МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Рубцовский индустриальный институт**
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

**А.С. Шевченко**

# ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебное пособие для студентов третьего курса
направления 09.03.01«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2021

УДК 519.813

Шевченко А.С. Принятие решений в условиях конфликта и неопределенности: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 90 с.

Учебное пособие содержит теоретические сведения, необходимые для изучения темы «Принятие решений в условиях конфликта и неопределенности». Изложение сопровождается примерами решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и 20 вариантов для контрольной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

.

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.
Протокол № 7 от 26.02.2021г.

Рецензент: к.т.н., доцент,
Заместитель директора по УР А.В. Шашок

Содержание

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема принятия решений волнует человека с давних времен. Однако часто в природе и в обществе встречаются явления, в которых участники имеют несовпадающие интересы и обладают различными средствами для достижения цели. Такие явления называются конфликтными. Раздел математики, изучающий конфликты, называется теорией игр. Согласно Н.Н. Воробьеву [3], под конфликтом следует понимать всякое явление, применительно к которому сложно говорить, кто и как в этом явлении участвует, какие исходы могут быть у данного явления, кто в этих исходах заинтересован и в чем эта заинтересованность состоит. Особенностью конфликта является то, что ни один из участников, как правило, не знает решений, принимаемых остальными участниками, т.е. вынужден действовать в условиях неопределенности. Данная теория находит широкое применение в различных областях человеческой деятельности, таких как экономика, военное дело, торговля, промышленность, сельское хозяйство, транспорт и т.д.

Пособие состоит из четырех тем: «Основные понятия теории игр и их классификация», «Матричные игры», «Кооперативные игры» и «Статистические игры».

В нем содержатся теоретические сведения по указанным темам, примеры решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и 20 вариантов для контрольной работы.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения направления подготовки «Информатика и вычислительная техника» при изучении дисциплины «Системный анализ и принятие решений».

# 1 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

## 1.1. Введение

*Теория игр* [4] представляет собой комплекс математических моделей и логико - математический аппарат для анализа и разработки стратегий и принятия оптимальных решений в условиях конфликта интересов и неопределенности поведения. Изучение и использование инструментария теории игр становится неотъемлемой частью современного экономического образования, поскольку теоретико - игровые подходы стали одним из основных инструментов экономического анализа. Теория игр, с одной стороны, сыграла ключевую роль в становлении современной экономической теории, а с другой - предлагает пути и методы решения сложных стратегических задач в самых различных областях.

Логические пути нахождения оптимальных стратегий в математической формулировке предлагались еще вначале XVII в. (Баше де Мазурок). Проблемы производства и ценообразования в условиях олигополии, которые позднее стали хрестоматийными в теории игр, разбирались в XIX в. в работах А. Курно и Ж. Бертрана. Идея создания математической теории игры как конфликта интересов формируется с начала XX в. в трудах Э. Ласкера, Э. Цермело, Э. Бореля. Отдельные разработки в области теории игр начали публиковаться с 1920-х гг., но систематическое изложение основ теории игр было представлено в 1944 г. в монографии Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение». Название и содержание этой монографии указывали на то, что теория игр претендовала на революцию в экономических науках благодаря использованию нового подхода. Год ее первого издания и стал считаться годом рождения теории игр.

Дальнейшее развитие теория игр получила в трудах американского математика Дж. Нэша, в которых он разработал принципы «управленческой динамики». Упомянутый труд Неймана и Моргенштерна получил известность благодаря преимущественно исследованию антагонистических игр, в которых победа одной стороны одновременно означает поражение другой, хотя в их книге не меньшее внимание уделено анализу игр с не противоположными интересами. Анализируя как различные управленческие стратегии в экономике и бизнесе, так и стратегии поведенческие, Нэш отметил, что в условиях антагонизма эти стратегии всегда приводят к тому, что кто-то всегда выигрывает, а кто-то другой всегда проигрывает, т. е. всегда есть победители и проигравшие. Дж. Нэш задался вопросом: как найти равновесие, в котором нет победителей и побежденных – никто не выиграл, но никто и не проиграл? Такие стратегии сделали бы революцию в переговорах, решении конфликтов и поиске других компромиссных решений.

Нэш разработал методы анализа, в которых все участники или выигрывают, или терпят поражение. Примером такой игры могут быть переговоры об увеличении зарплаты между профсоюзом и руководством компании. Эта ситуация может завершиться либо длительной забастовкой, в которой пострадают обе стороны, либо достижением взаимовыгодного соглашения. Нэш смоделировал ситуацию, впоследствии получившую название «равновесие по Нэшу», или «некооперативное равновесие», при которой обе стороны используют оптимальную стратегию, что и приводит к созданию устойчивого равновесия. Игрокам выгодно сохранять это равновесие, так как любое изменение ухудшит их положение.

Дж. Нэш показал, что классический подход А. Смита к экономическому развитию (двигатель развития − конкуренция, при которой «каждый сам за себя») − не оптимален. Более эффективны стратегии, когда каждый старается сделать лучше для себя, делая лучше для других. Так фактически произошел переворот всего, на чем строилась экономическая теория на протяжении 150 лет.

Первоначально теория игр представлялась весьма формализованной, интересной лишь математикам. Но уже с 1950-х гг. начинаются попытки применить методы теории игр не только в экономике, но и в биологии, кибернетике, технике, антропологии. А еще во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней мощный аппарат для исследования стратегических решений.

Теория игр прошла различные этапы своего развития с разной степенью интереса к ней. В 1950-х гг. применение ее методов казалось чрезвычайно перспективным, но в 1960 – 1970-х гг. интерес к теории игр угас, несмотря на значительные математические результаты, полученные в ее рамках. Но с середины 1980-х гг. начинается активное практическое освоение методов теории игр, и сейчас вряд ли можно найти дисциплины, связанные с экономикой и бизнесом (микро - и макроэкономика, финансы, маркетинг, менеджмент и т. д.), в которых основные концепции теории игр не были бы необходимыми для понимания современной литературы по этим дисциплинам.

В ходе своего развития теория игр превратилась в общую логико-математическую теорию конфликтов. На основе теории игр можно осуществить анализ конфликтных явлений и процессов, наметить и спрогнозировать сценарии поведения сторон, участвующих в конфликте, предложить рекомендации по его разрешению и предотвращению опасных последствий.

За последние 20 - 30 лет значение теории игр и интерес к ней существенно возросли во многих областях экономических и социальных наук, а современная экономическая теория без нее просто невозможна. Сейчас ведется большая работа, направленная на расширение сферы применения теории игр. В настоящее время эта теория является, с одной стороны, достаточно абстрактным математическим направлением, с другой – довольно эффективным инструментом анализа и исследования экономических, политических, правовых, военных, технических и других проблемных ситуаций. Известны приложения теории игр в сферах сельского хозяйства, медицины, экологии, спорта, антропологии, психологии, педагогики, социологии и др.

Теория игр в современной экономике и бизнесе имеет самые разнообразные практические приложения. Ее аппарат может использоваться для анализа ситуаций, связанных с необходимостью принятия стратегических решений, конкуренцией, кооперацией, риском и неопределенностью. На макроуровне теория игр применяется, например, при принятии решений о международной торговле, конкуренции, налогообложении, о протекционистских действиях стран или в создании картелей типа ОПЕК и последующей оценке вклада каждого из его участников при соответствующем распределении прибылей. На микроуровне теория игр может помочь, например, в определении оптимальных затрат на рекламу в условиях конкурентного рынка, организации производства или выработке наилучшего поведения во время торгов (аукционов). На основе теории игр можно принимать решения об объединении компаний для осуществления совместных проектов, построения прогнозных сценариев поведения конкурентов, нахождения механизмов межрегиональных взаимодействий и схем распределения доходов. Теоретико - игровые модели используются при планировании и прогнозировании, разработке стратегий развития компаний, определении ценовой политики, ведении переговоров, в частности при согласовании интересов и взаимоотношений компаний - партнеров, собственников активов, работодателей и работников, а также других агентов экономической деятельности. Известны случаи, когда с помощью теории игр анализировалось даже поведение мафиозных группировок и выстраивались стратегии политической борьбы.

Теория игр обеспечивает:

− формальный и четкий язык исследования различных экономических явлений, процессов и систем;

− возможность проверки решений, вырабатываемых интуитивно или на уровне здравого смысла, на согласованность и применимость к решаемой проблеме;

− принципы, критерии и методы нахождения оптимальных решений.

Одним из хрестоматийных и самых ярких примеров успешного применения теории игр является организация и проведение Федеральной комиссией по связи США в 1994 г. аукциона на право использования частот для операторов мобильной связи. От аукциона предполагалось выручить не менее 3,5 млн. долл., однако с помощью привлечения специалистов в области теории игр реальная выручка составила около 8 млрд.

К настоящему времени количество работ (статей, монографий, учебных пособий) по вопросам теории игр исчисляется уже десятками тысяч. Но, несмотря на долгую историю теории игр, научное сообщество оценило ее сравнительно недавно. Начало исследований будущих лауреатов Нобелевской премии Дж. Нэша, Р. Зелтена, Л. Гурвица, Р. Майерсона и других пришлось на 50-е гг. XX в. При этом первая Нобелевская премия за разработки в теории игр была присуждена только в 1994 г., и это стало первым признаком широкого научного признания ее значимости. После этого на протяжении менее чем 15 лет Нобелевская премия по экономике еще четыре раза присуждалась за работы, связанные с теорией игр. В частности, Р. Ауманн получил Нобелевскую премию по экономике в 2005 г. за то, что в течение долгих лет доказывал, что теория игр − это мощный инструмент моделирования экономических процессов в контексте конфликтов и сотрудничества.

## 1.2. Предмет и задачи теории игр

*Игра* − это идеализированная математическая модель коллективного поведения нескольких лиц (*игроков*), интересы которых различны, что и порождает конфликт. Конфликт не обязательно предполагает наличие антагонистических противоречий сторон, но всегда связан с определенного рода разногласиями. Конфликтная ситуация будет антагонистической, если увеличение выигрыша одной из сторон на некоторую величину приводит к уменьшению выигрыша другой стороны на такую же величину и наоборот. Антагонизм интересов порождает конфликт, а совпадение интересов сводит игру к координации действий (кооперации).

Примерами конфликтной ситуации являются ситуации, складывающиеся во взаимоотношениях покупателя и продавца; в условиях конкуренции различных фирм; в ходе боевых действий и др. Примерами игр являются и обычные игры: шахматы, шашки, карточные, салонные и др. (отсюда и название «теория игр» и ее терминология).

В большинстве игр, возникающих из анализа финансово-экономических, управленческих ситуаций, интересы игроков (сторон) не являются строго антагонистическими ни абсолютно совпадающими. Покупатель и продавец согласны, что в их общих интересах договориться о купле-продаже, однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах взаимной выгодности.

*Теория игр* − это математическая теория конфликтных ситуаций.

*Цель теории игр* − выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта (определение оптимальных стратегий поведения игроков).

*Задача теории игр* − нахождение оптимальных стратегий.

От реального конфликта игра отличается тем, что ведется по определенным правилам. Эти правила устанавливают последовательность ходов, объем информации каждой стороны о поведении другой и результат игры в зависимости от сложившейся ситуации. Правилами устанавливаются также конец игры, когда некоторая последовательность ходов уже сделана, и больше ходов делать не разрешается.

Теория игр, как и всякая математическая модель, имеет свои ограничения. Одним из них является предположение о полной («идеальной») разумности противников. В реальном конфликте зачастую оптимальная стратегия состоит в том, чтобы угадать, в чем противник «глуп» и воспользоваться этой глупостью в свою пользу.

Еще одним недостатком теории игр является то, что каждому из игроков должны быть известны все возможные действия (стратегии) противника, неизвестно лишь то, каким именно из них он воспользуется в данной партии. В реальном конфликте это обычно не так: перечень всех возможных стратегий противника как раз и неизвестен, а наилучшим решением в конфликтной ситуации нередко будет именно выход за пределы известных противнику стратегий, «ошарашивание» его чем-то совершенно новым, непредвиденным.

Теория игр не включает элементов риска, неизбежно сопровождающего разумные решения в реальных конфликтах. Она определяет наиболее осторожное, «перестраховочное» поведение участников конфликта.

Кроме того, в теории игр находятся оптимальные стратегии по одному показателю (критерию). В практических ситуациях часто приходится принимать во внимание не один, а несколько числовых критериев. Стратегия, оптимальная по одному показателю, может быть неоптимальной по другим.

Сознавая эти ограничения и потому, не придерживаясь слепо рекомендаций, даваемых теорий игр, можно все же выработать вполне приемлемую стратегию для многих реальных конфликтных ситуаций.

В настоящее время ведутся научные исследования, направленные на расширение областей применения теории игр.

### 1.3. Терминология игр

*Игра* − математическая модель ситуации, характеризуемой следующими признаками:

– наличие нескольких (два и более) участников;
– неопределенность поведения участников, связанная с наличием у каждого из них нескольких (два и более) вариантов действий;
– различие (несовпадение) интересов участников;
– взаимосвязанность поведения участников, поскольку результат, получаемый каждым из них, зависит от поведения всех участников;
– наличие правил поведения, известных всем участникам.

Обратите внимание на то, что под игрой понимается математическая модель, т. е. формализованное представление, с большей или меньшей степенью адекватности характеризующее реальную ситуацию. Следовательно, любая игра обеспечивает лишь более или менее приближенное описание реальной ситуации.

*Игроки* − стороны, участвующие в ситуации и влияющие на действия и результаты других участников. Для математических моделей теории игр безразлично, кто или что выступает в качестве игроков: одушевленные или неодушевленные объекты, отдельные личности, компании, бизнес-группы, государства, социальные группы, коалиции государств и т. п.

В теории игр предполагается, что игра состоит из *ходов*, выполняемых игроками одновременно или последовательно.

Ходы бывают *личными* и *случайными*. Ход называется *личным*, если игрок сознательно выбирает его из совокупности возможных вариантов действий и осуществляет его (например, любой ход в шахматной игре). Ход называется *случайным*, если его выбор производится не игроком, а каким-либо механизмом случайного выбора (например, по результатам бросания монеты).

Совокупность ходов, предпринятых игроками от начала до окончания игры, называется *партией*.

Одним из основных понятий теории игр является понятие стратегии. *Стратегией* игрока называется совокупность правил, определяющих выбор варианта действий при каждом личном ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в процессе игры. В простых (одноходовых) играх, когда в каждой партии игрок может сделать лишь по одному ходу, понятие стратегии и возможного варианта действий совпадают. В этом случае совокупность стратегий игрока охватывает все возможные его действия, а любое возможное для игрока $i$ действие является его стратегией. В сложных (многоходовых играх) понятие «варианта возможных действий» и «стратегии» может отличаться друг от друга.

*Стратегия* игрока называется *оптимальной*, если она обеспечивает данному игроку при многократном повторении игры максимально возможный средний выигрыш или минимально возможный средний проигрыш, независимо от того, какие стратегии применяет противник. Могут быть использованы и другие критерии оптимальности.

Возможно, что стратегия, обеспечивающая максимальный выигрыш, не обладает другим важным представлением оптимальности, как устойчивостью (равновесностью) решения. Решение игры является устойчивым (равновесным), если соответствующие этому решению стратегии образуют ситуацию, которую ни один из игроков не заинтересован изменить.

### 1.4. Классификация игр

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функции выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры.

В зависимости *от видов ходов* игры подразделяются на стратегические и азартные. *Азартные игры* состоят только из случайных ходов (ими теория игр не занимается). Если наряду со случайными ходами есть личные ходы, или все ходы личные, то такие игры называются *стратегическими*.

В зависимости *от числа участников* игры подразделяются на парные и множественные. *В парной игре* число участников равно двум, *в множественной* – более двух.

Участники множественной игры могут образовывать коалиции, как постоянные, так и временные. *По характеру взаимоотношений игроков* игры бывают бескоалиционные, коалиционные и кооперативные.

*Бескоалиционными* называются игры, в которых игроки не имеют право вступать в соглашения, образовывать коалиции, и целью каждого игрока является получение по возможности наибольшего индивидуального выигрыша.

Игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коллективов (коалиций) без последующего их разделения между игроками, называются *коалиционными*.

Исходом кооперативной игры является дележ выигрыша коалиции, который возникает не как следствие тех или иных действий игроков, а как результат их наперед определенных соглашений.

В соответствии с этим в кооперативных играх сравниваются по предпочтительности не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи; и сравнение это не ограничивается рассмотрением индивидуальных выигрышей, а носит более сложный характер.

*По количеству стратегий* каждого игрока игры подразделяются на *конечные* (число стратегий каждого игрока конечно) и *бесконечные* (множество стратегий каждого игрока бесконечно).

*По количеству информации*, имеющейся у игроков относительно прошлых ходов, игры подразделяются на игры с *полной информацией* (имеется вся информация о предыдущих ходах) и *неполной информацией*. Примерами игр с полной информацией могут быть шахматы, шашки и т.п.

*По виду описания* игры подразделяются на позиционные игры (или игры в развернутой форме) и игры в нормальной форме. *Позиционные* игры задаются в виде дерева игры. Но любая позиционная игра может быть сведена к нормальной форме, в которой каждый из игроков делает только по одному независимому ходу. В позиционных играх ходы делаются в дискретные моменты времени. Существуют *дифференциальные* игры, в которых ходы делаются непрерывно. Эти игры изучают задачи преследования управляемого объекта другим управляемым объектом с учетом динамики их поведения, которая описывается дифференциальными уравнениями.

Существуют также *рефлексивные* игры, которые рассматривают ситуации с учетом мысленного воспроизведения возможного образа действий и поведения противника.

Если любая возможная партия некоторой игры имеет нулевую сумму выигрышей $f_i,\ i=\overline{1,N}$ всех $N$ игроков $\left(\sum_{i=1}^{N} f_i = 0\right)$, то говорят об игре *с нулевой суммой*. В противном случае игры называются играми *с ненулевой суммой*.

Очевидно, что парная игра с нулевой суммой является *антагонистической*, т. к. выигрыш одного игрока равен проигрышу второго, а, следовательно, цели этих игроков прямо противоположны.

Конечная парная игра с нулевой суммой называется *матричной* игрой. Такая игра описывается платежной матрицей, в которой задаются выигрыши первого игрока. Номер строки матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец − номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца находится соответствующий выигрыш первого игрока (проигрыш второго игрока).

Конечная парная игра с ненулевой суммой называется *биматричной* игрой. Такая игра описывается двумя платежными матрицами, каждая для соответствующего игрока.

В теории игр существует такое понятие, как *игра с природой* − игра, в которой в качестве одного или нескольких игроков выступает случайный, неучтенный или неизвестный фактор (или комплекс факторов), называемый «природа» (погодные условия, стихийно складывающийся рыночный спрос на товар и т. д.

Под «природой» понимается вся совокупность внешних обстоятельств, в которых приходится принимать решение, но частично или полностью не известных лицам принимающих решение. В «игре с природой» частично нарушаются принципы рациональности и общего знания, так как мы не можем считать, что «природа» действует по тем же принципам и руководствуется теми же критериями, что, например, и фермер, принимающий решение об оптимальной структуре посевов культур в условиях неопределенности погодных условий. В «играх с природой» оптимальную смешанную стратегию «природы» можно принимать как наименее благоприятное распределение вероятностей ее состояний.

Некоторые исследователи считают, что «игры с природой» выходят за рамки теории игр и не могут к ней относиться, поскольку такие ситуации, хотя предполагают неопределенность, отличаются отсутствием конфликтности. То есть один из «игроков» («природа») оказывается нейтральным, так как он не стремится извлечь максимальную выгоду для себя из взаимодействия с другими игроками. С другой стороны, если бы один или несколько игроков знали полностью законы, по которым действует «природа», они могли бы извлечь из этого максимальную выгоду для себя. Но в отсутствие такого знания игроки могут и должны руководствоваться также другими принципами и критериями принятия решений, а не только теми, что используются при принятии решений в предположении конфликтности и противодействия со стороны других игроков.

В «играх с природой», как и в играх нескольких лиц, результаты игры для всех игроков зависят не только от их собственных стратегий, но и от неконтролируемых переменных. Но в случае «игр с природой» эти неконтролируемые переменные отражают неизвестные или случайные обстоятельства, которые нельзя считать обусловленными желанием получить тот или иной результат. Хотя формы представления «игр с природой» часто аналогичны классическим матричным играм, методы и критерии принятия решений в «играх с природой» являются гораздо более многочисленными и гибкими, чем в теории антагонистических игр, а также отличаются тем, что соответствующие математические модели в гораздо большей степени включают в себя аппарат теории вероятностей и математической статистики, с помощью которых и моделируются действия всех не выявленных игроков, факторов и обстоятельств. Поэтому «игры с природой» либо считаются предметом раздела математики, который называется теорией статистических решений, либо относятся к особому классу игр, называемых *статистическими играми*.

# 2 МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

## 2.1 Описание матричной игры

Рассмотрим парную конечную игру с *нулевой суммой*. При нулевой сумме игры разница между абсолютными значениями выигрыша одного игрока и проигрыша другого полагается равной нулю. Пусть игрок $A$ располагает $m$ личными стратегиями, которые обозначим $A_1, A_2, ..., A_m$, а игрок $B$ имеет $n$ личных стратегий − $B_1, B_2, ..., B_n$. Причём выигрыш игрока $A$ полагается равным проигрышу игрока $B$ и наоборот. Такая игра имеет размерность $m \times n$.

В результате выбора игроками пары стратегий из всех возможных для них стратегий, а именно $A_i$ и $B_j$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ однозначно определяет исход игры, т.е. выигрыш $a_{ij}$ игрока $A$ и проигрыш $\left(-a_{ij}\right)$ игрока $B$.

Если значения выигрышей $a_{ij}$ известны для любой пары стратегий $\left(A_i, B_j\right)$, то матрица $P$, составленная из этих выигрышей, называется *платёжной матрицей***,** или *матрицей игры*:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Строки матрицы $P$ соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы − стратегиям второго. Игру, определяемую матрицей $P$, имеющей $m$ строк и $n$ столбцов, называют *конечной игрой размерности* $m \times n$.

Игра, для которой можно составить матрицу игры, называется *матричной*.

**Пример 2.1.** Составьте платёжную матрицу для следующей игры. В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанная игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается в ничью.

**Решение.** У первого игрока три стратегии (варианта действия): $A_1$ (записать 1), $A_2$ (записать 2), $A_3$ (записать 3). У второго игрока также три стратегии: $B_1$, $B_2$, $B_3$

| | $B_1 = 1$ | $B_2 = 2$ | $B_3 = 3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1 = 1$ | 0 | –1 | –2 |
| $A_2 = 2$ | 1 | 0 | –1 |
| $A_3 = 3$ | 2 | 1 | 0 |

Платежная матрица игры: $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

**Пример 2.2.** Составьте платёжную матрицу для следующей парной игры. Игроки *A* и *B* одновременно и независимо друг от друга произносят слова «дуб» и «тополь». Если слова, сказанные игроками совпадают, то банк игры забирает игрок *A*, если игроки произносят отличающиеся друг от друга слова, то банк забирает игрок *B*.

**Решение**. У каждого игрока в этой игре по две стратегии. Если выигрыш банка обозначим платежом 1, а проигрыш – платежом (–1), то получим матрицу платежей:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Пример 2.3. Борьба за рынки.** Фирмы *A* и *B* производят одинаковый товар и в настоящее время каждая «контролирует» 50% рынка. Улучшив качество товара, обе фирмы собираются развернуть рекламные кампании. При этом приобретение новых покупателей одной фирмой сопровождается потерей этих покупателей другой фирмой. Исследование показало, что 70% потенциальных покупателей получают информацию через телевидение, 30% – через газеты и 10% – через радиовещание. Задача каждой фирмы – выбрать стратегию рекламной кампании.

**Решение**. В данной игре у каждого из игроков по три стратегии:

$A_1$, $B_1$ – рекламировать товар через телевидение;

$A_2$, $B_2$ – через газеты;

$A_3$, $B_3$ – через радиовещание.

Поскольку это игра с нулевой суммой, то матрицу выигрышей фирмы *A* можно представить в следующем виде:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0 | 40 | 60 |
| $A_2$ | –40 | 0 | 20 |
| $A_3$ | –60 | –20 | 0 |

где $a_{ij}$ – количество покупателей товара фирмы *A* в процентах, на которое оно увеличивается, если фирма *A* применяет стратегию $A_i$, а фирма *B* – стратегию $B_j$.

## 2.2 Решение матричной игры в чистых стратегиях

Рассмотрим игру $m \times n$ с матрицей $P = \left(a_{ij}\right)$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Выбирая стратегию $A_i$, игрок *A* должен рассчитывать, что игрок *B* ответит на неё той стратегией $B_j$, при которой выигрыш игрока *A* будет наименьшим.

Пусть $\alpha_i$ − наименьший выигрыш игрока *A* при выборе им стратегии $A_i$ для всех возможных стратегий игрока *B*, тогда

$$\alpha_i = \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}, \tag{2.1}$$

то есть наименьшее число в *i*-ой строке платёжной матрицы.

Среди всех чисел $\alpha_i$, $i = \overline{1,m}$ выберем наибольшее:

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \alpha_i. \tag{2.2}$$

Следовательно,

$$\alpha = \max_{i=\overline{1,m}} \min_{j=\overline{1,n}} a_{ij}. \tag{2.3}$$

Число $\alpha$ называется *нижней ценой игры*, или *максиминным выигрышем (максимином)*. Это гарантированный выигрыш игрока *A* при любой стратегии игрока *B*. Стратегия, соответствующая максимину, называется *максиминной стратегией*.

