна представлена на рисунке 1.1.

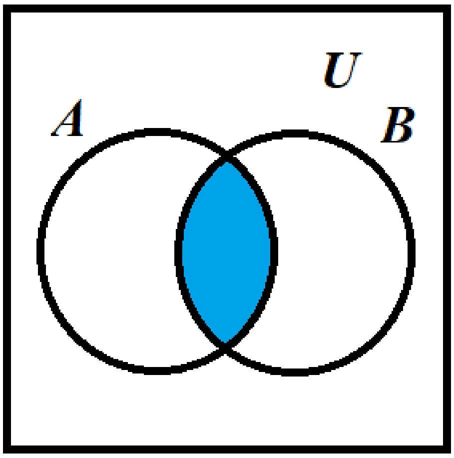



Рисунок 1.1 – Пересечение множеств $A$ и $B$

**Например**, если $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, то $A \cap B = \{1,3,5\}$.

**Определение 1.10. Объединением** множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств $A$ или $B$. Объединение множеств $A$ и $B$ обозначается

$A \cup B$.Сформулированное выше определение можно записать так: $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$. Диаграмма Эйлера-Венна представлена на рисунке 1.2.

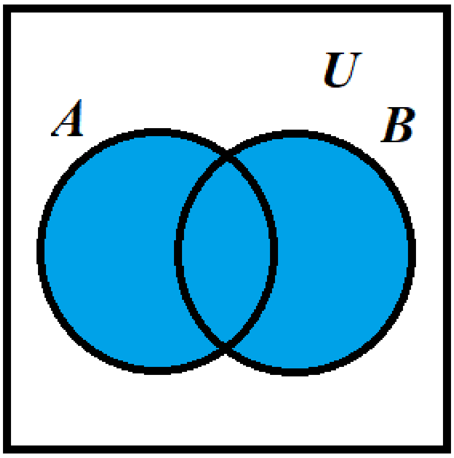



Рисунок 1.2 – Объединение множеств $A$ и $B$

**Например**, если $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, то $A \cup B = \{1,2,3,4,5,7,9\}$.

**Определение 1.11. Разностью** между множеством $A$ и множеством $B$ называется множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества $A$, которые не принадлежат множеству $B$. Математически это можно записать так**:** $A \setminus B = \{x : x \in A \text{ и } x \notin B\}$. Диаграмма Эйлера-Венна представлена на рисунке 1.3.

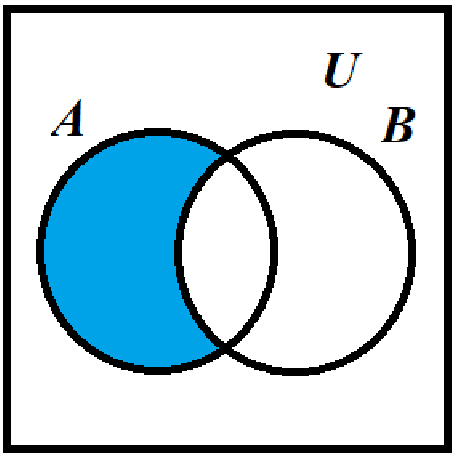



Рисунок 1.3 – Разность множеств $A$ и $B$

**Например**, если $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{1,3,5,7,9\}$, то $A \setminus B = \{2,4\}$.

**Определение 1.12. Дополнением** к множеству $A$ называется множество элементов, которые не содержатся в $A$. Обозначение $\overline{A} = U \setminus A = \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\}$. Диаграмма Эйлера-Венна представлена на рисунке 1.4.

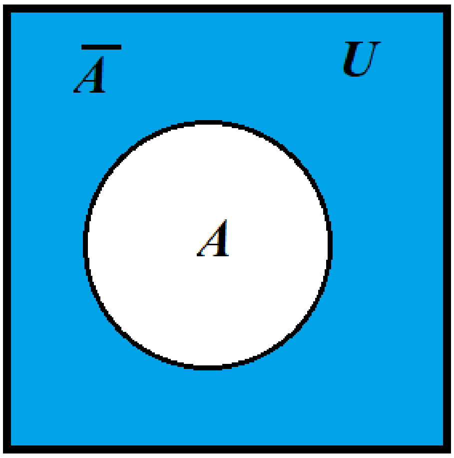


Рисунок 1.4 – Дополнение к множеству $A$

**Например**, если $U$ – множество положительных целых чисел, а $A$ = {2,4,6,8,...} – множество всех четных положительных чисел, то $\overline{A}$= {1,3,5,7,...} – множество всех нечетных положительных чисел.

**Определение 1.13.** Симметрическая разность или кольцевая сумма множеств $A$ и $B$ это множество вида $A \oplus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ или $A \oplus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B \text{ или } x \notin A \wedge x \in B\}$. Симметричная разность или кольцевая сумма множеств $A$ и $B$ состоит из тех элементов, которые принадлежат в точности одному из двух множеств $A$ или $B$. Диаграмма Эйлера-Венна представлена на рисунке 1.5.

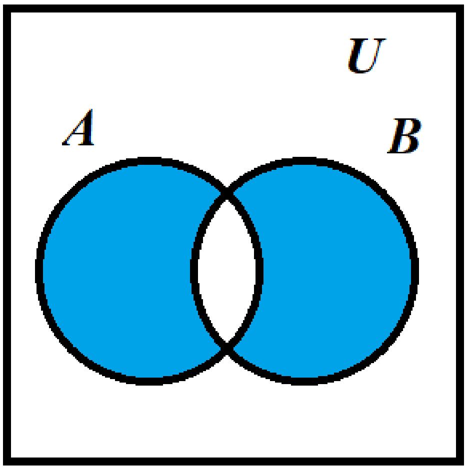


Рисунок 1.5 – Симметрическая разность множеств $A$ и $B$

Например, если $A$ = {1,2,4,6,7},а $B$ = {2,3,4, 5,6}, то $A \oplus B$={1, 3, 5, 7}.

**Формула включения и исключения** – это формула для нахождения числа элементов объединения нескольких конечных множеств.

**Утверждение 1.1.** Если $A_i$, $i = \overline{1,n}$ – некоторые множества и $|A_i|$ – мощности этих множеств соответственно, то справедливо:

$$\left|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \ldots \left|A_n\right| - \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2}\right| + \sum_{1 \le i_1 < i_2 < i_3 \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right| + \ldots +$$

$$+ \left(-1\right)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}\right| + \ldots + \left(-1\right)^{n-1} \left|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_n}\right|.$$

Пусть $n$=2, тогда $\left|A \cup B\right| = \left|A\right| + \left|B\right| - \left|A \cap B\right|$.

Пусть $n$=3, тогда
$\left|A \cup B \cup C\right| = \left|A\right| + \left|B\right| + \left|C\right| - \left|A \cap B\right| - \left|A \cap C\right| - \left|B \cap C\right| + \left|A \cap B \cap C\right|$.

Свойства операций над множествами справедливы для любых множеств, поэтому их часто называют законами. Некоторые из этих законов имеют специальные наименования:

1. Коммутативность операций
$$A \cup B = B \cup A,\ A \cap B = B \cap A.$$
2. Ассоциативность операций
$$A \cup \left(B \cup C\right) = \left(A \cup B\right) \cup C,\ A \cap \left(B \cap C\right) = \left(A \cap B\right) \cap C.$$
3. Законы дистрибутивности
$$A \cup \left(B \cap C\right) = \left(A \cup B\right) \cap \left(A \cup C\right), A \cap \left(B \cup C\right) = \left(A \cap B\right) \cup \left(A \cap C\right).$$
4. Законы идемпотентности
$$A \cup A = A,\ A \cap A = A.$$
5. Законы поглощения
$$A \cup \left(A \cap B\right) = A,\ A \cap \left(A \cup B\right) = A.$$
6. Законы де Моргана
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$
7. Законы нуля и единицы
$$A \cup \varnothing = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cup U = U, A \cap U = A,\ \overline{U} = \varnothing.$$
8. Законы дополнения
$$A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = U$$
9. Закон двойного отрицания
$$\overline{\overline{A}} = A.$$
10. Выражение для разности
$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

При доказательстве тождеств можно использовать метод эквивалентных преобразований. Этот метод заключается в последовательной подстановке известных тождеств в формулу для получения левой части равенства из правой части или наоборот.

## Задания

**Задание 1.1.** Перечислите элементы множества $A = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } 10 \le x \le 17\}$.

**Решение:** $A = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } 10 \le x \le 17\} = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.

Множества чисел по вариантам представлены в таблице 1.1

Таблица 1.1 – Множества чисел по вариантам к заданию 1.1

| № варианта | Множества чисел |
|---|---|
| 1 | $B = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } x^2 < 24\}$ |
| 2 | $C = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } 6x^2 + x - 1 = 0\}$ |
| 3 | $D = \{x:\ x \in \mathbf{R} \text{ и } x^2 - 2x + 1 = 0\}$ |
| 4 | $E = \{x:\ x - \text{целое и } x^2 < 100\}$ |
| 5 | $F = \{x:\ x - \text{положительное четное целое число, меньше чем } 21\}$ |
| 6 | $K = \{x:\ x < 12,\ x - \text{натуралное число}\}$ |
| 7 | $L = \{x:\ x = 2(n+1),\ n - \text{неотрицательное целое число и } n \le 3\}$ |
| 8 | $M = \{x:\ x = 2n,\ n - \text{натуральное число и } n < 5\}$ |
| 9 | $N = \{x:\ x = n^3 - 1,\ n - \text{натуральное число и } 6 \le n \le 10\}$ |
| 10 | $O = \{x:\ x = n^2,\ n - \text{целое число и } \lvert n \rvert \le 3\}$ |
| 11 | $P = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } x^2 < 36\}$ |
| 12 | $Q = \{x:\ x \in \mathbf{Z} \text{ и } 6x^2 - x - 1 = 0\}$ |
| 13 | $R = \{x:\ x - \text{целое и } x^4 < 121\}$ |
| 14 | $S = \{x:\ x - \text{положительное нечетное целое число, меньше чем } 36\}$ |
| 15 | $T = \{x:\ x < 21,\ x - \text{натуралное четное число}\}$ |
| 16 | $U = \{x:\ x = 2(n-1),\ n - \text{неотрицательное целое число и } n \le 5\}$ |
| 17 | $V = \{x:\ x = 3n,\ n - \text{натуральное число и } n < 6\}$ |
| 18 | $W = \{x:\ x = n^3 + 2,\ n - \text{натуральное число и } 4 \le n \le 9\}$ |
| 19 | $X = \{x:\ x = n^3,\ n - \text{целое число и } \lvert n \rvert \le 4\}$ |
| 20 | $Y = \{x:\ x = n^3 + n^2,\ n - \text{целое число и } \lvert n \rvert \le 3\}$ |

**Задание 1.2.** Опишите множество при помощи характеристического свойства: $M = \{$множество всех чисел, являющихся степенями двойки: 2, 4, 8, 16,…, не превышающих 300$\}$.

**Решение:** $M=\left\{x:\ x=2^n,\ n\in \mathbf{N}\ \mathbf{b}\ n\le 8\mathbf{b}\right\}$.

Множества чисел по вариантам представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Множества чисел по вариантам к заданию 1.2

| № варианта | Множества чисел |
|---|---|
| 1 | Множество натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20,…. |
| 2 | Множество чисел 1, 4, 9, 25, 36,…. |
| 3 | Множество чисел 3, 6, 9, 12,15, 18, 21, 24. |
| 4 | Множество четных чисел 2, 4, 6, 8,…, не превышающих 100. |
| 5 | Множество чисел –10, –8, –6, –4, –2, 0, 2, 4, 6, 8, 10. |
| 6 | Множество неотрицательных нечетных чисел 1, 3, 5, 7,…. |
| 7 | Множество чисел 1, 5, 9, 13, 17, …. |
| 8 | Множество чисел, кратных трем и по модулю не превышающих 15. |
| 9 | Множество четных отрицательных чисел –2, –4, –6, –8,…. |
| 10 | Множество чисел 1, 2, 4, 8, 16, 32,…. |
| 11 | Множество натуральных чисел, кратных шести: 6, 12, 18, 24,…. |
| 12 | Множество чисел 4, 8, 12, 16,20, 24, 28, 32. |
| 13 | Множество чисел –10, –7, –4, –1, 2, 5, 8, 11, 14. |
| 14 | Множество четных чисел 2, 4, 6, 8,…, |
| 15 | Множество чисел, кратных шести и по модулю не превышающих 100. |
| 16 | Множество чисел 1, 5, 25, 125, … |
| 17 | Множество чисел …, – 16, –12, –8, –4, 0. |
| 18 | Множество чисел целых положительных чисел, не превышающих 25. |
| 19 | Множество чисел …, –27, –9, –3, 1. |
| 20 | Множество чисел …,–7, –5, –3, –1. |

**Задание 1.3.** Эквивалентны ли следующие множества $A=\left\{x:\ x^2-8x+15=0\right\}$ и $B=\left\{2,3\right\}$.

**Решение:** Рассмотрим множество $A=\left\{x:\ x^2-8x+15=0\right\}$.

Решим квадратное уравнение $x^2-8x+15=0$.

$a=1,\ b=-8,\ c=15,$

$D=b^2-4ac=(-8)^2-4\cdot1\cdot15=64-60=4,$

$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-(-8)+\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{8+2}{2}=5,$

$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{-(-8)-\sqrt{4}}{2\cdot1}=\dfrac{8-2}{2}=3.$

Таким образом, $A=\{x:\ x^2-8x+15=0\}=\{3,5\}$.

Т.к. $\{3,5\}\neq\{2,3\}$, то множества $A=\{3,5\}$ и $B=\{2,3\}$ не являются эквивалентными.

Множества чисел по вариантам представлены в таблице 1.3.

Таблица 1.3 – Множества чисел по вариантам к заданию 1.3

| **№ варианта** | **Множества чисел** |
|---|---|
| 1 | $A=\{x:\ x^3-1=0\}$ и $B=\{x:\ x^2-3x+2=0\}$ |
| 2 | $A=\{x:\ x^2-3x+2=0\}$ и $B=\{2,3\}$ |
| 3 | $A=\{2^n,\ n=1,2...\}$ и $B=\{n^2,\ n=1,2,...\}$ |
| 4 | $A=\{y: y=3^x,\ 0<x<\infty\}$ и $B=\{y: y=3^n,\ n=1,2,...\}$ |
| 5 | $A=\{x:\ x^2-5x+6=0\}$ и $B=\{2,3\}$ |
| 6 | $A=\{x:\ x^3-8=0\}$ и $B=\{x:\ x^2-4x+4=0\}$ |
| 7 | $A=\left\{x: 2^{\frac{5x-1}{5x+2}}=4\right\}$ и $B=\{y: y^2+2y+1=0\}$ |
| 8 | $A=\{x:\ \sqrt{x^2-1}=x+1\}$ и $B=\{x:\ x^2+2x+1=0\}$ |
| 9 | $A=\{x:\ (x^2-1)\sqrt{2x-1}\ =0\}$ и $B=\{0.5;1\}$ |
| 10 | $A=\left\{x:\ \log_{\frac{1}{7}}(x+7)=-2\right\}$ и $B=\{\log_6(x+4)=\log_6(4x-2)\}$ |
| 11 | $A=\left\{x: 2^{\frac{5x-1}{5x+2}}=8\right\}$ и $B=\{y: y^2-2y+1=0\}$ |
| 12 | $A=\{x:\ \sqrt{x^2-4}=x+2\}$ и $B=\{x:\ x^2+2x+1=0\}$ |
| 13 | $A=\left\{x:\ \log_{\frac{1}{7}}(x+7)=-1\right\}$ и $B=\{\log_6(x-5)=\log_6(5x-2)\}$ |

Продолжение таблицы 1.3

| | |
|---|---|
| 14 | $A=\left\{x:\ \left(x^3-1\right)\sqrt{3x-1}\ =0\right\}$ и $B=\left\{\dfrac{1}{3};1\right\}$ |
| 15 | $A=\left\{x:\ x^3-64=0\right\}$ и $B=\left\{x:\ x^2-8x+16=0\right\}$ |
| 16 | $A=\left\{x:\ x^2-5x-6=0\right\}$ и $B=\left\{2,3\right\}$ |
| 17 | $A=\left\{x:\ \log_7\left(x+8\right)=1\right\}$ и $B=\left\{\log_6\left(2x-5\right)=\log_6\left(5x-2\right)\right\}$ |
| 18 | $A=\left\{x:\ \left(x^4-1\right)\sqrt{9x^2-1}\ =0\right\}$ и $B=\left\{\dfrac{1}{3};1;-1\right\}$ |
| 19 | $A=\left\{x:\ x^3-8=0\right\}$ и $B=\left\{x:\ x^2+3x+2=0\right\}$ |
| 20 | $A=\left\{x:4^{\frac{5x-1}{4x+2}}=4\right\}$ и $B=\left\{y:y^2-6y+9=0\right\}$ |

**Задание 1.4.** Даны множества $U=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{\ 2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{1,\ 3,\ 5\}$.

Найдите $A\setminus C$, $A\setminus\overline{B}$, $B\setminus C$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{C}\cup A$, $\overline{A}\cup B$, $B\cap\overline{A}$, $A\cup B\cup C$, $(A\cup B)\cap C$, $(A\setminus B)\cup C$, $\left(\overline{A}\setminus B\right)\cup C$, $\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\overline{C}$, $(A\cup B)\setminus\left(\overline{A}\cap C\right)$, $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$, $(C\cup A)\setminus(C\cap A)$, $(A\cup B)\cap(A\cap C)$, $\overline{A\cup B\cup C}$, $\overline{C}\cup(B\setminus A)$, $A\oplus C$, $(A\setminus B)\oplus(A\setminus C)$, $\left(\overline{A}\setminus B\right)\oplus(B\setminus A)$.

**Решение:**

1. $A\setminus C=\{1,\ 2,\ 3\}\setminus\{1,\ 3,\ 5\}=\{2\}$.
2. $\overline{B}=U\setminus B=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{2,\ 3,\ 4\}=\{1,5,6\}$,
   $A\setminus\overline{B}=\{1,\ 2,\ 3\}\setminus\{1,5,6\}=\{2,\ 3\}$.
3. $B\setminus C=\{\ 2,\ 3,\ 4\}\setminus\{1,\ 3,\ 5\}=\{2,4\}$.
4. $\overline{A\cup B}=\overline{\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}}=\overline{\{1,2,3,4\}}=U\setminus\{1,2,3,4\}=$
   $=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{1,2,3,4\}=\{5,6\}$.
5. $\overline{C}=U\setminus C=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{1,\ 3,\ 5\}=\{2,4,6\}$,
   $\overline{C}\cup A=\{2,4,6\}\cup\{1,\ 2,\ 3\}=\{1,2,3,4,6\}$.
6. $\overline{A}=U\setminus A=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{1,\ 2,\ 3\}=\{4,5,6\}$,
   $\overline{A}\cup B=\{4,5,6\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}=\{2,3,4,5,6\}$.
7. $B\cap\overline{A}=\{\ 2,\ 3,\ 4\}\cap\{4,5,6\}=\{4\}$.
8. $A\cup B\cup C=\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}\cup\{1,\ 3,\ 5\}=\{1,2,3,4,5\}$.
9. $(A\cup B)\cap C=\left(\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}\right)\cap\{1,\ 3,\ 5\}=$

$$=\{1,2,3,4\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}=\{1,3\}.$$

10. $A\setminus B=\{1,\ 2,\ 3\}\setminus\{\ 2,\ 3,\ 4\}=\{1\}$, $(A\setminus B)\cup C=\{1\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}=\{1\}$.
11. $\left(\overline{A}\setminus B\right)\cup C=\left(\{4,5,6\}\setminus\{\ 2,\ 3,\ 4\}\right)\cup\{1,\ 3,\ 5\}=$
$$=\{5,6\}\cup\{1,\ 3,\ 5\}=\{1,3,5,6\}.$$
12. $\left(\overline{A}\cup B\right)\cap\overline{C}=\left(\{4,5,6\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}\right)\cap\{2,4,6\}=$
$$=\{2,3,4,5,6\}\cap\{2,4,6\}=\{2,4,6\}.$$
13. $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3\}\cup\{\ 2,\ 3,\ 4\}=\{1,2,3,4\}$, $\overline{A}\cap C=\{4,5,6\}\cap\{1,\ 3,\ 5\}=\{5\}$,
$(A\cup B)\setminus\left(\overline{A}\cap C\right)=\{1,2,3,4\}\setminus\{5\}=\{1,2,3,4\}$.
14. $(A\setminus B)\cup(A\setminus C)=\{1\}\cup\{2\}=\{1,2\}$.
15. $C\cup A=\{1,\ 3,\ 5\}\cup\{1,\ 2,\ 3\}=\{1,2,3,5\}$,
$C\cap A=\{1,\ 3,\ 5\}\cap\{1,\ 2,\ 3\}=\{1,3\}$,
$(C\cup A)\setminus(C\cap A)=\{1,2,3,5\}\setminus\{1,3\}=\{2,5\}$.
16. $(A\cup B)\cap(A\cap C)=\{1,2,3,4\}\cap\{1,3\}=\{1,3\}$.
17. $\overline{A\cup B\cup C}=U\setminus(A\cup B\cup C)=\{1,2,3,4,5,6\}\setminus\{1,2,3,4,5\}=\{6\}$.
18. $B\setminus A=\{\ 2,\ 3,\ 4\}\setminus\{1,\ 2,\ 3\}=\{4\}$, $\overline{C}\cup(B\setminus A)=\{2,4,6\}\cup\{4\}=\{2,4,6\}$.
19. $A\oplus C=\{1,\ 2,\ 3\}\oplus\ \{1,\ 3,\ 5\}=\{2,5\}$.
20. $(A\setminus B)\oplus(A\setminus C)=\{1\}\oplus\{2\}=\{1,2\}$.
21. $\overline{A}\setminus B=\{4,5,6\}\setminus\{\ 2,\ 3,\ 4\}=\{5,6\}$,
$\left(\overline{A}\setminus B\right)\oplus(B\setminus A)=\{5,6\}\oplus\{4\}=\{4,5,6\}$.

