МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

А.С. ШЕВЧЕНКО

МЕТОДЫ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов
направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «ИВТ»

Рубцовск 2022

УДК 519.876

Шевченко А.С. Методы сетевого планирования и управления: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022. – 89 с.

Пособие содержит теоретические сведения, необходимые для изучения темы «Методы сетевого планирования и управления» учебного курса «Моделирование прикладных и информационных процессов». Изложение сопровождается примерами решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения, 10 вариантов для контрольной работы, тестовые задания.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», а также для преподавателей вузов, инженеров и научных работников.

Рассмотрено и одобрено на заседании
НМС Рубцовского индустриального института.
Протокол № 5 от 02.06.2022 г.

Рецензент: канд. физ. – мат. наук, В.Г.Дудник

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Методы сетевого планирования и управления, разработанные в начале 50-х годов, широко и успешно применяются для оптимизации планирования и управления сложными разветвленными комплексами работ, требующими участия большого числа исполнителей и затрат ограниченных ресурсов.

Пособие состоит из трех тем: назначение и области применения сетевого планирования и управления, построение сетевых моделей, расчет и анализ сетевых моделей.

В нем содержатся теоретические сведения по указанным разделам, примеры решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения и 10 вариантов для контрольной работы.

Учебное пособие также содержит тестовые задания по основным темам. Тесты могут быть использованы для самостоятельной подготовки к экзамену, так и для проверки знаний студентов в ходе учебного процесса.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», а также для преподавателей вузов, инженеров и научных работников.

ТЕМА 1: НАЗНАЧЕНИЕ И ОБЛАСТИ ПРИМЕНЕНИЯ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Задача планирования комплекса работ

На практике часто сталкиваемся с задачей рационального планирования сложных, комплексных работ.

Примерами таких работ могут быть:

– строительство промышленного объекта;

– перевооружение армии или отдельных видов вооруженных сил;

– развертывание системы медицинских или профилактических мероприятий;

– моделирование прикладных и информационных процессов;

– выполнение комплексной научно-исследовательской темы с участием ряда организаций и т. д.

Характерным для каждого такого комплекса работ является то, что он состоит из отдельных, элементарных работ или «звеньев», которые не просто выполняются независимо друг от друга, а взаимно обусловливают друг друга, так что выполнение некоторых работ не может быть начато раньше, чем завершены некоторые другие. «Так, например, при строительстве промышленного предприятия рытье котлована не может быть начато раньше, чем будут доставлены и смонтированы соответствующие агрегаты; укладка фундамента не может быть начата раньше, чем будут доставлены необходимые материалы, для чего, в свою очередь, требуется завершение строительства подъездных путей; для всех этапов строительства необходимо наличие соответствующей технической документации, и т.д.» [1].

Планирование любого такого комплекса работ должно производиться с учетом следующих существенных элементов:

– времени, потребного на выполнение всего комплекса работ и его отдельных звеньев;

– стоимости всего комплекса работ и его отдельных звеньев;

– сырьевых, энергетических и людских ресурсов.

Рациональное планирование комплекса работ требует, в частности, ответа на следующие вопросы:

– Как распределить имеющиеся материальные средства и трудовые ресурсы между звеньями комплекса?

– В какие моменты времени начинать и когда заканчивать отдельные звенья?

– Какие могут возникнуть препятствия к своевременному завершению комплекса работ и как их устранять? и т. д.

При планировании сравнительно небольших по объему (количеству звеньев) комплексов работ ответ на такие вопросы обычно дает руководитель, причем без специальных математических расчетов, просто на основе опыта и здравого смысла. Однако, когда речь идет об очень сложных, дорогостоящих комплексах работ, состоящих из большого числа звеньев, сложным образом обусловливающих друг друга, такие приемы становятся недопустимыми. В этих случаях возникает необходимость в специальных расчетах, позволяющих обоснованно ответить на поставленные выше вопросы и ряд других.

Одним из математических методов, широко применяемых при решении такого рода задач, является метод **сетевого планирования и управления** или, как его часто называют, СПУ.

Такие системы предназначены для управления комплексов взаимосвязанных работ, коммерческих операций, разработок, которые требуют четкой координации взаимодействия множества исполнителей. СПУ позволяет осуществить надежную координацию всех звеньев и подразделений, участвующих в сложном комплексе. В таких случаях СПУ, по существу, является единственно возможным методом научного планирования и управления по выполнению больших масштабов работ с высокой вероятностью соблюдения заданных сроков их реализации, что является их главным достоинством.

Система методов СПУ – система методов планирования и управления разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных средств путем применения сетевых графиков.

Система СПУ представляет собой комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий с целью моделирования, анализа и оптимизации плана работ по созданию проекта.

Под **проектом** (комплексом работ, комплексом операций) понимают всякую задачу, для выполнения которой необходимо осуществить достаточно большое количество разнообразных работ. Это может быть и строительство некоторого здания, и разработка автоматизированной системы бухгалтерского учета, и обучение в институте и т.д.

Основным документом в системе СПУ является **сетевой график** (сетевая модель, сеть), представляющий собой безмасштабное графическое изображение планируемого процесса и отражающий взаимосвязь и последовательность входящих в него работ.

Объектом управления в системах СПУ является коллектив исполнителей, располагающий определенными материальными и денежными ресурсами и выполняющий комплекс работ, направленных на достижение конечного результата в установленные сроки.

Система СПУ охватывает следующие **основные этапы планирования и управления комплексом работ**:

– выявление работ, которые необходимо выполнить в процессе создания проекта и связей между ними;

– построение сетевого графика проекта на основе предварительно составленного перечня всех входящих в этот процесс работ и связей между ними;

– установление количественных оценок по каждой работе: время, стоимость, ресурсы;

– расчет параметров сетевого графика вручную или с помощью ЭВМ;

– анализ и оптимизация сетевого графика с целью получения определенных оптимальных показателей: минимальное время выполнения комплекса работ, минимальная стоимость, максимальная экономия ресурсов;

– использование сетевого графика как основного инструмента управления ходом работ.

В настоящее время методами СПУ решается около 14% задач общего объёма применяемых математических методов. Работы по использованию и развитию СПУ получили широкое распространение в разных отраслях народного хозяйства, как в нашей стране, так и за рубежом.

Методы и модели СПУ могут с успехом применяться в коммерческой деятельности при выполнении различных комплексов работ: проведение текущего или капитального ремонта, реконструкция коммерческих торговых предприятий, подготовка и проведение оптовых и розничных ярмарок, разработка плана коммерческой деятельности, строительство универсальных оптовых предприятий, разработка плана развития торговой сети, планирование торговой деятельности, составление бухгалтерского отчета, поставка товаров покупателям, заключение договоров на поставку и т.д.

Система СПУ позволяет:

– формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

– выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

– осуществлять управление комплексом работ по принципу «ведущего звена» с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

– повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ;

– четко отобразить объем и структуру решаемой проблемы, выявить с любой требуемой степенью детализации работы, образующие единый комплекс процесса разрешения проблемы; определить события, совершение которых необходимо для достижения заданных целей;

– выявить и всесторонне проанализировать взаимосвязь между работами, так как в самой методике построения сетевой модели заложено точное отражение всех зависимостей, обусловленных состоянием объекта и условиями внешней и внутренней среды;

– широко использовать вычислительную технику;

– быстро обрабатывать большие массивы отчетных данных и обеспечивать руководство своевременной и исчерпывающей информацией о фактическом состоянии реализации программы;

– упростить и унифицировать отчетную документацию.