Игрок *B* заинтересован в том, чтобы уменьшить выигрыш игрока *A*, поэтому он выбирает стратегию $B_j$, учитывая при этом максимально возможный выигрыш для *A*. Пусть $\beta_j$ − наибольший выигрыш игрока *A* при выборе им всех возможных стратегий, когда игрок *B* выбирает стратегию $B_j$, тогда

$$\beta_j = \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}. \tag{2.4}$$

Одновременно $\beta_j$ является наибольшим проигрышем игрока *B* при выборе им стратегии $B_j$, поэтому среди всех чисел $\beta_j$ выбираем наименьшее, чтобы найти ту стратегию игрока *B*, при которой его проигрыш будет наименьшим. Это число обозначим $\beta$, и оно равно

$$\beta = \min_{j=\overline{1,n}} \beta_j = \min_{j=\overline{1,n}} \max_{i=\overline{1,m}} a_{ij}. \tag{2.5}$$

Число $\beta$ называется *верхней ценой игры*, или *минимаксным выигрышем (минимаксом)*. Это гарантированный проигрыш игрока *B*. Гарантированный в том смысле, что средний проигрыш игрока *B* при многократном повторении игры не будет больше этого значения. Так же и выигрыш игрока *A* не превысит верхней цены игры. Стратегия, соответствующая минимаксу, называется *минимаксной стратегией*.

Принцип, диктующий игрокам выбор наиболее «осторожных» минимаксной и максиминной стратегий, называется *принципом минимакса*.

Этот принцип следует из того, что в антагонистической игре каждый игрок стремится достичь цели, противоположной цели его противника.

Если верхняя и нижняя цены игры совпадают, то их общее значение называют *чистой ценой игры*, или *ценой игры*, при этом справедливо равенство

$$\alpha = \beta = \nu. \tag{2.6}$$

Минимаксные стратегии, соответствующие цене игры, являются *оптимальными*, а их совокупность – *оптимальным решением*, или *решением игры*. В этом случае оптимальной для игрока *A* является максиминная стратегия, а оптимальной стратегией для игрока *B* − минимаксная.

Говорят, что решение игры обладает *устойчивостью*, т.е. если один из игроков придерживается своей оптимальной стратегии, то для другого не может быть выгодным отклоняться от своей оптимальной стратегии.

Пара чистых стратегий $A_i$ и $B_j$ даёт *оптимальное решение* игры тогда и только тогда, когда соответствующий ей элемент $a_{ij}$ является одновременно наибольшим в своем столбце и наименьшим в своей строке. Такая ситуация, если она существует, называется седловой точкой.

Игра, для которой $\alpha = \beta$, называется *игрой с седловой точкой*.

Таким образом, решение игры в чистых стратегиях существует тогда и только тогда, когда платёжная матрица имеет седловую точку.

**Пример 2.4.** Определите верхнюю и нижнюю цены игры и соответствующие стратегии для игры из примера 2.1.

**Решение.** Платежная матрица игры: $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Составим вспомогательную таблицу:

| | $B_1 = 1$ | $B_2 = 2$ | $B_3 = 3$ | $\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,3}} a_{ij}$ | $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1 = 1$ | 0 | –1 | –2 | –2 | |
| $A_2 = 2$ | 1 | 0 | –1 | –1 | 0 |
| $A_3 = 3$ | 2 | 1 | **0** | 0 | |
| $\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,3}} a_{ij}$ | 2 | 1 | 0 | | |
| $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,3}} \beta_j$ | | 0 | | | |

В нашем примере $\alpha = \beta = 0$. Из таблицы получаем, что платёжная матрица имеет седловую точку, а именно $a_{33} = 0$. Следовательно, цена игры $v = 0$, причем она достигается при паре чистых стратегий $A_3$ и $B_3$, являющихся оптимальными стратегиями. Оптимальным решением игры являются найденная пара чистых стратегий и соответствующая им цена игры, равная 0. Из таблицы видно, что отклонение первого игрока от оптимальной стратегии $A_3$ уменьшает его выигрыш, а отклонение второго игрока от $B_3$ увеличивает его проигрыш.

**Пример 2.5.** Рассмотрим две конкурирующие финансовые компании *A* и *B*. Компания *B* ведёт переговоры с организаторами каждого из трёх проектов $B_1$, $B_2$, $B_3$ на предмет инвестирования. Задача компании *B*: положительный результат переговоров. Компания *A* ставит своей задачей свести переговоры компании *B* к отрицательному результату, с тем, чтобы занять место компании *B* в инвестировании.

Компания *A* для достижения своей цели – срыва переговоров компании *B* – может применить одно из двух средств: $A_1$ – предложить организаторам проектов более выгодные для них условия инвестирования по сравнению с компанией *B* и $A_2$ – предоставить в распоряжение организаторов проектов материалы, компрометирующие компанию *B*.

Действие $A_1$ компании *A* приводит к отрицательному результату переговоров компании *B* с организаторами проектов $B_1$, $B_2$, $B_3$, соответственно, с вероятностями 0.7; 0.5; 0.3, а действие $A_2$ – с вероятностями 0.6; 0.9; 0.4. Найти решение игры.

**Решение**. Смоделируем данную ситуацию. Поскольку компании *A* и *B* преследуют противоположные цели, то рассматриваемая конфликтная ситуация является антагонистической. Игроками являются финансовые компании *A* и *B*. Игрок *A* имеет две чистые стратегии $A_1$ и $A_2$: $S_A = \{A_1, A_2\}$; множество стратегий игрока *B* состоит из трёх стратегий: $S_B = \{B_1, B_2, B_3\}$. Игрок *B* должен выбрать один из трех проектов, игрок *A* выбирает одно из двух своих действий.

В качестве выигрыша игрока *A* (или проигрыша игрока *B*) рассмотрим вероятность отрицательного результата переговоров компании *B*. В соответствии со своими задачами игрок *A* стремится максимизировать выигрыш, а игрок *B* – минимизировать проигрыш.

Выясним, имеет ли игра седловую точку, то есть, разрешима ли игра в чистых стратегиях.

Матрица игры с показателями эффективности стратегий $A_1, A_2$ и показателями неэффективности стратегий $B_1$, $B_2$, $B_3$ имеет следующий вид:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,3}} a_{ij}$ | $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,2}} \alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.3 | 0.4 |
| $A_2$ | 0.6 | 0.9 | **0.4** | 0.4 | |
| $\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,2}} a_{ij}$ | 0.7 | 0.9 | 0.4 | | |
| $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,3}} \beta_j$ | 0.4 | | | | |

В данном случае максиминной стратегией игрока *A* является стратегия $A_2$, а минимаксной стратегией игрока *B* – стратегия $B_3$.

Если игрок *A* придерживается своей максиминной стратегии $A_2$, то игрок *B* должен выбрать свою минимаксную $B_3$, с тем чтобы выигрыш игрока *A* (или что то же – проигрыш игрока *B*) был минимальным $a_{23} = 0.4$. На это игрок *A* должен ответить выбором опять же стратегии $A_2$, чтобы получить максимальный (в 3-м столбце) выигрыш: $a_{23} = 0.4$. Ответным ходом игрок *B* опять выбирает стратегию $B_3$ и т.д.

Таким образом, если игроки *A* и *B* придерживаются своих максиминной и минимаксной стратегий, то ни один из них не может увеличить свой выигрыш, отступая от своей стратегии. Ситуация $\left(A_2, B_3\right)$ является в данной игре *устойчивой*.

Нижняя и верхняя цены игры совпадают: $\alpha = \beta = \nu = 0.4$.

Однако наличие седловой точки в игре − это далеко не правило, скорее − исключение. Большинство матричных игр, не имеет седловой точки, а, следовательно, не имеет оптимальных чистых стратегий. Впрочем, есть разновидность игр, которые всегда имеют седловую точку и, значит, решаются в чистых стратегиях. Это − *игры с полной информацией*.

**Теорема 2.1.** Каждая игра с полной информацией имеет седловую точку, а, следовательно, решается в чистых стратегиях, т.е. имеется пара оптимальных чистых стратегий, дающая устойчивый выигрыш, равный $\nu$.

Если такая игра состоит только из личных ходов, то при применении каждым игроком своей оптимальной чистой стратегии она должна кончаться выигрышем, равным цене игры. Скажем, шахматная игра, как игра с полной информацией, либо всегда кончается выигрышем белых, либо всегда − выигрышем черных, либо всегда − ничьей (только чем именно − мы пока не знаем, так как число возможных стратегий в шахматной игре огромно).

### 2.3 Решение матричной игры в смешанных стратегиях

Возникает вопрос: как найти решение игры, платежная матрица которой не имеет седловой точки? Применение максиминного принципа каждым из игроков обеспечивает игроку *A* выигрыш не менее $\alpha$, игроку − проигрыш не больше $\beta$. Учитывая что $\alpha < \beta$, естественно для игрока *A* желание увеличить выигрыш, а для игрока *B* − уменьшить проигрыш. Поиск такого решения производит к необходимости применять смешанные стратегии: чередовать чистые стратегии с какими-то частотами.

Случайная величина, значениями которой являются чистые стратегии игрока, называется его *смешанной стратегией*.

Таким образом, задание смешанной стратегии игрока состоит в указании тех вероятностей, с которыми выбираются его чистые стратегии.

Будем обозначать смешанные стратегии игроков *A* и *B* соответственно $S_A = \left(p_1, p_2, ..., p_m\right)$, $S_B = \left(q_1, q_2, ..., q_n\right)$, где $p_i$ − вероятность применения игроком *A* чистой стратегии $A_i$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$; $q_j$ − вероятность применения игроком *B* чистой стратегии $B_j$, $\sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

В частном случае, когда все вероятности, кроме одной, равны нулю, а эта одна – единице, смешанная стратегия превращается в чистую стратегию.

Применение смешанных стратегий осуществляется, например, таким образом: игра повторяется много раз, но в каждой партии игрок применяет различные чистые стратегии с относительными частотами их применения, равными $p_i$ и $q_j$.

Смешанные стратегии в теории игр представляют собой модель изменчивой, гибкой тактики, когда ни один из игроков не знает, какую чистую стратегию выберет противник в данной партии.

Если игрок *A* применяет смешанную стратегию $S_A = (p_1, p_2, ..., p_m)$, а игрок *B* смешанную стратегию $S_B = (q_1, q_2, ..., q_n)$, то средний выигрыш (математическое ожидание) игрока *A* определяется соотношением $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j$.

Естественно, что ожидаемый проигрыш игрока *B* равен такой же величине.

Итак, если матричная игра не имеет седловой точки, то игрок должен использовать оптимальную смешанную стратегию, которая обеспечит максимальный выигрыш $v$.

Естественно возникает вопрос: какими соображениями нужно руководствоваться при выборе смешанных стратегий? Оказывается принцип максимина сохраняет свое значение и в этом случае. Кроме того, важное значение для понимания решения игр, играют *основные теоремы теории игр*.

Формируя свою стратегию $S_A$ в антагонистической игре, игрок *A* в соответствии с принципом максимина должен выбрать такую стратегию, при которой минимально возможный выигрыш был бы максимален, т.е. такую стратегию, которая обеспечивает

$$\max_i \min_j \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = v_A.$$

Аналогичные рассуждения, связанные с поиском оптимальной смешанной стратегии игрока *B*, приводят к рекомендации выбрать такую стратегию $S_B$, которая обеспечивает

$$\min_j \max_i \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j = v_B.$$

Весьма важным для теории и практики является вопрос о том, связаны ли между собой $v_A$ и $v_B$. Ответ на него дает теорема о максимине.

**Теорема о максимине.** В конечной игре двух игроков с нулевой суммой при $\alpha \neq \beta$ имеет место равенство

$$v_A = v_B.$$

Теорема о максимине указывает на существование равновесия для случая $\nu_A = \nu_B$, при $\alpha \neq \beta$ и, следовательно, существования оптимальных смешанных стратегий.

Поэтому другая формулировка теоремы о максимине, называемая основной теоремой матричных игр определяется следующим образом.

**Основная теорема матричных игр (Теорема Неймана).** Любая матричная игра имеет, по крайней мере, одно оптимальное решение, в общем случае, в смешанных стратегиях и соответствующую цену $\nu$.

Обе эти теоремы эквивалентны. Из этих теорем следует, что любая матричная игра имеет цену $\nu$. Цена игры $\nu$ − средний выигрыш, приходящийся на одну партию, всегда удовлетворяет условию

$$\alpha \leq \nu \leq \beta,$$

т.е. лежит между нижней $\alpha$ и верхней $\beta$ ценами игры.

Оптимальное решение игры в смешанных стратегиях, также как и решение в чистых стратегиях, обладает тем свойством, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной смешанной стратегии, если его противник применяет свою оптимальную смешанную стратегию, так как это ему невыгодно.

Эта пара стратегий образует в игре положение равновесия: один игрок хочет обратить выигрыш в максимум, другой − в минимум, каждый «тянет» в свою сторону и, при оптимальном поведение обоих, устанавливается равновесие и устойчивый выигрыш $\nu$.

Те из чистых стратегий игроков $A$ и $B$, которые входят в их оптимальные смешанные стратегии с вероятностями, не равными нулю, называются *активными стратегиями*.

Существует теорема об активных стратегиях, применение которой позволяет упрощать решение некоторых матричных игр.

**Теорема об активных стратегиях.** Если один из участников матричной игры придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, то это обеспечивает ему максимальный средний выигрыш, равный цене игры $\nu$, независимо от того, какие действия предпринимает другой игрок, если только он не выходит за пределы своих активных стратегий (т.е. пользуется любой из них в чистом виде или смешивает их в любых пропорциях).

Эта теорема имеет большое практическое значение – она дает конкретные модели нахождения оптимальных стратегий при отсутствие седловой точки.

## 2.4 Упрощение матричных игр

Решение матричных игр тем сложнее, чем больше размерность платежной матрицы. Поэтому для игр с платежными матрицами большой размерности отыскание оптимального решения можно упростить, если уменьшить их размерность путем исключения дублирующих и заведомо невыгодных (доминируемых) стратегий.

Если в платежной матрице игры все элементы строки (столбца) равны соответствующим элементам другой строки (столбца), то соответствующее этим строкам (столбцам) *стратегии* называются *дублирующими*.

Если в платежной матрице игры все элементы некоторой строки, определяющей стратегию $A_i$ игрока $A$, не больше (меньше или некоторые равны) соответствующих элементов другой строки, то стратегия $A_i$ называется *доминируемой* (заведомо невыгодной).

Если в платежной матрице игры все элементы некоторого столбца, определяющего стратегию $B_j$ игрока $B$ не меньше (больше или некоторые равны) соответствующих элементов другого столбца, то стратегия $B_j$ называется *доминируемой* (заведомо невыгодной).

**Правило.** Решение матричной игры не изменится, если из платежной матрицы исключить строки и столбцы, соответствующие дублирующим и доминируемым стратегиям.

**Пример 2.6.** Упростите матричную игру, платежная матрица которой имеет вид: $P = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 5}$.

**Решение.** Найдем $\alpha = \max(2,2,3,2) = 3$, $\beta = \min(7,6,6,4,5) = 4$, $\alpha \neq \beta$, $3 \leq v \leq 4$.

Все элементы стратегии $A_2$ меньше элементов стратегии $A_3$, т.е. $A_2$ заведомо невыгодна для первого игрока и ее можно исключить.

Все элементы $A_4$ меньше $A_3$, исключаем $A_4$. Таким образом, имеем упрощенную матричную игру с платежной матрицей вида:

$$P = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 5}.$$

Для второго игрока: сравнивая $B_1$ и $B_4$, исключаем $B_1$; сравнивая $B_2$ и $B_4$, исключаем $B_2$; сравнивая $B_3$ и $B_4$, исключаем $B_3$. В результате преобразований получим матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times 2}$$

$\alpha = \max(2,3) = 3$, $\beta = \min(4,5) = 4$, $\alpha \neq \beta$, $3 \leq v \leq 4$.

Необходимо отметить, что отбрасывая дублируемые и доминируемые стратегии в игре с седловой точкой, мы все равно придем к игре с седловой точкой, т.е. к решению в чистых стратегиях. Но лучше сразу проверить, не обладает ли игра седловой точкой − это проще, чем сравнивать почленно все строки и все столбцы платежной матрицы.

Алгебраические методы решения матричных игр иногда производить проще, если использовать также следующие свойства матричных игр.

**Свойство 2.1.** Если ко всем элементам платежной матрицы прибавить (вычесть) одно и тоже число ***C***, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а только цена игры увеличится (уменьшится) на это число ***C***.

**Свойство 2.2.** Если каждый элемент платежной матрицы умножить на положительное число ***k***, то оптимальные смешанные стратегии игроков не изменятся, а цена игры умножится на ***k***.

Отметим, что эти свойства верны и для игр, имеющих седловую точку. Эти два свойства матричных игр применяются в следующих случаях:

1) если матрица игры наряду с положительными имеет и отрицательные элементы, то ко всем ее элементам прибавляют такое число, чтобы исключить отрицательные числа в матрице;

2) если матрица игры имеет дробные числа, то для удобства вычислений элементы этой матрицы следует умножить на такое число, чтобы все выигрыши были целыми числами.

## 2.5 Решение игры 2×2

Рассмотрим игру $2\times 2$ с матрицей $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2}$ без седловой точки. Решением игры являются смешанные стратегии игроков $S_A^*=(p_1,p_2)$ и $S_B^*=(q_1,q_2)$. Очевидно, что $p_1+p_2=1,\ q_1+q_2=1.$

Использование игроком *A* своей оптимальной стратегии гарантирует ему получение среднего выигрыша не меньшего, чем цена игры $v$. При этом, если игрок *B* использует свою оптимальную стратегию, то средний выигрыш игрока будет равен $v$, если игрок *B* не использует свою оптимальную стратегию, то средний выигрыш игрока *A* будет больше $v$.

Записанное выше положение имеет вероятностный смысл, т.е. средний выигрыш будет тем ближе к $v$, чем больше партий сыграют игроки: средний выигрыш стремится к $v$ по вероятности (другими словами, средний выигрыш будет не точно равен $v$, а примерно равен и чем больше партий, тем меньше отклонение). Кроме того, определение смешанной стратегии требует выбирать чистые стратегии игроками случайно в соответствии с вероятностями (относительными частотами) их использования (условие секретности выбора чистой стратегии).

Для решения матричных игр $2\times 2$ можно использовать *аналитический* и *геометрический* методы.

**Аналитический метод решения игры** $2\times 2$

Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию игрока $A$ $S_A^* = (p_1, p_2)$ и соответствующую цену игры $v$, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 = v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = v, \\ \quad p_1 + p_2 = 1. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Первое уравнение определяет математическое ожидание выигрыша игрока $A$ при использовании им стратегии $S_A^* = (p_1, p_2)$ против стратегии $B_1$; второе уравнение определяет математическое ожидание выигрыша игрока $A$ при использовании им стратегии $S_A^* = (p_1, p_2)$ против стратегии $B_2$; третье уравнение – свойство компонентов смешанной стратегии игрока.

Приравнивая выражения для $v$ из уравнений системы и учитывая, что $p_1 + p_2 = 1,$ получим

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \qquad (2.8)$$

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

Аналогично для игрока $B$. Чтобы найти оптимальную смешанную стратегию игрока $B$ $S_B^* = (q_1, q_2)$ и соответствующую цену игры $v$, решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 = v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 = v, \\ \quad q_1 + q_2 = 1. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Получим:

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \qquad (2.10)$$

Цена игры $v$ общая для обоих игроков.

**Пример 2.7.** Найти решение игры, заданной матрицей

$$P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

**Решение.** Т.к. $\alpha=\max(1,1)=1,\ \ \beta=\min(2,3)=2,\ \ \alpha\neq\beta,\ \ 1\le v\le 2$, то игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

По формулам (2.8), (2.10) находим оптимальные стратегии и цену игры:

$$p_1=\frac{1-2}{1+1-3-2}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3},\ \ p_2=\frac{1-3}{-3}=\frac{2}{3},$$

$$q_1=\frac{1-3}{-3}=\frac{2}{3},\ \ q_2=\frac{1-2}{-3}=\frac{1}{3},$$

$$v=\frac{1\cdot 1-3\cdot 2}{-3}=\frac{5}{3}.$$

**Ответ:** Оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A^*=\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ и $S_B^*=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, цена игры составляет $v=\frac{5}{3}$.

Данный ответ **означает следующее**:

– если первый игрок с вероятностью 1/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 2/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 5/3;

– если второй игрок с вероятностью 2/3 будет применять первую стратегию и с вероятностью 1/3 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 5/3.

### **Геометрический метод решения игры** $2\times 2$

В точках $x=0,\ x=1$ оси $Ox$ восстановим перпендикуляры и обозначим их $A_1$ и $A_2$ – в соответствии со стратегиями игрока *A* (рис. 2.1).

Изобразим стратегию $B_1$. На прямой $A_1$ отложим $a_{11}$, а на прямой $A_2$ отложим $a_{21}$. Соединим эти точки и получим прямую $B_1B_1$. Аналогично изобразим стратегию $B_2$, отложив на прямой $A_1$ значение $a_{12}$, а на прямой $A_2$ – значение $a_{22}$.

Каждой точке на отрезке [0; 1] соответствует смешанная стратегия игрока *A*, причем $p_2$ – расстояние от этой точки до нуля, а $p_1$ – расстояние от этой точки до точки 1 (рис. 2.1).

Ломанная $B_2MB_1$ (на рис. 2.1 выделена полужирно) определяет минимальные возможные средние выигрыши игрока *A* при использовании им своих смешанных стратегий. Точка *M* (самая высокая точка ломанной) – определяет наилучший средний выигрыш игрока *A* из всех минимальных. Она соответствует оптимальной смешанной стратегии игрока *A*. При этом: если $M(x,y)$, то $p_1 = 1 - x,\ \ p_2 = x,\ \ v = y.$

Т. о., задача сводится к нахождению координат точки $M(x,y)$, которая является точкой пересечения прямых $B_1B_1$ и $B_2B_2$. Для нахождения уравнений этих прямых можно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},$$

с учетом того, что прямую $B_1B_1$ определяют точки $B_1(0, a_{11})$ и $B_1(1, a_{21})$, а прямую $B_2B_2$ – точки $B_2(0, a_{12})$ и $B_2(1, a_{22})$.

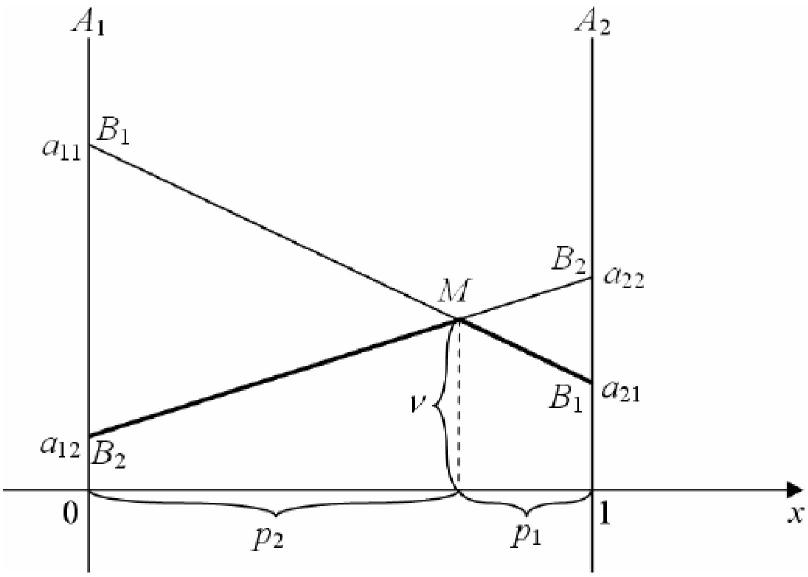


Рисунок 2.1 – Графическая интерпретация игры $2 \times 2$ для игрока *A*

Для игрока *B* оптимальная смешанная стратегия находится аналогично, но точка *M* определяется не самой высокой точкой нижней ломанной, а самой низкой точкой высокой ломанной – полужирная ломанная на рис. 2.2.

Найдя координаты точки $M(x,y)$, как точки пересечения прямых $A_1A_1$ и $A_2A_2$, компоненты оптимальной смешанной стратегии игрока *B* и цену игры, можно найти по следующим формулам:

$$q_1 = 1 - x,\ \ q_2 = x,\ \ v = y.$$

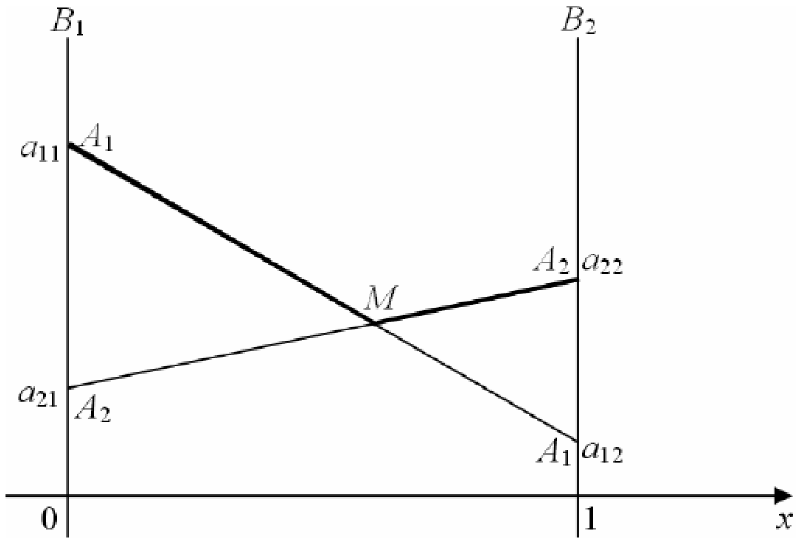


Рисунок 2.2 – Графическая интерпретация игры $2\times2$ для игрока $B$

**Пример 2.8.** Найти решение игры из предыдущего примера геометрическим способом.

**Решение.** Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока $A$. Для этого построим стратегии игрока $A$ (рис. 2.3).