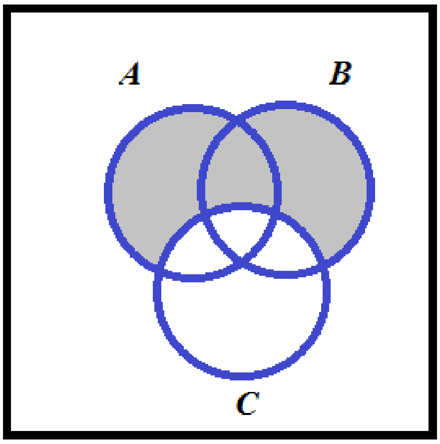
Множества по вариантам представлены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Множества по вариантам к заданию 1.4

| **№ варианта** | **Множества** |
|---|---|
| 1 | $U=\{a,b,c,d\}$, $A=\{a,c\}$, $B=\{a,b,d\}$, $C=\{b,c\}$ |
| 2 | $U=\{1,2,3,4,5,6\},A=\{1,2,3\},B=\{1,3,5,6\},C=\{4,5,6\}$ |
| 3 | $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w\}$, $A=\{p,q,r,s\}$, $B=\{r,t,v\}$,<br>$C=\{p,s,t,u\}$ |
| 4 | $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$,<br>$B=\{4,5,6,7,8,9,10\},C=\{2,4,6,8,10\}$ |
| 5 | $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6\}$,<br>$B=\{4,6,7,8,9,10\}$, $C=\{2,4,6,8,10\}$ |

| | |
|---|---|
| 6 | $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w\}$, $A=\{p,q,r,s,t\}$, $B=\{p,r,t,v\}$, $C=\{p,s,t,u,v\}$ |
| 7 | $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{3,4,5,6,7\}$, $C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ |
| 8 | $U=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$, $B=\{5,6,7,8,9\}$, $C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ |
| 9 | $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w,x\}$, $A=\{p,q,r,s,t\}$, $B=\{p,r,t,v,x\}$, $C=\{p,s,t,u,v\}$ |
| 10 | $U=\{p,q,r,s,t,u,v,w,x\}$, $A=\{p,q,r,s,t,x\}$, $B=\{p,r,t,v,x\}$, $C=\{p,s,t,u,v,x\}$ |
| 11 | $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}, A=\{1,3,5,7\}, B=\{2,4,6,8\}, C=\{1,2,5,8\}$ |
| 12 | $U=\{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$, $A=\{0,1,2,3,4,5\}$, $B=\{-4,-2,0,2,4\}$, $C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ |
| 13 | $U=\{-6,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\}$, $A=\{-6,-3,0,3\}$, $B=\{-4,-2,0,2,3\}$, $C=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ |
| 14 | $U=\{k,l,q,r,s,t,u,v,w,x\}$, $A=\{k,l,r,s,t,x\}$, $B=\{p,r,t,v,x\}$, $C=\{p,s,u,v,x\}$ |
| 15 | $U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A=\{a,c,e,g\}$, $B=\{a,b,d,f\}$, $C=\{b,c,d\}$ |
| 16 | $U=\{a,b,c,d,e,f,g,i,j\}$, $A=\{a,c,e,g,i,j\}$, $B=\{a,b,d,f,g\}$, $C=\{b,c,d,j\}$ |
| 17 | $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,2,3,4,5,6\}, B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{3,5,7,9\}$ |
| 18 | $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{1,2,5,6,9,10\}, B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{1,3,5,7,9\}$ |
| 19 | $U=\{a,b,c,d,e,f,g,m,n,o\}$, $A=\{a,c,e,g,m,n\}$, $B=\{a,b,d,f,n,o\}$, $C=\{b,c,d,f,g,o\}$ |
| 20 | $U=\{-6,-4,-2,0,1,3,5,7,9\}$, $A=\{-6,-4,0,3,7,9\}$, $B=\{-4,-2,0,3\}$, $C=\{-6,-2,0,1,3,7\}$ |

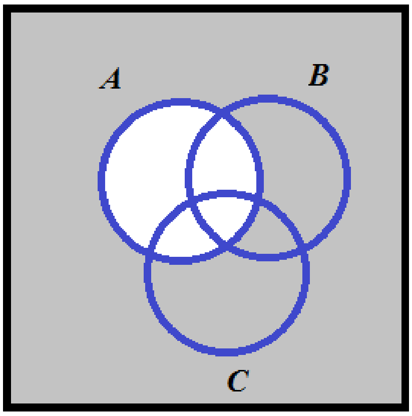
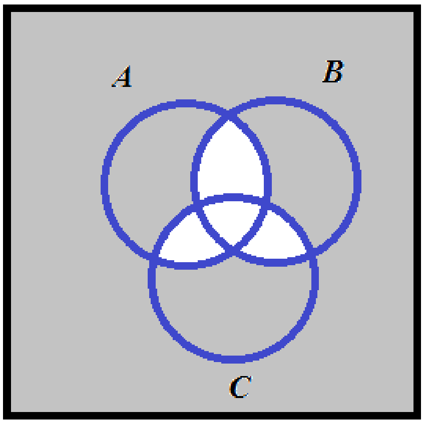
**Задание 1.5.** Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Венна:



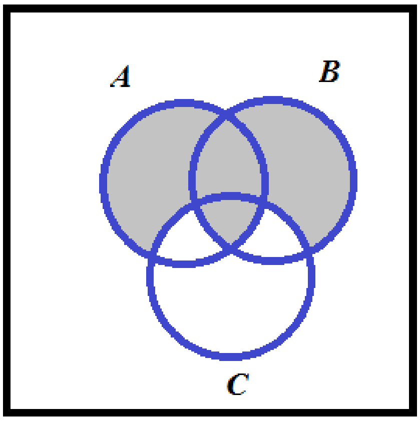
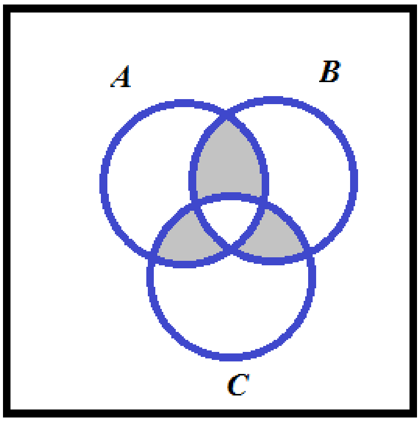
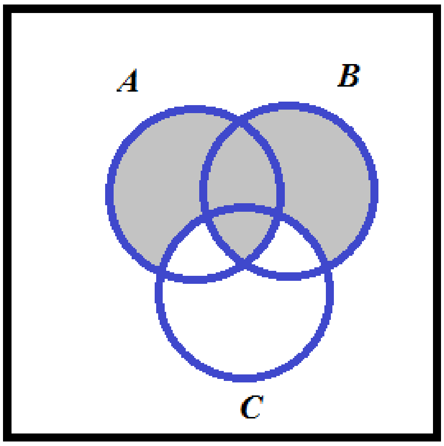
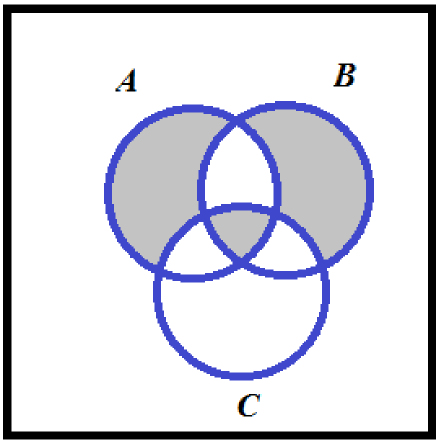

**Решение:** $(A \cup B) \setminus C$.

Диаграммы Венна к заданию 1.5 по вариантам представлены в таблице 1.5.

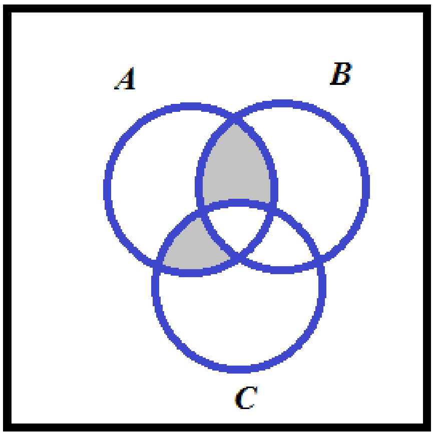
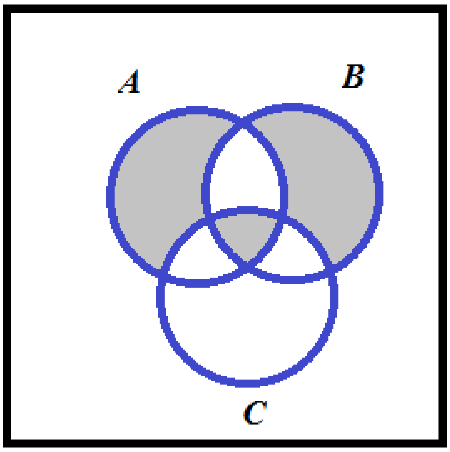
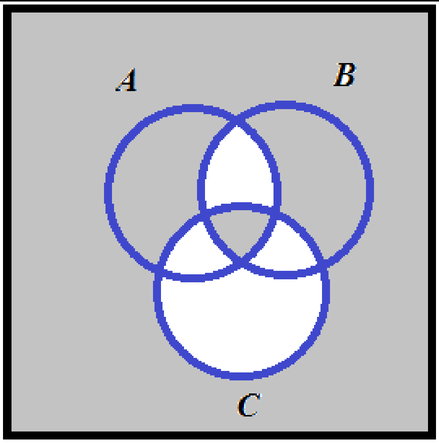
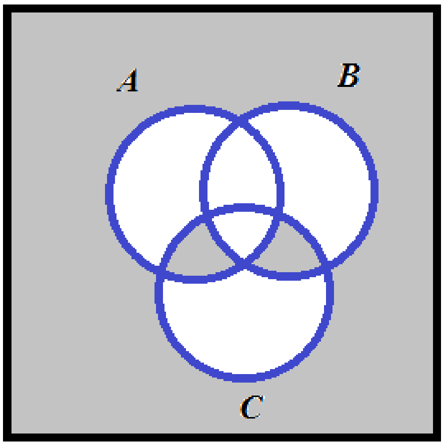
Таблица 1.5 – Диаграммы Венна по вариантам к заданию 1.5

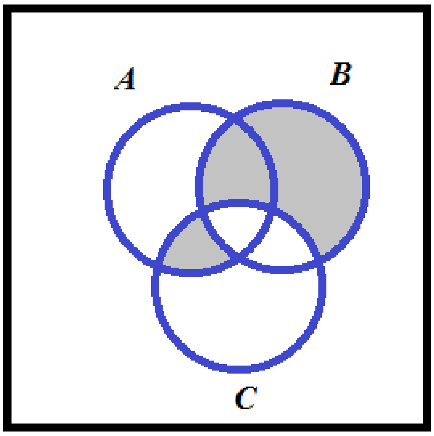
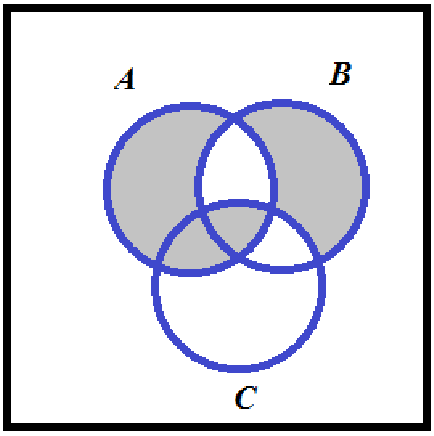
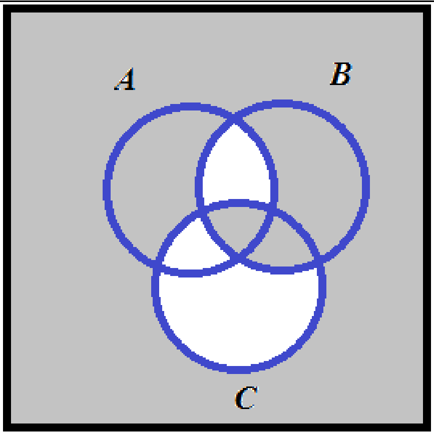
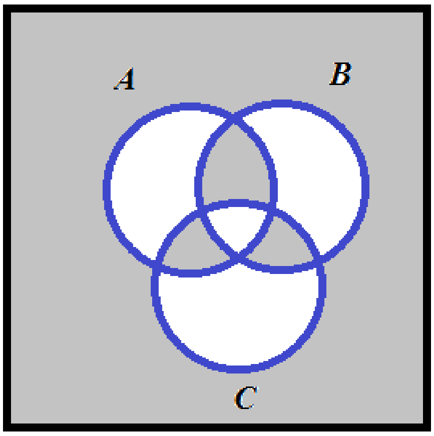
| № варианта | Диаграммы Венна |
|---|---|
| 1 |   |
| 2 |   |

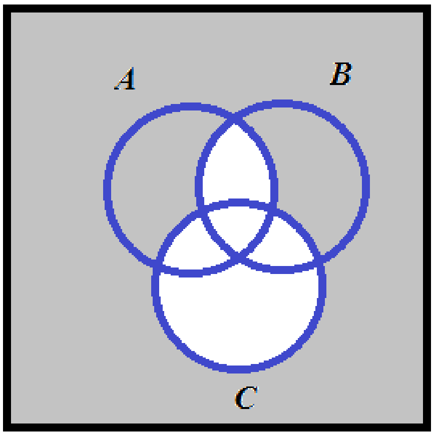
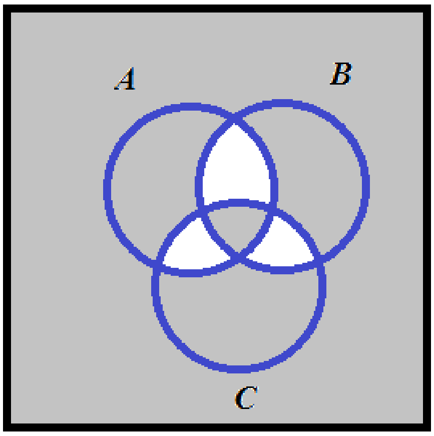
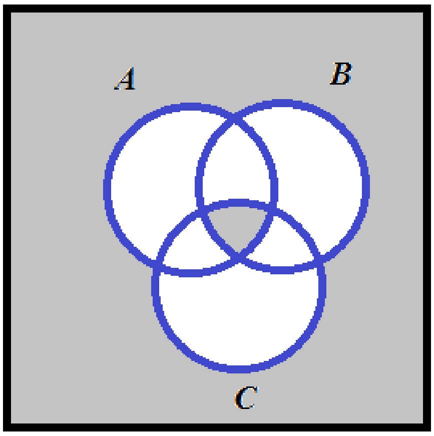
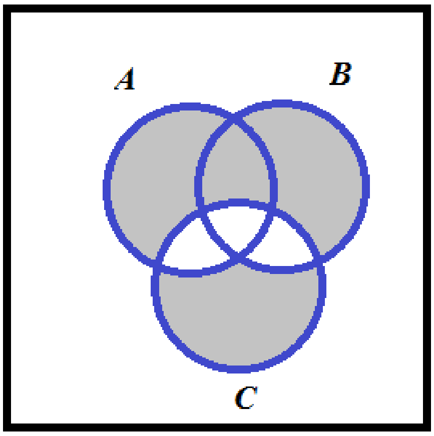
Продолжение таблицы 1.5

| | | |
|---|---|---|
| 3 | |  |
| 4 | |  |
| 5 | |  |
| 6 | |  |

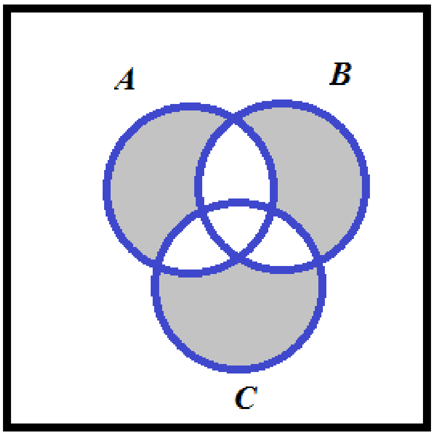
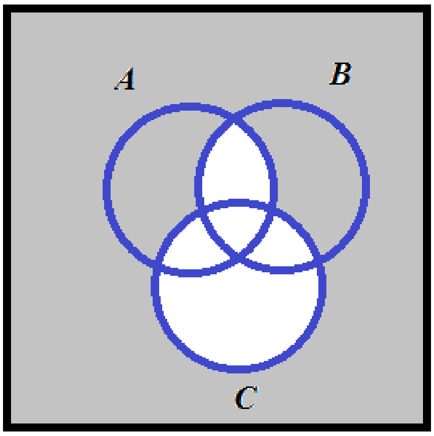
Продолжение таблицы 1.5

| | | |
|---|---|---|
| 7 | |  |
| 8 | |  |
| 9 | |  |
| 10 | |  |

| | |
|---|---|
| 11 |   |
| 12 |   |
| 13 |   |
| 14 |   |

| | | |
|---|---|---|
| 15 | |  |
| 16 | |  |
| 17 | |  |
| 18 | |  |

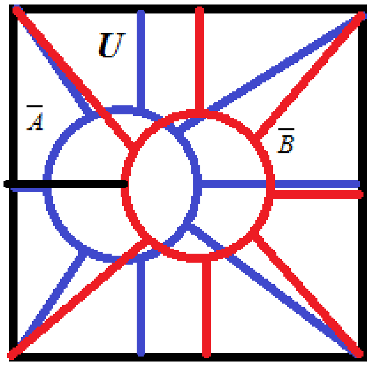
Продолжение таблицы 1.5

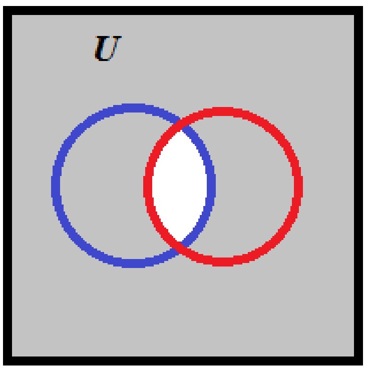
| | | |
|---|---|---|
| 19 | |   |
| 20 | |   |

**Задание 1.6.** Для каждого из приведенных ниже множеств используйте диаграммы Венна и заштрихуйте те ее части, которые изображают заданные множества: $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cap(B\cup C)$.

**Решение:**

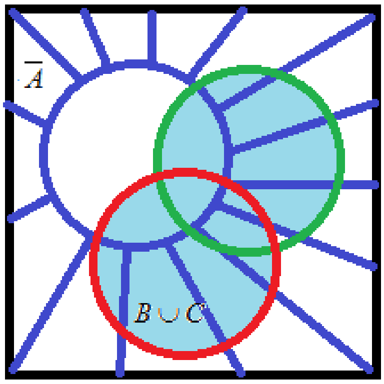
$a)\,\overline{A}\cup\overline{B}$

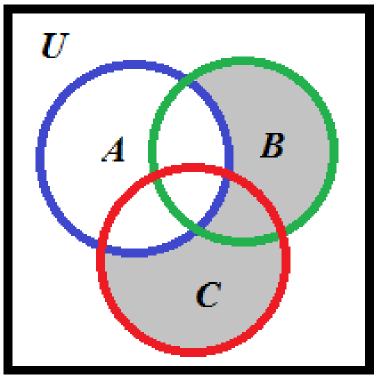



$\overline{A}\cup\overline{B}$

б) $\overline{A}\cap(B\cup C)$




$\overline{A}\cap(B\cup C)$

Множества к заданию 1.6 по вариантам представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Множества по вариантам к заданию 1.6

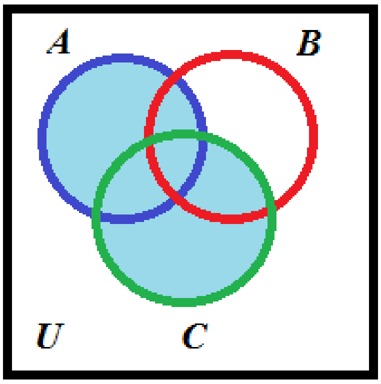
| № варианта | Множества |
|---|---|
| 1 | $\overline{A\cap B},\ A\cap(B\cup C)$ |
| 2 | $(\overline{A}\cup\overline{B})\setminus(A\cup B),\ (A\setminus B)\cap C$ |
| 3 | $(A\cup B)\setminus(A\cap B),\ (A\setminus B)\cup C$ |
| 4 | $A\setminus\overline{B},\ \overline{C}\setminus\overline{A\cup B}$ |
| 5 | $A\setminus(A\cap B),\ (\overline{A\cup B})\cup C$ |
| 6 | $\overline{A\cup B},\ B\setminus(A\cup C)$ |
| 7 | $\overline{A}\cap B,\ \overline{(A\cap B\cap C)}$ |
| 8 | $\overline{A\setminus B},\ B\setminus(\overline{A\cup C})$ |
| 9 | $A\setminus(\overline{A\cap B}),\ (A\setminus B)\cup(B\setminus C)$ |
| 10 | $\overline{A}\setminus(A\cap B),\ (A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)$ |
| 11 | $\overline{\overline{A}\cap B},\ A\cap(\overline{B\cup C})$ |
| 12 | $(\overline{A}\cup\overline{B})\setminus\overline{(A\cap B)},\ (A\setminus B)\oplus C$ |
| 13 | $(A\setminus\overline{B})\setminus(A\cap B),\ (A\setminus B)\cup\overline{C}$ |
| 14 | $\overline{A\setminus\overline{B}},\ \overline{C}\oplus\overline{A\cup B}$ |
| 15 | $A\setminus(\overline{A}\cap B),\ (\overline{A\cup B})\setminus C$ |
| 16 | $\overline{A\cup B}\setminus A,\ B\setminus(A\cup C)\setminus\overline{C}$ |
| 17 | $(\overline{A}\cap\overline{B})\oplus(A\cup B),\ \overline{(A\cap B\cap C)}$ |

| | |
|---|---|
| 18 | $\overline{A\setminus B}\cup A,\ B\setminus\left(\overline{A\cup\overline{C}}\right)$ |
| 19 | $\overline{A}\setminus\left(\overline{A\cap B}\right),\ \left(\overline{A}\setminus B\right)\cup\left(B\setminus\overline{C}\right)$ |
| 20 | |

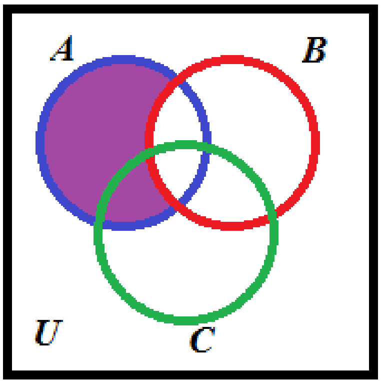
**Задание 1.7.** С помощью диаграммы Венна проверьте справедливость соотношения $(A\cup C)\setminus(A\setminus B)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$.

**Решение:**

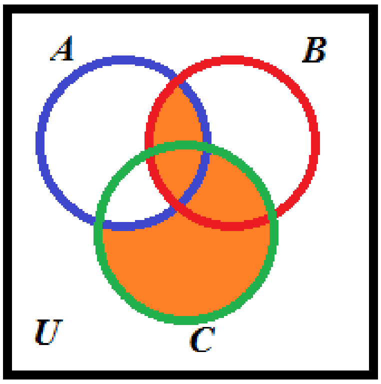
С помощью диаграммы Венна построим множество $(A\cup C)\setminus(A\setminus B)$.




$A\cup C$

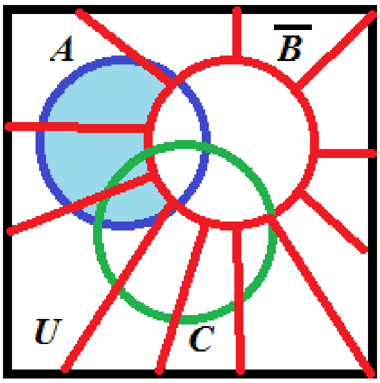



$A\setminus B$

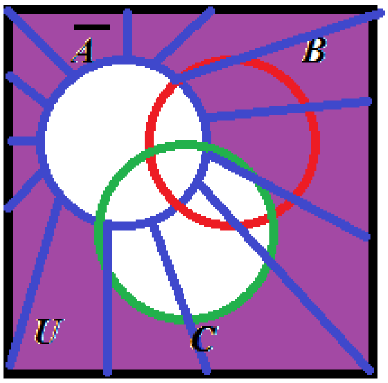



$(A\cup C)\setminus(A\setminus B)$

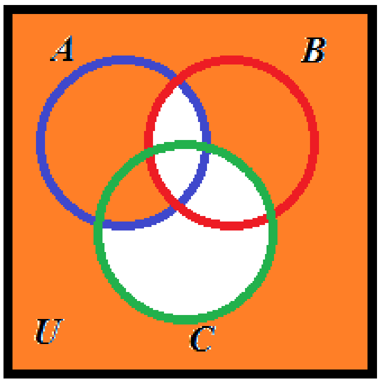
С помощью диаграммы Венна построим множество $\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$.




$A\cap\overline{B}$




$\overline{A}\setminus C$




$\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$

Тактам образом, $(A\cup C)\setminus(A\setminus B)\neq\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\setminus C\right)$.

Соотношения к заданию 1.7 по вариантам представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Соотношения по вариантам к заданию 1.7

| **№ варианта** | **Соотношения** |
|---|---|
| 1 | $(A\cup C)\setminus(A\cap B)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\right)$ |
| 2 | $\overline{C}\setminus\overline{A\cup B}=\overline{A}\setminus\overline{B\cup C}$ |
| 3 | $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$ |
| 4 | $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$ |
| 5 | $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus\left(C\cap(A\cup B)\right)$ |
| 6 | $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ |
| 7 | $C\ \setminus\ (A\cap\ B\ )=(A\setminus C)$ |
| 8 | $C\setminus\overline{A\cup B}=A\setminus\overline{B\cup C}$ |
| 9 | $A\setminus(C\cap B)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ |
| 10 | $(A\cup B)\setminus(A\cap C)=\left(A\cap\overline{C}\right)\cup\left(\overline{A}\cap C\right)$ |
| 11 | $\left(A\cup\overline{C}\right)\setminus(A\cap B)=\left(A\cap\overline{B}\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{C}\right)$ |
| 12 | $\overline{C}\setminus\overline{A\cap B}=\overline{A}\setminus\overline{B\cap C}$ |
| 13 | $A\setminus\left(\overline{B\cap C}\right)=(A\setminus B)\cap\overline{C}$ |
| 14 | $A\setminus(B\cup C)=\left(\overline{A}\setminus B\right)\cap\overline{C}$ |
| 15 | $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus\left(C\cap\left(\overline{A\cup B}\right)\right)$ |
| 16 | $\left(\overline{A\cup B}\right)\setminus C=\left(\overline{A\setminus C}\right)\cup\left(\overline{B\setminus C}\right)$ |
| 17 | $C\ \setminus\ (A\cap\ B\ )=(A\setminus C)\setminus B$ |
| 18 | $C\setminus\overline{A\cup B}\setminus B=(A\setminus C)\setminus\overline{B\cup C}$ |
| 19 | $\overline{A\setminus(C\cap B)}=(A\cup B)\cap\left(\overline{A\cup C}\right)$ |
| 20 | $(A\cup B)\setminus(A\cap C)=\left(\overline{A\cap\overline{C}}\right)\cup\left(\overline{\overline{A}\cap C}\right)$ |

**Задание 1.8.** Докажите тождество $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$, используя свойства операций.

**Решение:** Используя выражение для разности $A\setminus B=A\cap\overline{B}$ имеем:

$$(A\setminus B)\setminus C=\left(A\cap\overline{B}\right)\setminus C=\left(A\cap\overline{B}\right)\cap\overline{C}\overset{\text{ассоциативность операций}}{=}A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right).$$

Используя закон де Моргана $\overline{B}\cap\overline{C}=\overline{B\cup C}$ получаем:

$$A\cap\left(\overline{B}\cap\overline{C}\right)=A\cap\overline{B\cup C}\overset{\text{выражение для разности }A\setminus B=A\cap\overline{B}}{=}A\setminus(B\cup C).$$

Таким образом, тождество $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$ доказано.

Тождества к заданию 1.8 по вариантам представлены в таблице 1.8.

Таблица 1.8 – Тождества по вариантам к заданию 1.8

| **№ варианта** | **Тождества** |
|---|---|
| 1 | $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ |
| 2 | $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ |
| 3 | $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ |
| 4 | $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$ |
| 5 | $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$ |
| 6 | $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus(C\cap(A\cup B))$ |
| 7 | $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap\overline{C};$ |
| 8 | $A\setminus(\overline{B\cup C})=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$ |
| 9 | $(\overline{A\cup B})\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ |
| 10 | $(\overline{A\cup B})\setminus\overline{C}=(\overline{A}\setminus C)\cap(\overline{B}\setminus C)$ |
| 11 | $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$ |
| 12 | $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$ |
| 13 | $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(C\setminus A)$ |
| 14 | $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$ |
| 15 | $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(\overline{A\cup B})\cap(A\cup\overline{B})=B$ |
| 16 | $\overline{A\cup B}\cap C=C\setminus(C\cup(A\cap B))$ |
| 17 | $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap\overline{C}\cap C;$ |
| 18 | $A\setminus(\overline{B\cap C})=(A\setminus B)\cup(C\setminus A)$ |
| 19 | $(\overline{A\cup B})\setminus C=(A\setminus B)\cup(B\setminus C)$ |
| 20 | $(\overline{A\cap B})\setminus\overline{C}=(\overline{\overline{A}\setminus C})\cap(\overline{B}\setminus C)$ |

**Задание 1.9.**

**а)** Используя формулу включений-исключений, решите задачу. В группе спортсменов 30 человек. Из них 20 занимаются плаванием, 18 – легкой атлетикой и 10 – лыжами. Плаванием и легкой атлетикой занимаются 11 человек, плаванием и лыжами – 8, легкой атлетикой и лыжами – 6 человек. Сколько спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта?