Наиболее эффективными областями применения сетевых методов планирования и управления является управление крупными целевыми программами, научно-техническими разработками и инвестиционными проектами, а также сложными комплексами социальных, экономических и организационно-технических мероприятий на федеральном и региональных уровнях.

1.2.История сетевого планирования и управления

Методики сетевого планирования были разработаны в США в конце 50-х годов. В 1956 г. М. Уолкер из фирмы «Дюпон», исследуя возможности более эффективного использования принадлежащей фирме вычислительной машины Univac, объединил свои усилия с Д. Келли из группы планирования капитального строительства фирмы «Ремингтон Рэнд». Они попытались использовать ЭВМ для составления планов-графиков крупных комплексов работ по модернизации заводов фирмы «Дюпон». В результате совместной работы был создан рациональный и простой метод описания проекта с использованием ЭВМ. Первоначально он был назван методом Уолкера-Келли, а позже получил название **метода критического пути** – МКП (или CPM – Critical Path Method).

Параллельно и независимо в военно-морских силах США был создан **метод анализа и оценки программ PERT** (Program Evaluation and Review Technique). Этот метод был разработан корпорацией «Локхид» и консалтинговой фирмой «Буз, Аллен энд Гамильтон» для реализации проекта разработки ракетной системы «Поларис», объединяющего около 3800 основных подрядчиков и состоящего из 60 тыс. операций. Использование метода PERT позволило руководству программы точно знать, что требуется делать в каждый момент времени и кто именно должен это делать, а также вероятность своевременного завершения отдельных операций. Руководство программой оказалось настолько успешным, что проект удалось завершить на два года раньше запланированного срока. Благодаря такому успешному началу данный метод управления вскоре стал использоваться для планирования проектов во всех вооруженных силах США. Данная методика отлично себя зарекомендовала при координации работ, выполняемых различными подрядчиками в рамках крупных проектов по разработке новых видов вооружения.

Крупные промышленные корпорации начали применение подобной методики управления практически одновременно с военными для разработки новых видов продукции и модернизации производства. Широкое применение методика планирования работ на основе проекта получила в строительстве. Например, для управления проектом сооружения гидроэлектростанции на реке Черчилль в Ньюфаундленде (полуостров Лабрадор). Стоимость проекта составила 950 млн. долларов. Гидроэлектростанция строилась с 1967 по 1976 г. Этот проект включал в себя более 100 строительных контрактов, причем стоимость некоторых из них достигала 76 млн. долларов. В 1974 году ход работ по проекту опережал расписание на 18 месяцев и укладывался в плановую оценку затрат. Заказчиком проекта была корпорация Churchill Falls Labrador Corp., которая для разработки проекта и управления строительством наняла фирму Acress Canadian Betchel.

По существу, значительный выигрыш по времени образовался от применения точных математических методов в управлении сложными комплексами работ, что стало возможным благодаря развитию вычислительной техники. Однако первые ЭВМ были дороги и доступны только крупным организациям. Т. о., исторически первые проекты представляли из себя грандиозные по масштабам работ, количеству исполнителей и капиталовложениям государственные программы.

Первоначально, крупные компании осуществляли разработку программного обеспечения для поддержки собственных проектов, но вскоре первые системы управления проектами появились и на рынке программного обеспечения. Системы, стоявшие у истоков планирования, разрабатывались для мощных больших компьютеров и сетей мини-ЭВМ.

Основными показателями систем этого класса являлись их высокая мощность и, в то же время, способность достаточно детально описывать проекты, используя сложные методы сетевого планирования. Эти системы были ориентированы на высокопрофессиональных менеджеров, управляющих разработкой крупнейших проектов, хорошо знакомых с алгоритмами сетевого планирования и специфической терминологией. Как правило, разработка проекта и консультации по управлению проектом осуществлялись специальными консалтинговыми фирмами.

Этап наиболее бурного развития систем для управления проектами начался с появлением персональных компьютеров, когда компьютер стал рабочим инструментом для широкого круга руководителей. Значительное расширение круга пользователей управленческих систем породило потребность создания систем для управления проектами нового типа, одним из важнейших показателей таких систем являлась простота использования. Управленческие системы нового поколения разрабатывались как средство управления проектом, понятное любому менеджеру, не требующее специальной подготовки и обеспечивающее лёгкое и быстрое включение в работу. Time Line принадлежит именно к этому классу систем. Разработчики новых версий систем этого класса, стараясь сохранить внешнюю простоту систем, неизменно расширяли их функциональные возможности и мощность, и при этом сохраняли низкие цены, делавшие системы доступными фирмам практически любого уровня.

В настоящее время сложились глубокие традиции использования систем управления проектами во многих областях жизнедеятельности. Причем, основную долю среди планируемых проектов составляют небольшие по размерам проекты.

Естественно, что с расширением круга пользователей систем проектного менеджмента происходит расширение методов и приемов их использования. Западные отраслевые журналы регулярно публикуют статьи, посвященные системам для управления проектами, включающие советы пользователям таких систем и анализ использования методики сетевого планирования для решения задач в различных сферах управления.

В России работы по сетевому управлению начались в 60-х годах. В это время методы СПУ нашли широкое применение в строительстве и научных разработках. В процессе развития появились различные целевые системы: ПУСК-планирование, управление созданием корабля, СУР – система управления разработками, АСОР – автоматизированная система организации работ, ЦПК – централизованное планирование и контроль и др.

В несколько позднее время, сетевое планирование и управление нашло обширное применение и в других областях народного хозяйства. Работу над усовершенствованием методов построения альтернативных сетевых моделей осуществлял ряд советских ученых, среди которых можно отметить Г.С. Поспелова, В.А. Баришпольца, В.И. Рудоманова, Б.А. Вигмана и Н.И. Комкова.

Сетевые методы преподавали студентам во всех строительных вузах СССР, на всех строительных факультетах страны и преподают до сих пор. Эти методы вошли в программы различных институтов и курсов повышения квалификации.

Во многих научно-исследовательских и производственных организациях создавали специальные подразделения и группы сетевого планирования и управления, занимавшиеся разработкой и внедрением этих методов. Был создан и специальный институт – НИИ СПУ. Методы сетевого планирования и управления, впервые опробованные в 1963 году, уже в 1967 году были внедрены на 900 стройках. К 1975 году количество строек, применявших методы сетевого планирования и управления, составило 17-18%.

Сетевые методы до настоящего времени не утратили своего значения, хотя с начала 80-х годов они используются на качественно ином уровне – в составе автоматизированных систем управления, и теперь составляют ядро современных методов и средств управления проектом.

На основе PERT были разработаны другие методы сетевого планирования и управления. Вот некоторые из них:

- LESS – метод построения графика работ, требующего минимальных затрат. При этом определяется такое время выполнения каждой из работ, чтобы проект был выполнен с минимальными финансовыми затратами.
- PACT – метод прогноза возможных изменений производства, выполняемого с таким опережением, которого вполне достаточно, чтобы вовремя внести коррективы.
- SCANS – автоматизированная система сетевого планирования и управления, объединяющая построение сетевых графиков, определение необходимых затрат, использование трудовых ресурсов наиболее выгодным способом.
- RAMPS – метод распределения ресурсов при построении графиков для нескольких взаимосвязанных разработок.

ТЕМА 2: ПОСТРОЕНИЕ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

2.1.Сетевая модель и ее основные элементы

Сетевая модель – это план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), заданного в специфической форме сети, графическое изображение которой называется **сетевым графиком**. Отличительной особенностью сетевой модели является четкое определение всех временных взаимосвязей предстоящих работ.

События и **работы** являются главными элементами сетевой модели.