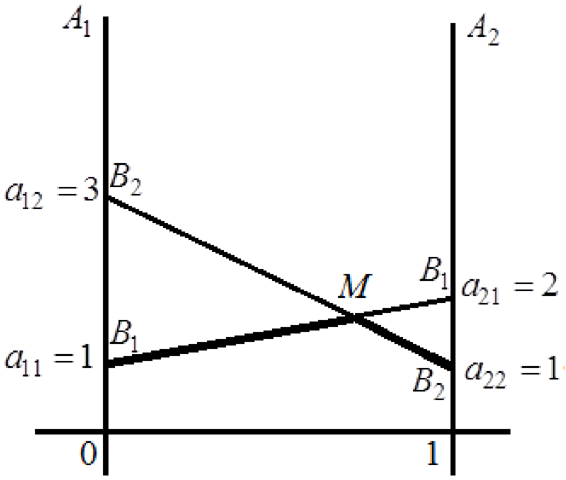


Рисунок 2.3 – Графическая интерпретация игры $2\times2$ для игрока $A$

Найдем координаты точки $M(x,y)$, как координаты точки пересечения прямых $B_1B_1$ и $B_2B_2$. Запишем уравнение прямой $B_1B_1$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-1}{2-1}\Rightarrow x=y-1\Rightarrow y=x+1.$$

Запишем уравнение прямой $B_2B_2$:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}\Rightarrow\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{1-3}\Rightarrow x=\frac{y-3}{-2}\Rightarrow y=3-2x.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} y=x+1, \\ y=3-2x, \end{cases}$ получим $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{5}{3}.$

Следовательно, $p_1 = 1 - x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3},\ p_2 = x = \frac{2}{3},\ v = y = \frac{5}{3}.$

Найдем оптимальную смешанную стратегию для игрока *B*. Для этого построим стратегии игрока *B* (рис. 2.4).

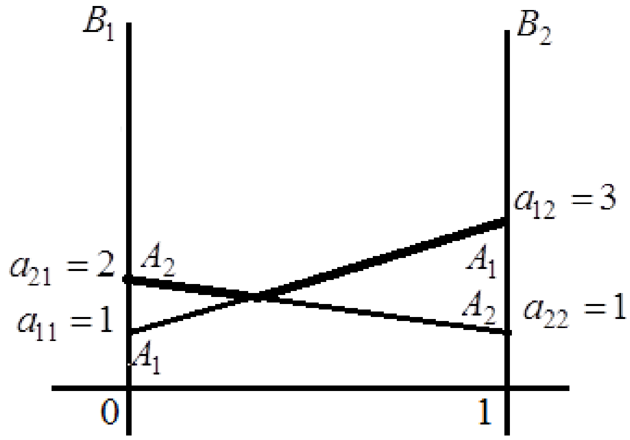


Рисунок 2.4 – Графическая интерпретация игры $2 \times 2$ для игрока *B*

Найдем координаты точки $M(x, y)$, как координаты точки пересечения прямых $A_1A_1$ и $A_2A_2$. Запишем уравнение прямой $A_1A_1$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 1}{3 - 1} \Rightarrow 2x = y - 1 \Rightarrow y = 2x + 1.$$

Запишем уравнение прямой $A_2A_2$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - 0}{1 - 0} = \frac{y - 2}{1 - 2} \Rightarrow -x = y - 2 \Rightarrow y = 2 - x.$$

Решая систему уравнений $\begin{cases} y = 2x + 1, \\ y = 2 - x, \end{cases}$ получим $x = \frac{1}{3},\ y = \frac{5}{3}.$

Следовательно, $q_1 = 1 - x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},\ q_2 = x = \frac{1}{3},\ v = y = \frac{5}{3}.$

**Ответ:** Оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A^* = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ и $S_B^* = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, цена игры составляет $v = \frac{5}{3}.$

## 2.6 Решение игры 2×*n*

Игра задана матрицей $P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}_{2 \times n}.$

Для каждой из *n* стратегий игрока *B* строится соответствующий ей отрезок на плоскости. Находится нижняя граница выигрыша, получаемого игроком *A*, и определяется точка на нижней границе, соответствующая наибольшему выигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока $B$, отрезки которых проходят через данную точку. Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока $B$. Игра сводится к игре с матрицей $2\times 2$.

**Пример 2.9.** Найти решение игры, заданной матрицей

$$P=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 4}.$$

**Решение.** Найдем $\alpha=\max(1,1)=1,\quad \beta=\min(4,3,3,4)=3,\quad \alpha\neq\beta,\quad 1\le v\le 3.$ Решение игры ищем в области смешанных стратегий.

Построим на плоскости стратегии игрока $A$ (см. рис.2.5.).

Нижней границей выигрыша для игрока $A$ является ломаная $B_3MB_4$. Стратегии $B_3$ и $B_4$ являются **активными стратегиями** игрока $B$. Точка их пересечения $M$ определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Второму игроку невыгодно применять стратегии $B_1$ и $B_2$, поэтому вероятность их применения равна нулю, т.е. $q_1=q_2=0$.

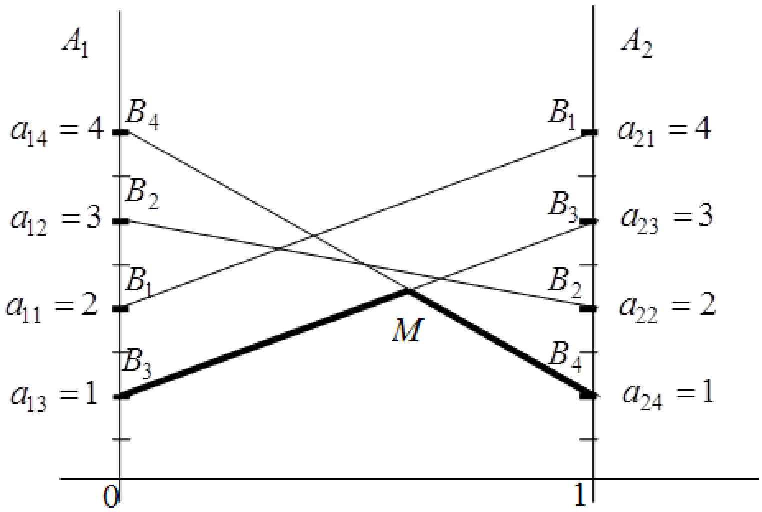


Рисунок 2.5 – Геометрическое решение

Решение игры сводится к решению игры с матрицей $2\times 2$: $P=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}_{2\times 2}$, $\alpha=\max(1,1)=1,\ \beta=\min(3,4)=3,\ \alpha\neq\beta,\ 1\le v\le 3.$

По формулам (2.8) и (2.10) находим оптимальные стратегии и цену игры: $p_1=\dfrac{2}{5},\ p_2=\dfrac{3}{5},\ q_1=0,\ q_2=0,\ q_3=\dfrac{3}{5},\ q_4=\dfrac{2}{5}, v=\dfrac{11}{5}.$

**Ответ.** Оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A^*=\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ и $S_B^*=\left(0,0,\dfrac{3}{5},\dfrac{2}{5}\right)$, цена игры составляет $v=\dfrac{11}{5}$.

Данный ответ означает следующее:

– если первый игрок с вероятностью 2/5 будет применять первую стратегию и с вероятностью 3/5 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 11/5;

– если второй игрок с вероятностью 3/5 будет применять третью стратегию, с вероятностью 2/5 четвертую и не будет использовать первую и вторую стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 11/5.

## 2.7 Решение игры *m*×2

Рассмотрим игру *m*×2 с матрицей

$$P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}_{m\times 2}.$$

Решение игры может быть получено аналогично предыдущему случаю. Для каждой из *m* стратегий игрока *A* строится соответствующий ей отрезок на плоскости. Находится верхняя граница проигрыша, получаемого игроком *B*, и определяется точка на нижней границе, соответствующая наименьшему проигрышу. Выделяются две активные стратегии игрока *A*, отрезки которых проходят через данную точку. Далее рассматриваются только эти две стратегии игрока *A*. Игра сводится к игре с матрицей $2\times 2$.

**Пример 2.10.** Найти решение игры, заданной матрицей

$$P=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}_{4\times 2}.$$

Решение. $\alpha=\max(3,\ 2,\ 0,\ -1)=3,\quad \beta=\min(4,\ 6)=4,\quad \alpha\neq\beta,\quad 3\le v\le 4.$ Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий. Построим на плоскости отрезки, соответствующие стратегиям первого игрока (см. рис.2.6.).

Верхней границей проигрыша для игрока *B* является ломаная $A_1MA_4$. Стратегии $A_1$ и $A_4$ являются активными стратегиями игрока *A*. Точка их пересечения *M* определяет оптимальные стратегии игроков и цену игры. Первому игроку невыгодно применять стратегии $A_2$ и $A_3$, поэтому вероятность их применения равна нулю, т.е. $p_2=p_3=0$. Решение игры сводится к решению игры с матрицей $2\times 2$:

$$P=\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 6\end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

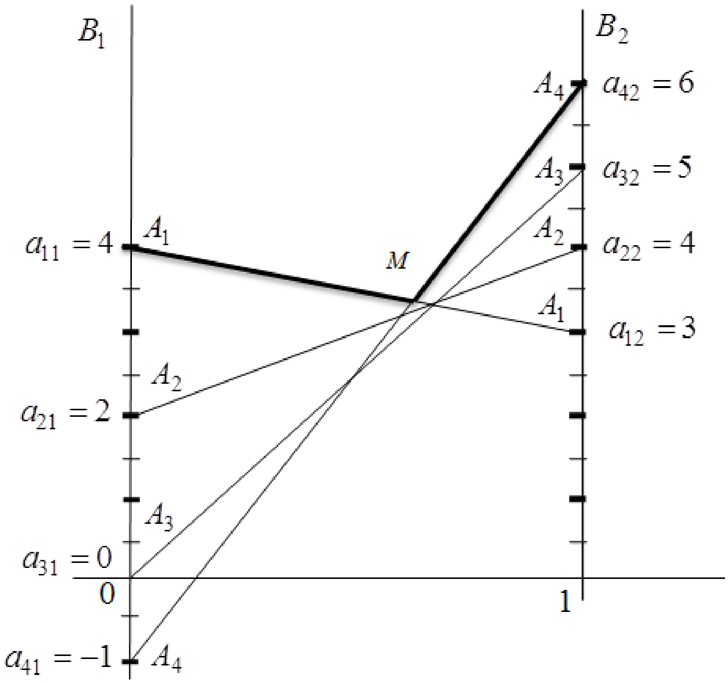


Рисунок 2.6– Геометрическое решение

По формулам (2.8) и (2.10) находим оптимальные стратегии и цену игры: $p_1=\dfrac{7}{8}$, $p_4=\dfrac{1}{8}$, $q_1=\dfrac{3}{8}$, $q_2=\dfrac{5}{8}$, $v=\dfrac{27}{8}$.

**Ответ**. Оптимальные смешанные стратегии игроков $S_A^*=\left(\dfrac{7}{8},0,0,\dfrac{1}{8}\right)$ и $S_B^*=\left(\dfrac{3}{8},\dfrac{5}{8}\right)$, цена игры составляет $v=\dfrac{27}{8}$.

Данный ответ означает следующее:

– если первый игрок с вероятностью 7/8 будет применять первую стратегию, с вероятностью 1/8 четвертую и не будет использовать вторую и третью стратегии, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его выигрыш в среднем составит не менее 27/8;

– если второй игрок с вероятностью 3/8 будет применять первую стратегию и с вероятностью 5/8 вторую, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей его проигрыш в среднем составит не более 27/8.

## 2.8 Решение игр $m\times n$ сведением к задаче линейного программирования

Пусть имеется матричная игра $m\times n$ без седловой точки с матрицей выигрышей $\{a_{ij}\}$. Допустим, что все выигрыши $a_{ij}$ положительны (этого всегда можно добиться, прибавляя ко всем элементам матрицы достаточно большое число *C*; от этого, как уже отмечалось, цена игры увеличится на *C*, а оптимальные решения $S_A^*$ и $S_B^*$ не изменятся).

Если все $a_{ij}$ положительны, то и цена игры $v$ при оптимальной стратегии тоже положительна, т.к. $\alpha \le v \le \beta$.

В соответствии с основной теоремой матричных игр, если платежная матрица не имеет седловой точки, то имеется пара оптимальных смешанных стратегий $S_A^* = (p_1, p_2, ..., p_m)$, $S_B^* = (q_1, q_2, ..., q_n)$, применение которой обеспечивает игрокам получение цены игры $v$.

Найдем вначале $S_A^*$. Для этого предположим, что игрок *B* отказался от своей оптимальной смешанной стратегии $S_B^*$ и применяет только чистые стратегии. В каждом из этих случаев выигрыш игрока *A* будет не меньше, чем $v$:

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{m1}p_m \ge v, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{m2}p_m \ge v, \\ \qquad \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{mn}p_m \ge v. \end{cases} \tag{2.11}$$

Разделив левую и правую часть каждого из неравенств (2.11) на положительную величину $v$ и введя обозначения:

$$x_1 = \frac{p_1}{v}, x_2 = \frac{p_2}{v}, \dots, x_m = \frac{p_m}{v} \tag{2.12}$$

запишем неравенства (2.11) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \ge 1, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \ge 1, \\ \qquad \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \ge 1, \end{cases} \tag{2.13}$$

где $x_1, x_2, ..., x_m$ − неотрицательные переменные.

В силу того, что $p_1 + p_2 + ... + p_m = 1$, переменные $x_1, x_2, ..., x_m$ удовлетворяют условию

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v}. \tag{2.14}$$

Учитывая, что игрок *A* стремится максимизировать $v$, получаем следующую задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных $x_1, x_2, ..., x_m$ такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям − неравенствам (2.13) и обращали в минимум линейную функцию этих переменных:

$$Z = x_1 + x_2 + ... + x_m = \frac{1}{v} \to \min. \tag{2.15}$$

Из решения задачи линейного программирования находим цену игры $v$ и оптимальную стратегию $S_A^*$ по формулам:

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i}, \tag{2.16}$$

$$p_i = \frac{x_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = x_i \cdot v,\ i = \overline{1,m}. \tag{2.17}$$

Аналогично находим оптимальную стратегию $S_B^*$ игрока $B$. Предположим, что игрок $A$ отказался от своей оптимальной стратегии $S_A^*$ и применяет только чистые стратегии. Тогда проигрыш игрока $B$ в каждом из этих случаев будет не больше, чем $v$:

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le v, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le v, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le v. \end{cases} \tag{2.18}$$

Разделив левую и правую части каждого их неравенств (2.18) на положительную величину $v$ и введя обозначения:

$$y_1 = \frac{q_1}{v},\ y_2 = \frac{q_2}{v}, \ldots,\ y_n = \frac{q_n}{v}, \tag{2.19}$$

запишем неравенство (2.18) в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \le 1. \end{cases} \tag{2.20}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n -$ неотрицательные переменные.

В силу того, что $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$, переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}. \tag{2.21}$$

Учитывая, что игрок $B$ стремится минимизировать положительную цену $v$ (свой проигрыш), получаем задачу линейного программирования: найти неотрицательные значения переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ такие, чтобы они удовлетворяли линейным ограничениям (2.20) и обращали в максимум линейную функцию этих переменных:

$$L = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \to \max. \tag{2.22}$$

Эта задача является двойственной по отношению к задаче, представленной условиями (2.13) и (2.15).

Оптимальная стратегия $S_B^*$ игрока $B$ определяется из решения двойственной задачи линейного программирования по формулам:

$$q_j = \frac{y_j}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = y_j \cdot v, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.23}$$

Таким образом, оптимальные стратегии $S_A^*$ и $S_B^*$ матричной игры $m \times n$ с платежной матрицей $\{a_{ij}\}$ могут быть найдены путем решения пары двойственных задач линейного программирования (см. табл. 2.1):

**Таблица 2.1.**

| Прямая (исходная) задача | Двойственная задача |
|---|---|
| $Z = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min,$<br>$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge 1, \ j = \overline{1,n};$<br>$x_i \ge 0, \ i = \overline{1,m}.$ | $L = \sum_{j=1}^{n} y_j \to \max,$<br>$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le 1, \ i = \overline{1,m};$<br>$y_j \ge 0, \ i = \overline{1,n}.$ |

При этом

$$v = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} x_i} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} y_j} = \frac{1}{Z} = \frac{1}{L}, \tag{2.24}$$

$$p_i = x_i v, \ i = \overline{1,m}; \ \ q_j = y_j v, \ j = \overline{1,n}.$$

При решении произвольной конечной игры размера $m \times n$ рекомендуется придерживаться следующей схемы:

1. Исключить из платежной матрицы заведомо невыгодные стратегии по сравнению с другими стратегиями. Такими стратегиями для игрока $A$ (игрока $B$) являются те, которым соответствуют строки (столбцы) с элементами, заведомо меньшими (большими) по сравнению с элементами других строк (столбцов).
2. Определить верхнюю и нижнюю цены игры и проверить, имеет ли игра седловую точку. Если седловая точка есть, то соответствующие ей стратегии игроков будут оптимальными, а цена совпадает с верхней (нижней) ценой.
3. Если седловая точка отсутствует, то решение следует искать в смешанных стратегиях. Для игр размера $m \times n$ рекомендуется симплексный метод (или в программе Excel или в математическом пакете), для игр размера $2 \times 2$, $2 \times n$, $m \times 2$ возможно геометрическое решение.

**Пример 2.11.** Две отрасли могут осуществлять капитальные вложения в 3 объекта. Стратегии отраслей: $i$-я стратегия состоит в финансировании $i$-го объекта ($i$ = 1, 2, 3). Учитывая особенности вкладов и местные условия, прибыли первой отрасли выражаются следующей матрицей:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Величина прибыли первой отрасли считается такой же величиной убытка для второй отрасли – представленная игра может рассматриваться как игра двух игроков с нулевой суммой.

**Решение.** Найдем $\alpha$ и $\beta$: $\alpha=\max(-1,-3,-2)=-1,$ $\beta=\min(5,4,6)=4.$ Т.к. $\alpha\neq\beta$, то решение игры находим в области смешанных стратегий.

Рассмотрим игрока *A*. Будем искать оптимальную смешанную стратегию игрока *A*: $S_A^*=(p_1,p_2,p_3)$, где $p_i$ – частота (вероятность) использования игроком *A* своей *i*-стратегии (*i* = 1, 2, 3). Обозначим цену игры (средний выигрыш) – $v$.

Чтобы свести матричную игру для игрока *A* к задаче линейного программирования преобразуем платежную матрицу так, чтобы все ее элементы были больше нуля – прибавим ко всем элементам матрицы число $\gamma=\left|\min\limits_{i,j} a_{ij}\right|+1=3+1=4.$ Получаем преобразованную платежную матрицу:

$$P'=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

На основе полученной матрицы и используя (2.13) - (2.15) сформулируем задачу линейного программирования:

$$F(X)=x_1+x_2+x_3\to\min,$$

$$\begin{cases} 3x_1+9x_2+2x_3\geq 1, \\ 5x_1+6x_2+8x_3\geq 1, \\ 10x_1+x_2+9x_3\geq 1, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\geq 0.$$

Полученное решение: $X^*=(0.0787,\quad 0.0816,\quad 0.0146)$, $F(X^*)=0.1749.$

Следовательно, $v=\dfrac{1}{F(X^*)}=\dfrac{1}{0.1749}=5.7167.$

Т.к. $p_i=vx_i$, $i=\overline{1,3}$, получаем $p_1=5.7167\cdot 0.0787=0.45,$ $p_2=5.7167\cdot 0.0816=0.47,$ $p_3=5.7167\cdot 0.0146=0.08.$

$S_A^*=\left(0.45,0.47,0.08\right)$ – это решение для игры, заданной матрицей $P'$ (преобразованной матрицы). Для матрицы *P*: компоненты смешанной стратегии не меняются, а цена игры меньше на число, которое прибавляли ко всем элементам матрицы *P*, т.е. на 4. Окончательный результат:

$S_A^*=\left(0.45,0.47,0.08\right)$, $v=1.7167\cong 1.72.$

Рассмотрим игрока *B*. Запишем двойственную задачу:

$$L\left(Y\right)=y_1+y_2+y_3\to\max,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 + 10y_3 \le 1, \\ 9y_1 + 6y_2 + y_3 \le 1, \\ 2y_1 + 8y_2 + 9y_3 \le 1, \end{cases}$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0.$$

Полученное решение: $Y^* = (0.0758, 0.0437, 0.0554)$, $L(Y^*) = 0.1749$.

Следовательно, $v = 5.7167 - 4 \cong 1.72$. Т.к. $q_j = vy_j,\ j = \overline{1,3}$, получаем $q_1 = 5.7167 \cdot 0.0758 = 0.43$, $q_2 = 5.7167 \cdot 0.0437 = 0.25$, $q_3 = 5.7167 \cdot 0.0554 = 0.32$, $S_B^* = (0.43, 0.25, 0.32)$.

**Ответ:** $S_A^* = (0.45, 0.47, 0.08)$, $S_B^* = (0.43, 0.25, 0.32)$, $v = 1.72$.

Данный ответ **означает следующее**:

– если первая отрасль с вероятностью 0.45 будет применять первую стратегию, с вероятностью 0.47 – вторую и с вероятностью 0.08 – третью, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей ее выигрыш (прибыль) в среднем составит не менее 1.72;

– если вторая отрасль с вероятностью 0.43 будет применять первую стратегию, с вероятностью 0.25 – вторую и с вероятностью 0.32 – третью, то при достаточно большом количестве игр с данной матрицей ее проигрыш (убыток) в среднем составит не более 1.72.

## 2.9 Итерационный метод приближенного решения матричных игр.

Решение сравнительно сложных матричных игр «вручную» (без компьютерных программ) путем приведения их к задачам линейного программирования в большинстве случаев представляет собой достаточно трудоемкий и громоздкий процесс. Но даже при компьютерном решении задачи линейного программирования могут возникнуть сложности для матриц больших размерностей. Поэтому при развитии теории игр возникла потребность в разработке методов приближенного решения матричных игр. Разработка этих методов была оправданна также тем, что часто в практических задачах нет необходимости находить точное решение матричной игры. Достаточно найти приближенное решение, которое дает средний платеж, близкий к цене игры, и приближенные оптимальные стратегии игроков.

Кроме того, платежи игроков в каждой ситуации не всегда определяются точными измерениями. В процессе сбора данных об изучаемом явлении, анализа этих данных и введения различных предположений при построении модели накапливаются ошибки. Поэтому стремление к чрезмерной точности в определении цены игры и оптимальных стратегий игроков оправданно не всегда.

В большинстве случаев небольшая погрешность в оценке игроком своего выигрыша не может привести к практически серьезным последствиям при определении оптимальной стратегии, а небольшое отклонение от нее не влечет за собой существенного изменения в цене игры.

Ориентировочное значение цены игры может дать уже простой анализ платежной матрицы и определение нижней и верхней чистых цен игры. Если они близки, то поисками точного решения заниматься необязательно, достаточно выбрать чистые осторожные стратегии. Если же они значительно различаются, но нет возможности использовать методы, обеспечивающие точное решение, можно получить приемлемое решение с помощью методов приближенного решения матричных игр.

В теории игр разработано несколько таких методов, из которых самым известным и весьма простым является *итеративный метод Брауна - Робинсона*, известный также как метод фиктивного разыгрывания. Метод основан на принципе накопления платежей в ходе многократного фиктивного повторения игры. Применение метода построено на «мысленном эксперименте», в котором игроки, поочередно применяя свои чистые стратегии, пытаются выиграть как можно больше (проиграть как можно меньше). Одно «разыгрывание» игры называется партией; число партий может быть сколь угодно большим.

Метод заключается в последовательном фиктивном разыгрывании матричной игры с выбором игроками в каждой данной партии своих «наилучших» чистых стратегий. При использовании этого метода фактически имитируется многократное повторение игры и «набирается статистика», показывающая, какие стратегии максимизируют накопленный выигрыш (минимизируют накопленный проигрыш), и таким образом определяется оптимальная стратегия. Этот процесс приближенного нахождения оптимальных стратегий игроков называется итеративным, а каждый его шаг, т. е. партия, − итерацией.

При решении игры с матрицей $A_{mn} = \{a_{ij}\}$ в каждой партии каждый игрок выбирает ту стратегию, при которой он может получить максимальный платеж при стратегии, выбранной противником. Для определенности принимают, что «первый ход» делает первый игрок (что не влияет на дальнейшую логику решения). Игрок 2 выбирает стратегию, которая максимизирует его собственный накопленный выигрыш (минимизирует его накопленный проигрыш) при выбранной стратегии первого игрока, и т. д. С ростом числа партий смешанные стратегии, которые приписываются игрокам, приближаются к их оптимальным стратегиям.

В итоге, если игра останавливается на $k$ -м шаге, и за $k$ разыгрываний игрок 1 использовал $i$-ю чистую стратегию $\xi_i^k$ раз $\left(i = \overline{1,m}\right)$, а игрок 2 – $j$-ю чистую стратегию $\eta_j^k$ раз $\left(j = \overline{1,n}\right)$, то приближенными оптимальными смешанными стратегиями игроков будут векторы $P_k = \left(\frac{\xi_1^k}{k}, \frac{\xi_2^k}{k}, \dots, \frac{\xi_m^k}{k}\right)$, $Q_k = \left(\frac{\eta_1^k}{k}, \frac{\eta_2^k}{k}, \dots, \frac{\eta_n^k}{k}\right)$.

На каждом шаге определяются минимальный средний проигрыш игрока 2

($\upsilon_1^k$) и максимальный средний выигрыш игрока 1 ($\upsilon_2^k$). Приближенное значение цены игры $\upsilon^k$ лежит в диапазоне $\left[\upsilon_1^k;\upsilon_2^k\right]$ и определяется как среднеарифметическое $\upsilon_1^k$ и $\upsilon_2^k$: $\dfrac{\upsilon_1^k+\upsilon_2^k}{2}$.