**Решение:** $A$-множество спортсменов, занимающихся плаванием, $|A|$=20,

$B$-множество спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, $|B|$=18,

$C$-множество спортсменов, занимающихся лыжами, $|C|$=10,

$|A\cap B|$=11, $|A\cap C|$=8, $|B\cap C|$=6, $|A\cap B\cap C|$=?

Применим формулу включения и исключения:

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$,

30=20 + 18 + 10 – 11 – 8 – 6+$|A\cap B\cap C|$;

30 – 23=$|A\cap B\cap C|$; $|A\cap B\cap C|=7$.

**Ответ:** 7 спортсменов занимаются всеми тремя видами спорта.

**б)** Используя формулу включений-исключений, решите задачу**.** Найдите количество целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 5, и 7.

**Решение:** Пусть *A*, *B*, *C* – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 3, 5, и 7 соответственно. Тогда $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap B\cap C$ – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 15 = 3·5, 35 = 5·7, 21 =3·7 и 105 = 3·5·7 соответственно.

Тогда, используя формулу включения и исключения имеем:

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|=$$

$$=\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{5}\right]+\left[\frac{1000}{7}\right]-\left[\frac{1000}{3\cdot 5}\right]-\left[\frac{1000}{3\cdot 7}\right]-\left[\frac{1000}{5\cdot 7}\right]+\left[\frac{1000}{3\cdot 5\cdot 7}\right]=$$

=333+200+142–66–47–28+9=543.

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 5, и 7, равно 1000 – 543 = 457.

**Ответ:** 457 целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 3, 5, и 7.

Задачи к заданию 1.9 по вариантам представлены в таблице 1.9.

Таблица 1.9 – Задачи по вариантам к заданию 1.9

| **№ варианта** | **Задача** |
|---|---|
| 1 | У фирмы есть 100 предприятий, причем каждое предприятие выпускает хотя бы одну продукцию вида *A*, *B* или *C*. Продукцию всех трех видов выпускают 10 предприятий, продукцию вида *A* и *B* – 18 предприятий, продукцию вида *A* и *C* – 15 предприятий, продукцию вида *B* и *C* – 21 предприятие. Число предприятий, выпускающих продукцию вида *A*, равно числу предприятий, выпускающих продукцию вида *B*, и равно числу предприятий, выпускающих продукцию вида *C*. Найти число предприятий, выпускающих только продукцию вида *A*. |

Продолжение таблицы 1.9

| | |
|---|---|
| 2 | В студенческой группе 20 человек. Из них 10 имеют оценку «девять» по химии, 8 – по математике, 7 – по физике, 4 – по химии и по математике, 5 – по химии и по физике, 4 – по математике и по физике, 3 – по химии, по математике и по физике. Сколько студентов в группе не имеют оценок «девять»? |
| 3 | В спортивном лагере 100 человек, занимающихся плаванием, легкой атлетикой и футболом. Из них 10 занимаются и плаванием, и легкой атлетикой, и футболом, 18 – плаванием и легкой атлетикой, 15 – плаванием и футболом, 21 – легкой атлетикой и футболом. Число спортсменов, занимающихся плаванием, равно числу спортсменов, занимающихся легкой атлетикой, и равно числу спортсменов, занимающихся футболом. Найти это число. |
| 4 | Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и информатике. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по информатике, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и информатике, 2 – по математике и информатике. Сколько студентов сдали все три зачета? |
| 5 | Группе студентов предложены спецкурсы по методам оптимизации, искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 22 студента записались на спецкурс по методам оптимизации, 18 – на спецкурс по искусственному интеллекту, 10 – на спецкурс по имитационному моделированию, 8 – на спецкурсы по методам оптимизации и искусственному интеллекту, 15 – на спецкурсы по методам оптимизации и имитационному моделированию, 7 – на спецкурсы по искусственному интеллекту и имитационному моделированию. 5 студентов записались на все три спецкурса. Сколько студентов в группе? |
| 6 | Опрос группы студентов показал, что 70 % из них любят ходить в кино, 60 % – в театр, 30% – в музей. В кино и театр ходят 40 % студентов, в кино и в музей – 20 %, в театр и в музей – 10 %. Сколько студентов (в %) ходят в кино, театр и в музей? |
| 7 | В группе 20 студентов. После медицинского осмотра 14 студентов были направлены на дополнительное обследование к терапевту, 6 – к окулисту, 5 – к неврологу. К терапевту и окулисту были направлены 3 студента, к терапевту и неврологу – 3, к окулисту и неврологу – 2. Сколько студентов было направлено к терапевту, окулисту и неврологу? |

Продолжение таблицы 1.9

| | |
|---|---|
| 8 | Всем участникам автопробега не повезло. 12 из них увязли в песке – пришлось толкать машину, 8 понадобилась замена колеса, у шестерых перегрелся мотор, пятеро толкали машину и меняли колесо, четверо толкали машину и остужали мотор, трое меняли колесо и остужали мотор. Одному пришлось испытать все виды неполадок. Сколько всего было участников автопробега? |
| 9 | В студенческой группе 25 человек. Чтобы получить допуск на экзамен по данному курсу необходимо защитить курсовой проект, выполнить лабораторную работу и сдать зачет. 15 студентов защитили курсовой проект, 20 — выполнили лабораторную работу, 17 — сдали зачет. Защитили курсовой проект и выполнили лабораторную работу 12 человек. Защитили курсовой проект и сдали зачет 13 человек. Выполнили лабораторную работу и сдали зачет 16 человек. Сколько студентов допущено к экзамену? |
| 10 | При обследовании рынка спроса инспектор указал в опросном листе следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 покупают жевательную резинку «Dirol», 752 – «Orbit» , 418 – «Stimorol», 570 – «Dirol» и «Orbit», 356 – «Dirol» и «Stimorol», 348 – «Orbit» и «Stimorol», 297 – все виды жевательной резинки. Не ошибся ли инспектор? |
| 11 | Сколько целых чисел между 1 и 502 делятся на 6 или на 10? |
| 12 | Сколько целых чисел между 1 и 502 делятся на 10 или на 15? |
| 13 | Сколько целых чисел между 1 и 3002 делятся на 10, но не делятся на 40? |
| 14 | Сколько целых чисел между 1 и 3002 делятся на 10, но не делятся на 14? |
| 15 | Сколько целых чисел между 1 и 3003 делится на 3, 5 или 7? |
| 16 | Сколько целых чисел между 1 и 3003 делится на 5, 7 или 11? |
| 17 | Сколько целых чисел между 1 и 3004 делится на 4, 5 или 6? |
| 18 | Сколько целых чисел между 1 и 3004 делится на 6, 7 или 8? |
| 19 | Сколько положительных целых чисел, меньших 700, делятся на 3, 5 или 6? |
| 20 | Сколько положительных целых чисел, меньших 700, не делятся на 8? |

**Задача 1.10.** Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на $\alpha$, ни на $\beta$, ни на $\gamma$, ни на $\delta$?

**Решение:** Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 9$, $\delta = 8$. Если число делится на 8, то оно делится и на 2. Поэтому число 8 можно в условии задачи опустить.

Пусть $A$, $B$, $C$ – множества целых положительных чисел, не превосходящих 1000, делящихся нацело на 2, 5, и 9 соответственно. Тогда $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cap B \cap C$ – множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000, делящихся нацело на 10 = 2·5, 18 = 2·9, 45 =5·9 и 90 = 2·5·9 соответственно.

Тогда, используя формулу включения и исключения имеем:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| =$$

$$= \left[\frac{10000}{2}\right] + \left[\frac{10000}{5}\right] + \left[\frac{10000}{9}\right] - \left[\frac{10000}{2 \cdot 5}\right] - \left[\frac{10000}{2 \cdot 9}\right] - \left[\frac{10000}{5 \cdot 9}\right] +$$

$$+ \left[\frac{10000}{2 \cdot 5 \cdot 9}\right] = 5000+2000+1111-1000-555-222+111=6445.$$

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 2, 5, 8 и 9, равно 10000 – 6445 = 3555.

**Ответ:** 3555 целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 2, 5, 8 и 9.

Значения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ по вариантам представлены в таблице 1.10.

Таблица 1.10 – Значения $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ по вариантам к заданию 1.10

| **№ варианта** | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ | $\delta$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 8 | 7 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 3 | 7 | 9 | 5 | 3 |
| 4 | 2 | 5 | 4 | 13 |
| 5 | 3 | 4 | 5 | 8 |
| 6 | 3 | 8 | 16 | 7 |
| 7 | 11 | 7 | 9 | 3 |
| 8 | 13 | 9 | 5 | 3 |
| 9 | 5 | 8 | 9 | 4 |
| 10 | 3 | 5 | 6 | 13 |
| 11 | 5 | 10 | 3 | 7 |
| 12 | 9 | 18 | 5 | 7 |
| 13 | 11 | 3 | 12 | 5 |
| 14 | 6 | 12 | 3 | 13 |
| 15 | 15 | 3 | 7 | 11 |

Продолжение таблицы 1.10

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 16 | 7 | 14 | 3 | 5 |
| 17 | 18 | 3 | 5 | 7 |
| 18 | 4 | 5 | 10 | 7 |
| 19 | 2 | 12 | 5 | 7 |
| 20 | 6 | 2 | 11 | 13 |

## ТЕМА 2: ОТНОШЕНИЯ

## Справочный материал

### Кортежи и декартово произведение множеств

**Определение 2.1.** Упорядоченную последовательность из $n$ элементов $x_1, x_2, ..., x_n$ будем обозначать через $(x_1, x_2, ..., x_n)$ или $\langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$. Круглые или угловые скобки используются для того, чтобы указать на порядок, в котором записаны элементы. Будем называть такую последовательность ***упорядоченным набором длины n***, ***кортежем длины n*** или просто ***n-кой***. Элемент $x_i$ называется ***i-ой координатой*** кортежа $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

**Определение 2.2.** Две $n$-ки $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $\overline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ равны $(\overline{x} = \overline{y})$ тогда и только тогда, когда $x_1 = y_1, x_2 = y_2, ... x_n = y_n$.

**Например,** пары (1,2) и (2,1) не совпадают, а множества {1,2} и {2,1} равны.

Кортежи длины два называют упорядоченными парами, длины три – упорядоченными тройками, … , длины $n$ – упорядоченными $n$-ками.

**Определение 2.3.** Кортеж, не содержащий ни одной координаты, т.е. кортеж длины 0, называется **пустым**.

**Основные отличия понятий кортежа и множества следующие:**

– в множестве порядок элементов не играет роли, а кортежи, отличающиеся порядком элементов, различны, даже в случае, когда они имеют одинаковый состав;

– в множестве все элементы различны, а в кортеже координаты могут повторятся;

– элементы множества заключаются в фигурные скобки, а координаты кортежа в круглые или угловатые скобки.

**Определение 2.4. Декартовым (прямым) произведением** множеств $A_1, A_2, ..., A_n$ называется множество $\{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}$, обозначаемое $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ или $\prod_{i=1}^{n} A_i$. Если $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$, то множество $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ называется **n-ой декартовой степенью** множества $A$ и обозначается $A^n$.

По определению $A^0 = \{\varnothing\}$.

**Например,** если $A=\{1,2\}$, $B=\{3,4\}$, то $A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$, $B\times A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2)\}$, $A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

**Определение 2.5. Мощность прямого произведения множеств** $A_1,A_2,...,A_n$ равна произведению мощностей этих множеств, т.е. $|A_1\times A_2\times...\times A_n|=|A_1|\cdot|A_2|\cdot...\cdot|A_n|$.

**Бинарные отношения**

**Определение 2.6. Отношения** – один из способов задания взаимосвязей между элементами множества.

**Определение 2.7.** ***n*-местным отношением** или ***n*-местным предикатом** называется любое подмножество ***R*** прямого произведения *n* множеств: $R\subseteq A_1\times A_2\times...\times A_n$.

Другими словами элементы $x_1,x_2,...,x_n$ $\left(\text{где } x_1\in A_1, x_2\in A_2,...,x_n\in A_n\right)$ связаны соотношением *R* тогда и только тогда, когда $(x_1,x_2,...,x_n)\in R$.

**Определение 2.8. Унарные (одноместные, *n*=1) отношения** отражают наличие какого-то определенного признака *R* (свойства и т.п.) у элементов множества *A*. Тогда все такие элементы *a* из множества *A*, которые отличаются данным признаком *R*, образуют некоторое подмножество в *A*, называемое унарным отношением *R*, т.е. $a\in R$, $R\subseteq A$.

**Определение 2.9. Бинарным (двуместным, *n*=2) отношением** между элементами множеств *A* и *B* называется любое подмножество *R* множества $A\times B$, т.е. $R\subseteq A\times B$.

Если требуется указать, что $(a,b)\in R$, т.е. между элементами $a\in A$ и $b\in B$ существует отношение *R*, то пишут *aRb*. Т.о., $aRb\leftrightarrow(a,b)\in R$.

Отношение $R\subseteq A^n$ называется ***n*-местным отношением (предикатом)** на множестве *A*.

**Примеры отношений:**

1. Если *A* – множество действительных чисел, то $R=\{(x,y)\in A\times A,\ x^2+y^2=4\}$ есть бинарное отношение на *A*.

2. Пусть *A* – множество женщин, а *B* – множество мужчин, тогда $R=\{(x,y)\mid x\in A, y\in B, y \text{ является мужем } x\}$ есть отношение множеств *A* и *B*.

Бинарные отношения $R\subseteq A\times B$ иногда удобно изображать **графически**. Рассмотрим два таких представления.

**Например,** если $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3\}$, $R_1=\{(a,2),(b,1),(c,2)\}$, $R_1 \subseteq A\times B$, $R_2 \subseteq A^2$, $R_2=\{(a,b),(b,b),(c,a)\}$, то

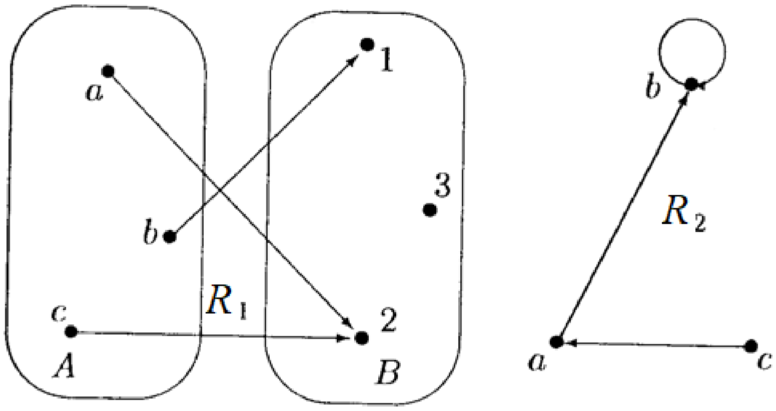



Рисунок 2.1 – Графическое изображение

**Определение 2.10. Область определения** отношения $R$ на $A$ и $B$ есть множество всех $x\in A$ таких, что для некоторых $y\in B$ имеем $(x,y)\in R$. Другими словами, область определения $R$ есть множество всех первых координат упорядоченных пар из $R$. Область определения бинарного отношения будем обозначать $\delta_R$.

**Определение 2.11. Множество значений** отношения $R$ на $A$ и $B$ есть множество всех $y\in B$ таких, что $(x,y)\in R$ для некоторого $x\in A$. Другими словами, множество значений $R$ есть множество всех вторых координат упорядоченных пар из $R$. Область значений бинарного отношения будем обозначать $\rho_R$.

**Определение 2.12. Образом** множества $X$ относительно предиката $R$ называется множество $R(X)=\{y\,|\,(x,y)\in R$ для некоторого $x\in X\}$.

**Определение 2.13. Прообразом** множества $X$ относительно предиката $R$ называется множество $R^{-1}(X)$. Другими словами, образ множества $X$ относительно предиката $R^{-1}$.

**Определение 2.14.** Для любого множества $A$ определим **тождественное отношение (диагональ)** $\mathrm{id}_A=\{(x,x)\,|\,x\in A\}$ и **универсальное отношение (полное отношение)** $U_A=A^2$.

**Например,** для отношения $R=\{(2,2),(2,4),(2,6),(2,8),(3,3),(3,6)\}$ и множества $X$=$\{3\}$ имеем $\delta_R=\{2,3\}$, $\rho_R=\{2,3,4,6,8\}$,

$R^{-1}=\{(2,2),(4,2),(6,2),(8,2),(3,3),(6,3)\}$, $R(X)=\{3,6\}$, $R^{-1}(X)=\{3\}$.

**Определение 2.15.** Пусть $R\subseteq A\times B$ есть отношение на $A\times B$. Тогда отношение $R^{-1}$ на $B\times A$ определяется следующим образом: $R^{-1}=\{(b,a):(a,b)\in R\}$.. Отношение $R^{-1}$ называется **обратным отношением** к данному отношению *R*.

**Определение 2.16. Произведением** бинарных отношений $R_1\subseteq A\times B$ и $R_2\subseteq B\times C$ или **композицией** $R_1$ и $R_2$ называется множество (рисунок 2.2):

$$R_1\circ R_2=\left\{\begin{matrix}(x,y)\mid x\in A, y\in B \text{ и найдется элемент } z\in B \text{ такой,}\\ \text{что } (x,z)\in R_1 \text{ и } (z,y)\in R_2\end{matrix}\right\}.$$

В дальнейшем произведение $R_1\circ R_2$ будем также обозначать через $R_1R_2$.

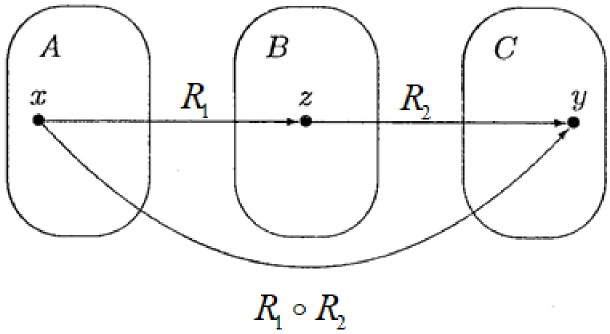



Рисунок 2.2 – Произведение или композиция бинарных отношений

Для любых бинарных отношений *P*, *Q*, *R* выполняются следующие свойства:

1. $(P^{-1})^{-1}=P$;
2. $(P\circ Q)^{-1}=Q^{-1}\circ P^{-1}$;
3. $(P\circ Q)\circ R=P\circ(Q\circ R)$ .

Бинарное отношение *R* как любое подмножество может быть представлено в виде перечисления, через указания свойства.

Но наиболее часто используется представление **матрицей**, в котором учитывается специфика множества.

Рассмотрим два конечных множества $A=\{a_1,a_2,...,a_m\}$, $B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$, бинарное отношение $R\subseteq A\times B$. Определим матрицу $[R]=(r_{ij})$ размера $m\times n$ бинарного отношения *R* по следующему правилу: $r_{ij}=\begin{cases}1, \text{ если } (a_i,b_j)\in R,\\ 0, \text{ если } (a_i,b_j)\notin R.\end{cases}$

**Свойства матриц бинарного отношения:**

1. Если $P,Q\subseteq A\times B,$ $[P]=(p_{ij}),$ $[Q]=(q_{ij}),$ то $[P\cup Q]=(p_{ij}+q_{ij}),$ $[P\cap Q]=(p_{ij}*q_{ij}),$ где сложение осуществляется по правилам 0+0=1, 1+1=1+0=0+1=1, а умножение обычным образом. Итак, $[P\cup Q]=$ $[P]$ $+[Q],$ $[P\cap Q]=[P]*[Q].$

**Например,** если $[P]=\begin{pmatrix}1\ 0\ 1\\ 0\ 1\ 1\end{pmatrix},$ $[Q]=\begin{pmatrix}0\ 1\ 1\\ 0\ 0\ 1\end{pmatrix},$ то

$$[P\cup Q]=[\mathrm{P}]+[\mathrm{Q}]=\begin{pmatrix}1\ 0\ 1\\ 0\ 1\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\ 1\ 1\\ 0\ 0\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\ 1\ 1\\ 0\ 1\ 1\end{pmatrix},$$

$$[P\cap Q]=[\mathrm{P}]*[\mathrm{Q}]=\begin{pmatrix}1\ 0\ 1\\ 0\ 1\ 1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\ 1\ 1\\ 0\ 0\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\ 0\ 1\\ 0\ 0\ 1\end{pmatrix}.$$

2. Если $P\subseteq A\times B,$ $Q\subseteq B\times C,$ то $[P\circ Q]=[P]\cdot[Q],$ где умножение матриц проводится по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов из $[P],$ $[Q]$ – по определенным в п.1 правилам.

**Например,** если $[P]=\begin{pmatrix}0\ 1\ 0\\ 1\ 1\ 0\end{pmatrix},$ $[Q]=\begin{pmatrix}0\ 1\\ 1\ 0\\ 1\ 1\end{pmatrix},$ то

$$[P\circ Q]=[P]\cdot[Q]=\begin{pmatrix}0\ 1\ 0\\ 1\ 1\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\ 1\\ 1\ 0\\ 1\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\ 0\\ 1\ 1\end{pmatrix}.$$

3. Матрица обратного отношения $P^{-1}$ равна транспонированной матрице отношения *P*: $\left[P^{-1}\right]=[P]^{\mathrm{T}}$

4. Если $P\subseteq Q,$ $[P]=(p_{ij}),$ $[Q]=(q_{ij}),$ то $p_{ij}\le q_{ij}.$

5. Матрица тождественного отношения $\mathrm{id}_{\mathrm{A}}$ единична: $\mathrm{id}_{\mathrm{A}}=\begin{pmatrix}1\ 0\cdots 0\\ 0\ 1\cdots 0\\ \ddots\\ 0\ 0\cdots 1\end{pmatrix}.$

**Специальные бинарные отношения:**

Пусть *P* – бинарное отношение на множестве *A*: $P\subseteq A^2.$

1. Отношение Р называется **рефлексивным**, если $(x,x)\in P$ для всех $x\in A,$ т.е. $\mathrm{id}_{\mathrm{A}}\subseteq P,$ $[P]=\begin{pmatrix}1 & & *\\ & 1 & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1\end{pmatrix}.$

2. Отношение $P$ называется **симметричным**, если для любых $x, y \in A,$ из $(x, y) \in P$ следует $(y, x) \in P$, т.е. $P^{-1} = P,$ или $[P]^{\mathrm{T}} = [P].$

3. Отношение $P$ называется **антисимметричным**, если из $(x, y) \in P$ и $(y, x) \in P$ следует, что $x$=$y$, т.е. $P \cap P^{-1} \subseteq \mathrm{id}_A$. На языке матриц это означает, что в матрице $\left[P \cap P^{-1}\right] = [P] * [P]^{\mathrm{T}}$ все элементы вне главной диагонали являются нулевыми.

4. Отношение $P$ называется **транзитивным**, если из $(x, y) \in P$ и $(y, z) \in P$ следует $(x, z) \in P$, т.е. $P \circ P \subseteq P.$

**Определение 2.17.** Бинарное отношение называется **отношением эквивалентности**, если оно одновременно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Эквивалентность часто обозначают символом $E$ и $\sim$ (тильда): $xEy$, $x \sim y$.

Два элемента связаны отношением эквивалентности, если они имеют одинаковое свойство из множества альтернативных свойств.

## Задания

**Задание 2.1.** Пусть $A=\{a,b,c\}$, $B=\{1,2,3,4\}$, $P_1 \subseteq A\times B$, $P_2 \subseteq B^2$.

1. Изобразите $P_1$ и $P_2$ графически.

2. Найдите $\left[\left(P_1 \circ P_2\right)^{-1}\right]$.

3. Проверьте с помощью матрицы $\left[P_2\right]$, является ли отношение $P_2$ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

4. Найдите область определения и множество значений отношений $P_1$, $P_2$.

**Решение:**

Пусть

$A=\{a,b,c\}, B=\{1,2,3\}, P_1 \subseteq A\times B,\ P_2 \subseteq A^2,$

$P_1=\{(a,2),(b,1),(c,2)\}, P_2=\{(1,2),(2,2),(2,3),(1,3)\}.$

1. $P_1$ и $P_2$ изображены на рисунке 2.3.