Термин работа используется в СПУ в широком смысле.

Во-первых, это **действительная работа** – протяжённый во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.). Каждая действительная работа должна быть конкретной, чётко описанной и иметь ответственного исполнителя.

Во-вторых, это **ожидание** – протяжённый во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.).

В-третьих, это **зависимость**, или **фиктивная работа** – логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени. Она указывает, что возможность одной работы непосредственно зависит от результатов другой. Естественно, что продолжительность фиктивной работы принимается равной нулю.

Событие – это момент завершения какого-либо процесса, отражающий отдельный этап выполнения проекта. Событие может являться частным результатом отдельной работы или суммарным результатом нескольких работ. Событие может свершиться только тогда, когда закончатся всё работы, ему предшествующие. Последующие работы могут начаться только тогда, когда событие свершится. Отсюда **двойственный характер** события: для всех непосредственно предшествующих ему работ оно является конечным, а для всех непосредственно следующих за ним – начальным. При этом предполагается, что событие не имеет продолжительности и свершается как бы мгновенно. Поэтому каждое событие, включаемое в сетевую модель, должно быть полно, точно и всесторонне определено, его формулировка должна включать в себя результат всех непосредственно предшествующих ему работ.

Среди событий сетевой модели выделяют **исходное** и **завершающее события**.

Исходное событие – результат, в отношении которого условно предполагается, что он не имеет предшествующих работ.

Завершающее событие – результат, в отношении которого предполагается, что он является конечной целью выполнения всего комплекса работ.

При составлении сетевых графиков (моделей) используют условные обозначения.

События на сетевом графике изображаются кружками (вершинами графа), а работы – стрелками (ориентированными дугами), которые показывают связь между работами. Пример фрагмента сетевого графика представлен на рис.2.1.

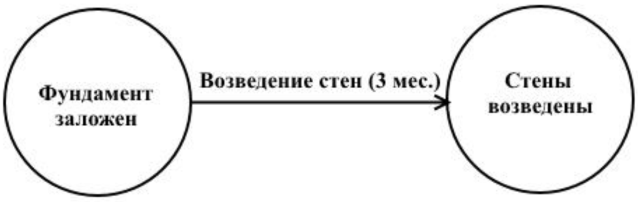


Рисунок 2.1. – Фрагмент сетевого графика

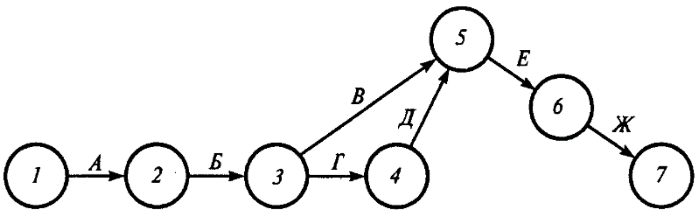


Рисунок 2.2. – Сетевой график задачи моделирования

На рис. 2.2 приведен сетевой график задачи моделирования и построения оптимального плана некоторого экономического объекта. Для решения этой задачи, необходимы следующие работы: ***А*** – сформулировать проблему исследования; ***Б*** – построить математическую модель изучаемого объекта; ***В*** – собрать информацию; ***Г*** – выбрать метод решения задачи; ***Д*** – построить и отладить программу для ЭВМ; ***Е*** – рассчитать оптимальный план; ***Ж*** – передать заказчику результаты расчета. Цифрами на графике обозначены номера событий, к которым приводит выполнение соответствующих работ.

Из графика, например, видно, что работы ***В*** и ***Г*** можно начать выполнять независимо одна от другой только после свершения события 3, т.е. когда выполнены работы ***А*** и ***Б***; работу ***Д*** – после свершения события 4, когда выполнены работы ***А***, ***Б*** и **Г**; а работу ***Е*** можно выполнить только после наступления события 5, т.е. при выполнении всех предшествующих ему работ ***А***, ***Б***, ***В***, ***Г*** и ***Д***.

Такой **тип сетевого графика** называется **«события – работы».**

В сетевой модели, представленной на рис. 2.2, нет числовых оценок. Такую **сеть** называют **структурной**. Однако на практике обычно используются сети, в которых заданы оценки продолжительности работ (указываемые в часах, неделях, декадах, месяцах и т.д. над соответствующими стрелками), а также оценки других параметров, например, трудоемкости, стоимости и т.п. Именно с такими сетями мы будем работать в дальнейшем.

В рассмотренных примерах сетевые графики состояли из работ и событий. Однако может быть и иной принцип построения сетей – без событий. В такой сети вершины графа (например, изображенные прямоугольниками) означают определенные работы, а стрелки — зависимости между этими работами, определяющие порядок их выполнения. Такой **тип сетевого графика** называется «**работы – связи**». Пример структуры сетевого графика «работы – связи» на рис. 2.3.

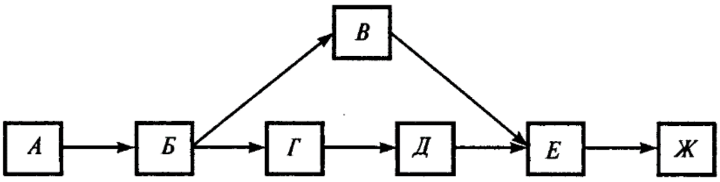


Рисунок 2.3. – Пример структуры сетевого графика «работы – связи»

Сетевой график «**работы – связи**» в отличие от графика «**события – работы**» обладает преимуществами: он не содержит фиктивных работ, имеет более простую технику построения и перестройки, включает только хорошо знакомое исполнителям понятие работы без менее привычного понятия события. Вместе с тем сети без событий оказываются значительно более громоздкими, т. к. событий обычно значительно меньше, чем работ (показатель сложности сети, равный отношению числа работ к числу событий, как правило, существенно больше единицы). Поэтому эти сети менее эффективны с точки зрения управления комплексом. Этим и объясняется тот факт, что в настоящее время наибольшее распространение получили сетевые графики «**события – работы**».

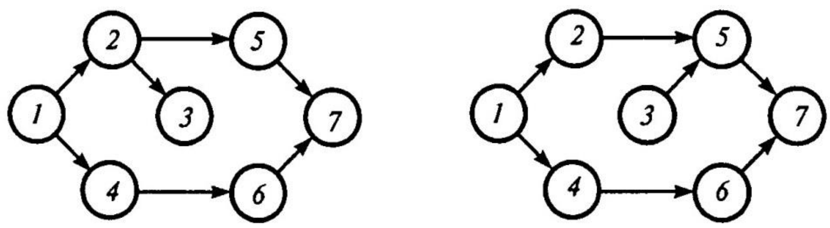
2.2.Порядок и правила построения сетевых графиков

Сетевые графики составляются на начальном этапе планирования. Вначале планируемый процесс разбивается на отдельные работы, составляется перечень работ и событий, продумываются их логические связи и последовательность выполнения, работы закрепляются за ответственными исполнителями. С их помощью и с помощью нормативов, если таковые существуют, оценивается продолжительность каждой работы. Затем составляется (сшивается) сетевой график. После упорядочения сетевого графика рассчитываются параметры событий и работ, определяются резервы времени и критический путь. Наконец, проводятся анализ и оптимизация сетевого графика, который при необходимости вычерчивается заново с пересчётом параметров событий и работ.

При построении сетевого графика необходимо соблюдать ряд правил.

1.*Сетевая модель не должна содержать «**тупиковых**» событий, т. е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события* (событие 3, см. рис. 2.4*а*).