Данный итеративный процесс позволяет находить приближенное решение матричной игры, причем степень близости приближения к точному решению определяется длиной интервала $\left[\upsilon_1^k;\upsilon_2^k\right]$.

На практике результаты итераций данного метода обычно представляются в виде таблицы 2.2.

**Таблица 2.2.**

| Номер партии | Чистая стратегия, выбранная игроком 1 | Накопленные проигрыши игрока 2 при его стратегиях | | | Минимальный средний проигрыш игрока 2 | Чистая стратегия, выбранная игроком 2 | Накопленные проигрыши игрока 1 при его стратегиях | | | Максимальный средний выигрыш игрока 1 | Цена игры |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $k$ | $i$ | $B_1$ | $\cdots$ | $B_n$ | $\upsilon_1^k = \dfrac{\min B_j}{k}$ | $j$ | $A_1$ | $\cdots$ | $A_m$ | $\upsilon_2^k = \dfrac{\max A_i}{k}$ | $\upsilon^k$ |
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | | | | | | | | | | | |
| … | | | | | | | | | | | |

**Пример 2.12.** Проиллюстрируем этот метод на примере игры, заданной матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

В самом начале игры у игроков еще нет никакой информации о стратегиях, выбранных противником, поэтому игрок, делающий «первый ход», может произвольно (случайно) выбрать свою стратегию в первой партии. Чтобы исключить произвольность выбора, некоторые авторы рекомендуют для определенности считать, что на «первом ходу» выбирается первая чистая стратегия. Другой подход, более логичный в контексте анализа матричных игр, заключается в том, что игрок, делающий «первый ход», выбирает «осторожную стратегию» (максиминную для первого игрока и минимаксную для второго).

Предположим, что начинает **игрок 1** и, следуя принципу максимина, выбирает первую стратегию. В этом случае проигрыши игрока 2 составят: (2;**0**;3). **Игрок 2** выбирает стратегию так, чтобы его проигрыш оказался минимальным, что обеспечивается второй стратегией. Тогда выигрыши игрока 1 составят: (0;**3**).

При этом $\upsilon_1^1 = \min\{2;0;3\}/1=0$, $\upsilon_2^1$=max{0;3}/1=3, $\upsilon^1$=(0+3)/2=1.5 (см. табл. 2.3).

В ответ на эту стратегию **игрок 1** должен выбрать свою вторую чистую стратегию (1;3;-3). В этом случае накопленные платежи определяются как

(2;0;3)+(1;3;-3)=(3;3;**0**). Эти платежи соответствуют накопленным проигрышам второго игрока и записываются в соответствующие ячейки таблицы 2.3. Стараясь минимизировать свой проигрыш, **игрок 2** выбирает свою третью чистую стратегию (3;-3). Тогда накопленные выигрыши первого игрока составят: (0;3)+(3;-3)=(**3**;0). При этом $\upsilon_1^2 = \min\{3;3;0\}/2 = 0$, $\upsilon_2^2 = \max\{3;0\}/2 = 1.5$, $\upsilon^2 = (0+1.5)/2 = 0$ (см. табл. 2.3).

В третьей партии **игрок 1** выбирает первую чистую стратегию (2;0;3), чтобы максимизировать свой накопленный платеж. При этом накопленные проигрыши **игрока 2** составят: (3;3;0)+(2;0;3)=(5;**3**;3). Здесь мы сталкиваемся с ситуацией неоднозначного выбора стратегии второго игрока, которая будет минимизировать его накопленный проигрыш: и вторая, и третья стратегии обеспечивают минимальный проигрыш (3). В этом случае одна из двух этих стратегий выбирается произвольно (случайно), либо используются дополнительные критерии, определяющие более предпочтительную стратегию (например, выбирается менее рискованная стратегия), но подобные критерии не всегда очевидны и однозначны. В таких случаях из двух «равнозначных» стратегий обычно выбирается стратегия с наименьшим номером (в данном случае это стратегия 2). В итоге накопленные платежи первого игрока составят: (3;0)+(0;3)=(3;3) (см. табл. 2.3). Таким образом, в четвертой партии при выборе стратегии первого игрока вновь сталкиваемся с ситуацией равенства накопленных платежей, т. е. «равнозначностью» стратегий. Из двух стратегий, обеспечивающих максимальный накопленный выигрыш первого игрока, выбираем стратегию с меньшим номером (стратегия 1).

Тогда в четвертой партии накопленные проигрыши второго игрока составят (7;3;6), и он, минимизирую свой проигрыш, выберет вторую стратегию, обеспечив первому игроку накопленные выигрыши (3;6), что, в свою очередь, обусловливает выбор первым игроком в пятой партии его второй чистой стратегии, и т. д. Следуя такой логике, можно получить приближенное решение игры. Результаты 12 итераций представлены в таблице 2.3.

**Таблица 2.3**

| $k$ | $i$ | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\upsilon_1^k$ | $j$ | $A_1$ | $A_2$ | $\upsilon_2^k$ | $\upsilon^k$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | **0** | 3 | 0.00 | 2 | 0 | **3** | 3.00 | 1.50 |
| 2 | 2 | 3 | 3 | **0** | 0.00 | 3 | **3** | 0 | 1.50 | 0.75 |
| 3 | 1 | 5 | **3** | 3 | 1.00 | 2 | **3** | 3 | 1.00 | 1.00 |
| 4 | 1 | 7 | **3** | 6 | 0.75 | 2 | 3 | **6** | 1.50 | 1.12 |
| 5 | 2 | 8 | 6 | **3** | 0.60 | 3 | **6** | 3 | 1.20 | 0.90 |
| 6 | 1 | 10 | **6** | 6 | 1.00 | 2 | **6** | 6 | 1.00 | 1.00 |
| 7 | 1 | 12 | **6** | 9 | 0.86 | 2 | 6 | **9** | 1.44 | 1.15 |
| 8 | 2 | 13 | 9 | **6** | 0.75 | 3 | **9** | 6 | 1.13 | 0.93 |
| 9 | 1 | 15 | **9** | 9 | 1.00 | 2 | **9** | 9 | 1.00 | 1.00 |
| 10 | 1 | 17 | **9** | 12 | 0.90 | 2 | 9 | **12** | 1.20 | 1.05 |
| 11 | 2 | 18 | 12 | **9** | 0.82 | 3 | **12** | 9 | 1.09 | 0.96 |
| 12 | 1 | 20 | **12** | 12 | 1.00 | 2 | **12** | 12 | 1.00 | 1.00 |
| … | | | | | | | | | | |

Решение игры определяется приближенно по окончании любого из шагов.

После 9-го шага имеем $\nu^9 = 1.00$.

При этом игрок *A* 6 раз использовал стратегию $A_1$ и 3 раза стратегию $A_2$. В свое очередь игрок *B* 6 раз применял стратегию $B_2$, 3 раза стратегию $B_3$, а стратегией $B_1$ не пользовался вообще. Отсюда получаем, что

$$P_9 = \left\{\frac{6}{9}, \frac{3}{9}\right\} \approx \{0.67;\ 0.33\},\ Q_9 = \left\{0, \frac{6}{9}, \frac{3}{9}\right\} \approx \{0; 0.67; 0.33\}$$

Соответственно, после 10-го шага получаем – $\nu^{10} = 1.05$, $P_{10} = \left\{\frac{7}{10},\ \frac{3}{10}\right\} = \{0.7;\ 0.3\}$, $Q_{10} = \left\{0, \frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right\} = \{0; 0.7; 0.3\}$.

Данная игра легко решается графически. Вот точный ответ: $\nu = 1,\ P = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\},\ Q = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$.

Сравнивая результаты, полученные на 9-м, 10-м, а также 11-м и 12-м шагах:

$$\nu^{11} = 0.96, \qquad \nu^{12} = 1.00,$$

$$P_{11} = \left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right) \approx (0.64,\ 0.36), \qquad P_{12} = \left(\frac{8}{12}, \frac{4}{12}\right) \approx (0.67;\ 0.33),$$

$$Q_{11} = \left(0, \frac{7}{11}, \frac{4}{11}\right) \approx (0, 0.64,\ 0.36), \quad Q_{12} = \left\{0,\ \frac{8}{12}, \frac{4}{12}\right\} \approx (0,\ 0.67;\ 0.33),$$

замечаем, что по мере увеличения числа шагов значения все меньше отличаются от точных.

Рассмотренный процесс сходится, т. е. после достаточного числа итераций можно получить решение с заданной точностью.

В качестве простейшего ориентира для оценки сходимости процесса и точности получаемого решения может быть принято абсолютное значение разности значений $\upsilon^k$ в данной и предыдущей партиях игры $\left|\upsilon^k - \upsilon^{k-1}\right|$. Однако скорость сходимости довольно мала, поэтому часто для получения приемлемого решения необходимо выполнить большое число (десятки или даже сотни) итераций. При этом скорость сходимости заметно уменьшается с ростом числа стратегий игроков. Это также является следствием немонотонности последовательностей $\upsilon_1^k$ и $\upsilon_2^k$.

Но, наряду с такими недостатками, можно выделить и достоинства метода.

Во-первых, метод позволяет довольно просто найти ориентировочное значение цены игры и приближенно вычислить оптимальные стратегии игроков.

Во-вторых, сложность и объем вычислений сравнительно слабо возрастают по мере увеличения числа стратегий игроков ($m$ и $n$).

В заключение отметим, что если игра имеет больше одного решения, то приближенное значение цены игры будет стремиться к истинной цене игры, но относительные частоты выбора стратегий необязательно будут приближаться к истинным оптимальным смешанным стратегиям игроков.

## 2.10 Задачи для самостоятельного решения

**1**. Для следующих платежных матриц определите нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловых точек (таблица 2.4):

**Таблица 2.4**

| № | Задание | № | Задание |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | **2.** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0.7 & 0.8 \\ 0.7 & 0.6 & 0.6 \end{pmatrix}$ | **4.** | $\begin{pmatrix} 1 & 0.6 & 1.8 \\ 0.9 & 1.7 & 1.8 \\ 1.7 & 0.6 & 2.6 \end{pmatrix}$ |
| **5.** | $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | **6.** | $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ | **8.** | $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 3 & 6 & 2 \\ 3 & 7 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ |
| **9.** | $\begin{pmatrix} -5 & -6 & -7 & -8 & 0 \\ -5 & -6 & -7 & 0 & 9 \\ -5 & -6 & 0 & 8 & 9 \\ -5 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ | **10.** | $\begin{pmatrix} 9 & -5 & 7 & -5 & 5 \\ -6 & 8 & -6 & 6 & -6 \\ 9 & -7 & 7 & -7 & 5 \\ -8 & 8 & -8 & 6 & -8 \\ 9 & -9 & 7 & -9 & 5 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11.** | $\begin{pmatrix} 15 & 16 & 17 & 18 & 10 \\ 15 & 16 & 17 & 10 & 9 \\ 13 & 16 & 10 & 18 & 9 \\ 12 & 10 & 17 & 18 & 9 \\ 10 & 16 & 19 & 18 & 9 \end{pmatrix}$ | **12.** | $\begin{pmatrix} 29 & 15 & 27 & 15 & 25 \\ 16 & 8 & 16 & 6 & 16 \\ 9 & 17 & 7 & 17 & 5 \\ 18 & 8 & 18 & 6 & 18 \\ 9 & 19 & 7 & 19 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $\begin{pmatrix} 25 & 16 & 17 & 18 & 10 \\ 15 & 16 & 16 & 10 & 9 \\ 23 & 16 & 10 & 17 & 9 \\ 12 & 10 & 17 & 18 & 9 \\ 9 & 16 & 19 & 18 & 9 \end{pmatrix}$ | **14.** | $\begin{pmatrix} 39 & 25 & 17 & 25 & 25 \\ 16 & 18 & 16 & 16 & 16 \\ 19 & 27 & 17 & 27 & 25 \\ 16 & 20 & 18 & 16 & 18 \\ 9 & 19 & 7 & 19 & 5 \end{pmatrix}$ |

**Решим 1-е задание.**

Платежная матрица игры:

| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $\alpha_i = \min\limits_{j=\overline{1,3}} a_{ij}$ | $\alpha = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \alpha_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 0.5 | 0.6 | 0.8 | 0.5 | 0.7 |
| $A_2$ | 0.9 | **0.7** | 0.8 | 0.7 | |
| $A_3$ | 0.7 | 0.6 | 0,6 | 0.6 | |
| $\beta_j = \max\limits_{i=\overline{1,3}} a_{ij}$ | 0.9 | 0.7 | 0.8 | | |
| $\beta = \min\limits_{j=\overline{1,3}} \beta_j$ | 0.7 | | | | |

Ответ: $\alpha = \beta = \nu = 0.7$ – цена игры. Седловая точка $(A_2, B_2)$.

**2.** Решите следующие матричные игры (таблица 2.5):

**Таблица 2.5**

| № | Задание | № | Задание |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ | **2.** | $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ | **4.** | $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **5.** | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 8 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ | **6.** | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$ | **8.** | $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9.** | $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ | **10.** | $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 0 & -3 \\ -6 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **11.** | $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ | **12.** | $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **13** | $\begin{pmatrix} 15 & 12 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ |

**3**. Найти решение в смешанных стратегиях, предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет, для игры, заданной платежной матрицей (таблица 2.6):

**Таблица 2.6**

| **№** | **Задание** | **№** | **Задание** |
|---|---|---|---|
| **1.** | $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -5 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ | **2.** | $\begin{pmatrix} 8 & 9 & 5 \\ -20 & 15 & 1 \\ 6 & -10 & 18 \end{pmatrix}$ |
| **3.** | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **4.** | $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **5.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **6.** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **7.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | **8.** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **9.** | $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ -5 & -2 & 10 & -3 \\ 7 & 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}$ | **10.** | $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **11.** | $\begin{pmatrix} 11 & 9 & 6 & 10 \\ 2 & 3 & 8 & 4 \\ 15 & 12 & 10 & 13 \\ 17 & 4 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ | **12.** | $\begin{pmatrix} 3 & 12 & 11 & 8 \\ 2 & 3 & 13 & 10 \\ 11 & 2 & 12 & 7 \\ 11 & 12 & 4 & 11 \end{pmatrix}$ |
| **13.** | $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 13 & 10 & 8 & 11 \\ 15 & 2 & 10 & 12 \end{pmatrix}$ | **14.** | $\begin{pmatrix} 5 & 14 & 13 & 10 \\ 5 & 6 & 16 & 12 \\ 13 & 4 & 15 & 9 \\ 13 & 12 & 6 & 11 \end{pmatrix}$ |

**4.** Найдите приближенное решение игры, заданной матрицей $A$ (таблица 2.7):

**Таблица 2.7**

| № | Задание | № | Задание |
|---|---|---|---|
| 1. | $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ | 2. | $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 3 & 3 & 8 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ |
| 3. | $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | 4. | $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$ |

**5. (Игра полковника Блотто)**. Город $A$ имеет двое ворот. В городе находится гарнизон, состоящий из 5 полков. На город нападает противник, имеющий четыре таких же полка.

Защитники выигрывают борьбу за ворота, если количество их полков больше, чем количество нападающих на них полков. Выигрыш по одним воротам равен числу, на единицу большему количества нападающих полков (сохранены ворота, и противник "лишился" своих полков, поскольку они заняты нападением на эти ворота).

Если количество полков защитников меньше, чем количество нападающих полков, то проигрыш защитников по одним воротам равен $(-1)$ – ворота потеряны. Если количество полков защитников равно количеству нападающих, то выигрыш защитников по этим воротам равен нулю: ничья, ворота никому не достались. Общий выигрыш защитников города, записываемый в матрицу платежей, равен сумме выигрышей по двум воротам.

Так, при защите первых ворот одним полком, вторых – четырьмя, при нападении на первые ворота 1 полка, а на вторые – трёх полков получаем, что "выигрыш" на первых воротах равен 0, на вторых выигрыш равен $3 + 1 = 4$ и сумма выигрыша защитников равна 4.

Составить матрицу платежей игры полковника Блотто.

**Решение**. Рассмотрим возможные стратегии защитников и нападающих при заданном количестве полков.

Стратегии защитников, распределяющих свои полки между двумя воротами города, составят следующие пары чисел: (0; 5), (1; 4), (2; 3), (3; 2), (4; 1), (5; 0). Всего получилось шесть стратегий.

Стратегии противника распределения их полков по тем же воротам могут быть следующие: (0; 4), (1; 3), (2; 2), (3; 1), (4; 0). Всего пять стратегий. Следовательно, матрица этой игры будет иметь шесть строк и пять столбцов. Её элемент $a_{11}$ найдем как платеж при применении первой стратегии $A_1 = (0,5)$ защитниками и первой стратегии $B_1 = (0,4)$ нападающими. Так как 0 = 0, «выигрыш» на первых воротах равен 0, на вторых выигрыш равен 4+1=5, и сумма выигрыша защитников на двух воротах равна 5.

Элемент $a_{12}$ равен платежу при применении стратегий $A_1 = (0,5)$ и $B_2 = (1,3)$. Так как 0<1, «выигрыш» на первых воротах равен (−1), на вторых выигрыш равен 3+1=4, следовательно, $a_{12} = -1 + 4 = 3$.

Элемент $a_{13}$ равен платежу при применении стратегий $A_1 = (0,5)$ и $B_3 = (2,2)$, то есть $a_{13} = -1 + 2 + 1 = 2$.

Аналогично для пары стратегий $A_1 = (0,5)$ и $B_4 = (3,1)$ получаем $a_{14} = -1 + 1 + 1 = 1$, и для пары стратегий $A_1 = (0,5)$ и $B_5 = (4,0)$ платеж $a_{15} = -1 + 0 + 1 = 0$.

Так же вычисляем значения элементов второй строки таблицы: для стратегий $A_2 = (1,4)$ и $B_1 = (0,4)$ элемент $a_{21} = 0 + 1 + 0 = 1$; для стратегий $A_2 = (1,4)$ и $B_2 = (1,3)$ элемент $a_{22} = 0 + 3 + 1 = 4$; для стратегий $A_2 = (1,4)$ и $B_3 = (2,2)$ элемент $a_{23} = -1 + 2 + 1 = 2$; для стратегий $A_2 = (1,4)$ и $B_4 = (3,1)$ элемент $a_{24} = -1 + 1 + 1 = 1$; для стратегий $A_2 = (1,4)$ и $B_5 = (4,0)$ элемент $a_{25} = -1 + 0 + 1 = 0$. Аналогично получаем элементы третьей и всех последующих строк.

Результаты вычислений записываем в матрицу платежей:

| **Стратегии защитников** | **Стратегии нападающих** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1 = (0,4)$ | $B_3 = (2,2)$ | $B_3 = (2,2)$ | $B_4 = (3,1)$ | $B_5 = (4,0)$ |
| $A_1 = (0,5)$ | 5 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| $A_2 = (1,4)$ | 1 | 4 | 2 | 1 | 0 |
| $A_3 = (2,3)$ | 0 | 2 | 3 | 1 | 0 |
| $A_4 = (3,2)$ | 0 | 1 | 3 | 2 | 0 |
| $A_5 = (4,1)$ | 0 | 1 | 2 | 4 | 1 |
| $A_6 = (5,0)$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 5 |

**6.** Игрок *A* записывает одно из двух чисел: 2 или 3. Игрок *B* записывает одно из трех чисел: 3, 4 или 5. Если числа одинаковой четности, то *A* выигрывает сумму чисел; и если четности чисел не совпадают, то сумму чисел выигрывает *B*. Построить платежную матрицу игры, определить верхнюю и нижнюю цену игры. Проверить наличие седловой точки.

**7.** Швейная фабрика выпускает брюки и шорты, сбыт которых зависит от состояния погоды. Затраты фабрики на единицу продукции составили: брюки – 15 ден. ед., шорты – 10 ден. ед. Цена реализации: брюки – 21 ден. ед., шорты – 14 ден. ед. Фабрика может реализовать при теплой погоде 120 брюк и 300 шорт, а при прохладной погоде: 370 брюк и 100 шорт. В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции.

**Решение.** Составим платежную матрицу игры.

| Погода | Теплая | Холодная |
|---|---|---|
| Теплая | $a_{11}$ | $a_{12}$ |
| Холодная | $a_{21}$ | $a_{22}$ |

Вычислим значения элементов матрицы:

$a_{11} = 120(21 - 15) + 300(14 - 10) = 1920$ – прибыль фабрики, если продукция выпущена по плану теплой погоды и погода оказалась теплой;

$a_{22} = 370(21 - 15) + 100(14 - 10) = 2620$ – прибыль фабрики, если продукция выпущена по плану холодной погоды и погода оказалась холодной;

$a_{12} = 120(21 - 15) + 100(14 - 10) - 200 \cdot 10 = -880$ – прибыль фабрики, если продукция выпущена по плану теплой погоды, а погода оказалась холодной;

$a_{21} = 120(21 - 15) + 100(14 - 10) - 250 \cdot 15 = -2630$ – прибыль фабрики, если продукция выпущена по плану холодной погоды, а погода оказалась теплой.

Таким образом, платежная матрица данной игры имеет вид:

| **Погода** | Теплая | Холодная |
|---|---|---|
| Теплая | 1920 | -880 |
| Холодная | -2630 | 2620 |

Обозначим: $p_1$ – вероятность выбора фабрикой первой стратегии (то есть производства продукции по плану теплой погоды), $p_2$ – вероятность выбора фабрикой второй стратегии (то есть производства продукции по плану холодной погоды). Тогда:

$1920 \cdot p_1 - 2630 \cdot p_2$ – прибыль фабрики, если погода будет теплой;

$-880 \cdot p_1 + 2620 \cdot p_2$ – прибыль фабрики, если погода будет холодной.

Чтобы прибыль фабрики не зависела от погоды, надо найти такие $p_1$ и $p_2$, что $\begin{cases} 1920 \cdot p_1 - 2630 \cdot p_2 = \nu, \\ -880 \cdot p_1 + 2620 \cdot p_2 = \nu. \end{cases}$

Учитывая свойство вероятностей: $p_1 + p_2 = 1$, решаем уравнение:

$1920 \cdot p_1 - 2630 \cdot p_2 = -880 \cdot p_1 + 2620 \cdot p_2;$

$1920 \cdot p_1 - 2630 \cdot (1 - p_1) = -880 \cdot p_1 + 2620 \cdot (1 - p_1).$

Раскрывая скобки и приводя подобные, получаем:

$p_1(1920 + 2630 + 880 + 2620) = 2620 + 2630$;

$p_1 = \dfrac{5250}{8050} = 0.652$.

Тогда $p_2 = 1 - 0.652 = 0.348$.

Тогда план выпуска продукции для фабрики должен составить: количество брюк $= 120 \cdot 0.652 + 370 \cdot 0.348 = 207$ шт.; количество шорт $= 300 \cdot 0.652 + 100 \cdot 0.348 = 230$ шт.

При таком плане производства фабрика гарантирует себе прибыль в размере

$v = 1920 \cdot p_1 - 2630 \cdot p_2 = 1920 \cdot 0.652 - 2630 \cdot 0.348 = 337$ ден.ед.

**8.** Швейная фабрика выпускает платья и костюмы, сбыт которых зависит от состояния погоды. Затраты фабрики на единицу продукции составили: платья – 8 ден. ед., костюмы – 27 ден. ед. Цена реализации: платья – 17 ден. ед., костюмы – 48 ден. ед. Фабрика может реализовать при теплой погоде 1975 платьев и 600 костюмов, а при прохладной погоде: 625 платьев и 1000 костюмов.

Максимизировать среднюю величину дохода от реализации продукции, учитывая капризы природы, т. е. составить такой план выпуска продукции, при котором гарантированная минимально возможная величина средней прибыли была бы максимальной, независимо от погоды.

**9.** Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую можно сразу отправить к потребителю ($A_1$), отправить на склад для хранения ($A_2$) или подвергнуть дополнительной обработке для длительного хранения ($A_3$). Потребитель может приобрести продукцию немедленно ($B_1$), в течение небольшого времени ($B_2$) или после длительного периода времени ($B_3$).

В случае стратегии $A_2$ и $A_3$ предприятие несет дополнительные затраты на хранение и обработку продукции, которая не требуется для $A_1$, однако при $A_2$ следует учесть возможные убытки из-за порчи продукции, если потребители выберут стратегии $B_2$ и $B_3$. Определить оптимальные пропорции выпуска продукции, руководствуясь минимаксным критерием, при следующей матрице затрат $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

**10.** Рассмотрим фирму, администрация которой ведет переговоры с профсоюзом рабочих и служащих о заключении контракта. Платежная матрица,

отражающая интересы договаривающихся сторон, имеет следующий вид
$$\begin{pmatrix} 75 & 105 & 65 & 45 \\ 70 & 60 & 55 & 40 \\ 80 & 90 & 35 & 50 \\ 95 & 100 & 50 & 55 \end{pmatrix}.$$

Выплаты указаны в центах в час и представляют собой среднюю зарплату служащего фирмы вместе со всеми добавками. Тем самым, заданная матрица описывает прибыль профсоюза (игрок $A$) и затраты администрации фирмы (игрок $B$). Найти решение игры.

**Решение.** Ясно, что профсоюз стремится максимизировать доходы рабочих и служащих, в то время как администрации хотелось бы минимизировать собственные потери.

Нетрудно заметить, что седловой точки у платежной матрицы нет. Кроме того, для дальнейшего анализа существенными являются лишь стратегии $A_1$ и $A_4$ игрока $A$ и стратегии $B_3$ и $B_4$ игрока $B$ (в этом нетрудно убедиться, воспользовавшись правилом доминирования стратегий). В результате соответствующего усечения получим матрицу $\begin{pmatrix} 65 & 45 \\ 50 & 55 \end{pmatrix}$.