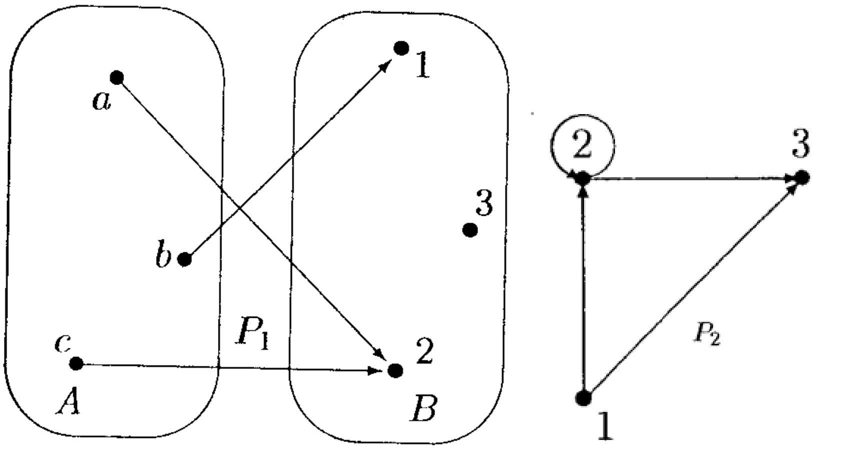



Рисунок 2.3 – Графическое изображение $P_1$ и $P_2$

2. Составим матрицы отношений $P_1$ и $P_2$:

$$\left[P_1\right]=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\ \left[P_2\right]=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Вычислим $\left[\left(P_1 \circ P_2\right)^{-1}\right]$:

$$\left[P_1 \circ P_2\right]=\left[P_1\right]\cdot\left[P_2\right]\overset{\text{матричное умножение}}{=}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

$$\left[\left(P_1 \circ P_2\right)^{-1}\right]=\left[P_1 \circ P_2\right]^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{T}\overset{\text{транспонируем матрицу}}{=}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

3. Проверим с помощью матрицы $[P_2]$, является ли отношение $P_2$ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

Т.к. в матрице $[P_2]$ на главной диагонали имеются нулевые элементы, отношение $P_2$ *не рефлексивно.*

Несимметричность матрицы $[P_2]$, означает, что отношение $P_2$ *не симметрично*.

Для проверки антисимметричности вычислим матрицу $\left[P_2 \cap P_2^{-1}\right]=[P_2]*[P_2]^{\mathrm{T}}$.

Имеем, $[P_2]*[P_2]^{\mathrm{T}} \overset{\text{поэлементное умножение}}{=} \begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix}$.

Поскольку в полученной матрице все элементы, стоящие вне главной диагонали, нулевые, то отношение $P_2$ *антисимметрично*.

Т.к. $[P_2 \circ P_2]=[P_2]\cdot[P_2]=\begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1 \\ 0\,1\,1 \\ 0\,0\,0 \end{pmatrix} = [P_2]$, то $P_2 \circ P_2 \subseteq P_2$, т.е. $P_2$ является *транзитивным* отношением.

4. Найдем область определения и множество значений отношений $P_1$, $P_2$.

Область определения для $P_1$: $\delta_R=\{a,b,c\}$.

Множество значений для $P_1$: $\rho_R=\{1,2\}$.

Область определения для $P_2$: $\delta_R=\{1,2\}$.

Множество значений для $P_1$: $\rho_R=\{2,3\}$.

Отношения $P_1$, $P_2$ по вариантам представлены в таблице 2.1

Таблица 2.1 – Отношения $P_1, P_2$ по вариантам к заданию 2.1

| **№ варианта** | Отношения $P_1, P_2$. |
|---|---|
| **1** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(4,4)\}$. |
| **2** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$. |
| **3** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,3)\}$. |

Продолжение таблицы 2.1

| | |
|---|---|
| **4** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,4),(c,2),(c,3)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$. |
| **5** | $P_1=\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,3),(c,1),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,4),(2,1),(3,4),(4,3),(4,1)\}$. |
| **6** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(2,4),(2,1),(3,3),(4,2),(4,1)\}$. |
| **7** | $P_1=\{(a,1),(b,3),(b,1),(b,4),(c,2),(c,3)\}$,<br>$P_2=\{(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$. |
| **8** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(b,4),(c,1),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,2),(1,3),(2,3),(3,2),(3,4),(4,1)\}$. |
| **9** | $P_1=\{(a,3),(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$. |
| **10** | $P_1=\{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,3),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(4,2)\}$. |
| **11** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(b,1)(b,3),(c,2),(c,3),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(4,4)\}$. |
| **12** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(b,3),(c,2)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,4),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$. |
| **13** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4),(c,1),(c,2),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,3),(4,4)\}$. |
| **14** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(b,2),(b,1),(b,4),(c,1),(c,2),(c,3)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,4),(3,3),(4,3),(4,4)\}$. |
| **15** | $P_1=\{(a,1),(a,4),(b,2),(b,4),(c,1),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(1,4),(2,1),(2,3),(2,4),(3,4),(4,3),(4,1)\}$. |
| **16** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,1),(b,4),(c,3)\}$,<br>$P_2=\{(1,1),(2,2),(2,4),(2,1),(3,3),(4,2),(4,1),(4,4)\}$. |
| **17** | $P_1=\{(a,1),(b,3),(b,1),(b,2),(b,3),(b,4),(c,2),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,3),(1,4),(2,2),(3,3),(4,3),(4,4)\}$. |
| **18** | $P_1=\{(a,1),(a,2),(a,4),(b,3),(b,4),(c,1),(c,4)\}$,<br>$P_2=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(3,1),(3,2),(3,4),(4,1),(4,3)\}$. |

Продолжение таблицы 2.1

| | |
|---|---|
| **19** | $P_1 = \{(a,3),(a,2),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$,<br>$P_2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,4)\}$. |
| **20** | $P_1 = \{(a,2),(a,4),(b,3),(c,1),(c,2),(c,4)\}$,<br>$P_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,3),(4,2)\}$. |

**Задание 2.2.** Является ли отношение $P = \{(x,y) \mid x,y \in R,\ x-y<1\}$ рефлексивным, симметричным, антисимметричным, транзитивным?

**Решение:**

Т.к. $x-x=0<1$ для любого $x \in R$ отношение *P рефлексивно*.

Поскольку, $(2,4) \in P$ $(2-4<1)$, а $(4,2) \notin P$ $(4-2>1)$, то отношение *P не симметрично*.

Заметим, что если $x-y<1$ и $y-x<1$, то $x = y$, т.к. из $x \neq y$ следует $|x-y| \geq 1$. Т.о., отношение *P антисимметрично.*

Предположим теперь, что $(x,y) \in P$ и $(y,z) \in P$, т.е. $x-y<1$ и $y-z<1$. Имеем $x<y$ и $y<z$, тогда $x<z$ и значит, $x-z<1$, т.е. $(x,z) \in P$. Следовательно, отношение *P транзитивно*.

Отношение $P$ по вариантам представлено в таблице 2.2

Таблица 2.2 – Отношение $P$ по вариантам к заданию 2.2

| **№ варианта** | **Отношение** $P$ |
|---|---|
| 1 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2+y^2=1$ |
| 2 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x \cdot y > 1$ |
| 3 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow y = \lvert x \rvert$ |
| 4 | $P \subseteq \mathbf{Z}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow 2x = 3y$ |
| 5 | $P \subseteq \mathbf{Z}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x = -y$ |
| 6 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x + y = -2$ |
| 7 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2+y^2=4$ |
| 8 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow y < x-1$ |
| 9 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2 = y$ |
| 10 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2 \geq y$ |
| 11 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 4$ |
| 12 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow \lvert y \rvert = \lvert x \rvert$ |
| 13 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y \rangle \in P \Leftrightarrow y \leq \lvert x \rvert$ |

| | |
|---|---|
| 14 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow \lvert y\rvert \le \lvert x\rvert$ |
| 15 | $P \subseteq \mathbf{Z}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x+1=y$ |
| 16 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2+y^2=9$ |
| 17 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x^2+y^2\ge 1$ |
| 18 | $P \subseteq \mathrm{R}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x\cdot y>4$ |
| 19 | $P \subseteq \mathbf{Z}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow x+1=-y$ |
| 20 | $P \subseteq \mathbf{Z}^2, \langle x,y\rangle \in P \Leftrightarrow 2x=-3y$ |

**Задание 2.3.** Пусть $R_1, R_2$ отношения на $A=\{a,b,c,d\}$, заданные матрицами. Осуществите операции над отношениями $R_1, R_2$: $R_1 \cap R_2,\ R_1 \cup R_2,\ R_1^{-1},\ R_2^{-1},\ R_1 \circ R_2,\ R_2 \circ R_1,\ R_1^{-1} \circ R_2^{-1}, \overline{R}_1,\ \overline{R}_2$.

**Решение:** Пусть

| $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| ***b*** | **0** | **0** | **1** | **1** |
| ***c*** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| ***d*** | **0** | **0** | **0** | **0** |

| $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| ***b*** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| ***d*** | **0** | **0** | **1** | **0** |

$$[R_1]=\begin{pmatrix}1\,0\,1\,1\\0\,0\,1\,1\\1\,1\,1\,1\\0\,0\,0\,0\end{pmatrix},\ [R_2]=\begin{pmatrix}0\,1\,0\,0\\1\,1\,0\,0\\0\,1\,0\,1\\0\,0\,1\,0\end{pmatrix}.$$

Если $P,Q \subseteq A\times B,\ [P]=(p_{ij}),\ [Q]=(q_{ij}),$ то $[P\cup Q]=(p_{ij}+q_{ij}),$ $[P\cap Q]=(p_{ij}*q_{ij}),$ где сложение осуществляется по правилам 0+0=1, 1+1=1+0=0+1=1, а умножение обычным образом.

Итак, $[P\cup Q]=\ [P]+[Q],\ [P\cap Q]=[P]*[Q].$

Получаем:

$$\left[R_1 \cap R_2\right] = \left[R_1\right] * \left[R_2\right] = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1*0 & 0*1 & 1*0 & 1*0 \\ 0*1 & 0*1 & 1*0 & 1*0 \\ 1*0 & 1*1 & 1*0 & 1*1 \\ 0*0 & 0*0 & 0*1 & 0*0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix},$$

$$\left[R_1 \cup R_2\right] = \left[R_1\right] + \left[R_2\right] = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1+0 & 0+1 & 1+0 & 1+0 \\ 0+1 & 0+1 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+1 & 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+0 & 0+1 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного отношения $P^{-1}$ равна транспонированной матрице отношения $P$: $\left[P^{-1}\right] = \left[P\right]^{\mathrm{T}}$.

Получаем:

$$\left[R_1^{-1}\right] = \left[R_1\right]^T = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix},$$

$$\left[R_2^{-1}\right] = \left[R_2\right]^T = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}.$$

Если $P \subseteq A \times B,\ Q \subseteq B \times C,$ то $\left[P \circ Q\right] = \left[P\right] \cdot \left[Q\right],$ где умножение матриц проводится по обычному правилу умножения матриц, но произведение и сумма элементов из $\left[P\right], \left[Q\right]$ осуществляется по правилам 0+0=1, 1+1=1+0=0+1=1.

Получаем:

$$\left[R_1 \circ R_2\right] = \left[R_1\right] \cdot \left[R_2\right] = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix},$$

$$\left[R_2 \circ R_1\right] = \left[R_2\right] \cdot \left[R_1\right] = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix},$$

$$\left[R_1^{-1} \circ R_2^{-1}\right] = \left[R_1\right]^T \cdot \left[R_2\right]^T = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}.$$

$$\left[\overline{R}_1\right] = \overline{\begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,0\,0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,0 \\ 1\,1\,1\,1 \end{pmatrix}, \left[\overline{R_2}\right] = \overline{\begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,1 \end{pmatrix}.$$

Отношения к заданию 2.3 по вариантам представлены в таблице 2.3.

Таблица 2.3 – Отношения к заданию 2.3

| **№ варианта** | **Отношения** | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** | ***a*** | **0** | **1** | **1** | **0** |
| | ***b*** | **0** | **1** | **0** | **1** | ***b*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **1** | **0** | **0** | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **1** | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **2** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| | ***b*** | **0** | **0** | **1** | **0** | ***b*** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **1** | ***c*** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **1** | **0** | **0** | **0** | ***d*** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| **3** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| | ***b*** | **0** | **1** | **0** | **1** | ***b*** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **1** | **0** | **0** | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **1** | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **0** |

Продолжение таблицы 2.3

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **4** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$ | |
| **5** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$ | |
| **6** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$ | |
| **7** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & 0 & 1 & 1 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 & 0 \\ c & 1 & 0 & 0 & 1 \\ d & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$ | |
| **8** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | |
| **9** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | |
| **10** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 0 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 1 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$ | |
| **11** | | $\begin{array}{c\|cccc} R_1 & a & b & c & d \\ \hline a & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 1 & 0 & 1 & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$ | | $\begin{array}{c\|cccc} R_2 & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 & 1 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 1 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$ | |

Продолжение таблицы 2.3

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **12** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **1** | **0** | **0** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ***b*** | **1** | **0** | **0** | **0** | ***b*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **0** | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| | ***d*** | **0** | **0** | **0** | **1** | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| **13** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***b*** | **0** | **0** | **1** | **0** | ***b*** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **1** | ***c*** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| | ***d*** | **1** | **0** | **1** | **0** | ***d*** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| **14** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***b*** | **1** | **0** | **1** | **0** | ***b*** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| | ***c*** | **0** | **1** | **1** | **0** | ***c*** | **0** | **0** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **1** | **0** | **0** | **0** | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **15** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***b*** | **0** | **0** | **1** | **0** | ***b*** | **1** | **1** | **1** | **0** |
| | ***c*** | **0** | **0** | **1** | **1** | ***c*** | **1** | **0** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **1** | **0** | **1** | **0** | ***d*** | **1** | **1** | **1** | **0** |
| **16** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ***b*** | **0** | **0** | **1** | **1** | ***b*** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **1** | **1** | **1** | ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***d*** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **17** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ***b*** | **0** | **0** | **1** | **1** | ***b*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **0** | **0** | **1** | ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **0** | **0** | **0** | **0** | ***d*** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **18** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **0** | **1** | **0** | **0** |
| | ***b*** | **0** | **1** | **1** | **1** | ***b*** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **0** | **0** | **1** | **0** | ***d*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **19** | $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** | $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
| | ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***a*** | **1** | **1** | **0** | |
| | ***b*** | **1** | **1** | **1** | **1** | ***b*** | **1** | **1** | **1** | **1** |
| | ***c*** | **1** | **0** | **1** | **1** | ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| | ***d*** | **1** | **0** | **1** | **0** | ***d*** | **1** | **1** | **1** | **1** |

Продолжение таблицы 2.3

**20**

| $R_1$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| ***b*** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| ***c*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| ***d*** | **0** | **0** | **0** | **1** |

| $R_2$ | ***a*** | ***b*** | ***c*** | ***d*** |
|---|---|---|---|---|
| ***a*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| ***b*** | **1** | **0** | **1** | **1** |
| ***c*** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| ***d*** | **1** | **0** | **0** | **0** |

## ТЕМА 3: КОМБИНАТОРИКА

### Справочный материал

Как говорил Альберт Эйнштейн: «Не все, что можно сосчитать, сосчитано, и не все, что сосчитано, можно сосчитать». Хотя это высказывание не очень воодушевляет, все же попытаемся заняться подсчетами.

**Комбинаторика –** раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой **комбинаторной конфигурацией.**

**Целями** комбинаторного анализа является изучение комбинаторных конфигураций, алгоритмов их построения, оптимизация таких алгоритмов, а также решения задач перечисления.

Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания.

Многие комбинаторные задачи могут быть решены с помощью следующих правил, называемых соответственно **правилами умножения и сложения**.

**Правило умножения (основной принцип).** Пусть множество $A_1$ содержит $n_1$ элементов, $A_2$ – $n_2$ элементов,…, $A_k$ – $n_k$ элементов. Тогда $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ содержит $n_1 n_2 \cdots n_k$ различных элементов.

Другая интерпретация этого правила такова. Пусть первое действие можно совершить $n_1$ различными способами, второе – $n_2$ различными способами,…, $k$-е – $n_k$ различными способами. Тогда все $k$ действий можно совершить $n_1 n_2 \cdots n_k$ различными способами.

**Правило суммы.** Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — попарно непересекающиеся множества и пусть для каждого $i$, множество $A_i$ содержит $n_i$ элементов. Количество вариантов выбора из $A_1$ или $A_2$ или…или $A_k$ равно $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

**Схема выбора без возвращений.** Будем рассматривать множество из $n$ (различимых) элементов. Пусть $0 \le k \le n$ – фиксированное число.

**Определение 3.1. Размещением** из $n$ элементов по $k$ называется любое упорядоченное $k$-элементное подмножество рассматриваемого $n$-элементного множества.

Таким образом, размещение из $n$ элементов по $k$ определяется элементами, входящими в это подмножество, а также порядком следования этих элементов. Число размещений из $n$ элементов по $k$ находится по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1), \quad k = \overline{0,n},$$
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n, \ 1! = 1, \ 0! = 1.$$

**Определение 3.2.** В частном случае, когда $k = n$, размещение по $n$ элементов из $n$ носит название **перестановки** из $n$ элементов. Все перестановки содержат одни и те же элементы; разные перестановки отличаются лишь порядком следования этих элементов. Число $P_n$ различных перестановок из $n$ элементов находится по формуле:

$$P_n = A_n^n = n!.$$

Пусть имеется множество из $n$ различных объектов (элементов), т.е. объекты имеют или разные названия или разные номера. Пусть $k \le n, \quad k \in N$.

**Определение 3.3. Сочетанием** из $n$ элементов по $k$ называется любое подмножество, содержащее $k$ элементов, взятых из данных $n$ элементов. При этом подмножества различаются только элементами, входящими в них; порядок, в котором они расположены, не имеет значения.

Число различных сочетаний из $n$ элементов по $k$ можно найти по формуле:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k = \overline{0,n},$$

$k = 0$ соответствует пустое множество, $k = n$ соответствует множество всех элементов.

Можно показать, что имеют место формулы:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}, \ (m \le n).$
2. $C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}, \ (1 < m < n).$
3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ...C_n^n = 2^n.$
4. $C_n^k \cdot C_k^r = C_n^r \cdot C_{n-r}^{k-r}, \ (0 \le r \le k \ge n).$

**Схема выбора с возвращением.** Все приведенные формулы справедливы в том случае, когда $n$ элементов множества различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае рассматриваются комбинации с повторениями, число которых вычисляется по другим формулам.

**Определение 3.4. Размещением с повторением** из $n$ элементов по $k$ или упорядоченной выборкой с возвращением называется любой кортеж длины $k$.

Размещения с повторениями могут отличаться друг от друга элементами, их порядком и количеством повторений элементов. Число всех размещений из $n$ элементов по $k$ с повторениями обозначается символом $\overline{A_n^k}$ и вычисляется по формуле $\overline{A_n^k} = n^k$.

**Определение 3.5.** Пусть имеются $k$ групп элементов, причем в первой группе $n_1$ неразличимых элементов, во второй группе $n_2$ неразличимых элементов, …, в $k$-ой группе – $n_k$ неразличимых элементов. Элементы из разных групп различимы. Таким образом, имеем всего $n_1+n_2+...+n_k=n$ элементов. Перестановки из $n$ элементов данного множества называют **перестановками с повторениями** из $n$ элементов. Число перестановок с повторениями из $n$ элементов обозначается символом $P_n\left(n_1,n_2,...,n_k\right)$ и вычисляется по формуле:

$$P_n\left(n_1,n_2,...,n_k\right)=\frac{n!}{n_1!\,n_2!...\,n_k!}.$$

Коэффициенты $\dfrac{n!}{n_1!\,n_2!...\,n_k!}$ носят название полиномиальных. Они стоят при произведениях $x_1^{n_1}x_2^{n_2}...x_k^{n_k}$ в разложении степени $\left(x_1+x_2+...+x_k\right)^n$.

**Определение 3.6.** Пусть имеется предметы $n$ видов и из них составляется набор, содержащий $k$ элементов, т.е. различными исходами будут всевозможные наборы длины $k$, отличающиеся составом, и при этом отдельные наборы могут содержать повторяющиеся элементы. Такие наборы называются **сочетаниями с повторениями**, а их общее число определяется формулой

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k.$$

**Бином Ньютона.** С числами $C_n^k$ связано функциональное тождество, называемое формулой бинома Ньютона. Из элементарной математики хорошо известны формулы сокращенного умножения:

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2ab+b^2,\ \left(a+b\right)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

Эти формулы можно записать так:

$$\left(a+b\right)^2=C_2^0a^2b^0+C_2^1ab+C_2^2a^0b^2,$$

$$\left(a+b\right)^3=C_3^0a^3b^0+C_3^1a^2b\ +C_3^2a^1b^2+C_3^3a^0b^3.$$

Имеет место и общая закономерность:

$$\left(a+b\right)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^na^0b^n.$$

Это равенство и называется биномом Ньютона, а коэффициенты $C_n^0,C_n^1,C_n^2,...,C_n^n$ называются биномиальными коэффициентами.

Если положит $a$=$b$=1, то из формулы бинома Ньютона вытекает следующее важное соотношение $\left(1+1\right)^n=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n$ – формулы суммы биномиальных коэффициентов.

Если положить в биноме Ньютона $a$=1, $b$=–1, то $0=C_n^0-C_n^1+C_n^2-...+\left(-1\right)^nC_n^n$.

Поскольку $C_n^m=C_n^{n-m}$, $\left(m\le n\right)$, то биномиальные коэффициенты, равностоящие от концов в формуле бинома Ньютона, равны.

## Задания

**Задание 3.1.** Используя классические алгоритмы решения комбинаторных задач, решите следующую задачу.

**а**) В студенческой группе 14 девушек и 6 юношей. Сколькими способами можно выбрать, для выполнения различных заданий двух студентов одного пола?

**Решение:** По правилу умножения двух девушек можно выбрать $14 \cdot 13 = 182$ способами, а двух юношей – $6 \cdot 5 = 30$ способами. Следует выбрать двух студентов одного пола: двух девушек или двух юношей. Согласно правилу сложения таких способов выбора будет $182 + 30 = 212$.

**Ответ:** 212.

**б**) Сколькими способами можно выбрать две книги по разным темам, когда на полке находятся 15 книг по информатике, 12 книг по математике и 10 книг по химии?

**Решение:** Если выбирать книгу по информатике и книгу по математике, то существуют 15 вариантов выбора книги по информатике и 12 вариантов выбора книги по математике, поэтому существует $12 \cdot 15 = 180$ возможностей.

Если выбирать книги по информатике и по химии, то имеются 15 вариантов выбора книги по информатике и 10 вариантов выбора книги по химии, поэтому существует $15 \cdot 10 = 150$ возможностей.

Если выбирается книга по математике и книга по химии, то имеются 12 способов выбора математической книги и 10 — книги по химии, поэтому имеется $12 \cdot 10 = 120$ возможностей.

Следовательно, существуют $180 + 150 + 120 = \mathbf{450}$ возможных способов выбора двух книг.

**Ответ:** 450.

**в**) На собрании присутствует 25 человек. Необходимо избрать председателя, двух его заместителей и секретаря. Сколькими способами можно образовать эту четверку, если одно лицо может занимать только один пост?

**Решение.** Председателя можно выбрать 25 способами, после выбора председателя заместителей можно выбрать соответственно 24 и 23 способами, секретаря можно выбрать 22 способами. Общее количество способов выбора четверки равно: $n = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$.

**Ответ:** 303600.

**г**) В кафе имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

**Решение.** Первое блюдо можно выбрать тремя способами, второе – пятью, третье – двумя. По правилу произведения получим: $n = 3 \cdot 5 \cdot 2 = 30$.

**Ответ:** 30.

**д)** Сколько нечетных целых чисел находятся между числами 100 и 1000?

**Решение:** Существуют 5 вариантов выбора последней цифры, поскольку она должна быть нечетной. Существуют 10 вариантов выбора средней цифры и 9 вариантов выбора первой цифры. Таким образом, имеем 9*10*5 = 450 нечетных чисел между 100 и 1000.