Здесь либо работа (2,3) не нужна и её необходимо аннулировать, либо не замечена необходимость определённой работы, следующей за событием 3 для свершения какого-либо последующего события. В таких случаях необходимо тщательное изучение взаимосвязей событий и работ для исправления возникшего недоразумения.



а) *б)*

Рисунок 2.4

2. *Сетевой график не должен содержать «хвостовых» событий (кроме исходного события), которым не предшествует хотя бы одна работа* (событие 3 – на рис. 2.4*б*).

Здесь работы, предшествующие событию 3, не предусмотрены. Поэтому событие 3 не может свершиться, а, следовательно, не может быть выполнена и следующая за ним работа (3,5). Обнаружив в сети такие события, необходимо определить исполнителей предшествующих им работ и включить эти работы в сеть.

3. *Сеть не должна содержать замкнутых контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими* (см. рис. 2.5).

При возникновении контура необходимо вернуться к исходным данным и путём пересмотра состава работ добиться его устранения.

а) *б)*

Рисунок 2.5

4. *Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой-стрелкой.*

Нарушение этого условия происходит при изображении параллельно выполняемых работ (рис. 2.6 *а*). Если эти работы так и оставить, то произойдет путаница из-за того, что две различные работы будут иметь одно и то же обозначение (1,2); обычно принято под (i, j) понимать работу, связывающую i-е событие с j-м событием. Однако содержание этих работ, состав привлекаемых исполнителей и количество затрачиваемых на работы ресурсов могут существенно отличаться.

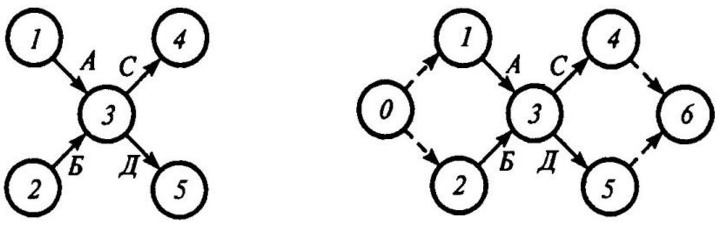
В этом случае, необходимо ввести фиктивное событие (событие $2'$ на рис. 2.6 *б*) и фиктивную работу (работа ($2'$, 2)), при этом одна из параллельных работ (1, $2'$) замыкается на это фиктивное событие. Фиктивные работы изображаются на графике пунктирными линиями.

а) *б)*

Рисунок 2.6

5. *Сеть должна иметь одно исходное и одно завершающее событие.* Если в составленной сети это не так (см. рис. 2.7 *а*), то добиться желаемого можно путем введения фиктивных событий и работ, как это показано на рис. 2.7 *б*.

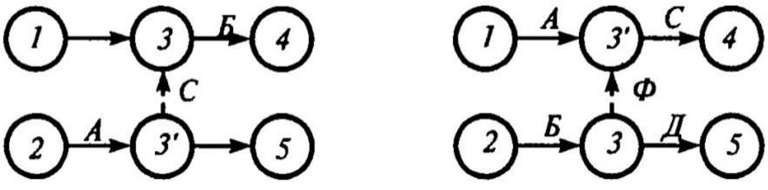
Фиктивные работы и события необходимо вводить и в ряде других случаев.



а) *б)*

Рисунок 2.7

Один из них – отражение зависимости событий, не связанных с реальными работами. Например, работы ***А*** и ***Б*** (рис. 2.8 *а*) могут выполняться независимо друг от друга, но по условиям производства работа ***Б*** не может начаться раньше, чем окончится работа ***А***. Это обстоятельство требует введения фиктивной работы ***С***.



а) *б)*

Рисунок 2.8

Другой случай – неполная зависимость работ. Например, работа ***С*** требует для своего начала завершения работ ***А*** и ***Б***, но работа ***Д*** связана только с работой ***Б***, а от работы ***А*** не зависит. Тогда требуется введение фиктивной работы ***Ф*** и фиктивного события 3′, как показано на рис. 2.8 *б*.

Кроме того, фиктивные работы могут вводиться для отражения реальных отсрочек и ожидания. В отличие от предыдущих случаев здесь фиктивная работа характеризуется протяжённостью во времени.

Пример 2.1. Необходимо построить сетевую модель программы опроса общественного мнения, включающая разработку (A; 1 день) и распечатку анкет (B; 0.5 дня), прием на работу (C; 2 дня) и обучение персонала (D; 2 дня), выбор опрашиваемых лиц (E; 2 дня), рассылку им анкет (F; 1 день) и анализ полученных данных (G; 5 дней).

Решение. Из условия задачи нам известно содержание работ, но явно не указаны взаимосвязи между работами. Поэтому для их установления необходимо проанализировать смысл каждой конкретной работы и выяснить, какие из остальных работ должны ей непосредственно предшествовать. Исходной работой, начинающей сетевой график, в данном случае является «прием на работу» (C), поскольку все остальные работы должны выполняться уже принятыми на работу сотрудниками. Перед выполнением всех работ по опросу общественного мнения сотрудников необходимо обучить персонал (D). Перед тем как разослать анкеты (F), их надо разработать (A), распечатать (B) и выбрать опрашиваемых лиц (E), причем работу с анкетами и выбор лиц можно выполнять одновременно. Завершающей работой проекта является анализ полученных данных (G), который нельзя выполнить без предварительной рассылки анкет (F). В результате этих рассуждений сетевая модель имеет следующий вид (см. рис. 2.9).

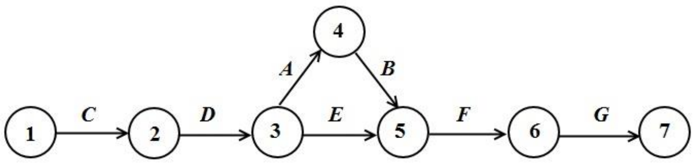


Рисунок 2.9. – Сетевая модель программы опроса общественного мнения

Пример 2.2. Необходимо построить сетевую модель, включающую работы A, B, C, ..., L, которая отображает следующее упорядочение работ:

1) A, B и C – исходные операции проекта;
2) A и B предшествуют D;
3) B предшествует E, F и H;
4) F и C предшествует G;
5) E и H предшествуют I и J;
6) C, D, F и J предшествуют K;
7) K предшествует L.

Решение. В пункте 1 явно указано, что A, B и C являются исходными работами, поэтому изобразим их тремя стрелками, выходящими из исходного события 1. В пункте 2 условие означает, что стрелки работ A и B должны окончиться в одном событии, из которого выйдет стрелка работы D. Но поскольку стрелки работ A и B также и начинаются в одном событии, то имеет место параллельность работ, которая недопустима правилами построения сетевых моделей (см. рис. 2.10).