Воспользовавшись графическим методом, в итоге получим
$$P = \left\{\frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{4}{5}\right\},\quad \mathrm{Q} = \left\{0,\ 0,\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right\},\quad v = 53.$$

Тем самым, профсоюзу следует выбирать стратегию $A_1$ в 20 % случаев и стратегию $A_4$ в 80 %. Что касается администрации, то ей следует выбирать стратегию $B_3$ с вероятностью 0,4 и стратегию $B_4$ с вероятностью 0,6. При этом ожидаемая цена игры равна 53.

Следует отметить, что если процесс переговоров будет повторяться много раз, то среднему должно сходиться к ожидаемому значению 53. Если же переговоры пройдут лишь единожды, то реальный результат подучится при выборе каждым игроком некоторой своей чистой стратегии. Поэтому один из игроков, профсоюз или администрация, будет не удовлетворен.

**11. «Локальный конфликт».** Рассмотрим войну между двумя небольшими государствами $A$ и $B$, которая ведется в течение 30 дней. Для бомбардировки небольшого моста − важного военного объекта страны $B$ − страна $A$ использует оба имеющихся у нее самолета. Разрушенный мост восстанавливается в течение суток, а каждый самолет совершает один полет в день по одному из двух воздушных маршрутов, соединяющих эти страны. У страны $B$ есть два зенитных орудия, при помощи которых можно сбивать самолеты страны $A$. Если самолет собьют, то некая третья страна в течение суток поставит стране $A$ новый самолет.

Страна $A$ может послать самолеты либо по одному маршруту, либо по разным. Страна $B$ может поместить либо обе зенитки на одном маршруте, либо по одной зенитке на каждый маршрут.

Если один самолет летит по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то этот самолет будет сбит. Если два самолета летят по маршруту, на котором расположены две зенитки, то оба самолета будут сбиты. Если два самолета летят по маршруту, на котором расположена одна зенитка, то сбит будет только один самолет. Если самолет доберется до цели, то мост будет уничтожен. Найти оптимальное решение стратегии игроков и цену игры.

**Решение.** У страны $A$ есть две стратегии: послать самолеты по разным маршрутам − $A_1$, послать самолеты по одному маршруту − $A_2$.

У страны $B$ − также две стратегии: поместить зенитки на разных маршрутах − $B_1$, поместить зенитки на одном маршруте − $B_2$.

Если страна $A$ выберет стратегию $A_1$, а страна $B$ − стратегию $B_1$, то страна $A$ получит нулевой выигрыш, так как ни один из самолетов не достигнет цели.

Если страна $A$ выберет стратегию $A_2$, а страна $B$ − стратегию $B_1$, то хота бы один самолет достигнет цели и вероятность разрушения моста будет равна 1.

Если страна $A$ выберет стратегию $A_1$, а страна $B$ − стратегию $B_2$, то вновь хотя бы один самолет достигнет цели и вероятность разрушения моста будет равна 1.

Если страна $A$ выберет стратегию $A_2$, а страна $B$ − стратегию $B_2$, то страна $A$ с вероятностью 1/2 выберет маршрут, на котором установлены зенитки, и, следовательно, цель будет уничтожена с вероятностью 1/2.

Оформим результаты проведенного анализа в стандартной игровой форме: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

При помощи графического метода получаем оптимальные смешанные стратегии игроков и цену игры $P = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $Q = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$, $v = \frac{2}{3}$.

Это означает, что если страна $A$ будет посылать самолеты по разным маршрутам в течение десяти дней из тридцати, отпущенных на войну (и, значит, по одному маршруту в течение двадцати дней), то в среднем страна $A$ будет иметь 66,7 % удачных случаев (мост будем находиться в нерабочем состоянии). Воспользовавшись для своих зениток предложенным выбором, страна $B$ не позволит бомбить мост чаще, чем в 66.7 % случаев.

# 3 КООПЕРАТИВНЫЕ ИГРЫ

## 3.1 Введение

Часто в экономике и других областях встречаются конфликтные ситуации, предполагающие возможность объединения двух или более игроков для получения совместной выгоды, например, объединение всех продавцов с целью завышения цен. Когда число игроков больше двух, могут создаваться коалиции с целью извлечения дополнительной выгоды из сотрудничества, при этом выигрыш любой коалиции должен быть больше суммы выигрышей ее отдельных участников. Возможность создания в игре различных коалиций можно рассматривать как специфическое расширение множества допустимых стратегий игроков. Для анализа таких ситуаций служат кооперативные игры. Они отвечают на вопрос, кому и с кем выгодно объединяться и стоит ли это делать вообще. Теория кооперативных игр обеспечивает методы анализа того, что каждая коалиция игроков может получить без указания на то, как этот результат может быть достигнут.

В терминах кооперативных игр в принципе могут быть описаны и проанализированы многие экономические и социальные явления, связанные со «справедливым» распределением, например, распределением общественных благ, доходов акционеров и инвесторов, затрат на социально значимый проект. Игры этого класса полезны при рассмотрении взаимоотношений поставщиков и покупателей, обосновании различных форм частно-государственного партнерства, решении проблем банкротства и налогообложения и др. Однако из-за сложности анализа игр многих игроков моделирование коалиционных взаимодействий на данный момент пока еще в значительной степени остается в теоретической плоскости.

При анализе кооперативных игр, как правило, предполагается, что полезности игроков обладают свойством трансферабельности, то есть измеряются в одной шкале и могут передаваться от одного игрока другому без потерь, поэтому такие игры также называются играми с трансферабельной полезностью, хотя существуют и более сложные модели кооперативных игр, выходящие за рамки указанного предположения.

Теория кооперативных игр изучает неантагонистические конфликты, участники которых могут путем кооперирования объединять свои усилия. В теории кооперативных игр основная единица анализа − это группа участников, или коалиция. Цель анализа − определить такие варианты объединения, т.е. такие коалиции, которые будут наиболее полезны игрокам с точки зрения их платежей. Но при этом обычно абстрагируются от того, каким образом должны действовать игроки, чтобы обеспечить себе выигрыш. То есть в теории кооперативных игр не учитываются стратегические возможности игроков, поэтому кооперативные игры также называются нестратегическими играми. В кооперативной игре задаются возможности и предпочтения различных групп игроков (коалиций) и из них выводятся оптимальные для игроков ситуации, в том числе распределения между ними суммарных выигрышей; при этом устанавливаются сами принципы оптимальности, доказывается их реализуемость в различных классах игр, и находятся конкретные реализации. Рассматривая кооперативные игры, вначале введем главные понятия, характеризующие их, затем рассмотрим принципы оптимального решения и, наконец, методы поиска таких решений.

## 3.2 Основные понятия теории кооперативных игр

*Кооперативной* называется игра, в которой группы игроков − коалиции − могут объединять свои усилия. Подразумевается, что игроки примут решение о создании коалиции в зависимости от размеров выплат внутри коалиции.

Обозначим через $N$ множество всех игроков, $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, а через $K$ – любое его подмножество. Пусть игроки из $K$ договариваются между собой о совместных действиях и таким образом образуют одну коалицию. Образовав коалицию, множество игроков $K$ действует как один игрок против остальных $N \backslash K$ игроков, образующих другую коалицию, действующую как второй игрок, и выигрыш этих коалиций зависит от применяемых стратегий каждым из $n$ игроков. Возможны и более сложные случаи при формировании нескольких коалиций. Очевидно, что число таких коалиций, состоящих из $r$ игроков, равно числу сочетаний из $n$ по $r$ , т. е. $C_n^r$, а число всевозможных коалиций равно $\sum_{r=1}^{n} C_n^r = 2n - 1$. Из этой формулы видно, что число всевозможных коалиций значительно растёт в зависимости от числа всех игроков в данной игре. Для исследования этих игр необходимо учитывать все возможные коалиции, и поэтому трудности исследований возрастают с ростом $n$.

Функция $\upsilon$, ставящая в соответствие каждой коалиции $K$ наибольший, уверенно получаемый его выигрыш $\upsilon(K)$, называется *характеристической функцией игры*. Характеристическая функция описывает величину выгоды, которую данное подмножество игроков может достичь путем объединения в коалицию. Кооперативная игра полностью определяется заданием характеристической функции, переводящей элементы из множества всех коалиций во множество выплат. То есть игра задается коалиционными выигрышами, а выигрыши отдельных игроков не рассматриваются. Но очевидно, что каждый игрок предпочитает ту коалицию, в которой он получает больший выигрыш, поэтому нужно учитывать и возможное распределение выигрышей внутри коалиции. Таким образом, анализ кооперативных игр подразумевает, что игроки принимают решение о создании коалиции в зависимости от размеров выплат внутри коалиции.

Распределение выигрыша коалиции между входящими в нее игроками называется *дележом*. В кооперативной игре, как правило, существует множество возможных дележей. Каждый дележ описывается теми платежами, которые при этом получают отдельные игроки. С математической точки зрения *дележ* – это вектор $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, где $x_i$ − выигрыш *i*-го игрока.

*Характеристическая функция* $\upsilon$ называется *простой*, если она принимает только два значения: 0 и 1. Если характеристическая функция $\upsilon$ простая, то коалиции *K*, для которых $\upsilon(K) = 1$, называются *выигрывающими*, а коалиции *K*, для которых $\upsilon(K) = 0$, – *проигрывающими*.

Простая игра называется ***правильной***, если $\upsilon(K) = 1 - \upsilon(N \setminus K)$, т. е. коалиция выигрывает только тогда, когда дополняющая коалиция (оппозиция) проигрывает.

Простые характеристические функции возникают, например, в условиях голосования, когда коалиция является выигрывающей, если она собирает более половины голосов (простое большинство) или не менее двух третей голосов (квалифицированное большинство).

Если в простой характеристической функции $\upsilon$ выигрывающими являются те и только те коалиции, которые содержат фиксированную непустую коалицию *R*, то характеристическая функция $\upsilon$, обозначаемая в этом случае через $\upsilon_R$, называется *простейшей*. Например, при голосовании в Совете безопасности ООН выигрывающими являются все коалиции, состоящие из всех постоянных членов Совета плюс еще хотя бы один непостоянный член.

**Характеристическая функция обладает следующими свойствами:**

− *персональность*: $\upsilon(\varnothing) = 0$, т.е. пустая коалиция (не состоящая ни из одного игрока) не получает ничего;

− *дополнительность*: $\upsilon(K) + \upsilon(N \setminus K) = \upsilon(N)$, т.е. сумма выигрышей коалиции и остальных игроков должна равняться общей сумме выигрышей всех игроков;

− *монотонность*: $A \subseteq B \Rightarrow \upsilon(A) \le \upsilon(B)$, т.е. у больших коалиций выигрыши больше;

− *супераддитивность*: $\upsilon(K \cup L) \ge \upsilon(K) + \upsilon(L)$, если $K, L \subset N$, $K \cap L \ne \varnothing$, т.е. общий выигрыш коалиции должен быть не меньше суммарного выигрыша всех участников коалиции (это свойство отражает дополнительные возможности, возникающие у группы игроков при их объединении).

Кооперативные игры называются *существенными*, если для любых коалиций *K* и *L* выполняется неравенство $\upsilon(K) + \upsilon(L) < \upsilon(K \cup L)$, т.е. при условии супераддитивности выполняется строгое неравенство. Если же при этом условии выполняется равенство $\upsilon(K) + \upsilon(L) = \upsilon(K \cup L)$ (свойство аддитивности), то такие игры называются *несущественными.*

Доказаны следующие **свойства**:

– для того чтобы характеристическая функция была аддитивной (а кооперативная игра − несущественной), необходимо и достаточно выполнение следующего равенства: $\sum_{i \in N} \upsilon(i) = \upsilon(N)$;

– в несущественной игре имеется только один дележ:

$\{\upsilon(1),\ \upsilon(2),\ldots,\ \upsilon(n)\}$;

– в существенной игре множество дележей бесконечно: $\{\upsilon(1)+\alpha_1,\ \upsilon(2)+\alpha_2,\ldots,\ \upsilon(n)+\alpha_n\}$, где $\alpha_i \ge 0\ (i\in N),\ \upsilon(N)-\sum_{i\in N}\upsilon(i)>0$.

Кооперативная игра с множеством игроков $N$ и характеристической функцией $\upsilon_1$ называется *стратегически эквивалентной* игре с тем же множеством игроков и характеристической функцией $\upsilon_2$, если найдутся такие $k>0$ и произвольные вещественные $C_i$ $(i\in N)$, что для любой коалиции $K\subset N$ имеет место равенство:

$$\upsilon_2(K)=k\upsilon_1(K)+\sum_{i\in N}C_i.$$

Смысл определения стратегической эквивалентности кооперативных игр состоит в том, что их характеристические функции отличаются только масштабом измерения выигрышей $k$ и начальным значением $C_i$. Стратегическая эквивалентность кооперативных игр с характеристическими функциями $\upsilon_1$ и $\upsilon_2$ (или, что то же самое, стратегическая эквивалентность их характеристических функций) обозначается $\upsilon_1\sim\upsilon_2$.

Кооперативная игра называется *нулевой*, если все значения ее характеристической функции равны нулю. Содержательное значение нулевой игры состоит в том, что в ней игроки не имеют никакой заинтересованности. Всякая несущественная игра стратегически эквивалентна нулевой. Кооперативная игра с характеристической функцией $\upsilon$ имеет (*0, 1*) − *редуцированную форму*, если выполняются соотношения: $\upsilon(i)=0\ (i\in N)$, $\upsilon(N)=1$.

### 3.3 Принципы оптимальности решения кооперативных игр

Решение игроков о создании коалиций принимается не случайно, а основывается на некоторых рациональных принципах. В частности, каждый игрок, принимая решение о вхождении в ту или иную коалицию, заранее оценивает результат такого решения. Исходом в кооперативной игре является дележ, возникающий не как следствие действия игроков, а как результат их соглашений. Поэтому в кооперативных играх сравниваются не ситуации, как это имеет место в бескоалиционных играх, а дележи, и сравнение это может носить более сложный характер. Распределение выигрышей (дележ) игроков должно удовлетворять следующим очевидным условиям:

– *условие индивидуальной рациональности*: $x_i\ge\upsilon(i)$ для $i\in N$, т.е. любой игрок должен получить выигрыш в коалиции не меньше, чем он получил бы, не участвуя в ней (в противном случае он не будет участвовать в коалиции);

− *условие коллективной рациональности* (*условие эффективности*): $\sum_{i\in N}x_i=\upsilon(N)$, т.е. сумма выигрышей игроков должна соответствовать их возможностям (если сумма выигрышей всех игроков меньше, чем $\upsilon(N)$, то игрокам невыгодно вступать в коалицию (остается неразделенный выигрыш); если же сумма выигрышей больше, чем $\upsilon(N)$, то игроки должны делить между собой сумму большую, чем у них есть. Другими словами, сумма выигрышей каждого из членов коалиции не должна превосходить уверенно получаемое ею количество. В противном случае коалиция, встретившись с дележом, дающим ей столько, сколько она самостоятельно не в состоянии добиться, должна согласиться на него и не заниматься его сравнением с какими-либо другими дележами.

Существуют как простые, интуитивно понятные подходы к решению кооперативных игр, так и более сложные, включающие математический инструментарий разной степени сложности. Одним из простых и «естественных» подходов к решению является *решение в угрозах и контругрозах*, основанное на следующей идее. Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $K=\{1, 2\}$, в которую входят игроки с номерами 1 и 2. При распределении дохода коалиции $\nu(\{1, 2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы $x_1$ и $x_2$ соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, он может сказать своему партнеру, что если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $L=\{1, 3\}$, где сможет рассчитывать на больший выигрыш. Если такая коалиция $L$ может образоваться, т.е. если игроку 3 действительно выгодно вступать в коалицию с игроком 1, то такое заявление называется угрозой игрока 1 игроку 2. В свою очередь игрок 2 может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, что игрок 3 получит больший доход, чем в $L$, а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной $K$. Таким образом, игрок 2 выдвигает контругрозу, защищающую его долю $x_2$, и т. д. Если в результате такого переговорного процесса складывается некоторая коалиционная структура, то говорят о равновесии в угрозах и контругрозах. Такой подход позволяет получить определение переговорного множества как множества таких дележей, при которых для любой угрозы игрока $i$ против любого другого игрока $j$ существует контругроза игрока $j$ против угрозы игрока $i$.

Очевидно, для того чтобы эта структура была устойчивой, игроки должны иметь ясное представление о своих возможных выигрышах и выигрышах других игроков в разных коалиционных конфигурациях и уверенность в их действительном получении (случай блефа, т. е. сознательный обман и передача заведомо неправильной информации, здесь не рассматривается).

Теория кооперативных игр предлагает несколько более строгих подходов к образованию устойчивых коалиций и определению дележей. Один из таких подходов основан на понятии доминирования дележей. Подобно тому, как решение бескоалиционных игр может упроститься путем анализа доминирования стратегий, анализ кооперативных игр может осуществляться путем определения доминирующих и доминируемых дележей.

Дележ $x$ доминирует $y$, если существует такая коалиция $K$, для которой дележ $x$ превосходит $y$ для всех членов коалиции $K$ (доминирование $x$ над $y$ по коалиции $K$): $x \underset{K}{>} y$.

Наличие доминирования $x$ над $y$ означает, что во множестве игроков $N$ найдется коалиция, для которой $x$ предпочтительнее $y$. В теории кооперативных игр поиск доминируемых дележей основан на условии предпочтительности, которое предполагает необходимость «единодушия» в предпочтении со стороны коалиции: если хотя бы одно из неравенств $x_i > y_i$ будет нарушено, т.е. если хотя бы для одного из членов коалиции $K$ выигрыш в условиях дележа $y$ будет не меньшим, чем в условиях дележа $x$, то можно будет говорить о предпочтении дележа $x$ дележу $y$ не всей коалицией $K$, а только теми ее членами, для которых соответствующее неравенство $x_i > y_i$ соблюдается.

Так же, как не для всякой игры возможна ситуация доминирования стратегий, соотношение доминирования дележей возможно не по всякой коалиции. Так, в частности, невозможно доминирование по коалиции, состоящей из одного игрока или из всех игроков. По другим коалициям также не всегда возможно доминирование платежей.

Может быть много вариантов, связанных с доминированием дележей в кооперативных играх. В связи с этим возникает необходимость выделения устойчивых дележей, отклонение от которых будет невыгодно игрокам. Множество таких дележей в кооперативной игре называется *ядром игры*. Следовательно, определение *ядра* − это один из путей нахождения оптимального решения кооперативной игры.

Однако решение кооперативной игры, в отличие от бескоалиционной, не определяется однозначным критерием оптимальности. При формулировке принципов оптимальности решений в теории кооперативных игр преобладает аксиоматический подход, при котором сначала устанавливаются в виде аксиом желаемые свойства решения, а затем определяется распределение выигрыша между игроками или множество распределений, удовлетворяющее этим свойствам. В зависимости от выбранной системы свойств получаемое оптимальное распределение выигрыша может быть различным. Например, оптимальное поведение участников кооперативной игры может состоять в стремлении к множеству дележей, не доминируемых другими дележами ($C$-ядро), или множеству не доминирующих друг над другом дележей, которые в совокупности доминируют над всеми остальными дележами (решение по Нейману – Моргенштерну), или к множеству дележей, в которых минимизируется «недовольство» игроков от участия в коалициях ($n$ - ядро) и т.д. Эти и другие принципы решения кооперативных игр рассматриваются в следующих пунктах. При решении конкретных задач выбирается наиболее подходящий для целей исследования принцип оптимальности. Некоторые из принципов оптимальности не всегда реализуются; другие реализуются неоднозначно или нахождение их реализаций часто затруднительно. Таким образом, нахождение оптимального решения кооперативных игр является весьма сложной задачей, как принципиально, так и технически.

### 3.4 *C*-ядро, *n*-ядро

Понятие ядра является ключевым принципом оптимальности для теории кооперативных игр. Ядро связано с таким исходом совместных действий игроков, который уже нельзя улучшить никакой коалицией участников, т. е. созданием новых и роспуском существующих коалиций.

Экономическое содержание понятия ядра связано с рыночной деятельностью большого числа экономических субъектов (продавцов, фирм и т.д.), каждый из которых обладает предпочтениями и располагает некоторым количеством наличных ресурсов. Предполагается, что экономическая система обеспечивает свободу заключения контрактов или свободу образования коалиций, которые улучшают благосостояние участников экономического процесса. Распределение благ между субъектами, которое является оптимальным при заданных ограничениях, входит в ядро дележей.

*C-ядро* (core) представляет собой множество недоминируемых дележей, т.е. коалиция всех участников не может увеличить выигрыш каждого участника собственными силами. Более строго, *C-ядро* − это множество эффективных распределений выигрыша, устойчивых к отклонениям любой коалиции игроков, т. е. множество векторов $x=\left(x_1,x_2,...,x_N\right)$, таких, что $\sum_{i\in N} x_i=\upsilon\left(N\right)$ и для любой коалиции $K\subset N$ выполняется $\sum_{i\in K} x_i\ge\upsilon\left(K\right)$, где $\upsilon$ − характеристическая функция игры.

Эквивалентным является определение *C*-ядра кооперативной игры в терминах блокирования распределений выигрыша коалициями. Говорят, что коалиция *K* блокирует распределение выигрыша *x*, если найдется другое распределение выигрыша *y*, такое, что $\sum_{i\in K} y_i\ge\upsilon\left(K\right)$, и для любого участника $i\in K$ выполнено $y_i\ge x_i$. Тогда *C*- ядром кооперативной игры называется множество распределений выигрыша, которые не могут быть заблокированы ни одной коалицией.

Т. о., *C*-ядро задается системой линейных уравнений и нестрогих линейных неравенств, поэтому геометрически оно является выпуклым многогранником, вершины которого и определяют входящие в ядро дележи. Т. е. поиск *C*-ядра, если оно существует, осуществляется путем нахождения координат этих вершин (например, графоаналитическим методом. Для игр с *n*>3 эта задача значительно усложняется, поэтому в учебной литературе рассматриваются примеры нахождения *C*-ядра лишь для 3 или 4 игроков.

Доказано, что в несущественной игре *C*-ядро состоит из единственного дележа этой игры. Для существенной игры *C*-ядро может быть пустым (т. е. недоминируемых платежей может и не быть). Достаточные условия непустоты ядра были сформулированы О. Бондаревой (1963 г.) и, позднее и независимо, Л.

Шепли (1967 г.). В частности доказано, что $C$-ядро выпуклой игры (игры с выпуклой характеристической функцией) не пусто.

Рассмотрим в *общем виде игру трех игроков в (0;1) - редуцированной форме*. Ее характеристическая функция имеет вид:

$\upsilon(\varnothing) = \upsilon(1) = \upsilon(2) = \upsilon(3) = 0$;

$\upsilon(1, 2, 3) = 1$;

$\upsilon(1,\ 2) = C_3;\ \upsilon(1,\ 3) = \mathrm{C}_2;\ \ \upsilon(2,\ 3) = C_1,\ \ 0 \le C_1,\ C_2,\ C_3 \le 1$.

Для принадлежности дележа $x$ $C$-ядру необходимо и достаточно выполнение неравенств $x_1 + x_2 \ge C_3$, $x_1 + x_3 \ge C_2$, $x_2 + x_3 \ge C_1$.

Используя равенство $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим $x_3 \le 1 - C_3,\ x_2 \le 1 - C_2,\ x_3 \le 1 - C_1$.

Отсюда следует, что $x_1 + x_2 + x_3 \le 3 - (C_1 + C_2 + C_3)$.

Учитывая, что $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим $C_1 + C_2 + C_3 \le 2$.

Последнее неравенство является **необходимым условием существования непустого *C*-ядра**. В подобной игре $C$-ядро ограничено прямыми, являющимися пересечением плоскостей $x_i = 1 - C_i$ и $x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

**Пример 3.1**. Рассмотрим классический пример, получивший название «Оркестр». Три музыканта (1, 2, 3) могут вместе получить за совместный концерт 1 ден. ед. (что может быть, например, эквивалентно 10 или 100 тыс. руб. или любой другой сумме, сути решения это не меняет). Выступление музыкантов 1 и 2 может принести им двоим 0.8 ден. ед., музыкантов 2 и 3 – 0.65 ден. ед., музыкантов 1 и 3 – 0.5 ден. ед. За сольный концерт музыкант 1 может получить 0.2 ден. ед., музыкант 2 – 0.3 ден. ед., а музыкант 3 один не выступает, поэтому ничего не может заработать. В каком составе музыкантам выгоднее всего выступать и как им в этих условиях поделить заработанные деньги?

**Решение.** Примем за $x$ доход каждого из участников, т. е. $x_1$, $x_2$ и $x_3$ соответственно. Формализуем условие задачи: $C_1$=0.65, $C_2$=0.5, $C_3$=0.8.

Проверим условие существования непустого $C$-ядра: $0.65+0.5+0.8=1.95 \le 2$, следовательно, $C$-ядро существует, и оно не пустое.

$C$-ядро данной игры задается системой:

$x_1 \ge 0.2,\ x_2 \ge 0.3,\ x_3 \ge 0;$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1;$

$x_1 + x_2 \ge 0.8;\ x_2 + x_3 \ge 0.65;\ x_1 + x_3 \ge 0.5.$

При проецировании $C$-ядра на плоскости $(x_1, x_2)$, $(x_2, x_3)$, $(x_1, x_3)$ и учитывая соотношение $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, получим следующие соотношения для пограничных значений:

1) $x_1 + x_2 = 0.8,\ x_3 = 0.2;$

2) $x_2 + x_3 = 0.65,\ x_1 = 0.35;$

3) $x_1 + x_3 = 0.5,\ \ x_2 = 0.5.$

Подстановка $x_3$ из условия 1) в условие 2) дает координаты первой вершины $C$-ядра: (0.35, 0.45, 0.2).