**Ответ:** 450.

Задачи по вариантам представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Задачи по вариантам к заданию 3.1

| № варианта | Задача |
|---|---|
| **1** | Сколько существует способов избрания президента, вице-президента, секретаря и казначея среди членов клуба, включающего 8 студентов последнего курса, 10 студентов предпоследнего курса, 15 второкурсников и 20 первокурсников, если<br>а) отсутствуют какие-либо ограничения?<br>б) президентом должен быть студент последнего курса?<br>в) студент последнего курса не может быть вице-президентом? |
| **2** | В ресторане из напитков предлагают кофе, чай, молоко или колу. Предлагают на выбор суп или салат. Имеются 10 различных бифштексов и 5 разнообразных куриных блюд. На гарнир можно выбрать картофель фри, печеный картофель, макароны с сыром или рис. На десерт подают сладкий пирог, мороженое или то и другое вместе.<br>а) Сколько можно составить различных меню?<br>б) Сколько можно составить различных меню, включающих бифштекс?<br>в) Сколько можно составить различных меню, если клиент выбирает бифштекс и картофель или не выбирает ни то, ни другое? |
| **3** | Сколько существует положительных целых чисел, содержащих не более пяти цифр, в которых<br>а) первой цифрой является 3?<br>б) последней цифрой является 5?<br>в) первой цифрой является 3 или последней цифрой является 5?<br>г) ни первая цифра не равна 3, ни последняя цифра не равна 5? |
| **4** | Имеется 22 изделий 1-го сорта и 32 изделий 2-го сорта. Необходимо выбрать 2 изделия одного сорта. Сколькими способами можно это сделать? |

| | |
|---|---|
| **5** | В Стране Чудес есть три города $A$, $B$ и $C$. Из города $A$ в город $B$ ведет 6 дорог, а из города $B$ в город $C$ — 4 дороги. Сколькими способами можно проехать от $A$ до $C$?<br>В Стране Чудес построили еще один город $D$ и несколько новых дорог — две из $A$ в $D$ и две из $D$ в $C$. Сколькими способами можно теперь добраться из города $A$ в город $C$? |
| **6** | Если компьютерный пароль содержит семь символов, которые могут быть цифрой или буквой латинского алфавита (всего 26 букв), то, сколько существует паролей, начинающихся с буквы?<br>Если пароль, открывающий доступ к компьютеру, состоит из шести символов. Первые два из них — строчные буквы латинского алфавита (всего 26 букв), а оставшиеся четыре могут быть как цифрами, так и строчными буквами. Сколько можно придумать различных паролей? |
| **7** | У женщины в шкафу висит шесть платьев, пять юбок и три блузки. Сколько разных нарядов она может составить из своей одежды? |
| **8** | Сколько существует двухбуквенных или трехбуквенных инициалов для людей?<br>Сколько существует различных двухбуквенных или трехбуквенных инициалов для людей, если никакие буквы не могут повторяться? |
| **9** | Перевертыш — это многозначное число, которое не поменяет своего значения, если все его цифры записать в обратном порядке.<br>Сколько существует шестизначных перевертышей?<br>А сколько семизначных? |
| **10** | Группа студентов изучает 10 различных дисциплин.<br>Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 разных занятия?<br>Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день должно быть 4 занятия по двум различным дисциплинам? |
| **11** | Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6000, можно составить, используя только нечетные цифры?<br>Сколько четырехзначных чисел, не превосходящих 6000, можно составить, используя только четные цифры? |

| | |
|---|---|
| **12** | На вершину горы ведет 8 дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и спуститься с нее? Дайте ответ на этот же вопрос, если подъем и спуск осуществляются различными путями. |
| **13** | Сколько слов длины 4, начинающихся с согласной буквы и заканчивающихся гласной буквой, можно составить из букв М, Е, Т, Р, О? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка. |
| **14** | Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Игорь использует трёхбуквенные слова, в которых могут быть только буквы Ш, К, О, Л, А, причём буква К появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь? |
| **15** | Михаил составляет 6-буквенные коды. В кодах разрешается использовать только буквы А, Б, В, Г, при этом код не может начинаться с гласной и не может содержать двух одинаковых букв подряд. Сколько различных кодов может составить Михаил? |
| **16** | В школьном самоуправлении участвуют ученики разных классов.<br>Данные обобщены в таблице.<br><table><tr><th>Класс</th><th>Кол-во девочек</th><th>Кол-во мальчиков</th></tr><tr><td>8-й класс</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>9-й класс</td><td>6</td><td>5</td></tr><tr><td>10-й класс</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>11-й класс</td><td>7</td><td>6</td></tr></table>Сколькими способами можно выбрать одного ведущего школьного мероприятия, если для роли ведущего нужно выбрать мальчика из 8-го, 9-го или 10-го класса? |
| **17** | Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1,2, 3, 4, 5, 6 если: а) ни одна из цифр не повторяется более одного раза; б) цифры могут повторяться; в) числа должны быть нечетными (цифры могут повторяться)? |
| **18** | Сколько существует различных символьных последовательностей длины от 5 до 6 в четырёхбуквенном алфавите {А, Т, Г, Ц}? |

Продолжение таблицы 3.1

| | |
|---|---|
| **19** | Ольга составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Ольга использует 4-буквенные слова, в которых есть только буквы A, B, C, D, X, Y, Z. При этом первая буква кодового слова — это буква X, Y или Z, а далее в кодовом слове буквы X, Y и Z не встречаются. Сколько различных кодовых слов может использовать Ольга? |
| **20** | Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася? |

**Задание 3.2.** Используя классические алгоритмы решения комбинаторных задач, решите следующую задачу.

а) Сколькими способами можно выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 10 красных и 4 розовых гвоздики? А если выбрать 1 красную гвоздику и 2 розовых.

**Решение:** Т.к. порядок выбора цветов не имеет значения, то выбрать 3 цветка из вазы, в которой стоят 14 гвоздик, можно $C_{14}^{3}$ способами. Число этих сочетаний можно найти по формуле:

$$C_{14}^{3} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{14!}{3!(14-3)!} = \frac{14!}{3!11!} = \frac{12 \cdot 13 \cdot 14}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 364.$$

Красную гвоздику можно выбрать $C_{10}^{1} = 10$ способами. Выбрать 2 розовые гвоздики из имеющихся 4 можно $C_{4}^{2} = 6$ способами. Поэтому букет из 1 красной и 2 розовых гвоздик можно составить по правилу умножения $C_{10}^{1} \cdot C_{4}^{2} = 10 \cdot 6 = 60$ способами.

**Ответ:** 60.

б) На полке стоит 12 книг: англо-русский словарь и 11 художественных книг. Сколькими способами читатель может выбрать три книги, если: словарь ему нужен обязательно; словарь ему не нужен?

**Решение:**

Если словарь читателю нужен, то задача сводится к нахождению количества способов выбора двух книг из 11 художественных книг. При выборе важен только состав книг, порядок выбора при этом не важен. Следовательно, количество вариантов равно:

$$n = C_{11}^2 = \frac{11!}{2!\cdot 9!} = 55.$$

Если словарь читателю не нужен, то задача сводится к нахождению количества способов выбора трех книг из 11 художественных книг. При выборе книг важен только состав книг, порядок выбора при этом не важен. Следовательно, количество вариантов равно:

$$n = C_{11}^3 = \frac{11!}{3!\cdot 8!} = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{2\cdot 3} = 165.$$

**Ответ:** 55; 165.

в) Группа студентов состоит из 17 человек. Сколькими способами можно выбрать группу из 4 студентов для участия в конференции?

**Решение:** Один способ отличается от другого только составом. Повторений не будет, так как одного и того же человека нельзя выбрать два, три, четыре раза. Следовательно, количество способов, которыми можно выбрать четверых студентов, – это число сочетаний без повторений из 17 по 4:

$$n = C_{17}^4 = \frac{17!}{4!\cdot 13!} = \frac{14\cdot 15\cdot 16\cdot 17}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 7\cdot 5\cdot 4\cdot 17 = 2380.$$

**Ответ:** 2380.

г) В шахматном турнире участвуют 12 человек. Сколько партий должно быть сыграно в турнире, если между любыми двумя участниками должна быть сыграна одна партия?

**Решение:** Каждая партия играется 2 участниками и отличается только составом пар, но не порядком. Следовательно, количество партий равно:

$$C_{12}^2 = \frac{12!}{2!\cdot 10!} = \frac{11\cdot 12}{2} = 11\cdot 6 = 66.$$

**Ответ:** 66.

Задачи по вариантам представлены таблице 3.2.

Таблица 3.2 – Задачи по вариантам к заданию 3.2

| № варианта | Задача |
|---|---|
| **1** | В урне 12 белых и 8 черных шаров.<br>Сколькими способами можно выбрать 5 шаров, чтобы среди них было: а) 5 черных; б) 3 белых и 2 черных? |
| **2** | Предстоит выбрать команду четырех игроков в гольф из пяти профессиональных игроков и пяти любителей.<br>Сколько разных команд может состоять из трех профессионалов и одного любителя?<br>Сколько команд состоит только из профессионалов или только из любителей? |

Продолжение таблицы 3.2.

| | |
|---|---|
| **3** | Как известно, для участия в лотерее «Спортлото» нужно указать шесть номеров из имеющихся на карточке 45 номеров.<br>а) Сколькими способами можно заполнить карточку «Спортлото»?<br>б) После тиража организаторы лотереи решили подсчитать, каково число возможных вариантов заполнения карточки, при которых могло быть угадано ровно три номера. Помогите им в этом подсчете. |
| **4** | Из 4 первокурсников, 5 второкурсников и 6 третьекурсников надо выбрать три студента на конференцию.<br>Сколькими способами можно осуществить этот выбор, если среди выбранных должны быть студенты разных курсов? |
| **5** | В один из комитетов парламента нужно отобрать трех членов, причем выбирать надо из пяти консерваторов, трех лейбористов и четырех либерал-демократов.<br>Сколько разных комитетов можно составить?<br>Сколько разных комитетов можно составить, если в него должен входить, по крайней мере, один либерал-демократ?<br>Сколько разных комитетов можно составить, если лейбористы и консерваторы не могут быть его членами одновременно?<br>Сколько разных комитетов можно составить, если в него должен войти, по крайней мере, один консерватор и хотя бы один лейборист? |
| **6** | У Нины 7 разных шоколадных конфет, у Коли 9 разных карамелек.<br>Сколькими способами они могут обменяться друг с другом пятью конфетами?<br>Сколькими способами они могут обменяться друг с другом шестью конфетами? |
| **7** | Пусть $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Сколько существует<br>а) трехэлементных подмножеств множества А?<br>б) подмножеств множества $A$, содержащих хотя бы три элемента?<br>в) подмножеств множества $A$, содержащих не более шести элементов? |
| **8** | Из колоды в 36 карт наудачу берутся 6 карт.<br>Найти число различных способов взятия 6 карт.<br>Найти число различных способов взятия 6 карт, содержащих 2 туза.<br>Найти число различных способов взятия 6 карт, содержащих хотя бы одну даму. |

Продолжение таблицы 3.2.

| | |
|---|---|
| **9** | В коробке находятся 50 деталей, из которых 10 бракованных. Из коробки наудачу берутся 6 деталей.<br>Найти число различных способов взятия 6-ти деталей.<br>Найти число различных способов взятия 6-ти деталей, среди которых ровно 4 бракованных. |
| **10** | Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и 60 рядовых.<br>Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? |
| **11** | Из лаборатории, в которой работают заведующий и 12 сотрудников, надо отправить 6 человек в командировку. Сколькими способами это можно сделать, если:<br>а) заведующий лабораторией должен ехать в командировку;<br>б) заведующий лабораторией должен остаться? |
| **12** | Из 14 солдат, в число которых входят Сидоров и Костенко, надо отправить в наряд четырех человек. Сколькими способами это можно сделать, если:<br>а) Сидоров и Костенко должны пойти в наряд обязательно;<br>б) Сидоров и Костенко должны остаться;<br>в) Сидоров должен пойти в наряд, а Костенко – остаться? |
| **13** | Сколькими способами группу из 13 человек можно разбить на две группы: а) по 6 и 7 человек; б) по 5 и 8 человек? |
| **14** | Встретились 14 лыжников и 8 фигуристов, и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки.<br>а) Сколько встреч было между лыжниками?<br>б) Сколько встреч было между фигуристами?<br>в) Сколько встреч было между лыжниками и фигуристами?<br>г) Сколько встреч было всего? |
| **15** | В правильном 17-угольнике провели все диагонали.<br>а) Сколько всего получилось отрезков?<br>б) Сколько имеется сторон?<br>в) Сколько провели диагоналей? |
| **16** | В одной урне находится 10 шаров с номерами от 0 до 9, а в другой урне 9 шаров с первыми девятью буквами алфавита. По условиям лотереи ведущий вытаскивает из первой урны три шара с числами, а из второй – четыре шара с буквами. Для победы нужно угадать выпавшие шары. Сколько комбинаций шаров может выпасть в игре. |
| **17** | На плоскости отмечены 8 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько различных прямых можно провести через них. Сколько треугольников и четырехугольников можно построить с вершинами в этих точках. |

Продолжение таблицы 3.2.

| | |
|---|---|
| **18** | Сколько комбинаций чисел может составить игрок, который играет в лотереи «6 из 36», «7 из 45», «8 из 49». |
| **19** | Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы одни туз? Во скольких случаях ровно один туз? Во скольких случаях не менее двух тузов? Ровно два туза? |
| **20** | Предприятие может предоставить работу по одной специальности 4 женщинами, по другой - 6 мужчинам, по третьей - 3 работникам независимо от пола. Сколькими способами можно заполнить вакантные места, если имеются 14 претендентов: 6 женщин и 8 мужчин? |

**Задание 3.3.** Используя классические алгоритмы решения комбинаторных задач, решите следующую задачу.

а) Из десяти различных книг произвольным образом берутся и ставятся на полку одна за другой 3 книги. Сколько вариантов расстановок?

**Решение:** $A_{10}^{3} = \dfrac{10!}{(10-3)!} = \dfrac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720.$

**Ответ:** 720.

б) Из колоды в 36 карт наудачу без возвращения вынимают по одной карте 3 раза. Сколько существует различных способов получения 3 карт, среди которых на первых двух местах – бубна, а на третьем – пика?

**Решение:** В колоде 9 бубен и 9 пик. Получение тройки карт «бубна, бубна, пика» можно рассматривать как результат двух действий. Первое действие – получение на первых двух картах «бубна, бубна». Поскольку порядок следования карт существенен, то число различных способов осуществления первого действия совпадает с числом размещений из 9 элементов по 2 (всего 9 бубен) и находится по формуле $A_{9}^{2} = \dfrac{9!}{7!} = 8 \cdot 9 = 72.$

Второе действие – взятие пики на 3-м месте. Число способов выполнить 2-е действие, очевидно, равно 9 (по числу «пик»). Поэтому число различных троек карт «бубна, бубна, пика» совпадает с числом различных указанных выше пар действий и по правилу умножения вычисляется по формуле: $9 \cdot 8 \cdot 9 = 648$.

2-ой способ рассуждений. Первую бубну можно вытащить 9-тью способами (по числу всех бубен), вторую можно вытащить 8-мью способами (по числу оставшихся бубен), третью карту можно вытащить 9-тью способами (по числу пик). Итого, число всех способов равно $9 \cdot 8 \cdot 9 = 648$.

**Ответ:** 648.

в) Сколькими способами 4 пассажира – Алексеев, Смирнов, Федоров, Харитонов – могут разместиться в девяти вагонах поезда, если: все они хотят ехать в разных вагонах; Алексеев и Смирнов хотят ехать в одном вагоне, а Федоров и Харитонов – в других вагонах, причем различных?

**Решение:** Вагоны поезда пронумерованы, осуществляется выбор 4 из 9 вагонов, порядок выбора имеет значение: $n = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

Двое едут в одном вагоне, а двое других – в других, причем различных. «Склеиваем» два элемента из 4, количество способов размещения равно: $n = A_9^3 = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$.

**Ответ:** 3024; 504.

г) Сколькими способами можно расставить на полке 5 различных книг?

**Решение:** Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов, т.е. $\mathrm{P}_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

**Ответ:** 120.

д) Сколькими способами можно расставить на полке 7 различных книг, чтобы определенные 3 книги: стояли рядом; не стояли рядом?

**Решение:** Три определенные книги можно переставить по отношению друг к другу 3! способами (число перестановок из трех элементов), оставшиеся 4 книги между собой можно переставить 4! способами. Три определенные книги и остальные 4 книги можно расположить на полке по отношению друг к другу 5 способами (столько способов поставить первую из трех книг на полке, чтобы за ней стояли остальные книги изданной тройки). По правилу произведения общее число способов равно: $n = P_3 \cdot P_4 \cdot 5 = 720$.

Этот результат можно получить, рассуждая следующим образом: 3! – количество способов переставить три определенные книги. Если рассматривать эти книги как единое целое, некую большую «книгу», то остается вычислить количество способов взаимного расположения этой «книги» и 4 остальных книг, т.е. число перестановок из 5 элементов. Оно равно 5!

По правилу произведения получим: $n = P_3 \cdot P_5 = 720$.

Общее число способов, которыми можно расположить 7 книг на одной полке (не обязательно, чтобы три определенные книги стояли рядом), равно 7!. Тогда число способов, которыми можно расположить семь книг на полке так, чтобы 3 определенные книги не стояли рядом, равно: $n = P_7 - 720 = 5040 - 720 = 4320$.

**Ответ:** 720; 4320.

е) Семь мальчиков, в число которых входят Олег и Игорь, становятся в ряд. Найти число возможных комбинаций, если:

- Олег должен находиться в конце ряда;
- Олег должен находиться в начале ряда, а Игорь – в конце ряда;
- Олег и Игорь должны стоять рядом.

**Решение:**

Число возможных комбинаций равно числу способов, которыми можно переставить между собой 6 мальчиков, стоящих перед Олегом. Число таких способов равно: $n = P_6 = 6! = 720$.

Два элемента фиксированы. Число возможных комбинаций равно числу перестановок 5 мальчиков, стоящих между Олегом и Игорем: $n = P_5 = 5! = 120$.

Воспользуемся приемом «склеивания» элементов. Рассмотрим пару Олег и Игорь, как один элемент, переставляемый с оставшимися пятью элементами. Таких способов столько, сколько можно составить перестановок из 6 элементов. При этом Олега и Игоря можно переставить между собой двумя способами. По правилу произведения общее количество равно: $n = 2 \cdot P_6 = 2 \cdot 6! = 2 \cdot 720 = 1440$.

**Ответ:** 720; 120; 1440.

ж) Сколькими способами можно расставить в ряд для фотографирования пять мальчиков и шесть девочек, если ни две девочки, ни два мальчика не должны стоять рядом?

**Решение:** Мальчиков меньше, чем девочек, поэтому первой должна стоять девочка, а дальше мальчики и девочки должны чередоваться. Итак, ряд должен иметь вид ДМДМДМДМДМД. Существуют 6! способов расположить девочек на позициях Д и 5! способов расположить мальчиков на позициях М. Следовательно, имеется 6!·5! способов расставить детей.

**Ответ:** 6!·5!.

Задачи по вариантам представлены в таблице 3.3.

Таблица 3.3 – Задачи по вариантам к заданию 3.3

| № варианта | Задача |
|---|---|
| **1** | В урне находятся 10 белых, 15 черных, 20 красных шаров. Из урны последовательно без возвращения производят 9 извлечений по одному шару. Сколькими способами можно произвести указанное извлечение так, чтобы при первых двух извлечениях вынутыми оказались белые шары, при последующих трех извлечениях – черные, при оставшихся четырех извлечениях – красные? |
| **2** | На книжной полке требуется расположить 15 различных книг по математике, 12 различных книг по физике и 16 различных книг по информатике. Сколькими способами это можно сделать, если<br>а) не существует никаких ограничений?<br>б) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе?<br>в) все книги по одному и тому же предмету должны стоять рядом, но математические книги и книги по информатике не должны стоять рядом? |

Продолжение таблицы 3.3.

| | |
|---|---|
| **3** | Сколько трехзначных чисел можно образовать, используя цифры 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9?<br>А сколько таких трехзначных чисел меньше 450?<br>Сколько среди них четных чисел?<br>Сколько из них делятся на 4? |
| **4** | Пять пар идут в кино. Сколькими способами они могут занять места, если<br>а) они могут сидеть в любом порядке?<br>б) все пять пар сидят подряд? |
| **5** | Шесть мальчиков и шесть девочек идут на концерт вместе. Сколькими способами они могут занять места, если<br>а) мальчики не будут сидеть рядом?<br>б) ни мальчики, ни девочки не будут сидеть все вместе?<br>в) все мальчики сядут вместе?<br>г) два мальчика сядут по краям?<br>д) один мальчик и одна девочка откажутся сесть вместе? |
| **6** | Сколько имеется шестизначных чисел, если первая цифра разряд может быть нулем, цифры не должны повторяться и<br>а) последние две цифры должны быть 7 или 8?<br>б) первая цифра должна быть 1, а последние цифры не могут быть 7 или 8?<br>в) цифры 7 и 8 должны стоять рядом?<br>г) число должно делиться на 4?<br>д) число должно делиться на 8?<br>е) в числе должны присутствовать цифры 5 и 6? |
| **7** | Сколько существует перестановок букв *a*,*c*, *f*, *m* ,*p* ,*r*, *t* и *x*, если<br>а) нет никаких ограничений?<br>б) между *a* и *c* должны стоять две или три буквы?<br>в) буквы *a* и *c* не должны быть разделены двумя или тремя буквами?<br>г) первые четыре буквы должны быть выбраны из *a*,*c*,*f* и *r*?<br>д) буквы *a, c, f* и *r* должны стоять рядом? |
| **8** | На полке наудачу располагаются 10 книг.<br>а) Сколько существует различных способов расположения 10-ти книг?<br>б) Сколько существует различных способов расположения 10-ти книг, при которых 2 заранее помеченные книги окажутся рядом?<br>в) Сколько существует различных способов расположения 10-ти книг, при которых 3 заранее помеченные книги окажутся рядом? |

Продолжение таблицы 3.3.

| | |
|---|---|
| **9** | Сколько существует перестановок букв $a,b,$ $c,$ $d$ $,e,$ $f$ и g, если<br>а) нет никаких ограничений?<br>б) между $a$ и $c$ должны стоять две буквы?<br>в) буквы $a$ и $c$ не должны быть разделены тремя буквами?<br>г) первые четыре буквы должны быть выбраны из $a,b,$ $c$ и d?<br>д) буквы $a,$ $b,$ $c$ должны стоять рядом? |
| **10** | На книжной полке требуется расположить 10 различных книг по экономике, 12 различных книг по истории и 14 различных книг по географии. Сколькими способами это можно сделать, если<br>а) не существует никаких ограничений?<br>б) все книги по одному и тому же предмету должны стоять вместе?<br>в) все книги по одному и тому же предмету должны стоять рядом, но книги по истории и книги по географии стоят рядом? |
| **11** | На плоскости отметили 5 точек. Их надо обозначить латинскими буквами. Сколькими способами это можно сделать (в латинском алфавите 26 букв)? |
| **12** | Сколько четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр, можно составить из цифр:<br>а) 1, 3, 5, 7, 9;<br>б) 0, 2, 4, 6,8? |
| **13** | Из трехзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (без повторения цифр), сколько таких, в которых:<br>а) не встречаются цифры 6 и 7;<br>б) цифра 8 является последней? |
| **14** | Сколько различных трехзначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, таких, которые являются:<br>а) четными;<br>б) кратными 5? |
| **15** | Сколькими способами можно изготовить трехцветный флаг с горизонтальными полосами, если имеется материал 8 различных цветов? |
| **16** | На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места:<br>а) 2 фотографии;<br>б) 4 фотографии;<br>в) 6 фотографий? |

Продолжение таблицы 3.3.

| | |
|---|---|
| **17** | Сколько существует восьмизначных телефонных номеров, в которых все цифры различные и первая цифра отлична от нуля? |
| **18** | Сколько команд участвовало в финале первенства, если известно, что каждая команда сыграла с каждой из остальных по одной игре на своем поле и по одной игре на поле соперника, причем всего было сыграно 30 игр? |
| **19** | Номер машины в некотором городе состоит из двух различных букв, взятых из набора М, Н, К, Т, С, и трех различных цифр. Сколько машин можно обеспечить такими номерами? |
| **20** | Сколькими способами можно разместить за столом, на котором поставлено 10 приборов, 10 человек – 5 юношей в 5 девушек так, чтобы девушки чередовались с юношами? |

**Задание 3.4.** Используя классические алгоритмы решения комбинаторных задач, решите следующую задачу.

а) Сколькими способами можно составит букет из 5 цветов, если в наличии ест цветы трех сортов?

**Решение:** Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем, равный 5. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5 в каждом $\overline{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{k}} = \mathrm{C}_{n+k-1}^{k} = \overline{C}_{3}^{5} = \mathrm{C}_{7}^{5} = \frac{7!}{5!2!} = 21.$

**Ответ:** 21.

б) Сколькими способами можно выбрать 12 открыток на почте, если имеется 10 различных видов открыток?

**Решение**: Двенадцать открыток из 10 видов можно выбрать только с повторениями, причем порядок выбора открыток не важен, следовательно, это сочетания с повторениями. Число таких комбинаций равно:

$$\overline{C}_{10}^{12} = C_{21}^{12} = \frac{21!}{12!\cdot 9!} = \frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20\cdot 21}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9} = 293930.$$

**Ответ:** 293930.

в) Необходимо выбрать по одной книге в подарок 4 детям из 10 различных видов книг. Сколькими способами можно это сделать?

**Решение:** Один вариант выбора подарков будет отличаться от другого только составом книг, порядок их выбора не важен. Возможны повторения, поскольку двум, трем или всем четырем детям можно выбрать одинаковые книги. Число таких способов равно: $n = \overline{C}_{10}^{4} = C_{13}^{4} = \frac{13!}{4!\cdot 9!} = \frac{10\cdot 11\cdot 12\cdot 13}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 715.$

**Ответ:** 715.

г) В гостинице 10 номеров, каждый из которых может разместить 4 человек. Сколько существует вариантов размещения 4 приезжих, если:

− они могут жить в одном и том же номере;

− никакие два не могут жить в одном номере?

**Решение:**

При размещении 4 приезжих по 10 номерам важен состав и порядок выбора номеров. С учетом того, что они могут жить в одном и том же номере, возможны повторения. Следовательно, количество вариантов расселения равно: $\overline{A}_{10}^{4} = 10^4 = 10000.$

Поскольку никакие два человека не могут жить в одном номере, то повторений не будет. При отборе номеров по-прежнему важны состав и порядок. Следовательно, количество вариантов расселения равно: $A_{10}^{4} = \dfrac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040.$

**Ответ:** 10000, 5040.

д) Известно, что 7 студентов сдали экзамен на «хорошо» и «отлично». Сколькими способами могли быть поставлены им оценки?

**Решение:** Поскольку известно, что студенты сдали экзамен на «хорошо» и «отлично», то нужно посчитать количество способов, которыми можно распределить 2 оценки между 7 студентами. Один способ будет отличаться от другого как порядком, так и составом оценок. С учетом того, что оценок две, а студентов семь, то должны быть повторения (двое, трое,…., семеро студентов могут получить одинаковые оценки). Следовательно: $n = \overline{A}_{2}^{7} = 2^7 = 128.$

**Ответ:** 128.

е) На 6-ти карточках написаны буквы, из которых можно составить слово АНАНАС. Сколько существует различных шестибуквенных слов, которые можно составить при помощи этих 6-ти карточек?

**Решение:** 6 карточек разобьем на 3 группы. Первая группа образована карточками с буквой А. Число таких карточек равно 3. Они неразличимы по буквам, у всех одна и та же буква А, $n_1 = 3$. Вторая группа образована двумя карточками, содержащими букву Н. Элементы второй группы также неразличимы между собой, $n_2 = 2$. Третья группа образована одной карточкой с буквой С, $n_3 = 1$. Таким образом, мы имеем дело с перестановками с повторениями и число слов из 6-ти букв равно $\dfrac{(3+2+1)!}{3!\ 2!\ 1!} = \dfrac{6!}{3!\ 2!} = 60.$

**Ответ:** 60.

ж) Группу командировочных из восьми человек необходимо разместить в три комнаты, из которых две трехместные и одна двухместная. Сколько вариантов расселения возможно?