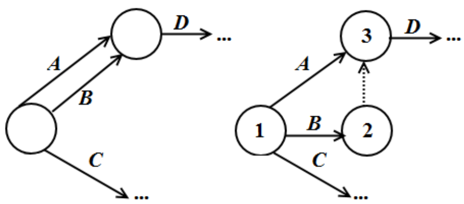


Рисунок 2.10. –Устранение параллельности работ A и B

Для ее устранения введем дополнительное событие 2, в которое войдет работа *B*, после чего соединим события 2 и 3, в которые входят работы *A* и *B* пунктирной стрелкой фиктивной работы. В данном случае фиктивная работа (2,3) не соответствует никакой реальной работе, а лишь отображает логическую связь между работами *B* и *D*. Дальнейшее построение рассмотрим с помощью рис. 2.11

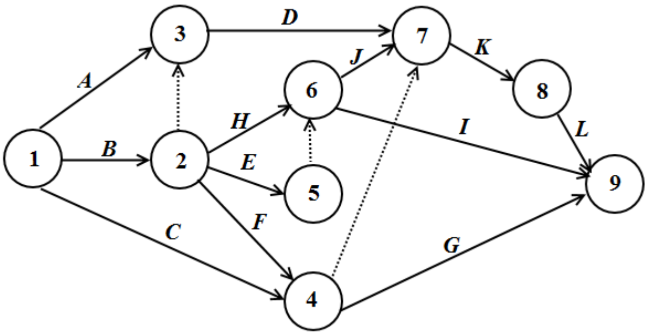


Рисунок 2.11. – Сетевая модель задачи

Согласно пункту 3 условия задачи из события 2 выходят три стрелки работ *E*, *F* и *H*. Согласно пункту 4 условия задачи стрелки работ *C* и *F* должны войти в общее событие, из которого выйдет стрелка работы *G*. Проблема с параллельностью работ *E* и *H* (пункт 5 условия задачи решается путем введения дополнительного события 5 и фиктивной работы (5,6)). Для отображения в сетевой модели пункта 6 условия задачи введем стрелки работ *D* и *J* в событие 7, а связь работ *F* и *C* с работой *K* отобразим с помощью фиктивной работы (4,7). Стрелки работ *F* и *C* нельзя было напрямую вводить в событие 7, потому что после них должна следовать работа *G*, которая с работами *D* и *J* никак не связана. Стрелка работы *L* выходит из события 8, т.е. после окончания работы *K* в соответствии с пунктом 7 условия задачи.

Поскольку в условии не указано, что работы *L, I* и *G* предшествуют каким-либо другим работам, то эти работы являются завершающими и их стрелки войдут в завершающее событие 9. Нумерацию событий проводят после построения сетевого графика, следя за тем, чтобы номер начального события каждой работы был меньше номера ее конечного события.

Пример 2.3. Промышленная фирма заключила контракт о производстве партии станков, предназначенных к использованию крупным предприятием обувной промышленности для массового производства обуви. Ниже перечислены операции, которые необходимо выполнить в процессе разработки и производства этих станков (табл. 2.1). Постройте сетевую модель.

Таблица 2.1. – Список операций

	Операции	**Непосредственно предшествующая операция**
A	Составление сметы затрат	–
B	Согласованные оценки	*A*
C	Покупка собственного оборудования	*B*
D	Подготовка конструкторских проектов	*B*
E	Строительство основного цеха	*D*
F	Монтаж оборудования	*C,E*
G	Испытания оборудования	*F*
H	Определение типа модели	*D*
I	Проектирование внешнего корпуса	*D*
J	Создание внешнего корпуса	*H,I*
K	Конечная сборка	*G,J*
L	Контрольная проверка	*K*

Решение. Сетевая модель должна начинаться с единственного начального события, которое показано на рис. 2.12 кружочком, и заканчиваться единственным конечным событием. Построение модели мы начали с первого события. С этого события начинаются все операции, которым не предшествуют никакие виды работ. Начинать построение полезно с примерного эскиза будущей модели:

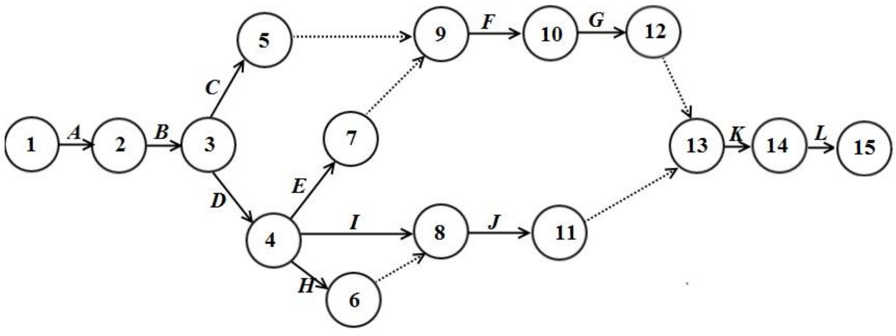


Рисунок 2.12. – Примерный эскиз сетевой модели

В соответствии с приведенной выше таблицей необходимо тщательно, переходя от одной операции к другой, проверить построенную в первом приближении модель. В случае необходимости следует провести его корректировку, а затем для совершенствования схемы построить новый. В данном случае можно исключить все фиктивные логические операции и оставить одну фиктивную операцию идентификации (см. рис. 2.13).

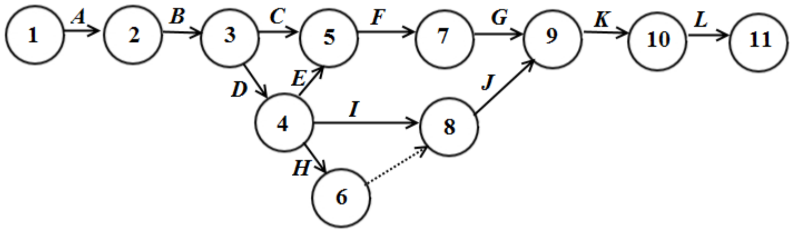


Рисунок 2.13. – Сетевая модель задачи

Пример 2.4. Промышленная фирма является участником другого проекта, детали которого приведены ниже. Постройте сетевую модель.

Таблица 2.2. – Список операций

Операции	Непосредственно предшествующая операция
A	–
B	–
C	–
D	*A*,*B*
E	*B*,*C*
F	*C*
G	*D*,*E*
H	*F*,*G*

Решение. Построение начинаем с начального события, обозначенного кружком 1. Из таблицы следует, что существуют три операции – *A*, *B* и *C*, которым не предшествует ни одна из операций. Поэтому из начального события выходят три стрелки. На первый взгляд таблица операций выглядит чрезвычайно простой, однако отразить присущую ей логику с помощью сетевой модели достаточно трудно, вследствие чего мы вынуждены использовать три фиктивные логические операции (см. рис. 2.14).

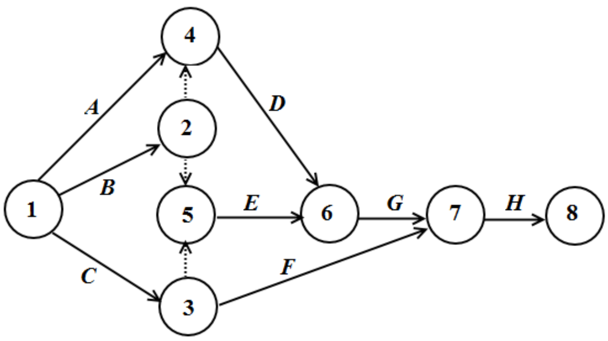


Рисунок 2.14. – Сетевая модель задачи

2.3. Упорядочение сетевого графика

Предположим, что при составлении некоторого проекта выделено 12 событий: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2 8, 9, 10, 11 и 24 связывающие их работы: (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 6), (3, 7), (3, 10), (4, 8), (5, 7), (5, 8), (6, 10), (7, 6), (7, 8), (7, 9), (7, 10), (8, 9), (9, 11), (10, 9), (10, 11). Необходимо составить и упорядочить сетевой график.

Как следует из перечня работ, исходным событием сетевого графика является событие 0 (ему не предшествуют никакие работы), а завершающим – событие 11 (за ним не следует ни одна работа). Полагая на сетевых графиках изменение времени слева направо, поместим событие 0 в левую часть графика, а событие 1 – в правую часть, разместив между ними промежуточные события в некотором порядке, соответствующем их номерам (рис. 2.15). События свяжем работами-стрелками в соответствии с перечнем работ.