Подстановка $x_1$ из условия 2) в условие 3) дает координаты второй вершины $C$-ядра: (0.35, 0.5, 0.15).

Подстановка $x_2$ из условия 3) в условие 1) дает координаты третьей вершины $C$-ядра: (0.3, 0.5, 0.2).

Иначе эти результаты можно получить из принципа дополнительности $x_i = 1 - C_i$. Подставив в условие 1) $x_1 = 1 - 0.65 = 0.35$, получим (0.35, 0.45, 0.2). Подставив в условие 2) $x_2 = 1 - 0.5 = 0.5$, получим (0.35, 0.5, 0.15). Подставив в условие 3) $x_3 = 1 - 0.8 = 0.2$, получим (0.3, 0.5, 0.2).

Найденные координаты трех точек соответствуют вершинам треугольника, определяющего $C$-ядро дележей игроков (рис. 3.1). Естественным и справедливым компромиссом является центр $C$-ядра (среднее арифметическое крайних точек), а именно: $x^* = (0.333,\ 0.483,\ 0.183)$. При таком дележе каждая из возможных двухэлементных коалиций получает дополнительный выигрыш в размере 0.016 ден. ед.: $x_i + x_j - \upsilon(i, j) = 0.016$. Следовательно, в контексте рассматриваемой игры лучшее решение для музыкантов с точки зрения максимизации заработка − это выступить втроем, а оптимальное распределение заработка определяется вектором $x^*$.

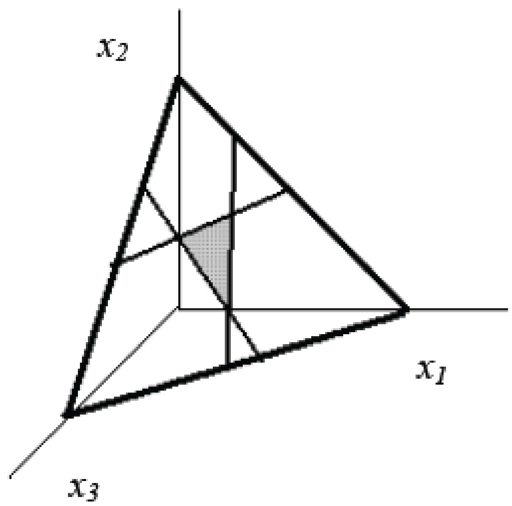


Рисунок 3.1 – $C$-ядро в кооперативной игре трех лиц

Понятие $n$-ядра игры базируется на понятии *эксцесса коалиции*. Для кооперативной игры эксцесс коалиции $K$ (или функция эксцесса) определяется как вектор $e(K, x) = \upsilon(K) - x(K)$. Эксцесс коалиции $K$ интерпретируется как мера неудовлетворенности коалиции распределением выигрышей, которое предписывается вектором $x$.

$n$-ядро представляет распределение выигрыша, на котором степень неудовлетворенности всех коалиций, измеряемая величиной их эксцесса, будет наименьшей. Доказано, что $n$-ядро любой кооперативной игры всегда существует и состоит из одной точки, и если $C$- ядро игры не пусто, то $n$- ядро принадлежит ему. Преимущество такого подхода заключается в том, что он позволяет выйти на единственный оптимальный дележ, который должен удовлетворить всех участников коалиции, причем нахождение этого дележа может быть найдено из задачи оптимизации с ограничениями

$$\sum_{i\in K} x_i \ge \upsilon(K),$$

$$\sum_{i\in K} x_i = \upsilon(N)$$

и целевой функцией $\max_K e(K,x) \to \min$.

На практике решение этой оптимизационной задачи может быть сравнительно легко получено с помощью инструмента Excel «Поиск решения».

Использование этого инструмента для решения игры «Оркестр» путем нахождения $n$- ядра дает следующий оптимальный платеж: (0.35, 0.475, 0.175).

Еще один из предложенных принципов оптимальности − решение по Нейману-Моргенштерну (или Н-М-решение). Оно предполагает нахождение множества не доминирующих друг над другом дележей, которые в совокупности доминируют над всеми остальными дележами. Однако мы не рассматриваем в данном пособии этот принцип, так как в настоящее время он имеет исключительно теоретическое обоснование и не применяется на практике, поскольку не известны какие-либо универсальные критерии, позволяющие судить о наличии у конкретных кооперативных игр Н-М-решений, а заложенный в Н-М-решении принцип оптимальности не является ни полным, ни универсально реализуемым, поэтому область его применения пока остается неопределенной.

### 3.5 Принцип оптимальности в форме вектора Шепли

Здесь мы отдельно рассмотрим еще один подход к поиску оптимальных решений кооперативных игр, предложенный Л. Шепли и ставший на сегодняшний день наиболее распространенным на практике. Этот подход основан на принципе «справедливого дележа», исходя из вклада каждого игрока в выигрыш коалиции.

*Вкладом* $i$-го игрока называется величина $\upsilon(K) - \upsilon(K \setminus i)$, где $\upsilon$ − характеристическая функция кооперативной игры. Т. е. вклад игрока − это приращение выигрыша коалиции при его участии по сравнению с выигрышем коалиции без этого игрока.

*Вектор Шепли*, или *значение Шепли* (Shapley value) $\varphi(\upsilon) = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$, представляет собой распределение, в котором выигрыш каждого игрока $\varphi_i$ равен его среднему вкладу в соответствующие коалиции $K$. В форме, практически реализуемой для расчетов, значение Шепли для каждого игрока имеет вид

$$\varphi_i = \sum_{i \in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!} \big( \upsilon(K) - \upsilon(K \setminus i) \big),$$

где $n$ − количество игроков, $k$ − количество участников коалиции $K$.

Вектор Шепли удовлетворяет следующим **свойствам** (аксиомы Шепли).

1. *Линейность (аксиома агрегации).* $\varphi(\upsilon)$ представляет собой линейный оператор, т.е. для любых двух игр с характеристическими функциями $\upsilon$ и $\omega$

$$\varphi(\upsilon+\omega) = \varphi(\upsilon) + \varphi(\omega);$$

для любой игры с характеристической функцией $\upsilon$ и для любого $\alpha$

$$\varphi(\alpha \cdot \upsilon) = \alpha\varphi(\upsilon).$$

Это свойство показывает, что при участии игроков в двух играх их выигрыши в отдельных играх должны складываться.

2. *Симметричность (аксиома симметрии).* Получаемый игроком выигрыш не зависит от его номера. Это означает, что если игра $\omega$ получена из игры $\upsilon$ перестановкой игроков, то ее вектор Шепли $\varphi(\omega)$ есть вектор $\varphi(\upsilon)$ с соответствующим образом переставленными элементами. То есть игроки, одинаково входящие в игру, должны получать одинаковые выигрыши.

3. *Аксиома эффективности*. При распределении общего выигрыша не должно выделяться ничего «бесполезному игроку», не вносящему вклада ни в какую коалицию. В теории кооперативных игр такой игрок называется болваном, т.е. для такого игрока $i$ для любой коалиции $K$, содержащей $i$, выполняется $\upsilon(K) - \upsilon(K \setminus i) = 0$ и соответственно $\varphi_i = 0$. Благодаря этому свойству вектор Шепли позволяет полностью распределить имеющийся в распоряжении тотальной коалиции выигрыш, т.е. сумма компонент вектора $\varphi(\upsilon)$ равна $\upsilon(N)$. Иными словами, при разделении общего выигрыша коалиции ничего не выделяется на долю «посторонних» игроков, не принадлежащих этой коалиции, но и ничего не взимается с них.

Доказано (**теорема Шепли**), что для любой кооперативной игры существует единственное распределение выигрыша, удовлетворяющее аксиомам 1–3, и это распределение − вектор Шепли. Если вектор Шепли принадлежит $C$-ядру, то этот дележ одновременно справедлив и устойчив, но вектор Шепли может и не принадлежать непустому $C$-ядру.

**Пример 3.2.** Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков: $\upsilon(1) = 1200$; $\upsilon(2) = 1500$; $\upsilon(3) = 1800$.

Выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно, составляют: $\upsilon(1,2) = 2700$; $\upsilon(1,3) = 3000$; $\upsilon(2,3) = 4000$.

Общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию $N$, состоящую из трех игроков равен: $\upsilon(1,2,3) = 5200$.

В рассматриваемой игре:

– $\upsilon(1,2)=2700$, $\upsilon(1)+\upsilon(2)=1200+1500=2700$. Следовательно, $\upsilon(1,2)=\upsilon(1)+\upsilon(2)$.

– $\upsilon(1,3)=3000$, $\upsilon(1)+\upsilon(2)=1200+1800=3000$. Следовательно, $\upsilon(1,3)=\upsilon(1)+\upsilon(3)$.

– $\upsilon(2,3)=4000$, $\upsilon(2)+\upsilon(3)=1500+1800=3300$. Следовательно, $\upsilon(2,3)>\upsilon(2)+\upsilon(3)$.

– $\upsilon(1,2,3)=5200$, $\upsilon(1)+\upsilon(2,3)=1200+4000=5200$. Следовательно, $\upsilon(1,2,3)=\upsilon(1)+\upsilon(2,3)$.

Таким образом, в данной игре «*болваном*» является первый игрок, т.к. его присоединение к любой из возможных коалиций не увеличивает ее выигрыш. «Носителем» игры являются второй и третий игроки.

Для определения возможных выигрышей каждого из игроков в случае их объединения может быть использован вектор Шепли:

$$\varphi_1(\upsilon)=\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\left[\upsilon(1,2,3)-\upsilon(2,3)\right]+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(1,2)-\upsilon(2)\right]+$$
$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(1,3)-\upsilon(3)\right]+\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\left[\upsilon(1)-0\right]=1200;$$
$$\varphi_2(\upsilon)=\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\left[\upsilon(1,2,3)-\upsilon(1,3)\right]+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(1,2)-\upsilon(1)\right]+$$
$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(2,3)-\upsilon(3)\right]+\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\left[\upsilon(2)-0\right]=1850;$$
$$\varphi_3(\upsilon)=\frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}\left[\upsilon(1,2,3)-\upsilon(1,2)\right]+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(1,3)-\upsilon(1)\right]+$$
$$+\frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}\left[\upsilon(2,3)-\upsilon(2)\right]+\frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}\left[\upsilon(3)-0\right]=2150.$$

В том случаи, если все три игрока соглашаются с данным распределением общего выигрыша, то вектор $\varphi$ становится решением рассматриваемой игры, при этом выигрыш от объединения получают только второй и третий игроки, а выигрыш первого игрока останется таким же, каким он был до объединения.

Проверим принадлежность вектора Шепли *С*-ядру.

Положим $\varphi_1=x_1,\ \varphi_2=x_2,\ \varphi_3=x_3$. В соответствии с теоремой о необходимых и достаточных условиях принадлежности дележа *С*-ядру, имеем:

$\upsilon(1)=1200=x_1=1200$;

$\upsilon(2)=1500<x_2=1850$;

$\upsilon(3)=1800<x_3=2150$;

$\upsilon(1,2)=2700<x_1+x_2=3050$;

$\upsilon(1,3)=3000<x_1+x_3=3350$;

$\upsilon(2,3)=4000 = x_2 + x_3 = 4000;$

$\upsilon(1,2,3)=5200 = x_1 + x_2 + x_3 = 5200.$

Поскольку система неравенств выполняется, вектор Шепли принадлежит *C*-ядру и является одним из возможных решений рассматриваемой классической кооперативной игры.

**Пример 3.3**. Рассматривается корпорация из четырёх акционеров, имеющих акции соответственно в следующих размерах: $a_1 = 10,\ a_2 = 20,\ a_3 = 30,\ a_4 = 40$.

Любое решение утверждается акционерами, имеющими в сумме большинство акций (>50). Это решение считается выигрышем, равным 1. Поэтому данная ситуация может рассматриваться как простая игра четырёх игроков, в которой выигрывающими являются следующие коалиции:

{2; 4}, {3; 4},

{1; 2; 3}, {1; 2; 4}, {2; 3; 4}, {1; 3; 4},

{1; 2; 3; 4}.

Найти вектор Шепли для этой игры.

**Решение.** В том случае, когда $\upsilon$ – простейшая,

$$\upsilon(K) - \upsilon(K \setminus \{i\}) = \begin{cases} 1, \text{ если } K \text{ и } K \setminus \{i\} \ - \text{ выигрывающие каолиции }, \\ 0, \text{ если } K \text{ выигрывающая каолиция}, \\ \text{а } K \setminus \{i\} \ - \text{не выигрывающая каолиция.} \end{cases}$$

Следовательно $\varphi_i(\upsilon) = \sum\limits_K \gamma_i(K) = \sum\limits_K \dfrac{(k-1)!\ (n-k)!}{n!}$, где $\gamma_i(K)$– это вероятность того, что *i*-й игрок вступит в коалицию $K \setminus \{i\}$; суммирование по *K* распространяется на все такие выигрывающие коалиции *K*, что коалиция $K \setminus \{i\}$ не является выигрывающей.

При нахождении $\varphi_1$ необходимо учитывать, что имеется только одна коалиция *K*={1;2;3}, которая выигрывает, а коалиция $K \setminus \{1\}$={2;3} не выигрывает. В коалиции *K* имеется *k* = 3 игрока, поэтому

$$\varphi_1 = \frac{(k-1)!\ (n-k)!}{n!} = \frac{2!\cdot 1!}{4!} = \frac{1}{12}.$$

Далее, определяем все выигрывающие коалиции, но не выигрывающие без 2-го игрока: {2;4}, {1;2;3}, {1;2;4}. Поэтому

$$\varphi_2 = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично получаем, что $\varphi_3 = \dfrac{1}{4}$, $\varphi_4 = \dfrac{5}{12}$.

В результате получаем, что вектор Шепли равен $\left(\dfrac{1}{12}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{5}{12}\right)$. При этом, если считать, что вес голоса акционера пропорционален количеству имеющихся у него акций, то получим следующий вектор голосования

$\left(\frac{1}{10};\frac{2}{10};\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$, который, очевидно, отличается от вектора Шепли.

Анализ игры показывает, что компоненты 2-го и 3-го игроков равны, хотя третий игрок имеет больше акций. Это получается вследствие того, что возможности образования коалиций у 2-го и 3-го игрока одинаковые. Для 1-го и 4-го игрока ситуация естественная, отвечающая силе их капитала.

**Пример 3.4.** Пусть $n$ различных потребителей должны построить хранилища спецпродукции, при нарушении правил хранения может возникнуть опасная ситуация. Затраты на строительство зависят от объема хранилищ. Для постройки хранилищ потребители могут организовывать коалиции $K \subset N,\ N = \{1,2,\ldots,n\}$. Затраты на создание хранилищ заданы такой возрастающей функцией, что характеристическая функция принимает значения:

| Коалиция | {1} | {2} | {3} | {1,2} | {1,3} | {2,3} | {1,2,3} |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\upsilon$ | 2 | 3 | 2.5 | 4 | 3.9 | 5 | 6 |

Определить число хранилищ и коалиции, которые их будут строить. Члены коалиции равноправны.

**Решение.** Для вычисления распределения расходов между членами коалиции воспользуемся вектором Шепли:

$$\varphi_i = \sum_{i\in K} \frac{(k-1)!(n-k)!}{n!}\big(\upsilon(K)-\upsilon(K\setminus i)\big).$$

Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $K$={1,2,3} равен:
$$\varphi_1(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-5)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-3)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2.5)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(2-0)=\frac{7}{5}=1.4.$$

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $K$={1,2,3} равен:
$$\varphi_2(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-3.9)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(4-2)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-2.5)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(3-0)=\frac{49}{20}=2.45.$$

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $K$={1,2,3} равен:
$$\varphi_3(\upsilon) = \frac{2!\cdot 0!}{3!}(6-4)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(3.9-2)+\frac{1!\cdot 1!}{3!}(5-3)\frac{0!\cdot 2!}{3!}(2.5-0)=\frac{43}{20}=2.15.$$

Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $K$={1,2} равен:
$$\varphi_1(\upsilon) = \frac{1!\cdot 0!}{2!}(4-3)+\frac{0!\cdot 1!}{2!}(2-0)=\frac{3}{2}=1.5.$$

Вклад 1-го потребителя, если создается коалиция $K$={1,3} равен:
$$\varphi_1(\upsilon) = \frac{1!\cdot 0!}{2!}(3.9-2.5)+\frac{0!\cdot 1!}{2!}(2-0)=\frac{34}{20}=1.7.$$

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $K$={2,1} равен:
$$\varphi_2(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(4-2)+\frac{0!\cdot 1!}{2!}(3-0)=\frac{5}{2}=2.5.$$

Вклад 2-го потребителя, если создается коалиция $K$={2,3} равен:

$$\varphi_2(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(5-2.5) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(3-0) = \frac{11}{4} = 2.75.$$

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $K=\{3,1\}$ равен:

$$\varphi_3(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(3.9-2) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2.5-0) = \frac{11}{5} = 2.2.$$

Вклад 3-го потребителя, если создается коалиция $K=\{3,2\}$ равен:

$$\varphi_3(\upsilon) = \frac{0!\cdot 1!}{2!}(5-3) + \frac{0!\cdot 1!}{2!}(2.5-0) = \frac{9}{4} = 2.25.$$

Вклады потребителей, если они входят в коалиции $K=\{1\}$, $K=\{2\}$, $K=\{3\}$ заданы в таблице и равны: $\varphi_1(\upsilon)=2$, $\varphi_2(\upsilon)=3$, $\varphi_3(\upsilon)=2.5$

Так как вектор Шепли в данном примере характеризует затраты на создание хранилищ, то из сравнения вкладов видно, что потребителям выгоднее объединиться в коалицию $K=\{1,2,3\}$ и строить одно хранилище.

## 3.6 Задачи для самостоятельного решения

**1.** В некотором районе имеется три предприятия, каждое из которых нуждается в проводке теплоцентралей. Предприятия могут провести теплоцентрали отдельно друг от друга, а могут объединиться в группы – коалиции. Если предприятие $i$=1.2.3 прокладывает централь самостоятельно, то затраты составят 100, 200, 300 единиц соответственно. Если 1-е и 2-предприятие объединяться, то их общие затраты составят 250 единиц. Если 1-е и 3-е объединяться, то затраты составят 350 единиц. Если 2-е и 3-е объединятся, то затраты составят 460 единиц. Если все три предприятия объединяться, то затраты составят 580 единиц. Найти все решения, которые могут принять предприятия как рациональные субъекты.

**2**. Вокруг озера расположены четыре населенных пункта (*A*, *B*, *C*, *D*), расстояние между которыми составляет: *AB* − 12, *BC* − 24, *CD* − 48, *DA* − 36 км. Органы власти в населенных пунктах пришли к соглашению о строительстве кольцевой дороги, которая бы соединила все на селенные пункты, но не могут договориться о том, как разделить затраты на строительство 120 км дороги. Какое решение можете предложить вы? Сколько километров дороги должен профинансировать каждый населенный пункт?

а) постройте возможные коалиции и определите минимально необходимую протяженность нужной ей дороги;

б) определите *C* - ядро и вектор Шепли;

в) дайте интерпретацию решения этой игры.

**3.** Три предпринимателя (*А*, *Б* и *В*) принимают решение о создании совместного предприятия. Каждый из них зарабатывает 6, 18 и 30 ден. ед. соответственно. Объединяясь по двое, они могут получить: *А* и *Б* − 36, *А* и *В* − 48, *Б* и *В* − 54 ден. ед., а втроем − 62 ден. ед. Пойдут ли предприниматели на создание совместного предприятия, и если да, то в какой коалиции и как будут распределять выигрыш?

а) будет ли отвергнут «равный» дележ, и если да, то какими коалициями?

б) является ли данная игра существенной?

в) проверьте наличие непустого $C$- ядра и определите его;

г) определите оптимальный дележ на основе $C$- ядра;

д) определите оптимальный дележ на основе $n$- ядра;

е) определите вектор Шепли;

ж) сравните результаты решения этой игры и дайте их содержательную интерпретацию.

**4.** Игра (Джаз-оркестр): Владелец ночного клуба в Париже обещает 1000 долларов певцу ($S$), пианисту ($P$) и ударнику ($D$) за совместную игру в его клубе. Выступление дуэта певца и пианиста он расценивает в 800 долларов, ударника и пианиста − в 650 долларов и одного пианиста − в 300 долларов. Другие дуэты и солисты не рассматриваются, поскольку присутствие фортепиано владелец клуба считает обязательным. Дуэт певец − ударник зарабатывает 500 долларов за вечер в одной удобно расположенной станции метро, певец зарабатывает в среднем 200 долларов за вечер в открытом кафе. Ударник в одиночку ничего не может заработать. Какое распределение максимального общего дохода следует признать разумным, учитывая описанные возможности игроков в смысле частичной кооперации и индивидуального поведения?

**5.** Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков: $\upsilon(1)$; $\upsilon(2)$; $\upsilon(3)$, а также выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно: $\upsilon(1,2)$; $\upsilon(1,3)$; $\upsilon(2,3)$ и общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию, состоящую из трех игроков: $\upsilon$ (1,2,3).

Требуется определить выигрыши каждого из игроков в случае их объединения на основе использования вектора Шепли. Проверить принадлежность вектора Шепли $C$-ядру.

1) $\upsilon(1)=960$; $\upsilon(2)=740$; $\upsilon(3)=800$; $\upsilon(1,2)=1800$; $\upsilon(1,3)=1900$; $\upsilon(2,3)=1700$; $\upsilon(1,2,3)=2800$.

2) $\upsilon(1)=1600$; $\upsilon(2)=1400$; $\upsilon(3)=1500$; $\upsilon(1,2)=3300$; $\upsilon(1,3)=3400$; $\upsilon(2,3)=3100$; $\upsilon(1,2,3)=5500$.

3) $\upsilon(1)=10800$; $\upsilon(2)=11200$; $\upsilon(3)=13000$; $\upsilon(1,2)=23000$; $\upsilon(1,3)=25000$; $\upsilon=(2,3)=26000$; $\upsilon(1,2,3)=42000$.

4) $\upsilon(1)=1640$; $\upsilon(2)=1460$; $\upsilon(3)=1400$; $\upsilon(1,2)=3280$; $\upsilon(1,3)=3200$; $\upsilon(1,3)=3200$; $\upsilon(2,3)=3000$; $\upsilon(1,2,3)=5200$.

5) $\upsilon(1)=2200$; $\upsilon(2)=2000$; $\upsilon(3)=1800$; $\upsilon(1,2)=4500$; $\upsilon(1,3)=4100$; $\upsilon(2,3)=4000$; $\upsilon(1,2,3)=6800$.

6) $\upsilon(1)=1700$; $\upsilon(2)=1500$; $\upsilon(3)=1300$; $\upsilon(1,2)=3600$; $\upsilon(1,3)=3400$; $\upsilon(2,3)=3100$; $(1,2,3)=6000$.

7) $\upsilon(1)=1000$; $\upsilon(2)=1400$; $\upsilon(3)=1200$; $\upsilon(1,2)=2700$; $\upsilon(1,3)=2600$; $\upsilon(2,3)=3100$; $\upsilon(1,2,3) = 5000$.

8) $\upsilon(1)=1600$; $\upsilon(2)=1400$; $\upsilon(3)=2000$; $\upsilon(1,2)=3500$; $\upsilon(1,3)=4200$; $\upsilon(2,3)=4000$; $\upsilon(1,2,3)=6800$.

9) $\upsilon(1)=1400$; $\upsilon(2)=2200$; $\upsilon(3)=4000$; $\upsilon(1,2)=4200$; $\upsilon(1,3)=6000$; $\upsilon(2,3)=7000$; $\upsilon(1,2,3)=10000$.

10) $\upsilon(1)=1700$; $\upsilon(2)=1500$; $\upsilon(3)=1800$; $\upsilon(1,2)=3500$; $\upsilon(1,3)=4000$; $\upsilon(2,3)=3800$; $\upsilon(1,2,3)=6500$.

# 4 СТАТИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ

## 4.1. Элементы теории статистических решений

В условиях отсутствия достаточно полной информации о действиях противоположной стороны возникает неопределённость в принятии решения. Так, в задачах, приводящих к игровым, эта неопределённость может быть вызвана разными причинами: отсутствием информации об условиях, в которых происходит действие; неоднозначным характером развития событий в будущем; невозможностью получения полной информации о рассматриваемых процессах.

Условия, в которых может происходить действие игры, зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективных факторов, которые принято называть «природой». Такие игры называются *играми с природой* или *статистическими играми*.

С целью уменьшения неблагоприятных последствий при принятии решения следует учитывать степень риска и имеющуюся информацию. Таким образом, *лицо, принимающее решение (статистик)*, вступает в игровые отношения с природой. Любую хозяйственную деятельность человека можно рассматривать как игру с природой. В широком смысле под «природой» будем понимать совокупность неопределённых факторов, влияющих на эффективность принимаемых решений.

Задачей экономиста или статистика является принятие наилучшего управленческого решения в каждой конкретной ситуации. Качество принимаемого решения зависит от информированности лица, принимающего решение (ЛПР), о ситуации, в которой принимается решение. В случае неопределённости ошибки в принятии решения наиболее вероятны. Умение использовать даже неполную информацию для обоснования принимаемых решений − это задача экономиста, а в решении её помогает математическая теория игры с природой.

От обычной матричной игры игру с природой отличает безразличие природы к результату игры и возможность получения статистиком дополнительной информации о состоянии природы.

Игры с природой дают математическую модель теории принятия решений в условиях частичной неопределённости. Для её описания используем обозначения матричных игр. Множество стратегий (состояний) природы обозначим $S$, отдельное состояние её − $S_j$, $j=\overline{1,n}$. Множество стратегий (решений) статистика обозначим $A$, а его отдельную стратегию в игре с природой − $A_i$, $i=\overline{1,m}$.

Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, используя, например, минимаксную стратегию, позволяющую получить наименьший проигрыш.

Природа действует совершенно случайно, возможные стратегии определяются как её состояния; например, условия погоды в данном районе, спрос на определённую продукцию, объём перевозок, сочетание производственных факторов и т. д. В некоторых задачах для состояний природы может быть задано распределение вероятностей, в других − оно неизвестно.

Условия игры с природой задаются платёжной матрицей

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент $a_{ij}$ называется выигрышем статистика *A*, если он использует стратегию $A_i$, когда природа находится в состоянии $S_j$. Фактически это может быть значение некоторой функции, характеризующей эффективность принятого статистиком решения.

При решении игры с природой допускается исключение доминируемых стратегий только для стратегий статистика. Стратегии природы исключать нельзя, поскольку она может реализовать состояния, заведомо невыгодные для неё.

В качестве результатов в отдельных задачах рассматривается матрица рисков

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ & & \ldots & \\ r_{m1} & r_{m2} & \ldots & r_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

*Риск* − мера несоответствия между разными возможными результатами принятия определенных стратегий (действий).

Элементы матрицы рисков $r_{ij}$ связаны с элементами *матрицы полезностей (выигрышей)* следующим соотношением:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}, \tag{4.1}$$

где $\max_i a_{ij}$ – максимальный элемент в столбце *j* исходной матрицы.

Если матрица возможных результатов $\{a_{ij}\}$ представляет собой *матрицу потерь (затрат)*, то элементы матрицы рисков следует определять по формуле

$$r_{ij} = a_{ij} - \min_i a_{ij}, \tag{4.2}$$

где $\min_i a_{ij}$ − минимальный элемент в столбце *j* матрицы потерь (результатов).

Таким образом, *риск* − это разность между результатом, который можно получить, если знать действительное состояние «природы», и результатом, который будет получен при *i*-й стратегии.

Матрица рисков дает более наглядную картину неопределенной ситуации, чем матрица выигрышей (полезностей).

Непосредственный анализ матриц выигрышей или рисков не позволяет в общем случае принять решение по выбору оптимальной стратегии (плана), за исключением тривиального случая, когда выигрыши при одной стратегии выше, чем при любой другой для каждого состояния «природы» (элементы матрицы выигрышей в некоторой строке больше, чем в любой из других). Другими словами, имеется в наличии «доминирующая» стратегия.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них. Это критерий Лапласа, критерий Вальда, критерий Сэвиджа, критерий Гурвица.

## 4.2. Принятие решения в условиях полной неопределенности

**Критерий Лапласа.** Этот критерий опирается на «принцип недостаточного основания» Лапласа, согласно которому все состояния «природы» полагаются равновероятными. В соответствии с этим принципом каждому состоянию $S_j$ ставится вероятность $p_j$, определяемая по формуле $p_j = \frac{1}{n},\ j = \overline{1,n}$.

При этом, исходной может рассматриваться задача принятия решения в условиях риска, когда выбирается действие, дающее наибольший ожидаемый выигрыш. Для принятия решения для каждого действия $A_i$ вычисляют среднее арифметическое значение выигрыша: $M(A_i) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

Среди $M(A_i)$ выбирают максимальное значение, которое будет соответствовать оптимальной стратегии $A_i$.

Другими словами, находится действие, соответствующее

$$\max_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \right\}. \qquad (4.3)$$

Если в исходной задаче матрица возможных результатов представлена матрицей рисков, то критерий Лапласа принимает следующий вид:

$$\min_i \left\{ \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \right\} \qquad (4.4)$$

Применение данного критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими признаками:

− вероятности появления состояния природы не известны, не зависят от времени и равны;

− решение реализуется большое (теоретически бесконечное) число раз;

− для небольшого числа реализаций допускается некоторый неоцениваемый риск.

**Пример 4.1**. Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Спрос на транспортные услуги не известен, но ожидается (прогнозируется), что он может принять одно из четырех значений: 10,15, 20 или 25 тыс. т. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия (с точки зрения возможных затрат). Отклонения от этих уровней приводят к дополнительным затратам либо из-за превышения провозных возможностей над спросом (из-за простоя подвижного состава), либо из-за неполного удовлетворения спроса на транспортные услуги. Ниже приводится табл. 4.1, определяющая возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей:

**Таблица 4.1.**

| **Варианты провозных возможностей транспортного предприятия** | **Варианты спроса на транспортные услуги, д. е.** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 6 | 12 | 20 | 24 |
| 2 | 9 | 7 | 9 | 28 |
| 3 | 23 | 18 | 15 | 19 |
| 4 | 27 | 24 | 21 | 15 |

Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

**Решение.** Согласно условию задачи имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: $S_1, S_2, S_3, S_4$. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: $A_1, A_2, A_3, A_4$. Затраты на развитие провозных возможностей при каждой паре $A_i$ и $S_i$ заданы следующей матрицей (таблицей):

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6 | 12 | 20 | 24 |
| $A_2$ | 9 | 7 | 9 | 28 |
| $A_3$ | 23 | 18 | 15 | 19 |
| $A_4$ | 27 | 24 | 21 | 15 |

Принцип Лапласа предполагает, что $S_1, S_2, S_3, S_4$ равновероятны. Следовательно, $p_j = \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = 0.25,\ j = \overline{1,4}$ и ожидаемые затраты при различных действиях $A_1, A_2, A_3, A_4$ составляют:

$M(A_1) = 0.25(6+12+20+24) = 15.5$,

$M(A_2) = 0.25(9+7+9+28) = 13.25$,

$M(A_3) = 0.25(23+18+15+19) = 18.75$,

$M(A_4) = 0.25(27+24+21+15) = 21.75$.

Тогда $\min\{15.5,\ 13.25,\ 18.75,\ 21.75\} = 13.25$. Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Лапласа будет $A_2$.

**Критерий Вальда** (минимаксный или максиминный критерий). Применение данного критерия не требует знания вероятностей состояний природы $S_j$. Этот критерий опирается на принцип наибольшей осторожности, поскольку он основывается на выборе наилучшей из наихудших стратегий $A_i$.

Если в исходной матрице (по условию задачи) результат $a_{ij}$ представляет потери лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *минимаксный критерий*. Для определения оптимальной стратегии $A_i$ необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max\limits_j a_{ij}$, а затем выбирается действие $A_i$ (строка *i*), которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$\min_i(\max_j a_{ij}). \tag{4.5}$$

Если в исходной матрице по условию задачи результат $a_{ij}$ представляет выигрыш (полезность) лица, принимающего решение, то при выборе оптимальной стратегии используется *максиминный критерий.*

Для определения оптимальной стратегии $A_i$ в каждой строке матрицы результатов находят наименьший элемент $\min\limits_j a_{ij}$, а затем выбирается действие $A_i$ (строка *i*), которому будут соответствовать наибольшие элементы из этих наименьших элементов, т. е. действие, определяющее результат, равный

$$\max_i(\min_j a_{ij}). \tag{4.6}$$

Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

Применение данного критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими признаками:

- вероятности состояний «природы» не известны;
- необходимо считаться с наихудшим из возможных вариантов;
- решение реализуется только один раз или очень малое количество раз;
- полная недопустимость риска.

**Пример 4.2.** Рассмотрим пример 4.1. Так как $a_{ij}$ в этом примере представляет потери (затраты), применим минимаксный критерий. Необходимые результаты вычисления приведены в таблице:

| | Затраты, д. е. $a_{ij}$ | | | | $\max_j a_{ij}$ | $\min_i(\max_j a_{ij})$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | | |
| $A_1$ | 6 | 12 | 20 | 24 | 24 | |
| $A_2$ | 9 | 7 | 9 | 28 | 28 | |
| $A_3$ | 23 | 18 | 15 | 19 | 23 | 23 |
| $A_4$ | 27 | 24 | 21 | 15 | 27 | |

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья стратегия, т. е. $A_3$.

Минимаксный критерий Вальда иногда приводит к нелогичным выводам из-за своей чрезмерной «пессимистичности». «Пессимистичность» этого критерия исправляет критерий Сэвиджа.

**Критерий Сэвиджа (критерий минимаксного риска, критерий минимизации «сожалений»). Критерий Сэвиджа** использует матрицу рисков. Элементы данной матрицы можно определить по формулам (4.1), (4.2), которые перепишем в следующем виде:

$$r_{ij} = \begin{cases} \max_i a_{ij} - a_{ij}, \text{ если } a_{ij} - \text{выигрыш}, \\ a_{ij} - \min_i a_{ij}, \text{ если } a_{ij} - \text{потери}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Отметим, что независимо от того, является ли $a_{ij}$ доходом (выигрышем) или потерями (затратами), $r_{ij}$ в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающих его решение. Следовательно, можно применять к $r_{ij}$ только минимаксный критерий. Критерий Сэвиджа рекомендует в условиях неопределенности выбирать ту стратегию $A_i$, при которой величина риска принимает наименьшее значение в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален):

$$\min_i\left(\max_j r_{ij}\right). \tag{4.8}$$

Требования, предъявляемые к ситуации, в которой принимается решение, совпадают с требованием к использованию критерия Вальда.

**Пример 4.3.** Рассмотрим пример 4.1. Заданная матрица определяет потери (затраты). По формуле (4.7) вычислим элементы матрицы рисков $r_{ij}$:

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $A_1$ | 6-6=0 | 12-7=5 | 20-9=11 | 24-15=9 |
| $A_2$ | 9-6=3 | 7-7=0 | 9-9=0 | 28-15=13 |
| $A_3$ | 23-6=17 | 18-7=11 | 15-9=6 | 19-15=4 |
| $A_4$ | 27-6=21 | 24-7=17 | 21-9=12 | 15-15=0 |

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в таблицу:

| | Величина риска, д. е. $r_{ij}$ | | | | $\max\limits_j r_{ij}$ | $\min\limits_i\left(\max\limits_j r_{ij}\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | | |
| $A_1$ | 0 | 5 | 11 | 9 | 11 | 11 |
| $A_2$ | 3 | 0 | 0 | 13 | 13 | |
| $A_3$ | 17 | 11 | 6 | 4 | 17 | |
| $A_4$ | 21 | 17 | 12 | 0 | 21 | |

Введение величины риска $r_{ij}$ привело к выбору первой стратегии $A_1$, обеспечивающей наименьшие потери (затраты) в самой неблагоприятной ситуации (когда риск максимален).

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большего проигрыша (потерь).

**Критерий Гурвица.** Основан на следующих двух предположениях: «природа» может находиться в самом невыгодном состоянии с вероятностью $(1-\alpha)$ и в самом выгодном состоянии с вероятностью $\alpha$, где $\alpha$ – коэффициент доверия. Если результат $a_{ij}$ – прибыль, полезность, доход и т п., то критерий Гурвица записывается так:

$$\max_i(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}), \tag{4.9}$$

Когда $a_{ij}$ представляет затраты (потери), то выбирают действие, дающее

$$\min_i(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}). \tag{4.10}$$

$\alpha$ – степень оптимизма и изменяется в диапазоне [0, 1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При $\alpha=1$ формула (4.9) превращается в критерий Вальда, при $\alpha=0$ – в критерий оптимизма (максимума) $\max\limits_i(\max\limits_j a_{ij})$.

При $\alpha=1$ формула (4.10) превращается в критерий писсимизма $\min\limits_i(\min\limits_j a_{ij})$, при $\alpha=0$ – в критерий Вальда.

На $\alpha$ оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем $\alpha$ ближе к единице.

Применение данного критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими признаками:

- вероятности состояний «природы» не известны;
- необходимо считаться с наихудшим из возможных вариантов;
- реализуется малое количество решений;
- допускается некоторый риск.

**Пример 4.4.** Критерий Гурвица используем в примере 4.1. Положим $\alpha = 0.5$. Результаты необходимых вычислений приведены в таблице:

| | **Затраты, д. е.** $a_{ij}$ | | | | $\max\limits_j a_{ij}$ | $\min\limits_j a_{ij}$ | $W_i = \alpha \min\limits_j a_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_j a_{ij}$ | $\min\limits_i W_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | | | | |
| $A_1$ | 6 | 12 | 20 | 24 | 24 | 6 | 15 | 15 |
| $A_2$ | 9 | 7 | 9 | 28 | 28 | 7 | 17.5 | |
| $A_3$ | 23 | 18 | 15 | 19 | 23 | 15 | 19 | |
| $A_4$ | 27 | 24 | 21 | 15 | 27 | 15 | 21 | |

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с данным критерием будет первая, т. е. $A_1$.

Таким образом, в примере предстоит сделать выбор:

– по критерию Лапласа − выбор стратегии $A_2$;

– по критерию Вальда − выбор стратегии $A_3$;

– по критерию Сэвиджа − выбор стратегии $A_1$;

– по критерию Гурвица − выбор стратегии $A_1$ при $\alpha = 0.5$, а если лицо, принимающее решение, – пессимист ($\alpha = 0$), то выбор стратегии $A_3$.

Какое из возможных решений предпочтительнее?

Это определяется выбором соответствующего критерия (Лапласа, Вальда, Сэвиджа или Гурвица).

Выбор критерия принятия решений в условиях неопределенности является наиболее сложным и ответственным этапом в исследовании операций. При этом не существует каких-либо общих советов или рекомендаций. Выбор критерия должно производить лицо, принимающее решение (ЛПР), с учетом конкретной специфики решаемой задачи и в соответствии со своими целями, а также опираясь на прошлый опыт и собственную интуицию.

В частности, если даже минимальный риск недопустим, то следует применять критерий Вальда. Если, наоборот, определенный риск вполне приемлем и ЛПР намерено вложить в некоторое предприятие столько средств, чтобы потом оно не сожалело, что вложено слишком мало, то выбирают критерий Сэвиджа.

## 4.3. Принятие решения в условиях частичной неопределенности

**Критерий Байеса-Лапласа.** Этот критерий отступает от условий полной неопределенности − он предполагает, что возможным состояниям природы можно приписать определенную вероятность их наступления и, определив математическое ожидание выигрыша для каждого решения, выбрать то, которое обеспечивает наибольшее значение выигрыша: $\max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j$ .

Когда $a_{ij}$ представляет затраты (потери), то наилучшей стратегией для статиста по этому критерию будет стратегия, при которой потери минимальны: $\min\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot p_j$.

Этот метод предполагает возможность использования какой-либо предварительной информации о состояниях природы. При этом предполагается как повторяемость состояний природы, так и повторяемость решений, и, прежде всего, наличие достаточно достоверных данных о прошлых состояниях природы. То есть, основываясь на предыдущих наблюдениях прогнозировать будущее состояние природы (*статистический принцип*).

Применение данного критерия оправдано, если ситуация, в которой принимается решение, характеризуется следующими признаками:

– вероятности появления состояния природы известны и не зависят от времени;

– решение реализуется большое (теоретически бесконечное) число раз;

– для небольшого числа реализаций допускается некоторый неоцениваемый риск.

**Пример 4.5.** Пусть в примере 4.1 известны вероятности $p_j$ состояний $S_j$: $p_1 = 0.1,\ p_2 = 0.2,\ p_3 = 0.3,\ p_4 = 0.4$ . Ожидаемые затраты при различных действиях $A_1, A_2, A_3, A_4$ составляют:

$M(A_1)$=0.1·6 + 0.2·12 + 0.3·20 +0.4·24 = 18.6,

$M(A_2)$= 0.1·9 + 0.2·7 + 0.3·9 + 0.4·28=16.2,

$M(A_3)$= 0.1·23 + 0.2·18 + 0.3·15 + 0.4·19=18,

$M(A_4)$= 0.1·27 + 0.2·24 + 0.3·21 + 0.4·15=19.8.

Тогда $\min\{18.6, 16.2, 18, 19.8\} = 16.2$.

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с критерием Байеса-Лапласа будет $A_2$.

При достаточно большом количестве реализаций среднее значение постепенно стабилизируется, поэтому при полной (бесконечной) реализации решения какой-либо риск практически исключен. Таким образом, критерий Байеса - Лапласа может дать ЛПР лучший результат, чем максиминный критерий Вальда, однако он предполагает большую информированность и достаточно длительную реализацию.

### 4.4. Задачи для самостоятельного решения

**1.** Возможно строительство четырех типов электростанций: $A_1$

(тепловых), $A_2$ (приплотинных), $A_3$ (бесшлюзовых), $A_4$ (шлюзовых). Состояния природы обозначим через $P_1, P_2, P_3, P_4$. Экономическая эффективность строительства отдельных типов электростанций изменяется в зависимости от состояния природы и задана матрицей

$$P = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 12 \\ 8 & 5 & 3 & 10 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

**Решение:**

Согласно критерию Вальда $\max\limits_i(\min\limits_j a_{ij}) = \max(2,2,3,1) = 3,$ следует строить бесшлюзовую электростанцию.

Воспользуемся критерием Сэвиджа**.** Построим матрицу рисков:

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 7 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}_{4\times 4}$$

Согласно критерию Сэвиджа определяем $\min\limits_i\left(\max\limits_j r_{ij}\right) = \min(8,6,5,7) = 5.$

В соответствии с этим критерием также предлагается строить бесшлюзовую электростанцию.

Воспользуемся критерием Гурвица**.** Положим $\alpha = \dfrac{1}{2}.$ $\max\limits_i(\alpha \min\limits_j a_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_j a_{ij}) = \max(5,7,6.5,4.5) = 7,$ т.е. следует принять решение о строительстве приплотинной электростанции.

Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятностными $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4},$ то для принятия решения следует найти математические ожидания выигрыша:

$$M\left(A_1\right) = 5\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} = \frac{19}{4},$$

$$M\left(A_2\right) = 2\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 12\cdot\frac{1}{4} = \frac{21}{4},$$

$$M\left(A_3\right) = 8\cdot\frac{1}{4} + 5\cdot\frac{1}{4} + 3\cdot\frac{1}{4} + 10\cdot\frac{1}{4} = \frac{26}{4},$$

$$M\left(A_4\right) = 1\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{4} + 8\cdot\frac{1}{4} = \frac{15}{4}.$$

Так как максимальное значение имеет $M\left(A_3\right)$, то следует строить бесшлюзовую электростанцию.

**2.** Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от принятого решения − проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки (проект СТО) $R_j$ и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО − построена нижеследующая таблица ежегодных финансовых результатов (доход, д. е.):

| **Проект СТО** | **Прогнозируемая величина удовлетворенности спроса** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| 20 | -120 | 60 | 240 | 250 | 250 | 250 |
| 30 | -160 | 15 | 190 | 380 | 390 | 39- |
| 40 | -210 | -30 | 150 | 330 | 500 | 500 |
| 50 | -270 | -80 | 100 | 280 | 470 | 600 |

Определите наилучший проект СТО с использованием критериев Лапласа, Вальда, Сэвиджа и Гурвица.

**3.** Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры: $R_1$ − сооружается гидростанция; $R_2$ − сооружается теплостанция; $R_3$ − сооружается атомная станция. Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы $S_i$, $i=\overline{1,5}$. Результаты расчета экономической эффективности приведены в следующей таблице:

| Тип станции | **Состояние природы** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
| $R_1$ | 40 | 70 | 30 | 25 | 45 |
| $R_2$ | 60 | 50 | 45 | 20 | 30 |
| $R_3$ | 50 | 30 | 40 | 35 | 60 |

**4**. В новом жилом массиве создается телевизионное ателье для ремонта в стационарных условиях не более восьми тысяч телевизоров в год. Для упрощения примем, что поток заявок на ремонт в условиях стационара выражается цифрами 2, 4, 6 и 8 тыс. в год. Накопленный опыт аналогичных предприятий показывает, что прибыль от ремонта телевизора составляет 9 ден. ед., потери, вызванные в отказе в ремонте из-за недостатка мощностей, оцениваются в 5 ден. ед., а убытки от простоя специалистов и оборудования при отсутствии заявок обходятся в 6 ден. ед. в расчете на каждый телевизор.

Придав рассматриваемой ситуации игровую схему, составить платежную матрицу. Дать рекомендации о мощности создаваемого ателье.

**5.** Можно сделать одно из следующих приобретений: купить квартиру, земельный участок, катер, авторемонтную мастерскую или небольшое кафе. В случае, если обстоятельства сложатся благоприятно, прибыль составит 22 тыс. руб., 12 тыс. руб., 17 тыс. руб., 25 тыс. руб. или 30 тыс. руб., соответственно. В случае неблагоприятного стечения обстоятельств покупка квартиры или земельного участка принесет прибыль 7 тыс. руб. или 9 тыс. руб., соответственно, а покупка катера, авторемонтной мастерской или кафе принесут убытки 5 тыс. руб., 11 тыс. руб. или 13 тыс. руб., соответственно. Благоприятное и неблагоприятное стечение обстоятельств равновероятны. В этом случае достоверная информация о состоянии среды оценивается величиной: 1) 15,5 тыс. руб.; 2) 10 тыс. руб.; 3) 8 тыс. руб.; 4) 5 тыс. руб. 5) 2 тыс. руб.

**6**. Фирма решает, какое по размеру построить предприятие: малое, среднее или крупное. Ожидаемая прибыль зависит от будущего спроса на выпускаемую продукцию.

| **Альтернативы** | **Спрос** | | |
|---|---|---|---|
| | Низкий | Средний | Высокий |
| Малое предприятие | 10 | 10 | 10 |
| Среднее предприятие | 6 | 12 | 12 |
| Крупное предприятие | -2 | 4 | 18 |

Найдите оптимальное решение.

**7.** Фирма «Фармацевт» − производитель медикаментов и биомедицинских изделий в регионе. Известно, что пик спроса на некоторые лекарственные препараты приходится на летний период (препараты сердечно-сосудистой группы, анальгетики), на другие − на осенний и весенний периоды (антиинфекционные, противокашлевые).

Затраты на 1 усл. ед. продукции за сентябрь-октябрь составили: по первой группе (препараты сердечно-сосудистые и анальгетики) − 20 р.; по второй группе (антиинфекционные, противокашлевые препараты) − 15 р.

По данным наблюдений за несколько последних лет службой маркетинга фирмы установлено, что она может реализовать в течение рассматриваемых двух месяцев в условиях теплой погоды 3050 усл. ед. продукции первой группы и 1100 усл. ед. продукции второй группы; в условиях холодной погоды − 1525 усл. ед. продукции первой группы и 3690 усл. ед. второй группы.

В связи с возможными изменениями погоды ставится задача − определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую максимальный доход от реализации при цене продажи 40 р. за 1 усл. ед. продукции первой группы и 30 р. − второй группы.

**Решение**. Фирма располагает двумя стратегиями:

$A_1$ − в этом году будет теплая погода;

$A_2$ − погода будет холодная.

Если фирма примет стратегию $A_1$ и в действительности будет теплая погода (стратегия природы $B_1$), то выпущенная продукция (3050 усл. ед. препаратов первой группы и 1100 усл. ед. второй группы) будет полностью реализована и доход составит:

$$3050(40-20)+1100(30-15)=77500\,p.$$

В условиях прохладной погоды (стратегия природы $B_2$) препараты второй группы будут проданы полностью, а первой группы только в количестве 1525 усл. ед. и часть препаратов останется нереализованной. Доход составит:

$$1525(40-20)+1100(30-15)-20(3050-1525)=16500\,p.$$

Аналогично, если фирма примет стратегию $A_2$ и в действительности будет холодная погода, то доход составит:

$$1525(40-20)+3690(30-15)=85850\,p.$$

При теплой погоде доход составит:

$$1525(40-20)+1100(30-15)-15(3690-1100)=8150\,p.$$

Рассматривая фирму и погоду в качестве двух игроков, получим платежную матрицу

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{pmatrix}, \end{array}$$

$\alpha=\max(16500{,}81500)=16500\,p.$, $\beta=\min(77500{,}85850)=77500\,p.$

Цена игры лежит в диапазоне $16500\,p. \le \nu \le 77500\,p.$.

Из платежной матрицы видно, что при всех условиях доход фирмы будет не меньше 16500 *р*., но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то доход фирмы может составить 77500 *р*.

Найдем решение игры.

Обозначим вероятность применения фирмой стратегии $A_1$ через $x_1$, стратегии $A_2$ − через $x_2$, причем $x_1=1-x_2$. Решая игру графическим методом, получим $x_1=0.56,\ x_2=0.44$, при этом цена игры $\nu=46\,986\,p.$

Оптимальный план производства лекарственных препаратов составит:

$$0.56(3050;1100)+0.44(1525;3690)=(2379;2239.6).$$

Таким образом, фирме целесообразно производить в течение сентября и октября 2379 усл. ед. препаратов первой группы и 2239.6 усл. ед. препаратов второй группы, тогда при любой погоде она получит доход не менее 46 986 р.

**В условиях неопределенности**, если не представляется возможным фирме использовать смешанную стратегию (договоры с другими организациями), для определения оптимальной стратегии фирмы используем критерии природы.

1. Критерий Вальда: $\max\left(\min a_{ij}\right) = \max\left(16500, 8150\right) = 16500\,р.$, фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$.

2. Критерий максимума: $\max\left(\max a_{ij}\right) = \max\left(77500, 85850\right) = 85850\,р.$, целесообразно использовать стратегию $A_2$.

3. Критерий Гурвица: для определенности примем $\alpha = 0.4$, тогда для стратегии фирмы $A_1$ имеем

$$\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij} = 0.4 \cdot 16500 + \left(1-0.4\right)\cdot 77500 = 53100\,р.;$$

для стратегии $A_2$

$$\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij} = 0.4 \cdot 8150 + \left(1-0.4\right)\cdot 85850 = 54770\,р.;$$

$$\max\left(53100, 54770\right) = 54770\,р.,$$

фирме целесообразно использовать стратегию $A_2$.