**Решение:** Число таких вариантов определяется по формуле числа перестановок с повторениями, так как варианты расселения отличаются друг от друга только порядком расселения людей по номерам. Следовательно: $P_8(3,3,2)=\dfrac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!}=\dfrac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3\cdot 2}=2\cdot 5\cdot 7\cdot 8=560.$

**Ответ:** 560.

Задачи по вариантам представлены в таблице 3.4.

Таблица 3.4 – Задачи по вариантам к заданию 3.4

| № варианта | Задача |
|---|---|
| **1** | Если в булочной продается 11 различных видов чизкейков, то сколькими способами можно выбрать дюжину чизкейков? |
| **2** | Цветочница продает 10 видов цветов. Сколько различных букетов из 15 цветков она может сделать? |
| **3** | Ресторан в своем меню предлагает пять различных главных блюд. Каждый из компании в семи человек заказывает свое главное блюдо. Сколько разных заказов может получить официант? |
| **4** | Сколькими способами можно разложить 8 монет одного достоинства по пяти карманам? |
| **5** | Сколькими способами можно составить набор из семи пирожных, если имеется 4 сорта пирожных? |
| **6** | Цветочник продает розы четырех разных сортов. Сколько разных букетов можно составить из дюжины роз? |
| **7** | На почте имеются марки 10-ти различных типов. Покупается 16 марок. Сколько существует различных способов покупки 16-ти марок? |
| **8** | В киоске продаётся мороженое 21 вида. Кирилл хочет купить шесть порций мороженого. Если мороженого одного вида может быть более одной порции, то, сколько существует способов сделать покупку? |
| **9** | Шесть ящиков занумерованы числами от 1 до 6. Сколькими способами можно разложить по этим ящикам 20 одинаковых шаров (на этот раз некоторые ящики могут оказаться пустыми)? |
| **10** | Вы покупаете пять рождественских открыток в магазине, который может предложить четыре разных типа приглянувшихся Вам открыток. Как много наборов из пяти открыток Вы можете купить? |

Продолжение таблицы 3.4.

| | |
|---|---|
| **11** | Сколькими способами Дима сможет покрасить пять елок в серебристый, зеленый и синий цвета, если количество краски у него неограниченно, а каждую елку он красит только в один цвет? У Димы есть пять шариков: красный, зеленый, желтый, синий и золотой. Сколькими способами он сможет украсить ими пять елок, если на каждую требуется надеть ровно один шарик? А если можно надевать несколько шариков на одну елку (и все шарики должны быть использованы)? |
| **12** | Предположим, что нужно расставить на полке 26 книг, среди которых 8 одинаковых учебников по математике, 6 одинаковых учебников по информатике, 9 одинаковых учебников по физике и 3 — по химии. Сколькими способами это можно сделать? |
| **13** | У профессора Петрова в группе 20 студентов. Согласно критерию, известному лишь ему одному, он решил поставить две оценки A, три оценки B, десять C, три D и две оценки F. Сколькими способами он может поставить оценки студентам? |
| **14** | Сколькими способами можно распределить 16 видов товара по трем магазинам, если в 1-й магазин надо доставить 9, во второй 4, в третий – 3 вида товара? |
| **15** | Сколько разных «слов» можно получить из слова «АБРАКАДАБРА»? Сколько из них начинаются с буквы «К»? В скольких из них обе буквы «Б» стоят рядом? |
| **16** | Рыбаки поймали 5 подлещиков, 4 красноперки и 2 уклейки, посолили и вывесили на солнце сушиться. Сколько вариантов развешивания рыбы на нитке? |
| **17** | На памятные сувениры в «Поле Чудес» спонсоры предлагают кофеварки, утюги, телефонные аппараты, духи. Сколькими способами 9 участников игры могут получить эти сувениры? Сколькими способами могут быть выбраны 9 предметов для участников игры? |
| **18** | Сколько различных размещений можно образовать, используя буквы в слове unsuccessful? |
| **19** | На узком участке трассы в линию движутся гонщики. Из них 5 – на российских автомобилях, 6 – на американских и 3 – на итальянских. Сколько существует разных комбинаций машин на трассе, если нас интересует только принадлежность автомобиля конкретной стране? |
| **20** | У школьника 2 авторучки, 4 карандаша и 1 резинка. Он раскладывает эти предметы на парте в ряд. Сколько вариантов раскладки? |

**Задание 3.5.** Упростите выражение $\frac{P_8 C_5^2}{A_8^7}$.

**Решение:**

$$P_8 = 8!,\quad C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10,$$

$$A_8^7 = \frac{8!}{(8-7)!} = \frac{8!}{1!} = 8!,\quad \frac{P_8 C_5^2}{A_8^7} = \frac{8!\cdot 10}{8!} = 10.$$

Выражения к заданию 3.5 по вариантам представлены в таблице 3.5.

Таблица 3.5 – Выражения к заданию 3.5

| № варианта | Выражение | № варианта | Выражение |
|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{A_{10}^6 - A_{10}^5}{A_9^5 - A_9^4}$ | 2 | $\frac{P_8 \cdot P_7}{7P_6}$ |
| 3 | $\frac{C_{10}^6 + C_{10}^5}{C_9^5 + A_9^4}$ | 4 | $\frac{7A_{10}^6 \cdot C_{10}^5}{A_9^5 + A_9^4}$ |
| 5 | $\frac{A_{10}^6 + A_{10}^5}{A_9^5 + A_9^4}$ | 6 | $\frac{2P_3 + 3A_4^2}{5P_5 - P_3}$ |
| 7 | $\frac{A_{10}^6 + C_{10}^5}{A_9^4}$ | 8 | $\frac{A_8^3 + A_7^4}{A_6^3}$ |
| 9 | $\frac{C_{10}^6 + C_{10}^4}{C_9^5 - A_9^4}$ | 10 | $\frac{7A_{10}^6 \cdot C_9^5}{A_9^5 + A_9^3}$ |
| 11 | $\frac{A_{10}^6 + A_{10}^5}{A_9^5 + A_9^4}$ | 12 | $\frac{P_9 \cdot P_7}{7P_6}$ |
| 13 | $\frac{C_{10}^6 + C_{10}^7}{C_9^4 - A_9^4}$ | 14 | $\frac{7A_{10}^6 - C_{10}^5}{A_9^3 + A_9^4}$ |
| 15 | $\frac{C_{10}^6 + A_{10}^5}{A_9^5 + C_9^4}$ | 16 | $\frac{4P_3 + 2A_4^2}{P_5 - 4P_3}$ |
| 17 | $\frac{A_{10}^6 + C_{10}^5}{C_9^4}$ | 18 | $\frac{A_8^3 + A_7^2}{A_5^3}$ |
| 19 | $\frac{C_{10}^6 - C_{10}^4}{C_9^5 - A_9^5}$ | 20 | $\frac{7A_{10}^6 \cdot C_9^5}{A_{10}^5 + A_9^3}$ |

**Задание 3.6.** Решите комбинаторное уравнение $12C_x^1 + 2C_{x+4}^2 = 162$.

**Решение:** Воспользуемся формулой $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

$12C_x^1 + 2C_{x+4}^2 = 162,\quad 12\dfrac{x!}{1!(x-1)!} + \dfrac{2(x+4)!}{2!(x+4-2)!} = 162,$

$12\dfrac{x!}{(x-1)!} + \dfrac{2(x+4)!}{2(x+2)!} = 162,$

$12x + (x+3)(x+4) = 162,\quad 12x + x^2 + 4x + 3x + 12 = 162,\quad x^2 + 19x - 150,$

$D = 19^2 - 4\cdot 1\cdot(-150) = 961 = 31^2,$

$x_1 = \dfrac{-19+\sqrt{961}}{2\cdot 1} = \dfrac{-19+31}{2\cdot 1} = \dfrac{12}{2} = 6 \in \mathbf{N},$

$x_2 = \dfrac{-19-\sqrt{961}}{2\cdot 1} = \dfrac{-19-31}{2\cdot 1} = -\dfrac{50}{2} = -25 \notin \mathbf{N}.$

**Ответ:** 6.

Уравнение или система уравнения к заданию 3.6 по вариантам представлены в таблице 3.6.

Таблица 3.6 – Уравнение или система уравнения к заданию 3.6

| № варианта | Уравнение ил и система уравнений | № варианта | Уравнение ил и система уравнений |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{cases} A_x^y = 10A_x^{y-1}, \\ C_x^y = \dfrac{5}{3}C_x^{y-1}. \end{cases}$ | 2 | $\begin{cases} A_{2n}^{3x} = 8A_{2n}^{3n-1}, \\ C_{2n}^{3x} = \dfrac{8}{9}C_{2n}^{3x-1}. \end{cases}$ |
| 3 | $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n \cdot P_{x-n}} = 132$ | 4 | $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$ |
| 5 | $\begin{cases} A_{5x}^{n-3} = \dfrac{1}{7}A_{5x}^{n-2}, \\ C_{5x}^{n-2} = \dfrac{4}{7}C_{5x}^{n-3}. \end{cases}$ | 6 | $\begin{cases} A_{2x}^{n-2} = 8A_{2x}^{n-3}, \\ C_{2x}^{n-2} = \dfrac{8}{3}C_{2x}^{n-3}. \end{cases}$ |
| 7 | $12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$ | 8 | $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$ |
| 9 | $\dfrac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$ | 10 | $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$ |
| 11 | $A_x^3 = 56x$ | 12 | $5C_x^3 = +C_{x+2}^4$ |
| 13 | $\dfrac{A_{x+1}^{n+1} \cdot P_{x-n}}{P_{x-1}} = 90$ | 14 | $\dfrac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$ |

Продолжение таблицы 3.6

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n\cdot P_{x-n}}=132$ | 16 | $\dfrac{A_{x+2}^{n+2}\cdot P_{x-n}}{P_x}=110$ |
| 17 | $\begin{cases}C_x^{y+1}=2.5x,\\ C_{x-1}^y=10.\end{cases}$ | 18 | $\begin{cases}A_x^y=8A_x^{y-1},\\ C_x^y=1.6C_x^{y-1}.\end{cases}$ |
| 19 | $\dfrac{P_x+3P_{x-1}}{2P_{x+2}+14P_{x+1}}=\dfrac{2A_x^5}{5A_{x+2}^7}$ | 20 | $C_3^2C_{x+6}^3=C_{x+5}^2C_{x+4}^{x+3}+2C_9^2$ |

**Задание 3.7.** Найти коэффициент при $x^k$ в разложении выражения $P=\left(3-x^2+x^5\right)^{19}$, $k=30$ по полиномиальной формуле, полученный после раскрытия скобок и приведения подобных членов:

**Решение:** Общий член разложения по полиномиальной формуле имеет вид: $3^m\left(-x^2\right)^n\left(x^5\right)^k P(m,n,k)$.

Для отыскания всех случаев, в которых возникает $x^{30}$, решаем в целых неотрицательных числах уравнение $2n+5k=30$.

Выразим $k$: $k=6-\dfrac{2n}{5}$. Видно, что $k$ принимает целые значения, если $n$ кратно 5.

Выпишем все такие случаи:

$n=0\Rightarrow k=6;$

$n=5\Rightarrow k=4;$

$n=10\Rightarrow k=2;$

$n=15\Rightarrow k=0;$

Для каждой найденной пары значений $n$, $k$ значение $m$ находим из уравнения $m+n+k=19$. Получим 4 набора $(m;n;k)$: (13;0;6),(10;5;4),(7;10;2),(4;15;0).

Слагаемые, содержащие $x^{30}$, таковы:

$3^{13}\left(-x^2\right)^0\left(x^5\right)^6 P(13,0,6);$

$3^{10}\left(-x^2\right)^5\left(x^5\right)^4 P(10,5,4);$

$3^{7}\left(-x^2\right)^{10}\left(x^5\right)^2 P(7,10,5);$

$3^{4}\left(-x^2\right)^{15}\left(x^5\right)^0 P(4,15,0).$

В итоге, коэффициент при $x^{30}$ имеет вид:

$$19!\left(\frac{3^{13}}{13!0!6!}-\frac{3^{10}}{10!5!4!}+\frac{3^7}{7!10!2!}-\frac{3^4}{4!15!0!}\right)$$

Значение $P$ и $k$ к заданию 3.7 по вариантам представлены в таблице 3.7.

Таблица 3.7 – Значение $P$ и $k$ к заданию 3.7

| **№ варианта** | $k$ | $P$ |
|---|---|---|
| 1 | 23 | $\left(2+x^2-x^3\right)^{13}$ |
| 2 | 30 | $\left(3-x^2+x^7\right)^{16}$ |
| 3 | 18 | $\left(2+x^6-x^2\right)^{9}$ |
| 4 | 22 | $\left(3-x^2+x^5\right)^{12}$ |
| 5 | 27 | $\left(3+x^3+x^9\right)^{9}$ |
| 6 | 48 | $\left(3+x^5-x^3\right)^{16}$ |
| 7 | 46 | $\left(1-x^4+x^6\right)^{14}$ |
| 8 | 40 | $\left(3+x^3-x^4\right)^{13}$ |
| 9 | 17 | $\left(7-x+x^4\right)^{14}$ |
| 10 | 34 | $\left(4+x^2-x^5\right)^{17}$ |
| 11 | 13 | $\left(2+x^2-x^3\right)^{13}$ |
| 12 | 24 | $\left(3-x^2+x^7\right)^{16}$ |
| 13 | 22 | $\left(2+x^6-x^2\right)^{9}$ |
| 14 | 30 | $\left(3-x^2+x^5\right)^{12}$ |
| 15 | 24 | $\left(3+x^3+x^9\right)^{9}$ |
| 16 | 45 | $\left(3+x^5-x^3\right)^{16}$ |
| 17 | 26 | $\left(1-x^4+x^6\right)^{14}$ |
| 18 | 38 | $\left(3+x^3-x^4\right)^{13}$ |
| 19 | 15 | $\left(7-x+x^4\right)^{14}$ |
| 20 | 36 | $\left(4+x^2-x^5\right)^{17}$ |

# ТЕМА 4: ГРАФЫ

## Справочный материал

### Задача построения минимального остовного дерева

В экономических приложениях графы принято называть сетями, а их вершины – узлами. Каждому ребру (дуге) придают некоторое числовое значение, которое в зависимости от смысла задачи может обозначать расстояние, пропускную способность, время и т.д. С каждым видом сети связан определенный тип потоков (например, поток нефти в нефтепроводах, автомобильные потоки в сети городских дорог).

**Определение 4.1. Остовным деревом** сети называется дерево, содержащее все узлы сети.

При изучении сетей возникает задача построения кратчайшего остовного дерева, т.е. задача соединения всех узлов сети с помощью путей наименьшей длины. Примером такой задачи является проектирование сети дорог, соединяющих населенные пункты, где дороги, соединяющие два пункта, могут проходить через другие населенные пункты. Наиболее экономичный проект должен минимизировать общую длину дорог.

Задачу о кратчайшем остовном дереве называют также задачей о минимальном покрывающем дереве или задачей о построении оптимального каркаса. Здесь слова «минимальное», «кратчайшее» и «оптимальное» означают «имеющее минимально возможный вес». На рисунке 4.1 приведен пример связного графа и его минимального остовного дерева (остова).

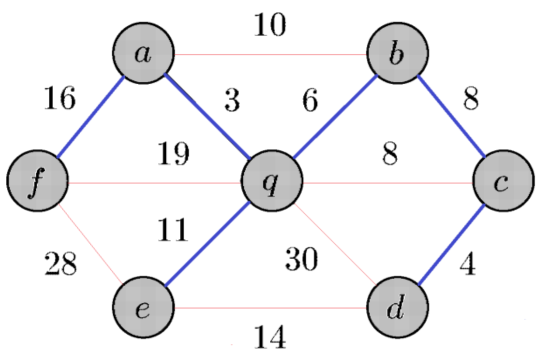



Рисунок 4.1 – Пример остовного дерева в связном графе

На каждом ребре данного графа указан его вес – целое положительное число. Утолщенными линиями выделены ребра минимального покрывающего дерева (суммарный вес всех его ребер равен 48). Такое дерево не единственное: например, заменяя ребро ($b$, $c$) ребром ($c$,$q$), мы получим другое дерево того же веса 48.

Хорошо известны два способа решения задачи о минимальном покрывающем дереве — алгоритм Крускала и алгоритм Прима. Оба алгоритма следуют так называемой жадной стратегии, сущность которой состоит в том, что на каждом шаге алгоритма выбирается «локально наилучший вариант». Не для всех задач такой выбор приведет к оптимальному решению, но для задачи о покрывающем дереве он ведет к положительному решению. Алгоритмы Крускала и Прима являются конкретными реализациями общей схемы алгоритма построения минимального остова (добавление ребер одного за другим).

Опишем сначала общую схему алгоритма построения минимального остова.

Пусть заданы связный неориентированный граф $G(V,E)$ и весовая функция $\omega : E \to R$, где $R$ – множество действительных чисел. Необходимо найти минимальное покрывающее дерево, следуя стратегии «жадного алгоритма». Искомый остов строится постепенно: к изначально пустому множеству $A$ ребер на каждом шаге добавляется одно ребро. Множество $A$ всегда является подмножеством некоторого минимального остова. Ребро $(u,\upsilon)$, добавляемое на очередном шаге, выбирается так, чтобы $A \cup \{(u,\upsilon)\}$ было подмножеством минимального остова. В этом случае ребро $(u,\upsilon)$ называют **безопасным ребром** для множества *A*. До тех пор, пока множество *A* не станет минимальным остовом, продолжаем включать в *A* некоторые безопасные ребра.

Добавляемое ребро соединяет различные компоненты связности графа $G_A(V,A)$, и с каждой итерацией цикла число компонент связности уменьшается на 1. Сначала каждая вершина представляет собой отдельную компоненту; в конце концов, весь остов становится одной компонентой, так что цикл повторяется $|V|-1$ раз.

Для описания правила нахождения безопасных ребер введем следующие определения.

**Определение 4.2. Разрезом** $(S, V \setminus S)$ неориентированного графа $G(V,E)$ называется разбиение множества его вершин на два подмножества. Говорят, что ребро $(u,\upsilon) \in E$ пересекает разрез $(S, V \setminus S)$, если один из его концов лежит во множестве $S$, а другой — во множестве $V \setminus S$.

**Определение 4.3**. Разрез называется **согласованным** с множеством ребер *A*, если ни одно ребро из множества *A* не пересекает этот разрез.

Ребро, пересекающее разрез, является **легким**, если оно имеет минимальный вес среди всех ребер, пересекающих разрез.

На рисунке 4.2 вершины множества $S$ изображены серым цветом, а вершины множества $V \setminus S$ – белым. Единственное легкое ребро, пересекающее разрез $(S, V \setminus S)$, – ребро (*b*, c). Множество *A* состоит из утолщенных ребер.

Разрез $(S,V \setminus S)$ согласован с множеством $A$, так как ни одно ребро из этого множества не пересекает разрез.

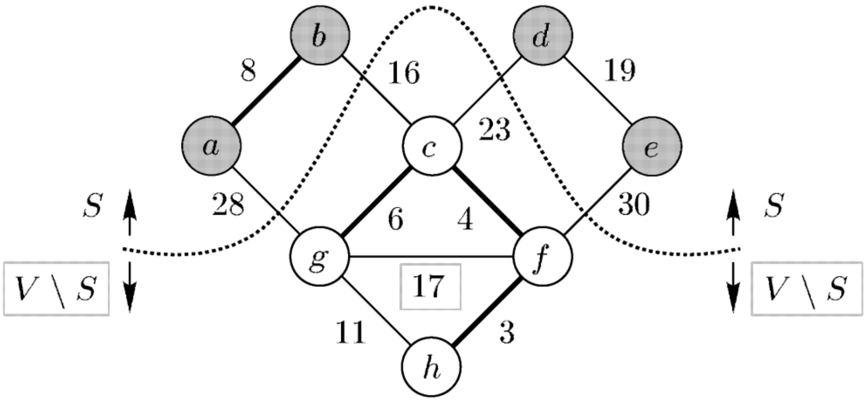



Рисунок 4.2 – Разрез графа (изображен пунктирной линией)

На рисунке 4.3 вершины множества $S$ изображены слева серым цветом, вершины $V \setminus S$ – справа белым цветом. Ребро пересекает разрез, если оно пересекает вертикальную пунктирную прямую.

Таким образом, имеем два изображения одного и того же разреза $(S,V \setminus S)$ одного и того же графа. Имеет место следующая теорема.

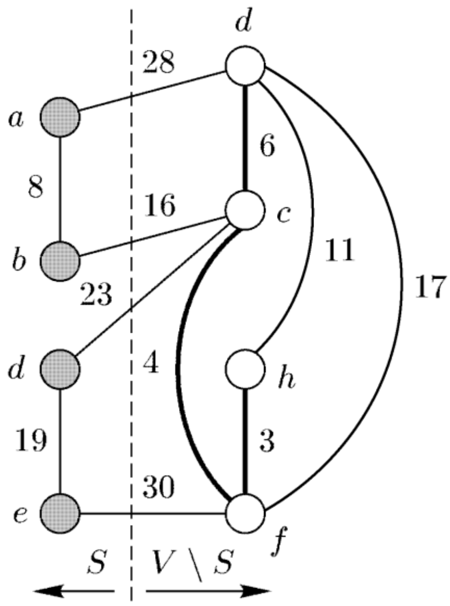



Рисунок 4.3 – Другое изображение того же разреза, что и на рисунке 4.2

**Теорема 4.1**. Пусть $G(V,E)$ – связный неориентированный граф, на множестве ребер которого определена вещественная функция $\omega: E \to R$. Пусть $A$ – множество ребер, являющееся подмножеством некоторого минимального остова графа $G$. Пусть, кроме того, $(S,V \setminus S)$ – разрез графа $G$, согласованный с множеством $A$, а $(u,\upsilon)$ – легкое ребро этого разреза. Тогда ребро $(u,\upsilon)$ является безопасным для множества $A$.

**Следствие к теореме 4.1**. Пусть $G(V,E)$ – связный неориентированный граф и на множестве $E$ его вершин определена весовая функция $\omega$. Пусть $A$ — множество ребер графа, являющееся подмножеством некоторого минимального остова. Рассмотрим лес $G_A(V,A)$. Пусть дерево $C$ – одна из связных компонент леса $G_A$. Рассмотрим все ребра графа, соединяющие вершины из дерева $C$ с вершинами, не содержащимися в дереве $C$, и возьмем среди них ребро наименьшего веса. Тогда это ребро безопасно для множества $A$.

Указанные в настоящей лекции алгоритмы Крускала и Прима следуют описанной выше схеме, но по-разному выбирают безопасное ребро.

В алгоритме Крускала множество ребер $A$ представляет собой лес, состоящий из нескольких связных компонент (деревьев). Добавляется ребро минимального веса из всех ребер, концы которых лежат в разных компонентах.

В алгоритме Прима множество $A$ представляет собой одно дерево. Безопасное ребро, добавляемое к множеству $A$, выбирается как ребро наименьшего веса, соединяющее это уже построенное дерево с некоторой новой вершиной. Алгоритм Прима называют также алгоритмом ближайшего соседа.

**Алгоритм Крускала.** В алгоритме Крускала строится последовательность частичных графов $G(V,A_k)$. Начальное множество $A_0$ принимается пустым, так что граф $G(V,A_0)$ состоит из $|V|$ изолированных вершин. На каждом шаге $k$ мы имеем граф, состоящий из нескольких компонент связности; каждая компонента – это дерево. Среди всех ребер, соединяющих вершины из разных компонент, берется ребро наименьшего веса. Надо проверить, что оно является безопасным. Пусть $(u,\upsilon)$ – ребро, соединяющее вершины из компонент $A_{k-1}$ и $A_k$. Поскольку $(u,\upsilon)$ имеет наименьший вес, оно является легким ребром для $(A_{k-1},V \setminus A_{k-1})$, в таком случае можно воспользоваться доказанной выше теоремой 1 или следствием из этой теоремы. Добавляем ребро $(u,\upsilon)$ к дереву $A_{k-1}$ и объединяем множества $A_{k-1}$ и $A_k$, т. е. $A_{k-1} := A_{k-1} \cup A_k$ (при этом множество $A_k$ удаляется). Процесс продолжается до тех пор, пока число компонент связности не станет равным 1.

Остается уточнить порядок выбора ребер. Упорядочим множество ребер по возрастанию их весов, а затем будем просматривать их в этом порядке. Если очередное ребро соединяет вершины из одной компоненты связности, то это ребро «отвергается» (оно не является ребром минимального остова). Выбранное таким образом множество ребер и является минимальным покрывающим деревом исходного графа.

Алгоритм Крускала является эффективным алгоритмом нахождения кратчайшего остовного дерева, что, в свою очередь, имеет большое значение для решения различных прикладных задач на графах, в том числе на различных сетях автоматизированных систем связи.

**Пример 4.1.** Постройте остовное дерево минимального веса, используя алгоритм Крускала.

**Решение:** Рассмотрим неориентированный граф $G(V,E)$, изображенный на рисунке 4.4, в котором $V = \{a, b, c, d, e, f, q\}$ – множество вершин и $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, a), (a, q), (b, q), (c, q), (d, q), (e, q), (f, q)\}$ – множество ребер соответственно с весами 10, 8, 4, 14, 28, 16, 3, 6, 8, 30, 11 и 19.