Построенный сетевой график удовлетворяет сформулированным в разд. 2.2 правилам, предъявляемым к его построению.

Однако данный график не является упорядоченным.

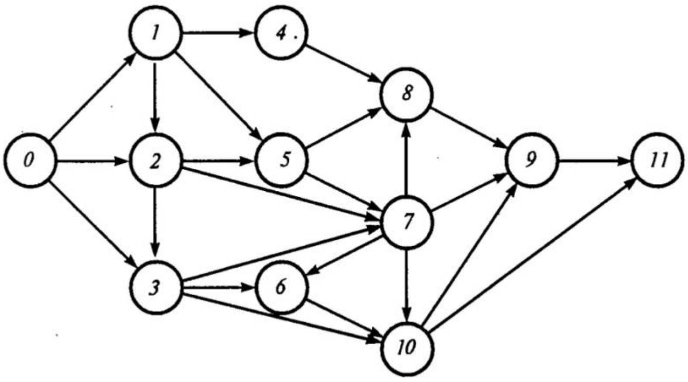


Рисунок 2.15. – Сетевой график

Упорядочение сетевого трафика *заключается в таком расположении событий и работ, при котором для любой работы предшествующее ей событие расположено левее и имеет меньший номер по сравнению с завершающим эту работу событием.* Другими словами, в упорядоченном сетевом графике все работы-стрелки направлены слева направо: от событий с меньшими номерами к событиям с большими номерами.

Разобьем условно сетевой график на несколько вертикальных слоев (обводим их пунктирными линиями и обозначаем римскими цифрами) (см. рис. 2.16).

Поместив в 1 слое начальное событие 0, мысленно вычеркнем из графика (см. рис. 2.15) это событие и все выходящие из него работы-стрелки (см. рис. 2.17.1).

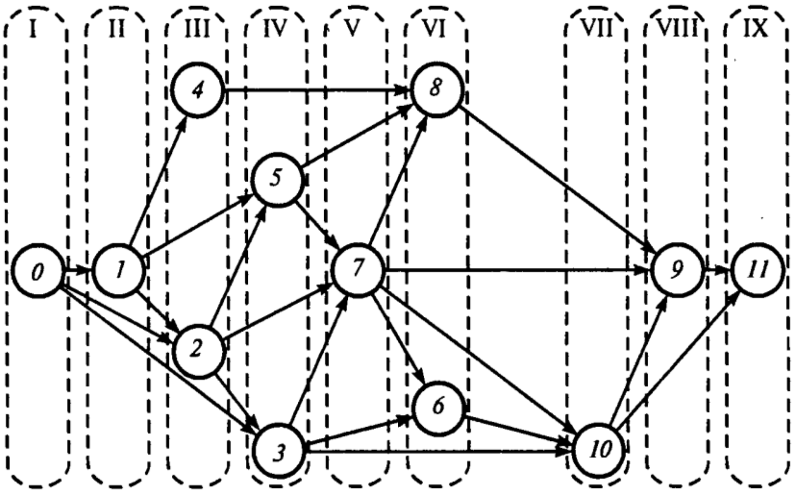


Рисунок 2.16

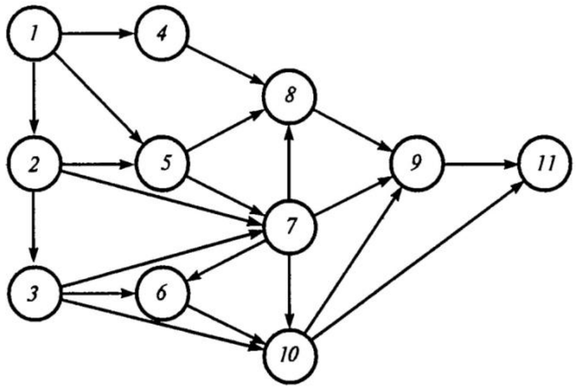


Рисунок 2.17.1

Тогда без входящих стрелок останется событие 1, образующее II слой. Вычеркнув мысленно событие 1 и все выходящие из него работы, увидим, что без входящих стрелок остаются события 4 и 2, которые образуют III слой (см. рис. 2.17.2).

Продолжая указанную процедуру вычеркивания, получим IV слой с событиями 5 и 3 (рис.2.17.3), V слой – с событием 7 (рис. 2.17.4), VI слой – с событиями 8 и 6 (рис. 2.17.5), VII слой – с событием 10 (рис. 2.17.6), VIII слой – с событием 9 (рис. 2.17.7) и, наконец, IX слой – с событием 11 (рис. 2.17.8).

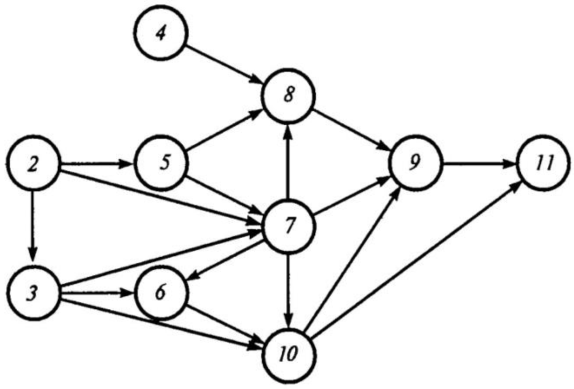


Рисунок 2.17.2

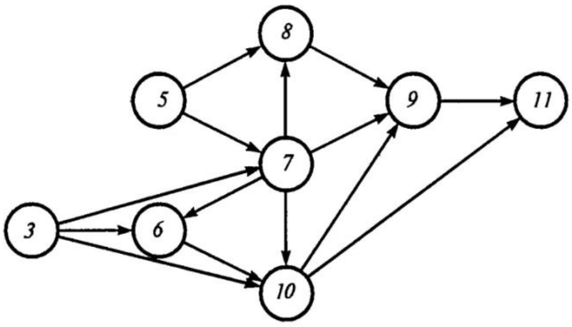


Рисунок 2.17.3

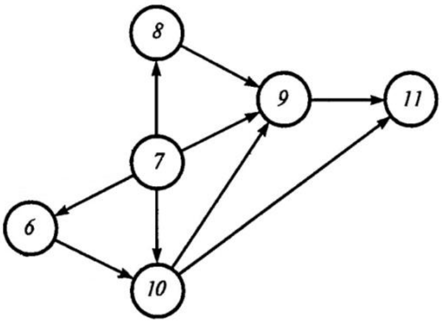


Рисунок 2.17.4

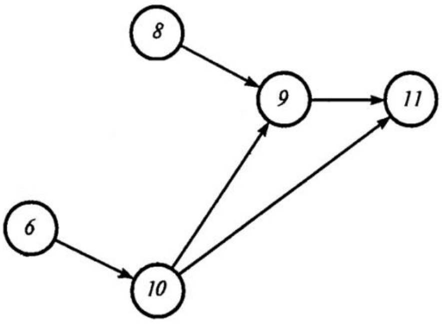
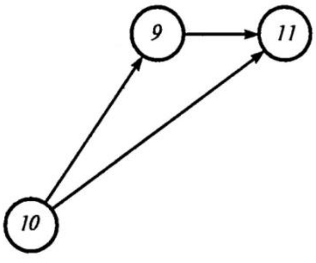


Рисунок 2.17.5



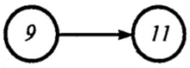


Рисунок 2.17.6 Рисунок 2.17.7 Рисунок 2.17.8

Теперь видим, что первоначальная нумерация событий не совсем правильная: так, событие 6 лежит в VI слое и имеет номер, меньший, чем событие 7 из предыдущего слоя. То же можно сказать о событиях 9 и 10.