4. Критерий Сэвиджа. Максимальный элемент в первом столбце − 77 500, во втором столбце − 85 850.

Элементы матрицы рисков находятся из выражения $r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij}$, откуда

$r_{11}$=77500-77500=0,

$r_{12}$ =85850-16500=69350,

$r_{21}$=77500-8150=69350,

$r_{22}$ =85850-85850=0.

Матрица рисков имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & 69350 \\ 69350 & 0 \end{pmatrix}$,

$\min_i\left(\max_j r_{ij}\right) = \min\left(69350, 69350\right) = 69350\,р.$, целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

Следовательно, фирме целесообразно применять стратегию $A_1$ или $A_2$.

Отметим, что каждый из рассмотренных критериев не может быть признан вполне удовлетворительным для окончательного выбора решений, однако их совместный анализ позволяет более наглядно представить последствия принятия тех или иных управленческих решений.

При известном распределении вероятностей различных состояний природы критерием принятия решения является максимум математического ожидания выигрыша.

Пусть известно для рассматриваемой задачи, что вероятности теплой и холодной погоды равны и составляют 0.5, тогда оптимальная стратегия фирмы определяется так:

$$\max\left\{\left(0.5\cdot 77500 + 0.5\cdot 16500\right);\left(0.5\cdot 8150 + 0.5\cdot 85850\right)\right\} =$$

$$= \max\left(47000; 47000\right) = 47000\,р.$$

Фирме целесообразно использовать стратегию $A_1$ или $A_2$.

**8.** Коммерческий директор торговой организации желает открыть филиал в районном центре города. Ему дают «добро» в четырех районных центрах *A, B, C* и *D*. Затраты на строительство не определены и, в связи с позиций партнеров, зависят от того, какой будет спрос на предлагаемый товар в период строительства. Возможны 5 вариантов развития ситуации: $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$, $S_5$. Матрица затрат имеет вид:

| | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| *A* | 27 | *a* | 23 | 7 | 29 |
| *B* | 31 | 11 | 22 | *b* | 21 |
| *C* | *c* | 32 | 16 | 13 | *d* |
| *D* | 8 | 18 | *e* | 33 | 16 |

Используя критерии Лапласа, Вальда, метод максимального оптимизма, Сэвиджа, Гурвица с $\alpha = 0.6$ определить оптимальное решение. Значения *a, b, c, d*, е взять для своего варианта из таблицы:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| *a* | 34 | 32 | 33 | 34 | 31 |
| *b* | 30 | 31 | 31 | 31 | 34 |
| *c* | 34 | 34 | 33 | 30 | 35 |
| *d* | 34 | 31 | 35 | 31 | 33 |
| *e* | 32 | 35 | 34 | 33 | 32 |

**9.** Планируется строительство горного предприятия (рудника). Рудное месторождение разведано редкой сетью скважин (в основном по категории $C_1$). В связи с дефицитностью сырья необходимо принять решение о мощности рудника, не ожидая окончания детальной разведки. Разведанные запасы месторождения (точнее их математическое ожидание) составляют 40 млн.т. Так как точность подсчета запасов по категории $C_1$ составляет 100%, реально запасы сырья могут изменяться от 20 до 80 млн. т. Рассматриваются 5 возможных вариантов запасов 20, 30, 40, 60 и 80 млн. т (соответственно $\Pi_1 - \Pi_5$ состояния природы).

Также рассматриваются 4 варианта строительства рудника различной мощности (соответственно стратегии $A_1 - A_4$). Для каждого варианта мощности при рассматриваемых состояниях природы (вариантов запасов месторождения) подсчитаны возможные значения суммарной приведенной прибыли (табл.).

Для принятия окончательного решения о мощности рудника требуется рассчитать критерии Вальда, Сэвиджа, Лапласа и среднего выигрыша (математическое ожидание прибыли), задаваясь вероятностями состояний природы (по аналогии с другими месторождениями). Для критерия среднего выигрыша полагаем, что наблюдается нормальный закон распределения ошибки подсчета запасов, поэтому примем вероятности состояния равными соответственно $\left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\right)$ = (0.12; 0.25; 0,3; 0.25; 0.08). Для критерия

Гурвица задайтесь тремя значениями коэффициента $k$, выражающим долю оптимизма $k$=0.3; 0.5 и 0.7.

| **Вариант мощности** | **Прибыль, млн. у.е. для вариантов запасов (состояний природы), млн. т** | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | $П_3$ | $П_4$ | $П_5$ |
| $A_1$ | -15-$M$ | 40-$M$+$N$ | 60 | 70+$M$ | 90-$N$ |
| $A_2$ | -55-$M$ | -10-$M$+$N$ | 80 | 100-$N$ | 100+$M$ |
| $A_3$ | -65-$M$ | -60-$M$+$N$ | 50 | 110 | 120+$M$+$N$ |
| $A_4$ | -90-$M$ | -70-$M$+$N$ | 40 | 125 | 160+$M$+$N$ |

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

**Задание К.1.** Упростить игру. Найти гарантированные результаты для каждого игрока. Если существует седловая точка, то найти решение игры в чистых стратегиях. Если седловой точки нет, то найти решение игры в смешанных стратегиях (таблица К.1).

**Таблица К.1.**

| № варианта | Задание | № варианта | Задание |
|---|---|---|---|
| 1 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | 2 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 3 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ | 4 | $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 2 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 5 | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | 6 | $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 6 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 7 | $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ | 8 | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ |
| 9 | $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ | 10 | $\begin{pmatrix} 2 & 9 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ |
| 11 | $\begin{pmatrix} 11 & 12 & 14 & 13 \\ 10 & 12 & 13 & 12 \\ 11 & 12 & 14 & 13 \\ 14 & 13 & 11 & 10 \end{pmatrix}$ | 12 | $\begin{pmatrix} 22 & 20 & 21 & 24 \\ 21 & 22 & 25 & 23 \\ 24 & 21 & 23 & 22 \end{pmatrix}$ |
| 13 | $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | 14 | $\begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 15 | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ | 16 | $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ |
| 17 | $\begin{pmatrix} 8 & 11 & 6 & 4 & 9 \\ 6 & 5 & 8 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ | 18 | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
| 19 | $\begin{pmatrix} -4 & -4 & -1 & -4 \\ -3 & -5 & -6 & -3 \\ -1 & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ | 20 | $\begin{pmatrix} -2 & -9 & -0 & -1 \\ -4 & -6 & -5 & -7 \\ -3 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ |

**Задание К.2.** Графическим методом найти оптимальные стратегии и цену игры, заданной платежной матрицей (таблица К.2-К.3). При этом с **1**-го по **5**-й, с **11**-й по **15**-й вариант выполнения работы принять платежную матрицу вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

с **6**-го по **10**-й, с **16**-го по **20**-ый вариант – вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}.$$

**Таблица К.2 – Значения коэффициентов платежных матриц**

| **№ варианта / Значения** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 3 | 4 | 2 | 5 | 4 | 4 | 3 | 4 | 3 | -2 |
| $a_{12}$ | 4 | 3 | 5 | 4 | 3 | 7 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| $a_{13}$ | 5 | 2 | 3 | 3 | 6 | - | - | - | - | - |
| $a_{14}$ | 2 | 3 | 4 | 7 | 4 | - | - | - | - | - |
| $a_{21}$ | 7 | 5 | 3 | 4 | 5 | 9 | 4 | 2 | 2 | 4 |
| $a_{22}$ | 6 | 2 | 2 | 2 | 6 | 3 | -1 | 3 | 3 | 2 |
| $a_{23}$ | 4 | 6 | 5 | 5 | 4 | - | - | - | - | - |
| $a_{24}$ | 8 | 1 | 3 | 4 | 7 | - | - | - | - | - |
| $a_{31}$ | - | - | - | - | - | 5 | 5 | -1 | 5 | 3 |
| $a_{32}$ | - | - | - | - | - | 9 | 3 | 2 | 3 | 5 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{41}$ | - | - | - | - | - | 6 | 2 | 3 | 4 | 2 |
| $a_{42}$ | - | - | - | - | - | 9 | 4 | 5 | 2 | 4 |

**Таблица К.3 – Значения коэффициентов платежных матриц**

| № варианта / Значения | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 2 | 4 | 3 | 5 | 6 | 4 | 3 | 7 | 4 | -2 |
| $a_{12}$ | 3 | 3 | 6 | 4 | 5 | 7 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| $a_{13}$ | 4 | 2 | 4 | 3 | 8 | - | - | - | - | - |
| $a_{14}$ | 1 | 3 | 5 | 7 | 6 | - | - | - | - | - |
| $a_{21}$ | 6 | 5 | 4 | 4 | 7 | 9 | 4 | 1 | 2 | 4 |
| $a_{22}$ | 5 | 2 | 3 | 2 | 8 | 3 | -1 | 4 | 3 | 2 |
| $a_{23}$ | 3 | 6 | 6 | 5 | 6 | - | - | - | - | - |
| $a_{24}$ | 7 | 1 | 4 | 4 | 9 | - | - | - | - | - |
| $a_{31}$ | - | - | - | - | - | 5 | 8 | -1 | 1 | 3 |
| $a_{32}$ | - | - | - | - | - | 9 | 1 | 2 | 3 | 5 |
| $a_{41}$ | - | - | - | - | - | 6 | 2 | 3 | 8 | 2 |
| $a_{42}$ | - | - | - | - | - | 9 | 5 | 5 | 1 | 5 |

**Задание К.3.** Торговая фирма разработала несколько вариантов плана продаж товаров на предстоящей ярмарке с учетом конъюнктуры рынка и спроса покупателей. Получающиеся от их возможных сочетаний показатели дохода представлены в таблице К.4.

1. Определить оптимальную стратегию фирмы в продаже товаров на ярмарке.
2. Если существует риск (вероятность реализации плана $П_1$ – $b$%, $П_2$– $c$%, $П_3$ –$d$%), то какую стратегию фирме следует считать оптимальной?

**Таблица К.4**

| **План продажи** | **Величина дохода, ден. ед.** | | |
|---|---|---|---|
| | $K_1$ | $K_2$ | $K_3$ |
| $П_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $П_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $П_3$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

Значения коэффициентов представлено в таблицах К.5-К.6.

**Таблица К.5 – Значения коэффициентов**

| № варианта / Значения | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 3 | 2 | 3 | 4 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| $a_{12}$ | 5 | 4 | 4 | 3 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| $a_{13}$ | 1 | 2 | 2 | 5 | 4 | -4 | 3 | 3 | 4 | 3 |
| $a_{21}$ | 1 | 1 | 1 | 6 | 5 | -2 | 4 | 4 | 5 | 3 |
| $a_{22}$ | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 5 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| $a_{23}$ | 3 | 5 | 4 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| $a_{31}$ | 4 | 4 | 5 | 2 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| $a_{32}$ | 2 | 2 | 3 | 5 | 5 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| $a_{33}$ | 5 | -3 | 1 | -2 | -5 | 3 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| $b$, % | 40 | 30 | 30 | 35 | 45 | 20 | 30 | 25 | 40 | 15 |
| $c$, % | 30 | 20 | 45 | 25 | 35 | 40 | 35 | 25 | 15 | 35 |
| $d$, % | 30 | 50 | 25 | 40 | 20 | 40 | 35 | 50 | 45 | 50 |

**Таблица К.6 – Значения коэффициентов**

| № варианта / Значения | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_{11}$ | 4 | 4 | 6 | 5 | 3 | 5 | 2 | 2 | 3 | 2 |
| $a_{12}$ | 6 | 6 | 10 | 4 | 2 | 3 | 3 | 1 | 2 | 4 |
| $a_{13}$ | 2 | 4 | 6 | 6 | 4 | -4 | 3 | 3 | 4 | 3 |
| $a_{21}$ | 2 | 3 | 4 | 7 | 5 | -2 | 4 | 4 | 5 | 3 |
| $a_{22}$ | 5 | 5 | 6 | 3 | 3 | 5 | 2 | 3 | 3 | 1 |
| $a_{23}$ | 4 | 7 | 8 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 2 | 4 |
| $a_{31}$ | 5 | 6 | 9 | 3 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 2 |
| $a_{32}$ | 3 | 4 | 7 | 6 | 5 | 1 | 2 | 4 | 5 | 3 |
| $a_{33}$ | 6 | -1 | 8 | -2 | -5 | 3 | 4 | 2 | 5 | 3 |
| $b$, % | 30 | 30 | 30 | 34 | 43 | 20 | 30 | 27 | 40 | 19 |
| $c$, % | 35 | 30 | 46 | 26 | 37 | 30 | 34 | 23 | 18 | 31 |
| $d$, % | 35 | 40 | 24 | 40 | 20 | 50 | 36 | 50 | 42 | 50 |

**Задание К.4**. Решить матричную игру итерационным методом (таблица К.7).

**Таблица К.7**

| № варианта | Задание | № варианта | Задание |
|---|---|---|---|
| 1 | $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 2 & 4 & -1\end{pmatrix}$ | 2 | $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5 & 2\\ 0 & -2 & 2 & 3\end{pmatrix}$ |
| 3 | $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -4\end{pmatrix}$ | 4 | $A=\begin{pmatrix}0 & -6 & -1 & -2\\ -6 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ |
| 5 | $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 5 & -6\end{pmatrix}$ | 6 | $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & 0\end{pmatrix}$ |
| 7 | $A=\begin{pmatrix}1 & -8 & 2 & 1\\ -3 & -4 & 2 & -2\end{pmatrix}$ | 8 | $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -2 & 5 & -6\end{pmatrix}$ |
| 9 | $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ | 10 | $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 8 & -3\end{pmatrix}$ |
| 11 | $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 3 & 5 & -1\end{pmatrix}$ | 12 | $A=\begin{pmatrix}7 & 5 & 6 & 3\\ 0 & -2 & 3 & 4\end{pmatrix}$ |
| 13 | $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & 8 & -3\end{pmatrix}$ | 14 | $A=\begin{pmatrix}0 & -7 & -2 & -3\\ -7 & 1 & -3 & -4\end{pmatrix}$ |
| 15 | $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -3 & 5 & -7\end{pmatrix}$ | 16 | $A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 5 & 7 & 2\end{pmatrix}$ |
| 17 | $A=\begin{pmatrix}2 & -9 & 3 & 2\\ -4 & -5 & 3 & -3\end{pmatrix}$ | 18 | $A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 1\\ -4 & 5 & -8\end{pmatrix}$ |
| 19 | $A=\begin{pmatrix}4 & -3 & 3 & 2\\ -4 & 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$ | 20 | $A=\begin{pmatrix}13 & 12 & 14\\ 11 & 18 & -13\end{pmatrix}$ |

**Задание К.5.** Фирма производит пользующиеся спросом детские платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы в течение апреля-мая на единицу продукции составят: платья – ***A*** ден. ед., костюмы – ***B*** ден. ед. Цена реализации составит ***C*** ден. ед. и ***D*** ден. ед. соответственно.

По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды ***E*** шт. платьев и ***K*** шт. костюмов, при прохладной погоде – ***M*** шт. платьев и ***N*** шт. костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы в выпуске продукции, обеспечивающую ей максимальный доход.

Задачу решить графическим методом и с использованием критериев игр с природой, приняв степень оптимизма $\alpha$, указанную в таблице.

Значения коэффициентов представлено в таблице К.8-К.9.

**Таблица К.8 – Значения коэффициентов**

| № варианта / Значения | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** | **9** | **10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***A*** | 5 | 10 | 7 | 12 | 15 | 9 | 11 | 13 | 6 | 8 |
| ***B*** | 25 | 35 | 28 | 40 | 42 | 32 | 38 | 41 | 26 | 30 |
| ***C*** | 10 | 18 | 12 | 22 | 28 | 15 | 20 | 24 | 11 | 14 |
| ***D*** | 40 | 80 | 55 | 95 | 115 | 70 | 85 | 105 | 50 | 60 |
| ***E*** | 1220 | 1370 | 1340 | 1430 | 1460 | 1310 | 1390 | 1510 | 1480 | 1550 |
| ***K*** | 550 | 530 | 490 | 510 | 570 | 560 | 580 | 605 | 590 | 600 |
| ***M*** | 410 | 450 | 430 | 460 | 470 | 440 | 465 | 475 | 480 | 490 |
| ***N*** | 930 | 970 | 950 | 920 | 980 | 990 | 960 | 910 | 940 | 880 |
| $\alpha$ | 0.4 | 0.6 | 0.3 | 0.7 | 0.5 | 0.4 | 0.3 | 0.7 | 0.6 | 0.5 |

**Таблица К.9 – Значения коэффициентов**

| № варианта / Значения | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** | **16** | **17** | **18** | **19** | **20** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ***A*** | 6 | 11 | 10 | 16 | 17 | 12 | 15 | 17 | 8 | 9 |
| ***B*** | 26 | 36 | 30 | 43 | 43 | 34 | 40 | 45 | 27 | 33 |
| ***C*** | 11 | 19 | 14 | 25 | 29 | 17 | 23 | 29 | 12 | 16 |
| ***D*** | 41 | 81 | 57 | 98 | 115 | 72 | 88 | 109 | 53 | 65 |
| ***E*** | 1220 | 1370 | 1342 | 1438 | 1465 | 1310 | 1390 | 1510 | 1480 | 1556 |
| ***K*** | 555 | 535 | 490 | 510 | 570 | 560 | 580 | 605 | 590 | 600 |
| ***M*** | 415 | 456 | 437 | 468 | 479 | 441 | 462 | 475 | 484 | 496 |
| ***N*** | 935 | 976 | 957 | 928 | 989 | 991 | 962 | 917 | 944 | 886 |
| $\alpha$ | 0.5 | 0.65 | 0.35 | 0.75 | 0.55 | 0.45 | 0.35 | 0.75 | 0.65 | 0.55 |

**Задание К.6.** Рассматривается кооперативная игра с тремя игроками. Известны значения характеристической функции, определяющие соответственно выигрыши первого, второго и третьего игроков, когда каждый из них играет в одиночку, не кооперируясь ни с кем из других игроков: $\upsilon(1)$; $\upsilon(2)$; $\upsilon(3)$, а также выигрыши, которые могут обеспечить себе игроки, действуя попарно: $\upsilon(1,2)$; $\upsilon(1,3)$; $\upsilon(2,3)$ и общий выигрыш, который могут обеспечить себе игроки, образуя максимально большую коалицию, состоящую из трех игроков: $\upsilon(1,2,3)$.

Требуется определить выигрыши каждого из игроков в случае их объединения на основе использования вектора Шепли. Проверить принадлежность вектора Шепли *С*-ядру.

1) $\upsilon(1)=1000$; $\upsilon(2)=800$; $\upsilon(3)=1200$; $\upsilon(1,2)=2000$; $\upsilon(1,3)=2500$; $\upsilon(2,3)=2300$; $\upsilon(1,2,3)= 4000$.

2) $\upsilon(1)=1500$; $\upsilon(2)=1200$; $\upsilon(3)=1000$; $\upsilon(1,2)=3000$; $\upsilon(1,3)=2700$; $\upsilon(2,3)=2400$; $\upsilon(1,2,3)=4400$.

3) $\upsilon(1)=1100$; $\upsilon(2)=1600$; $\upsilon(3)=1300$; $\upsilon(1,2)=3000$; $\upsilon(1,3)=2600$; $\upsilon(2,3)=3200$; $\upsilon(1,2,3)=5000$.

4) $\upsilon(1)=900$; $\upsilon(2)=850$; $\upsilon(3)=1200$; $\upsilon(1,2)=2000$; $\upsilon(1,3)=2400$; $\upsilon(2,3)=2500$; $\upsilon(1,2,3)=3600$.

5) $\upsilon(1)=1300$; $\upsilon(2)=1400$; $\upsilon(3)=1700$; $\upsilon(1,2)=3000$; $\upsilon(1,3)=3400$; $\upsilon(2,3)=3600$; $\upsilon(1,2,3)=5600$.

6) $\upsilon(1)=2000$; $\upsilon(2)=1800$; $\upsilon(3)=1500$; $\upsilon(1,2)=4200$; $\upsilon(1,3)=4000$; $\upsilon(2,3)=3700$; $\upsilon(1,2,3)=6400$.

7) $\upsilon(1)=960$; $\upsilon(2)=1200$; $\upsilon(3)=2300$; $\upsilon(1,2)=2400$; $\upsilon(1,3)=3600$; $\upsilon(2,3)=3900$; $\upsilon(1,2,3)=5800$.

8) $\upsilon(1)=2400$; $\upsilon(2)=2000$; $\upsilon(3)=1800$; $\upsilon(1,2)=4800$; $\upsilon(1,3)=4500$; $\upsilon(2,3)=4200$; $\upsilon(1,2,3)=7000$.

9) $\upsilon(1)=80$; $\upsilon(2)=130$; $\upsilon(3)=180$; $\upsilon(1,2)=240$; $\upsilon(1,3)=280$; $\upsilon(2,3)=350$; $\upsilon(1,2,3)=480$.

10) $\upsilon(1)=100$; $\upsilon(2)=180$; $\upsilon(3)=120$; $\upsilon(1,2)=300$; $\upsilon(1,3)=250$; $\upsilon(2,3)=340$; $\upsilon(1,2,3)=480$.

11) $\upsilon(1)=1100$; $\upsilon(2)=850$; $\upsilon(3)=1200$; $\upsilon(1,2)=2050$; $\upsilon(1,3)=2500$; $\upsilon(2,3)=2350$; $\upsilon(1,2,3)= 4000$.

12) $\upsilon(1)=1500$; $\upsilon(2)=1260$; $\upsilon(3)=1000$; $\upsilon(1,2)=3060$; $\upsilon(1,3)=2800$; $\upsilon(2,3)=2400$; $\upsilon(1,2,3)=4400$.

13) $\upsilon(1)=1170$; $\upsilon(2)=1600$; $\upsilon(3)=1370$; $\upsilon(1,2)=3070$; $\upsilon(1,3)=2600$; $\upsilon(2,3)=3270$; $\upsilon(1,2,3)=5000$.

14) $\upsilon(1)=980$; $\upsilon(2)=850$; $\upsilon(3)=1280$; $\upsilon(1,2)=2080$; $\upsilon(1,3)=2400$; $\upsilon(2,3)=2580$; $\upsilon(1,2,3)=3680$.

15) $\upsilon(1)=1340$; $\upsilon(2)=1400$; $\upsilon(3)=1740$; $\upsilon(1,2)=3000$; $\upsilon(1,3)=3440$; $\upsilon(2,3)=3600$; $\upsilon(1,2,3)=5600$.

16) $\upsilon(1)=2030$; $\upsilon(2)=1800$; $\upsilon(3)=1530$; $\upsilon(1,2)=4200$; $\upsilon(1,3)=4030$; $\upsilon(2,3)=3700$; $\upsilon(1,2,3)=6400$.

17) $\upsilon(1)=962$; $\upsilon(2)=1220$; $\upsilon(3)=2320$; $\upsilon(1,2)=2400$; $\upsilon(1,3)=3620$; $\upsilon(2,3)=3900$; $\upsilon(1,2,3)=5800$.

18) $\upsilon(1)=2420$; $\upsilon(2)=2000$; $\upsilon(3)=1830$; $\upsilon(1,2)=4830$; $\upsilon(1,3)=4500$; $\upsilon(2,3)=4200$; $\upsilon(1,2,3)=7030$.

19) $\upsilon(1)=80$; $\upsilon(2)=136$; $\upsilon(3)=180$; $\upsilon(1,2)=243$; $\upsilon(1,3)=285$; $\upsilon(2,3)=350$; $\upsilon(1,2,3)=486$.

20) $\upsilon(1)=140$; $\upsilon(2)=180$; $\upsilon(3)=120$; $\upsilon(1,2)=350$; $\upsilon(1,3)=250$; $\upsilon(2,3)=340$; $\upsilon(1,2,3)=486$.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ И РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Благодатских, А. И. Сборник задач и упражнений по теории игр: учебное пособие / А. И. Благодатских, Н. Н. Петров. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург: Лань, 2014. – 304 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/49465.
2. Бородачёв, С.М. Теория принятия решений: учебное пособие / С.М. Бородачёв; науч. ред. О.И. Никонов; Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина. – Екатеринбург: Издательство Уральского университета, 2014. – 124 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=275740.
3. Воробьев, Н.Н. Лекции по теории игр для экономистов-кибернетиков. / Н.Н. Воробьев – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1974.
4. Дубина, И. Н. Основы теории игр и ее приложения в экономике и менеджменте: учебное пособие. 3‑ е изд., перераб. и доп. / И. Н. Дубина. –Барнаул: Изд‑ во Алт. ун‑ та, 2013. – 312 с.
5. Есипов, Б. А. Методы исследования операций: учебное пособие / Б. А. Есипов. – 2-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2013. – 304 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/68467.
6. Мазалов, В. В. Математическая теория игр и приложения: учебное пособие / В. В. Мазалов. – 3-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2017. – 448 с. – Текст: электронный// Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/90066.
7. Мендель, А.В. Модели принятия решений: учебное пособие / А.В. Мендель. – Москва: Юнити, 2015. – 463 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=115173.
8. . Новиков, А.И. Экономико-математические методы и модели: учебник / А.И. Новиков. – Москва: Дашков и К, 2020. – 532 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573375.
9. Федорова, М.А. Теория игр: учебно-методическое пособие: / М.А. Федорова; Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации. – Москва: Дело, 2018. – 123 с.– URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=577842.
10. Шелехова, Л.В. Теория игр в экономике: учебное пособие: / Л.В. Шелехова. – Москва; Берлин: Директ-Медиа, 2015. – 119 с. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=274522.

Шевченко Алеся Сергеевна

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ В УСЛОВИЯХ КОНФЛИКТА
И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Учебно-методическое пособие для студентов направления 09.03.01«Информатика и вычислительная техника»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати __.__.21. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 5,63. Тираж 35 экз. Зак.   Рег. № .

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.