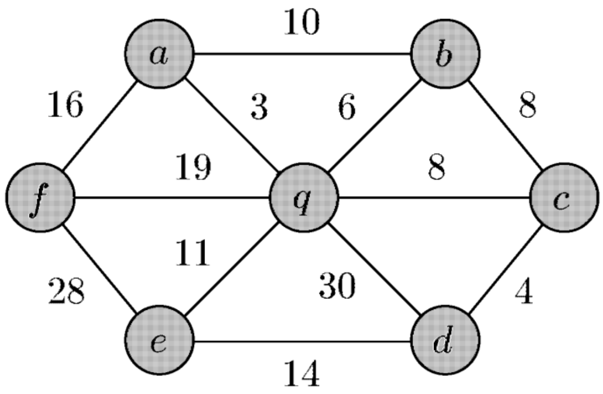



Рисунок 4.4 – Неориентированный граф

Имеем 7 компонент связности: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{e\}$, $\{f\}$, $\{q\}$. Последовательность построения остовного дерева приведем в виде таблице 4.1.

Таблица 4.1 – Последовательность построения остовного дерева

| **Номер шага** | **Ребро** | **Действие** | **Компоненты связности** |
|---|---|---|---|
| 1 | $(a,q)$ | Добавить | $\{a, q\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$,$\{e\}$,$\{f\}$ |
| 2 | $(c,d)$ | Добавить | $\{a, q\}$, $\{b\}$, $\{c,d\}$, $\{e\}$,$\{f\}$ |
| 3 | $(b,q)$ | Добавить | $\{a, b, q\}$, $\{c,d\}$, $\{e\}$,$\{f\}$ |
| 4 | $(b,c)$ | Добавить | $\{a, b, c, d ,q\}$, $\{e\}$,$\{f\}$ |
| 5 | $(c,q)$ | Отвергнуть | |
| 6 | $(a,b)$ | Отвергнуть | |
| 7 | $(e,q)$ | Добавить | $\{a, b, c, d ,e,q\}$,$\{f\}$ |
| 8 | $(d,e)$ | Отвергнуть | |
| 9 | $(a,f)$ | Добавить | $\{a, b, c, d ,e, f, q\}$ |
| 10 | $(f,q)$ | Отвергнуть | |
| 11 | $(e,f)$ | Отвергнуть | |
| 12 | $(d,q)$ | Отвергнуть | |

Проиллюстрируем работу алгоритма Крускала для рассмотренного примера 4.1 на рисунках 4.5.1-4.5.12 (шаги 1-12). При этом ребра растущего леса будем выделять утолщенными линиями.

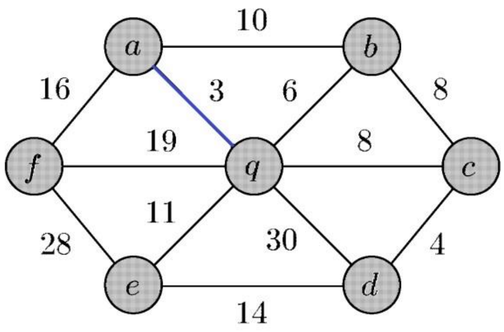



Рисунок 4.5.1

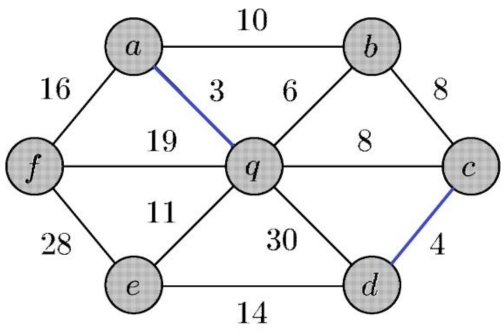



Рисунок 4.5.2

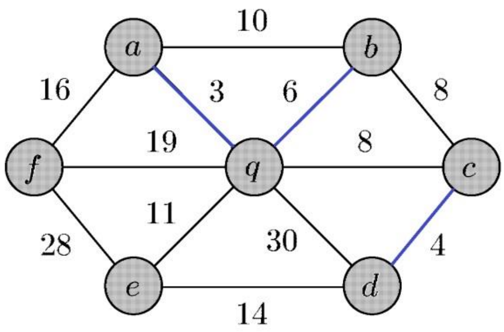



Рисунок 4.5.3

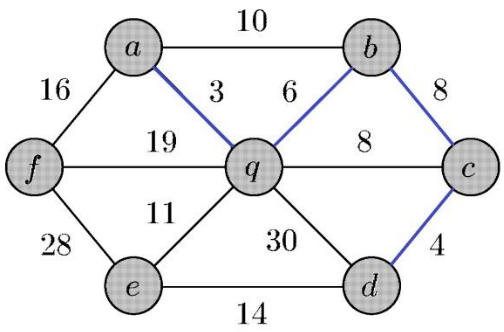



Рисунок 4.5.4

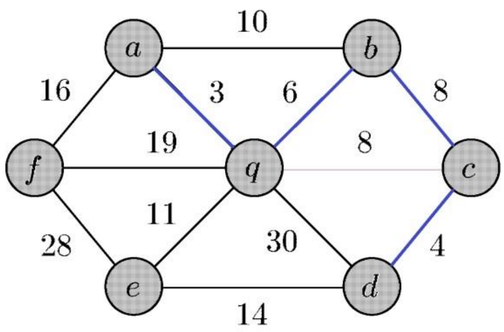



Рисунок 4.5.5

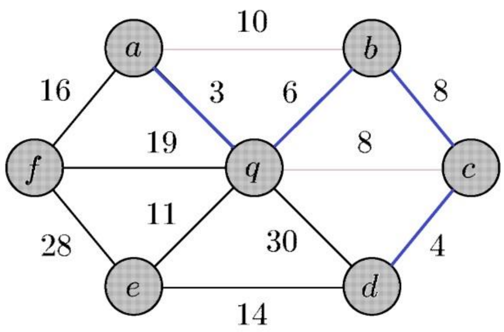



Рисунок 4.5.6

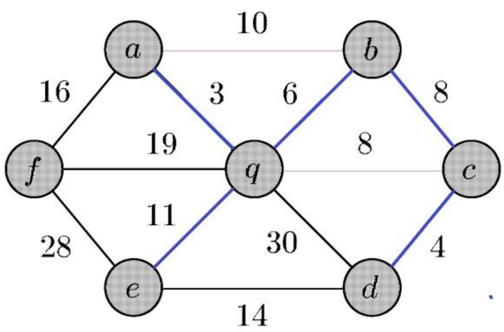



Рисунок 4.5.7

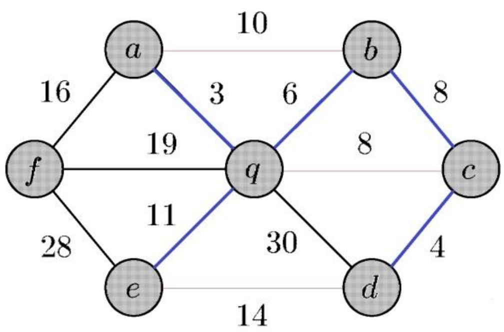



Рисунок 4.5.8

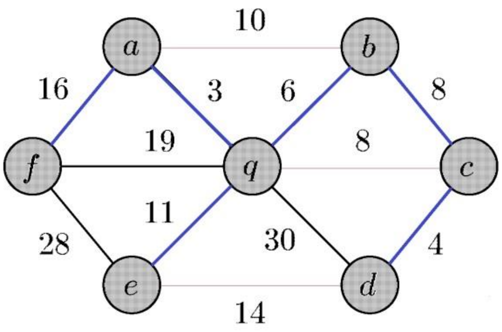



Рисунок 4.5.9

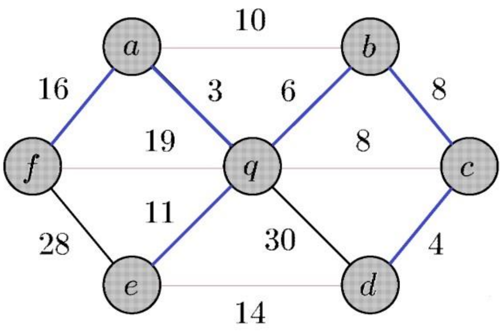



Рисунок 4.5.10

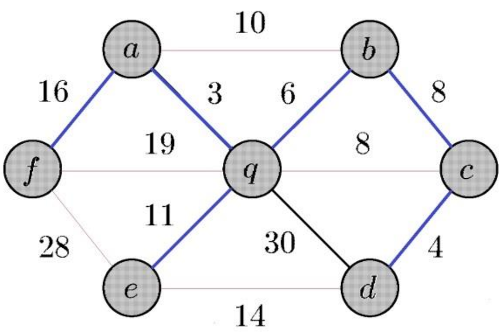



Рисунок 4.5.11

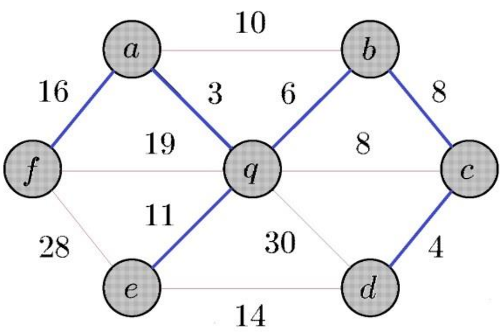



Рисунок 4.5.12

**Алгоритм Прима.** Как и алгоритм Крускала, алгоритм Прима следует общей схеме алгоритма построения минимального остова. В алгоритме Прима растущая часть остова представляет собой дерево (множество ребер которого есть *A*). Формирование дерева начинается с произвольной корневой вершины *r*. На каждом шаге добавляется ребро наименьшего веса $k\left[\upsilon\right]$ из числа ребер, соединяющих вершины этого дерева с вершинами не из дерева. По следствию к теореме 4.1. добавляемые ребра являются безопасными для множества *A*, так что в результате получается минимальный остов.

Рассмотрим процедуру построения минимального остовного дерева.

Обозначим:

$X=\left\{x_1,x_2,...,x_n\right\}$ – множество узлов сети;

$C_k$ – связное множество узлов сети, соединенных алгоритмом после выполнения *k*-й итерации;

$\overline{C_k}$ – множество узлов сети, не соединенных с узлами множества $C_k$ после выполнения *k*-й итерации.

**Алгоритм построения минимального остовного дерева сети:**

1.Выбрать произвольный узел сети $x_i$, $C_1=\left\{x_i\right\}$, $\overline{C_1}=X\setminus\left\{x_i\right\}$.

2.Выбрать из оставшихся узлов узел $x_j$, ближайший к множеству узлов $C_1$, $C_2 = \{x_i, x_j\}$, $\overline{C_2} = X \setminus \{x_i, x_j\}$.

3.Выбрать из множеств $\overline{C_2}$ узел, ближайший к узлам множества $C_2$, включить его в множество $C_3$ и исключить из множества $\overline{C_3}$.

За конечное число шагов будут обработаны все узлы сети и построено минимальное остовное дерево. $C_n = X$, $\overline{C_n} = \varnothing$

**Пример 4.2.** Телевизионная компания планирует подключение к своей кабельной сети пяти новых районов. На рисунке 4.6 показана структура планируемой сети и расстояние (в км.) между районами и телецентром. Необходимо спланировать наиболее экономную кабельную сеть, используя алгоритм Примы.

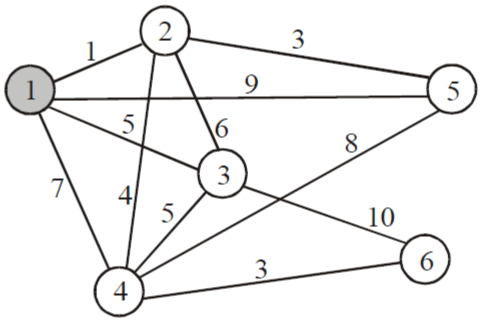



Рисунок 4.6 – Структура планируемой сети

**Решение:** Начнем выполнение алгоритма построения минимального остовного дерева с выбора узла 1 (или любого другого узла).

Шаг 1. $C_1 = \{1\}$, $\overline{C_1} = \{2,3,4,5,6\}$.

Шаг 2. (рисунок 4.6.1) $C_2 = \{1,2\}$, $\overline{C_2} = \{3,4,5,6\}$.

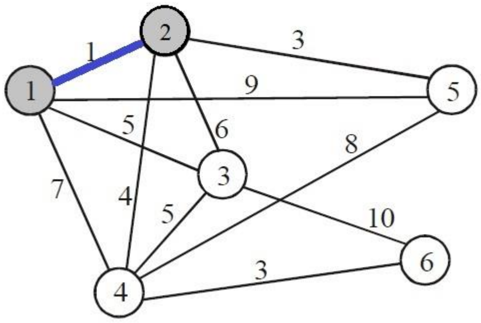



Рисунок 4.6.1 – Шаг 2

Шаг 3. (рисунок 4.6.2) $C_3 = \{1,2,5\}$, $\overline{C_3} = \{3,4,6\}$.

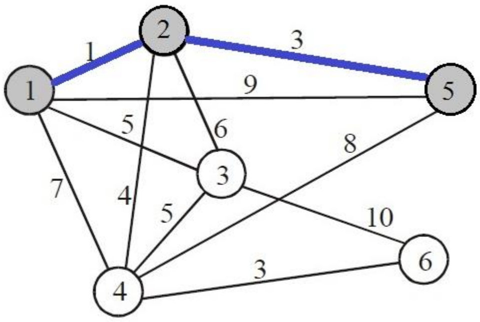



Рисунок 4.6.2 – Шаг 3

Шаг 4. (рисунок 4.6.3) $C_4 = \{1,2,4,5\}$, $\overline{C_4} = \{3,6\}$.

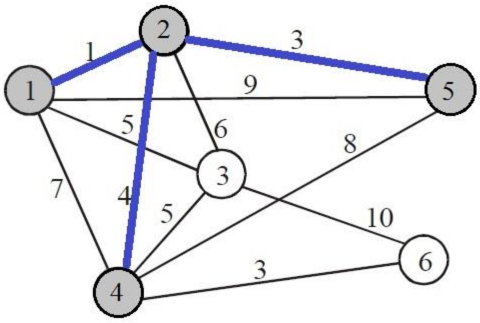



Рисунок 4.6.3 – Шаг 4

Шаг 5. (рисунок 4.6.4) $C_5 = \{1,2,4,5,6\}$, $\overline{C_5} = \{3\}$.

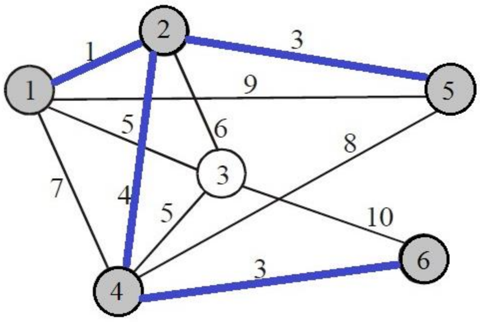



Рисунок 4.6.4 – Шаг 5

Шаг 6. (рисунок 4.6.5) $C_6 = \{1,2,3,4,5,6\}$, $\overline{C_6} = \varnothing$.

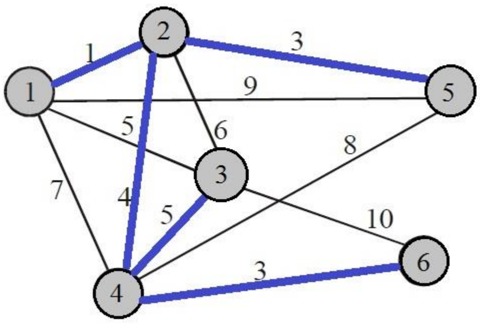



Рисунок 4.6.5 – Шаг 6

Минимальная длина кабеля для построения такой сети равна 1+3+4+3+5=16 км.

Также можно построить альтернативный план (Рисунок 4.6.6):

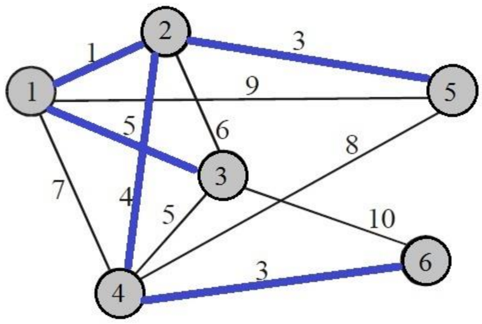



Рисунок 4.6.6 – Альтернативный план

Минимальная длина кабеля для построения такой сети равна 1+3+4+3+5=16 км.

**Задача нахождения кратчайшего пути**

**Постановка задачи нахождения кратчайших путей от фиксированной вершины.** Пусть задан ориентированный граф *G* = (*V, E*), дугам которого приписаны веса. Это означает, что каждой дуге $(u,\upsilon)\in E$ поставлено в соответствие некоторое вещественное число $\rho(u,\upsilon)$, называемое **весом** данной дуги $l(u,\upsilon)$. В этом случае граф *G* называют **взвешенным** или **нагруженным**. Функция $\rho: E \to R$ называется **весовой функцией**. Значение функции $\rho(u,\upsilon)=\rho(l)=r$ называется **длиной дуги** $l$. Кроме того, полагается $\rho(u,u)=0$.

Если последовательность вершин $\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_k$ определяет некоторый путь в графе *G*, то его длина определяется суммой к $\sum_{i=1}^{k}\rho(\upsilon_{i-1},\upsilon_i)$ при этом каждая дуга учитывается столько раз, сколько раз она входит в путь. Указанную сумму можно также трактовать как обычное определение длины пути (числа дуг), если принять вес каждой дуги равным единице. Таким образом, любой ненагруженный граф можно считать нагруженным с длинами дуг, равными 1.

Нас, прежде всего, будет интересовать нахождение кратчайшего пути между фиксированными вершинами $u,\upsilon\in G$. Длину такого кратчайшего пути мы будем обозначать через $d(u,\upsilon)$ и называть расстоянием от вершины $u$ до вершины $\upsilon$ (расстояние, определенное таким образом, может быть и отрицательным, так как отрицательными могут быть веса дуг). Если не существует ни одного пути из вершины $u$ в вершину $\upsilon$, то полагаем $d(u,\upsilon)=\infty$. Отметим, что если каждый контур графа имеет положительную длину, то в последовательности $\upsilon_0,\upsilon_1,...,\upsilon_k$ не будет повторений. С другой стороны, если в графе существует контур отрицательной длины, то расстояние между некоторыми парами вершин становится неопределенным, поскольку обходя этот контур достаточное число раз, мы можем показать путь между этими вершинами с длиной, меньшей произвольного вещественного числа. Если в нагруженном графе $G$ имеются замкнутые пути отрицательной длины, то для заданных вершин $u$ и $\upsilon$ орграфа $G$, где $u \neq \upsilon$ минимального пути из вершины $u$ в вершину $\upsilon$ не существует.

Можно привести много практических интерпретаций задачи о нахождении кратчайших путей. Например:

1) бортовые компьютеры современных автомобилей позволяют находить трассу кратчайшего пути;

2) маршрутизаторы, являющиеся важнейшими элементами глобальной компьютерной сети Internet, определяют кратчайший маршрут доставки сообщения с одного сервера на другой;

3) известны точки, в которых расположены населенные пункты, и трассы дорог, которые можно построить между этими населенными пунктами, а также известна стоимость строительства дорог.

Требуется определить, какие из дорог следует построить, чтобы полученная схема дорог позволяла попасть из любого населенного пункта в любой другой населенный пункт и из всех возможных схем имела наименьшую стоимость строительства.

Эти задачи могут быть сформулированы на языке теории графов следующим образом. Для произвольного графа $G = (V, E)$ с заданными весами дуг (ребер) найти длины кратчайших путей, ведущих от выделенной вершины ко всем остальным вершинам графа (в частности, до одной вершины), и определить эти пути.

Существует много различных по эффективности алгоритмов решения сформулированной задачи. Среди этих алгоритмов наибольшее распространение получили:

– алгоритм Дейкстры (появился в 1959 г.) для нахождения кратчайшего пути от фиксированной вершины ко всем остальным вершинам графа с неотрицательными весами дуг;

– алгоритм Флойда, предназначенный для нахождения кратчайших путей между всеми парами вершин графа;

– алгоритм Форда-Беллмана (основан на двух отдельных алгоритмах, предложенных Беллманом в 1958 г. и Фордом в 1962 г.), решающий задачу о кратчайших путях для случая, когда веса ребер могут принимать отрицательные значения.

Существуют различные модификации алгоритмов Дейкстры и Форда-Беллмана.

Вместе с тем для различных видов графов разработано много других алгоритмов нахождения кратчайших путей. Так, если веса дуг – небольшие числа, то для нахождения кратчайших путей из фиксированной вершины можно применить и более эффективные методы. Например, в 1986 г. Ахуджа, Мельхорн, Орлин и Тарьян предложили алгоритм, работающий за время

$O\left(E+\sqrt{\log W}\right)$ в предположении, что веса дуг – целые неотрицательные числа, не превосходящие некоторого положительного целого числа $W$. Эти же авторы привели простой алгоритм, работающий за время $O\left(E+V\log W\right)$. Для случая, когда веса дуг могут быть отрицательными целыми числами, Габов и Тарьян в 1989 г. предложили алгоритм, работающий за время $O\left(\sqrt{|V|}|E|\log\left(|V|\cdot W\right)\right)$,где $W$ – максимум абсолютных величин весов дуг.

Разработкой алгоритмов для решения задачи нахождения кратчайшего пути между всеми парами вершин графа, кроме упоминавшегося Флойда, занимались Лоулер (1976 г.), Уоршолл (1962 г.), Джонсон (1977 г.) и другие.

**Алгоритм Дейкстры** (одного из основоположников программирования как учебной дисциплины, включающей алгоритмические языки, структурное программирование и алгоритмизацию; родился в 1930 г.) – один из первых известных динамических алгоритмов – основан на дух идеях:

– присваивании вершинам графа временных и окончательных меток и формулировке правила пересчета этих меток (пересчет меток называют также релаксацией ребер); при этом окончательные метки и есть длины кратчайших путей;

– использовании экстремального свойства кратчайшего пути: если кратчайший путь из вершины $x$ в вершину $y$ проходит через вершину $z$, то его отрезок от вершины $x$ до вершины $z$ является кратчайшим путем от вершины $x$ до вершины $z$, а его отрезок от вершины $z$ до вершины $y$ является кратчайшим путем от вершины $z$ до вершины $y$.

Алгоритм поиска кратчайшего пути, начиная от вершины $s$, просматривает граф методом поиска в ширину, помечая вершины $x_i$ значениями-метками их расстояний от вершины $s$. Временная метка вершины $x_i$ – это минимальное расстояние от вершины $s$ до вершины $x_i$, когда в определении пути на графе учитываются не все маршруты между этими вершинами.

Алгоритм Дейкстры решает задачу о кратчайших путях от фиксированной вершины для взвешенного орграфа $G = (V, E)$ в котором веса всех дуг неотрицательны ($\rho\left(u,\upsilon\right)\geq 0$), ко всем остальным вершинам этого графа. В процессе работы алгоритма Дейкстры поддерживается множество $S\subset V$, состоящее из вершин $\upsilon$, для которых расстояние $d\left(s,\upsilon\right)$ уже найдено. Алгоритм выбирает вершину $u$ из очереди $T=V\setminus S$ с наименьшим расстоянием $d\left(s,\upsilon\right)$, добавляет вершину $u$ к множеству $S$ и производит пересчет меток всех вершин из очереди $T$, с которыми связаны вершины из множества $S$, в цикле до тех пор, пока очередь $T$ не станет пустой. При этом в цикле новые вершины в очередь $T$ не добавляются и каждая вершина, удаляемая из очереди $T$, добавляется к множеству $S$ лишь один раз. Следовательно, число итераций в цикле равно $|V|$.

Таким образом, текущее состояние вычислительного процесса состоит в том, что все множество $V$ вершин графа $G = (V, E)$ фактически разбивается на каждом шаге на три подмножества:

– $S$ – множество вершин, расстояние до которых уже вычислено; вначале это подмножество содержит лишь одну начальную вершину — источник $s$, т. е. $S = \{s\}$;

– $M \subset V \setminus S$ – множество вершин, расстояние до которых вычисляется;

– $P \subset V \setminus S$ — множество вершин, расстояние до которых еще не вычислялось; при этом $M \cup P = T = V \setminus S$ .

Опишем более подробно шаги **алгоритма Дейкстры**.

0. Начальное состояние. Обозначим через $s$ начальную вершину, а через $m(x)$ – метку произвольной вершины $x$. Вначале вершине $s$ присваивается окончательная метка 0 (нулевое расстояние до самой себя), т. е. $m(s) = 0$, а всем остальным $|V|-1$ вершинам, $x \in V, x \neq s$, присваивается временная метка $\infty$ (бесконечность), т.е. $m(x) = \infty$. Кроме того, полагаем $S = \{s\}$, $T = V \setminus S$. Здесь под метками подразумевается некоторое расстояние (длина пути) от начальной вершины s до других вершин $x \in V$, т.е. $m(x) = \rho(s,x)$ при этом $\rho(s,s) = 0$. Хотя расстояние $\rho(s,s)$ и не вычисляется, так удобнее для алгоритма.

1. Правило пересчета меток. Пересчитываются только те метки вершин $t \in T$, для которых существуют дуги, ведущие из вершин $y \in S$, по формуле $m(t) = \min\big(m(t), m(y) + \rho(y,t)\big)$.

2. Изменение множеств (массивов) $S$ и $T$. Из вершин, метки которых были пересчитаны, выбираем вершину $t$, имеющую наименьшую метку, и находим множества $S' = S \cup \{t\}, T' = V \setminus S'$.

3. Условие выхода из цикла. Если $S' = S$, то нужно перейти к шагу 4, в противном случае нужно выполнить присваивание $S := S'$, $T := T'$ и перейти к шагу 1.

4. Величина $m(x)$ – длина кратчайшего пути из вершины $s$ в вершину $x$. Если $m(x) = \infty$, то пути из вершины $s$ в вершину $x$ на графе не существует.