Изменим нумерацию событий в соответствии с их расположением на графике (см. рис. 2.15) и получим упорядоченный сетевой график (см. рис. 2.18), в котором над стрелками указана продолжительность соответствующих работ (в сутках).

Порядок нумерации событий, расположенных в одном вертикальном слое, принципиального значения не имеет, так что нумерация одного и того же сетевого графика может быть неоднозначной.

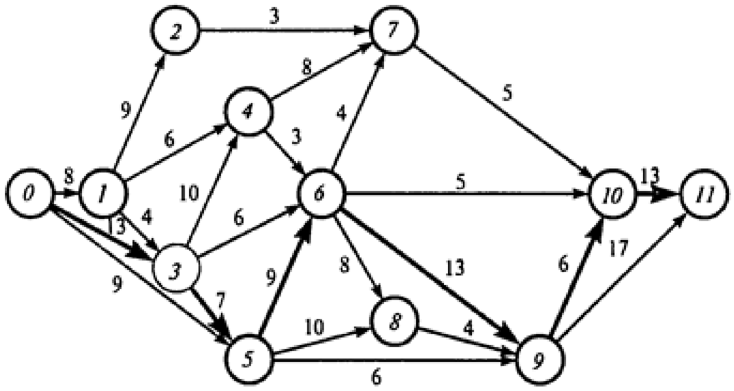


Рисунок 2.18. – Упорядоченный сетевой график

2.4.Понятие пути сетевого графика

Одно из важнейших понятий сетевого графика – понятие пути.

Путь – любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы. Среди различных путей сетевого графика наибольший интерес представляет **полный путь *L*** – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется **критическим**. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Например, для рассматриваемого нами сетевого графика (см. рис. 2.18) полными путями будут:

путь 0→1→2→7→10→11 продолжительностью 8+9+3+5+13=38 суток,

путь 0→1→3→4→6→10→11 продолжительностью 8+4+10+3+5+13=43 суток,

путь 0→5→8→9→11 продолжительностью 9+10+4+17=40 суток,

путь 0→3→5→6→9→10→11 продолжительностью 13+7+9+13+6+13=61 сутки и т.д.

Можно убедиться в том, что последний путь имеет наибольшую продолжительность (не только среди приведенных четырех полных путей, но и среди, всех полных путей, которых в данном случае насчитывается 64), поэтому он и является критическим.

Продолжительность критического пути составляет 61 сутки, т.е. для проведения комплекса работ понадобятся 61 сутки. Быстрее комплекс выполнить нельзя, так как для достижения завершающего события критический путь надо пройти обязательно.

Действительно, для достижения события 11 надо выполнить работу (10, 11), т.е. достичь события 10; для достижения события 10 надо провести работу

(9, 10), т.е. достичь события 9; для достижения события 9 надо провести работу (6, 9), т.е. достичь события 6, и т.д.

Определив критический путь, мы тем самым установили критические события сети 0, 3, 5, 6, 9, 10, 11 и критические работы (0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11).

Критический путь имеет особое значение в системе СПУ, т. к. работы этого пути определяют общий цикл завершения всего комплекса работ, планируемых при помощи сетевого графика. И для сокращения продолжительности проекта необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

Следует отметить, что классический вид сетевого графика – это сеть, вычерченная без масштаба времени. Поэтому сетевой график, хотя и дает четкое представление о порядке следования работ, но недостаточно нагляден для определения тех работ, которые должны выполняться в каждый данный момент времени. В связи с этим небольшой проект после упорядочения сетевого графика рекомендуется дополнить **линейной диаграммой проекта** (**диаграмма Ганта**).

Такая линейная диаграмма для рассматриваемой сети показана на рис. 19.

При построении линейной диаграммы каждая работа изображается параллельным оси времени отрезком, длина которого равна продолжительности этой работы. При наличии фиктивной работы нулевой продолжительности (в рассматриваемой сети ее нет) она изображается точкой. События i и j, начало и конец работы (i, j) помещают соответственно в начале и конце отрезка. Отрезки располагают один над другим, снизу вверх в порядке возрастания индекса i, а при одном и том же i – в порядке возрастания индекса j, (на рис. 2.19 вследствие ограниченности места не показаны работы-отрезки, выходящие из 2–, 3–, 4– и 5-го событий).

По линейной диаграмме проекта можно определить критическое время, критический путь, а также резервы времени всех работ.

Так, критическое время комплекса работ равно координате на оси времени самого правого конца всех отрезков диаграммы: $t_{кр} = t(11) = 61$ (сутки).

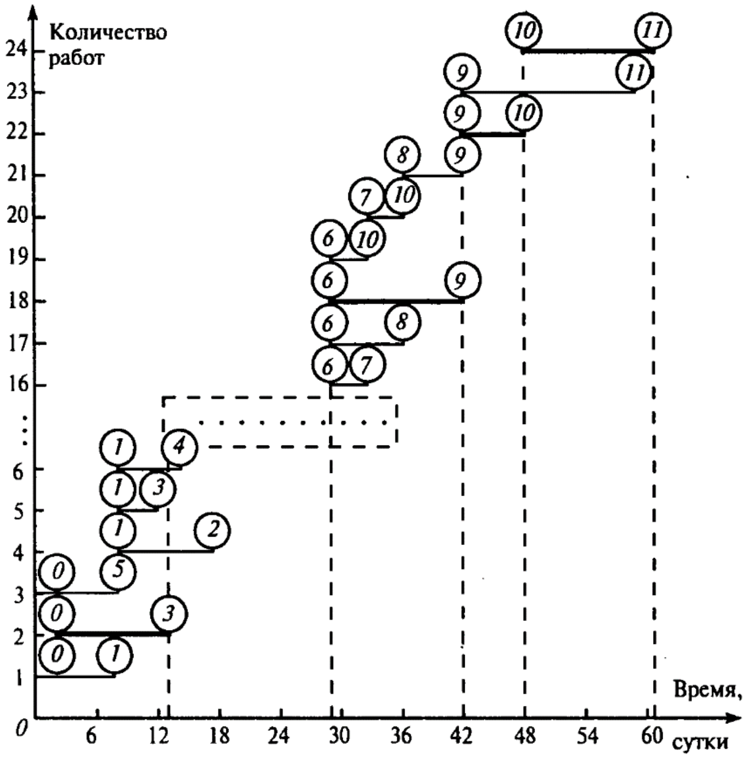


Рисунок 2.19. – Диаграмма Ганта

Для определения критического пути рассматриваем работы-отрезки, конечные события которых совпадают с завершающим событием сети (в нашем примере (9, 11) и (10, 11). Выбираем отрезок (10, 11), поскольку он имеет более поздний срок завершения. Затем находим отрезок (9, 10), правый конец которого лежит на одной вертикали с левым концом одного из рассматриваемых ранее отрезков (10, 11). Аналогично определяем и другие работы-отрезки критического пути: (6, 9), (5,6), (3,5), (0, 3) (на рис. 2.18 все они выделены жирным шрифтом).

2.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите нарушения правил построения сетевых графиков в сетевой модели на рис.2.20.