Приведенный алгоритм позволяет также восстанавливать кратчайший путь от начальной вершины $s$ к другой вершине $t$. Этот путь восстанавливается по шагам от вершины $t$ до возврата в вершину $s$. Подобное восстановление основано на экстремальном свойстве кратчайшего пути.

Следует отметить высокую эффективность алгоритма Дейкстры и его широкое применение. Тем не менее эффективность алгоритма Дейкстры существенно зависит от того, как организован поиск в очереди $T = V \setminus S$ вершины с наименьшим текущим расстоянием.

**Пример 4.3**. Для орграфа, заданного на рисунке 4.7, используя алгоритм Дейкстры, найдите длины кратчайших путей от вершины s ко всем остальным вершинам и восстановить кратчайшие пути к ним.

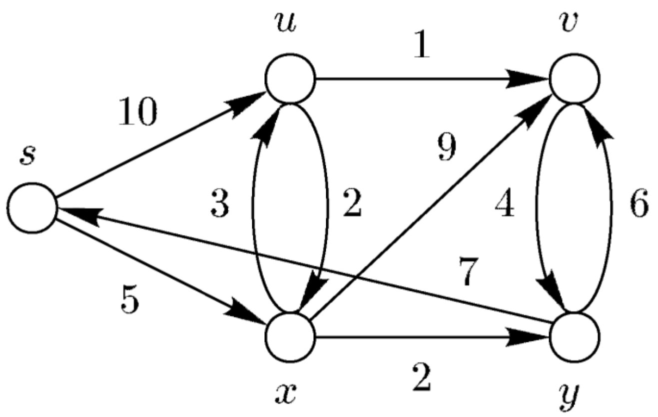



Рисунок 4.7 – Взвешенный орграф

**Решение.** Сведем решение задачи в таблицу 4.2, окончательные метки в которой выделены полужирным шрифтом.

Таблица 4.2

| Номер шага пересчета меток | Множество $S$ | Очередь $T = V \setminus S$ | $s$ | $x$ | $y$ | $u$ | $v$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\{s\}$ | $\{x, y, u, v\}$ | **0** | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ |
| 1 | $\{s, x\}$ | $\{y, u, v\}$ | **0** | **5** | $\infty$ | 10 | $\infty$ |
| 2 | $\{s, x, y\}$ | $\{u, v\}$ | **0** | **5** | **7** | 8 | 14 |
| 3 | $\{s, x, y, u\}$ | $\{v\}$ | **0** | **5** | **7** | **8** | 13 |
| 4 | $\{s, x, y, u, v\}$ | $\varnothing$ | **0** | **5** | **7** | **8** | **9** |

Итак, длины кратчайших путей от вершины $s$ до остальных вершин будут равны

$d(s,x)=5$; $d(s,y)=7$; $d(s,u)=8$; $d(s,\upsilon)=9$.

Кратчайшие пути будут соответственно равны

$s\xrightarrow{5}x$, $s\xrightarrow{5}x\xrightarrow{2}y$, $s\xrightarrow{5}x\xrightarrow{3}u$, $s\xrightarrow{5}x\xrightarrow{3}u\xrightarrow{1}\upsilon$

Восстановление кратчайших путей производится в обратном порядке. Покажем это на примере кратчайшего пути из вершины $s$ в вершину $\upsilon$. Из таблицы 4.3 видно, что последняя метка для вершины $\upsilon$ равна 9. Среди вершин, из которых в вершину $\upsilon$ ведут дуги (это $u$, $x$ и $y$), выбираем такую, чтобы сумма ее метки с длиной дуги, ведущей из нее в вершину $\upsilon$, была равна 9. В нашем случае последнему условию удовлетворяет вершина $u$, так как $m(u)=8$ и дуга $(u,\upsilon)$ имеет длину, равную 1. Тем самым восстановлена последняя дуга кратчайшего пути: $u\xrightarrow{1}\upsilon$. Затем аналогичным образом восстанавливается предшествующая вершина $x$, и наконец, вершина $s$. Отсюда и получается кратчайший путь: $s \xrightarrow{5} x \xrightarrow{3} u \xrightarrow{1} \upsilon$.

На рисунке 4.8 приведена графическая иллюстрация алгоритма Дейкстры. На этом рисунке исходная вершина – крайняя левая. В вершинах указаны оценки длин кратчайших путей. Вершины, закрашенные черным цветом, лежат во множестве S, остальные вершины находятся в очереди T = V \ S. Вершина, заштрихованная серым цветом, имеет минимальную метку и выбирается в качестве очередной вершины при следующей итерации. Утолщенные дуги образуют деревья кратчайших путей с корнем в исходной вершине $s$ на каждом шаге итерации. При окончании работы алгоритма мы получим полное дерево кратчайших путей с корнем в вершине $s$, содержащее кратчайшие пути из вершины $s$ во все достижимые из $s$ вершины. Деревья кратчайших путей аналогичны деревьям поиска в ширину с той разницей, что в рассматриваемом алгоритме кратчайшими объявляются пути с наименьшим весом, а не с наименьшим числом дуг.

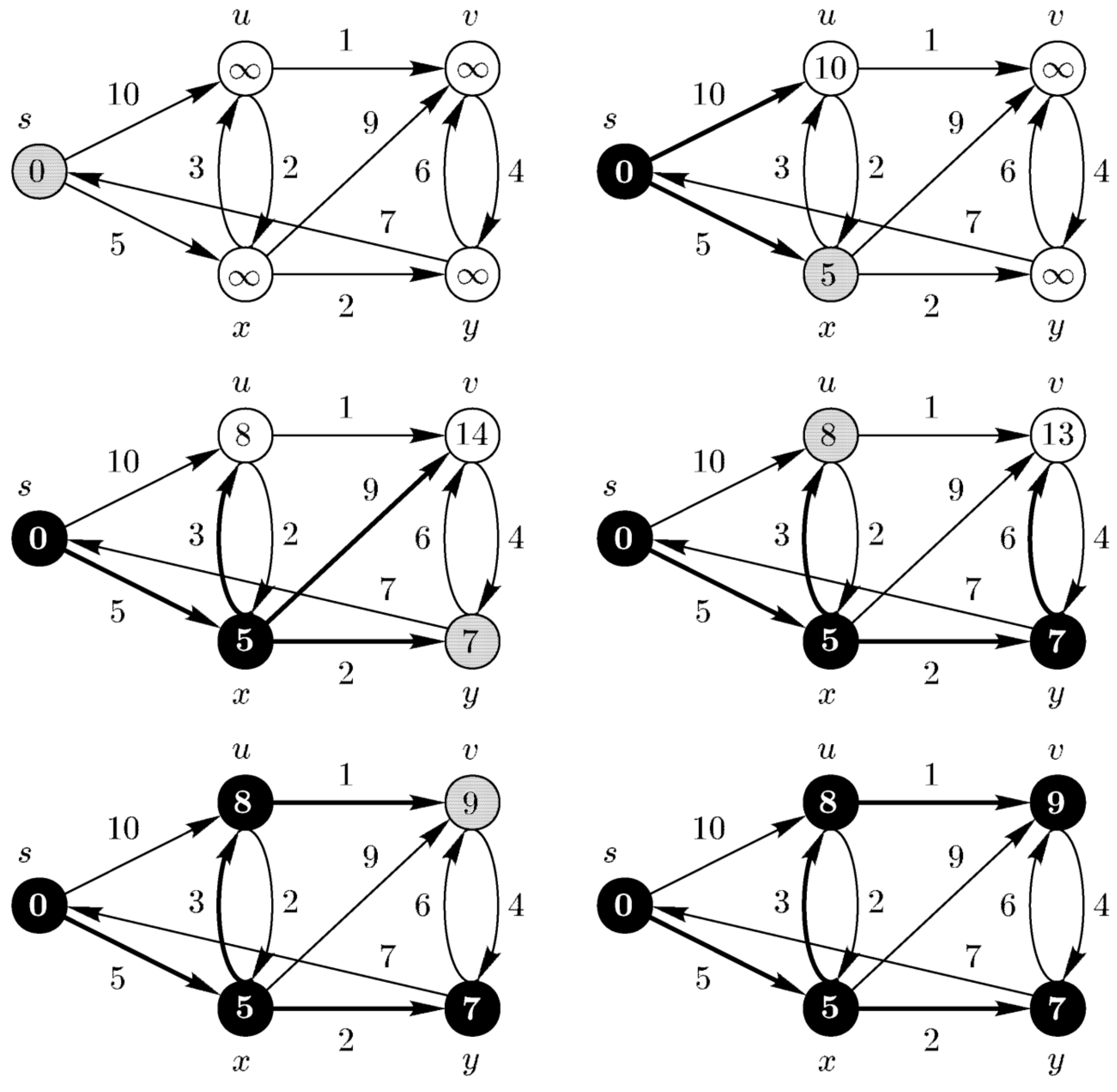



Рисунок 4.8 – Последовательные состояния после каждой итерации алгоритма Дейкстры

## Задания

**Задание 4.1.** Районной администрацией принято решение о газификации одного из небольших сел района, имеющего 10 жилых домов. Расположение домов указано на рисунке 4.9. Числа в кружках обозначают условный номер дома. Узел 11 является газопонижающей станцией. Используя алгоритм Крускала или алгоритм Примы, разработать такой план газификации села, чтобы общая длина трубопроводов была наименьшей.

Значения коэффициентов по вариантам содержится в таблице 4.2.

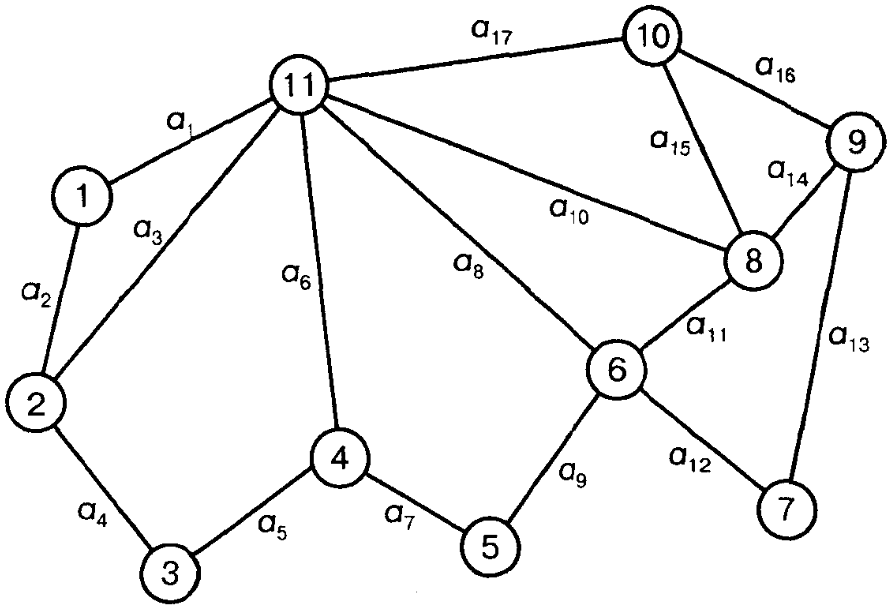



Рисунок 4.9

Таблица 4.3 – Значения коэффициентов к заданию 4.1

| **№ Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 200 | 180 | 220 | 150 | 170 | 190 | 230 | 160 | 210 | 240 |
| $a_2$ | 60 | 70 | 50 | 40 | 80 | 70 | 30 | 100 | 90 | 40 |
| $a_3$ | 250 | 270 | 290 | 220 | 230 | 240 | 280 | 250 | 260 | 300 |
| $a_4$ | 110 | 130 | 120 | 140 | 100 | 150 | 200 | 170 | 190 | 180 |
| $a_5$ | 150 | 140 | 110 | 100 | 120 | 130 | 160 | 150 | 140 | 110 |
| $a_6$ | 300 | 320 | 360 | 390 | 340 | 380 | 390 | 360 | 330 | 400 |
| $a_7$ | 80 | 90 | 70 | 100 | 60 | 50 | 70 | 40 | 50 | 90 |
| $a_8$ | 350 | 370 | 360 | 390 | 340 | 380 | 330 | 390 | 360 | 400 |
| $a_9$ | 120 | 130 | 140 | 190 | 150 | 180 | 170 | 160 | 140 | 160 |
| $a_{10}$ | 400 | 440 | 420 | 430 | 470 | 450 | 410 | 460 | 440 | 470 |
| $a_{11}$ | 210 | 190 | 200 | 210 | 220 | 180 | 230 | 170 | 180 | 190 |
| $a_{12}$ | 40 | 50 | 30 | 60 | 80 | 70 | 90 | 80 | 50 | 40 |
| $a_{13}$ | 120 | 130 | 150 | 120 | 100 | 170 | 160 | 70 | 90 | 110 |

Продолжение таблицы 4.3

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{14}$ | 30 | 40 | 50 | 60 | 30 | 50 | 80 | 70 | 90 | 40 |
| $a_{15}$ | 70 | 50 | 40 | 60 | 30 | 80 | 70 | 90 | 40 | 50 |
| $a_{16}$ | 20 | 40 | 30 | 50 | 30 | 70 | 20 | 60 | 40 | 50 |
| $a_{17}$ | 550 | 580 | 570 | 590 | 530 | 520 | 560 | 630 | 600 | 610 |
| **№ Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $a_1$ | 220 | 160 | 220 | 150 | 150 | 190 | 230 | 160 | 210 | 240 |
| $a_2$ | 50 | 90 | 150 | 420 | 180 | 90 | 300 | 100 | 190 | 140 |
| $a_3$ | 220 | 250 | 290 | 220 | 200 | 240 | 180 | 250 | 260 | 300 |
| $a_4$ | 130 | 110 | 120 | 140 | 120 | 150 | 200 | 170 | 190 | 180 |
| $a_5$ | 160 | 160 | 110 | 300 | 220 | 230 | 260 | 150 | 140 | 110 |
| $a_6$ | 280 | 300 | 360 | 390 | 340 | 380 | 290 | 360 | 330 | 400 |
| $a_7$ | 100 | 110 | 270 | 200 | 160 | 350 | 170 | 40 | 150 | 190 |
| $a_8$ | 320 | 350 | 360 | 390 | 440 | 380 | 330 | 390 | 360 | 400 |
| $a_9$ | 100 | 150 | 140 | 190 | 50 | 180 | 170 | 160 | 140 | 160 |
| $a_{10}$ | 300 | 420 | 420 | 430 | 270 | 450 | 410 | 460 | 440 | 470 |
| $a_{11}$ | 250 | 290 | 200 | 210 | 220 | 180 | 230 | 170 | 180 | 190 |
| $a_{12}$ | 60 | 150 | 130 | 360 | 100 | 170 | 190 | 80 | 50 | 140 |
| $a_{13}$ | 100 | 130 | 150 | 120 | 120 | 70 | 160 | 70 | 90 | 110 |
| $a_{14}$ | 50 | 140 | 150 | 260 | 230 | 250 | 180 | 70 | 60 | 80 |
| $a_{15}$ | 90 | 150 | 240 | 360 | 330 | 80 | 70 | 90 | 140 | 50 |
| $a_{16}$ | 60 | 140 | 330 | 150 | 230 | 70 | 120 | 160 | 140 | 50 |
| $a_{17}$ | 350 | 580 | 570 | 590 | 530 | 520 | 560 | 630 | 600 | 610 |

**Задание 4.2.** Транспортному предприятию требуется перевезти груз из пункта 1 в пункт 14. На рисунке 4.10 показана сеть дорог и стоимость перевозки единицы груза между отдельными пунктами.

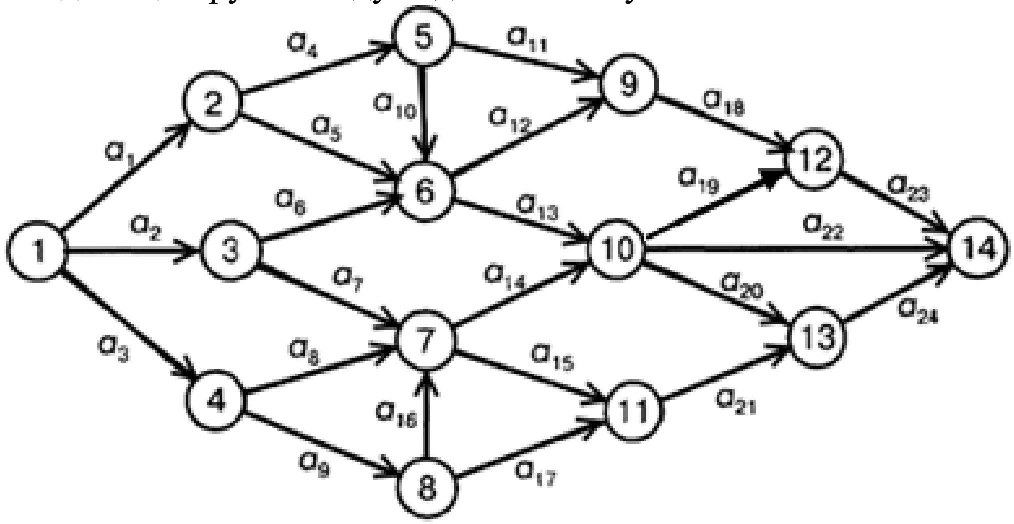


Рисунок 4.10 – Сеть дорог

Используя алгоритм Дейкстры, определите маршрут доставки груза, которому соответствуют наименьшие затраты. Значения коэффициентов содержаться в таблице 4.4.

Таблица 4.4 – Значения коэффициентов к заданию 4.2

| **№ Вариант** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | 20 | 18 | 22 | 15 | 17 | 19 | 23 | 16 | 21 | 24 |
| $a_2$ | 18 | 19 | 21 | 16 | 18 | 21 | 20 | 15 | 19 | 22 |
| $a_3$ | 19 | 17 | 20 | 17 | 16 | 20 | 22 | 17 | 20 | 23 |
| $a_4$ | 11 | 13 | 12 | 14 | 10 | 15 | 20 | 17 | 19 | 18 |
| $a_5$ | 15 | 14 | 11 | 10 | 12 | 13 | 16 | 15 | 16 | 17 |
| $a_6$ | 13 | 15 | 10 | 12 | 13 | 16 | 17 | 16 | 18 | 16 |
| $a_7$ | 12 | 16 | 9 | 11 | 9 | 14 | 19 | 14 | 15 | 19 |
| $a_8$ | 14 | 17 | 13 | 13 | 11 | 18 | 18 | 19 | 17 | 20 |
| $a_9$ | 12 | 18 | 14 | 16 | 15 | 17 | 15 | 18 | 14 | 21 |
| $a_{10}$ | 24 | 21 | 20 | 18 | 17 | 16 | 19 | 16 | 22 | 23 |
| $a_{11}$ | 21 | 19 | 20 | 21 | 22 | 18 | 23 | 17 | 18 | 19 |
| $a_{12}$ | 20 | 22 | 19 | 23 | 18 | 17 | 24 | 16 | 20 | 21 |
| $a_{13}$ | 22 | 21 | 18 | 22 | 21 | 19 | 20 | 18 | 19 | 18 |
| $a_{14}$ | 23 | 23 | 21 | 20 | 19 | 16 | 22 | 15 | 21 | 20 |
| $a_{15}$ | 24 | 18 | 17 | 24 | 20 | 15 | 21 | 19 | 22 | 22 |
| $a_{16}$ | 20 | 21 | 23 | 19 | 22 | 18 | 20 | 16 | 17 | 21 |
| $a_{17}$ | 22 | 17 | 19 | 23 | 18 | 17 | 19 | 22 | 20 | 21 |
| $a_{18}$ | 31 | 32 | 30 | 35 | 37 | 36 | 33 | 36 | 31 | 34 |
| $a_{19}$ | 32 | 33 | 29 | 31 | 36 | 37 | 34 | 35 | 32 | 33 |
| $a_{20}$ | 35 | 37 | 32 | 33 | 34 | 38 | 36 | 31 | 36 | 30 |
| $a_{21}$ | 37 | 36 | 31 | 34 | 36 | 35 | 40 | 37 | 39 | 38 |
| $a_{22}$ | 45 | 41 | 43 | 42 | 44 | 40 | 46 | 45 | 47 | 45 |
| $a_{23}$ | 28 | 32 | 30 | 25 | 26 | 28 | 33 | 31 | 29 | 27 |
| $a_{24}$ | 30 | 31 | 32 | 24 | 25 | 29 | 32 | 33 | 30 | 29 |
| **№ Вариант** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
| $a_1$ | 22 | 20 | 23 | 16 | 18 | 20 | 25 | 18 | 23 | 26 |
| $a_2$ | 20 | 19 | 20 | 14 | 16 | 23 | 22 | 24 | 21 | 23 |
| $a_3$ | 21 | 17 | 21 | 18 | 16 | 22 | 24 | 19 | 20 | 25 |

Продолжение таблицы 4.4

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_4$ | 13 | 13 | 14 | 16 | 12 | 18 | 25 | 14 | 16 | 18 |
| $a_5$ | 17 | 14 | 13 | 11 | 12 | 13 | 16 | 25 | 26 | 17 |
| $a_6$ | 15 | 15 | 12 | 13 | 13 | 16 | 17 | 16 | 18 | 16 |
| $a_7$ | 10 | 16 | 19 | 18 | 16 | 24 | 19 | 24 | 15 | 19 |
| $a_8$ | 12 | 17 | 13 | 15 | 14 | 18 | 18 | 19 | 17 | 20 |
| $a_9$ | 10 | 18 | 14 | 16 | 15 | 17 | 25 | 28 | 24 | 21 |
| $a_{10}$ | 22 | 21 | 21 | 18 | 17 | 19 | 19 | 16 | 22 | 23 |
| $a_{11}$ | 23 | 19 | 20 | 24 | 24 | 18 | 23 | 27 | 18 | 19 |
| $a_{12}$ | 22 | 22 | 19 | 23 | 18 | 27 | 24 | 16 | 20 | 21 |
| $a_{13}$ | 20 | 21 | 18 | 26 | 23 | 19 | 20 | 28 | 19 | 18 |
| $a_{14}$ | 23 | 23 | 23 | 28 | 19 | 16 | 22 | 15 | 21 | 20 |
| $a_{15}$ | 24 | 18 | 17 | 24 | 20 | 25 | 21 | 29 | 22 | 22 |
| $a_{16}$ | 20 | 21 | 21 | 20 | 22 | 18 | 20 | 26 | 17 | 21 |
| $a_{17}$ | 22 | 17 | 19 | 23 | 28 | 27 | 19 | 22 | 18 | 21 |
| $a_{18}$ | 30 | 32 | 31 | 33 | 37 | 36 | 23 | 32 | 21 | 24 |
| $a_{19}$ | 32 | 33 | 29 | 34 | 32 | 37 | 31 | 35 | 32 | 33 |
| $a_{20}$ | 33 | 37 | 32 | 32 | 34 | 38 | 33 | 35 | 36 | 30 |
| $a_{21}$ | 39 | 36 | 31 | 37 | 38 | 35 | 20 | 37 | 39 | 38 |
| $a_{22}$ | 43 | 41 | 40 | 41 | 41 | 38 | 41 | 42 | 37 | 35 |
| $a_{23}$ | 28 | 32 | 32 | 26 | 28 | 28 | 33 | 31 | 29 | 27 |
| $a_{24}$ | 30 | 31 | 32 | 24 | 25 | 29 | 32 | 33 | 30 | 29 |

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Быкова, В.В. Комбинаторные алгоритмы: множества, графы, коды / В.В. Быкова; Сибирский федеральный университет. – Красноярск: Сибирский федеральный университет (СФУ), 2015. – 152 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=435666.

2. Иванов, Б.Н. Дискретная математика: алгоритмы и программы: полный курс / Б.Н. Иванов. – Москва: Физматлит, 2007. – 407 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=75502.

3. Иванисова, О.В. Дискретная математика и математическая логика: учебное пособие: [12+] / О.В. Иванисова, И.В. Сухан. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2020. – 354с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=600488.

4. Дроздов, С.Н. Структуры и алгоритмы обработки данных: учебное пособие / С.Н. Дроздов; Южный федеральный университет, Инженерно-технологическая академия. – Таганрог: Южный федеральный университет, 2016. – 228 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=493032.

5. Кожухов, С. Ф. Сборник задач по дискретной математике: учебное пособие / С. Ф. Кожухов, П. И. Совертков. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2018. – 324 с. – ISBN 978-5-8114-2588-4. – Текст: электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/102606.

6. Окулов, С.М. Дискретная математика: теория и практика решения задач по информатике: [16+] / С.М. Окулов. – 4-е изд., электрон. – Москва : Лаборатория знаний, 2020. – 425 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=222848.

7. Судоплатов, С.В. Дискретная математика: учебник: [16+] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – 4-е изд. – Новосибирск: Новосибирский государственный технический университет, 2012. – 278 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135675.

8. Хаггарти, Р. Дискретная математика для программистов : учебное пособие / Р. Хаггарти ; пер. с англ. под ред. С.А. Кулешова; пер. с англ. А.А. Ковалева, В.А. Головешкина, М.В. Ульянова. – изд. 2-е, испр. – Москва: РИЦ Техносфера, 2012. – 400 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=89024.

9. Царёв, Р.Ю. Алгоритмы и структуры данных (CDIO): учебник / Р.Ю. Царёв, А.В. Прокопенко; Сибирский федеральный университет. – Красноярск: Сибирский федеральный университет (СФУ), 2016. – 204 с. – URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=497016.

10. Шевелев, Ю. П. Дискретная математика : учебное пособие / Ю. П. Шевелев. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 592 с. – ISBN 978-5-8114-4284-3. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/118616

Шевченко Алеся Сергеевна

**СТРУКТУРЫ ДАННЫХ**

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов направления 09.03.01«Информатика и вычислительная техника» всех форм обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати __.__.19. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 5,75. Тираж 25 экз. Зак. Рег. № .

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.