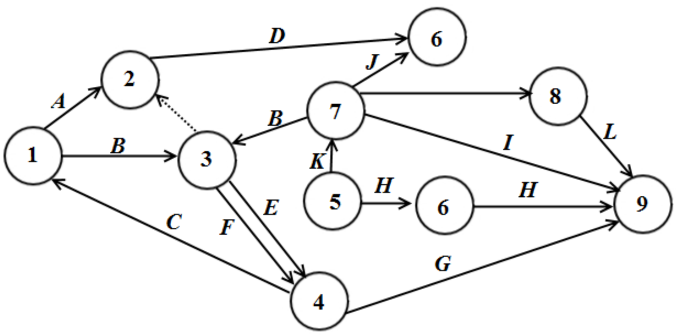


Рисунок 2.20. – Сетевая модель

2. Используя данные о непосредственно предшествующих работах (см. табл. 2.3), перечислите работы, которые неверно отображены на сетевом графике (рис. 2.21), устраните найденные ошибки.

Таблица 2.3.

Название	**Непосредственно предшествующие работы**	**Длительность, ед. времени**
A	–	8
B	*D*	5
C	*B, F, G*	4
D	–	7
E	*B, F, G*	7
F	*A, N*	3
G	–	4
H	*C, L*	6
I	*B, G*	1
J	*I,M*	11
K	*H,I,M*	5
L	*I,M*	3
M	*D*	2
N	–	5

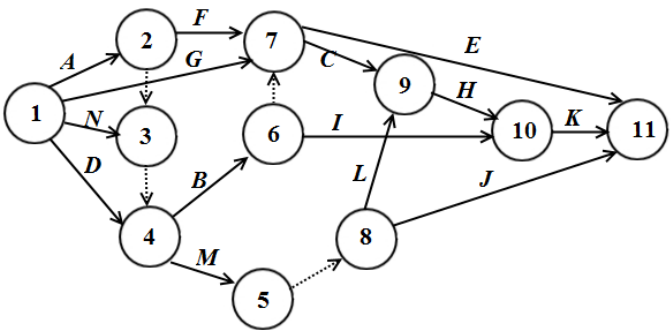


Рисунок 2.21. – Сетевая модель

3. Постройте сетевую модель организации выступления хора при свечах (см. табл. 2.4).

Таблица 2.4.

Содержание работы	**Длительность, ед. времени**
A – выбор музыкального произведения	22
B – разучивание музыки	15
C – размножение нотных партий	15

D – репетиции хора	71
E – получение канделябров в прокат	15
F – закупка свечей	2
G – установка канделябров со свечами	2
H – закупка декораций	2
I – установка декораций	2
J – заказ костюмов для хора	8
K – отглаживание костюмов	8
L – проверка системы усиления звука	8
M– настройка системы усиления звука	2
N – генеральная репетиция хора	2
O – банкет	2
P – проведение концерта	2

4. Постройте сетевую модель проекта пусконаладки компьютерной системы, используя упорядочение работ из таблицы 2.5. Постройте линейную диаграмму Ганта и по ней определите критическое время.

Таблица 2.5.

Работа	**Непосредственно предшествующая работа**	**Время выполнения**
A	-	4
B	-	7
C	*A*	3
D	*B*, *C*	4
E	*D*	3
F	*E*	2
G	*B*, *C*	10
H	*F*, *G*	4

5. Постройте сетевую модель разработки и производства станков, используя упорядочение работ из таблицы 2.6. Постройте линейную диаграмму Ганта и по ней определите критическое время.

Таблица 2.6.

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время, ед. времени
A – составление сметы затрат	–	4
B – согласование оценок	*A*	7
C – покупка собственного оборудования	*B*	2
D – подготовка конструкторских проектов	*B*	3
E – строительство основного цеха	*D*	2
F – монтаж оборудования	*C*,*E*	6
G – испытание оборудования	*F*	3
H – определение типа модели	*D*	10
I – проектирование внешнего корпуса	*D*	8
J – создание внешнего корпуса	*H*,*I*	5
K – конечная сборка	*G*,*J*	4
L – контрольная проверка	*K*	8

ТЕМА 3: РАСЧЕТ И АНАЛИЗ СЕТЕВЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Временные параметры сетевых графиков

В табл. 3.1 приведены основные временные параметры сетевых графиков.

Таблица 3.1. – Основные параметры сетевых графиков

Элемент сети, характеризуемый параметром	**Наименование параметра**	**Условное обозначение параметра**
Событие i	Ранний срок свершения события	$t_р(i)$
	Поздний срок свершения события	$t_п(i)$
	Резерв времени события	$R(i)$
Работа (i, j)	Продолжительность работы	$t(i, j)$
	Ранний срок начала работы	$t_{рн}(i, j)$
	Ранний срок окончания работы	$t_{ро}(i, j)$
	Поздний срок начала работы	$t_{пн}(i, j)$
	Поздний срок окончания работы	$t_{по}(i, j)$
	Полный резерв времени работы	$R_п(i, j)$
	Частый резерв времени работы первого вида	$R_1(i, j)$
	Частный резерв времени работы второго вида или свободный резерв времени работы	$R_с(i, j)$
	Независимый резерв времени работы	$R_н(i, j)$
Путь L	Продолжительность пути	$t(L)$
	Продолжительность критического пути	$t_{кр}$
	Резерв времени пути	$R(L)$

Рассмотрим содержание и расчет указанных параметров.

Начнем с **параметров событий.**

Как уже отмечалось, событие не может наступить прежде, чем свершатся все предшествующие работы.

Поэтому **ранний (или ожидаемый) срок** $t_p(i)$ свершения i –го события определяется продолжительностью максимального пути, предшествующего этому событию:

$$t_p(i) = \max_{L_{ni}} t(L_{ni}), \tag{3.1}$$

где L_{ni} – любой путь, предшествующий i-му событию, т.е. путь от исходного до i -го события сети.

Если событие j имеет несколько предшествующих путей, следовательно, несколько предшествующих событий i, то ранний срок свершения события j удобно находить по формуле

$$t_p(j) = \max_{i,j}\left[t_p(i) + t(i,j)\right]. \tag{3.2}$$

Задержка свершения события i по отношению к своему раннему сроку не отразится на сроке свершения завершающего события (а значит, и на сроке выполнения комплекса работ) до тех пор, пока сумма срока свершения этого события и продолжительности (длины) максимального из последующих за ним путей не превысит длины критического пути.

Поэтому **поздний (или предельный) срок** $t_n(i)$ свершения i-го события равен

$$t_n(i) = t_{kp} - \max_{L_{ci}} t(L_{ci}), \tag{3.3}$$

L_{ci} – любой путь, следующий за i-м событием, т.е. путь от i-го до завершающего события сети.

Если событие i имеет несколько последующий путей, следовательно, несколько последующих событий j, то поздний срок свершения события i удобно находить по формуле

$$t_n(i) = \min_{i,j}\left[t_n(j) - t(i,j)\right]. \tag{3.4}$$

Резерв времени $R(i)$ i-го события определяется как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i). \tag{3.5}$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ.

Критические события не имеют резервов времени, т. к. любая задержка в свершении события, лежащего на критическом пути, вызовет такую же задержку в свершении завершающего события.

Из этого следует, что для того чтобы определить длину и топологию критического пути, вовсе не обязательно перебирать все полные пути сетевого графика и определять их длины. Определив ранний срок наступления завершающего события сети, мы тем самым определяем длину критического пути, а выявив события с нулевыми резервами времени, определяем его топологию.

Если сетевой график имеет единственный критический путь, то этот путь проходит через все критические события, т.е. события с нулевыми резервами времени. Если критических путей несколько, то выявление их с помощью критических событий может быть затруднено, т. к. через часть критических событий могут проходить как критические, так и некритические пути. В этом случае для определения критических путей рекомендуется использовать критические работы.

Пример 3.1. Определите временные параметры событий и критический путь для сетевого графика, изображенного на рисунке 3.1.

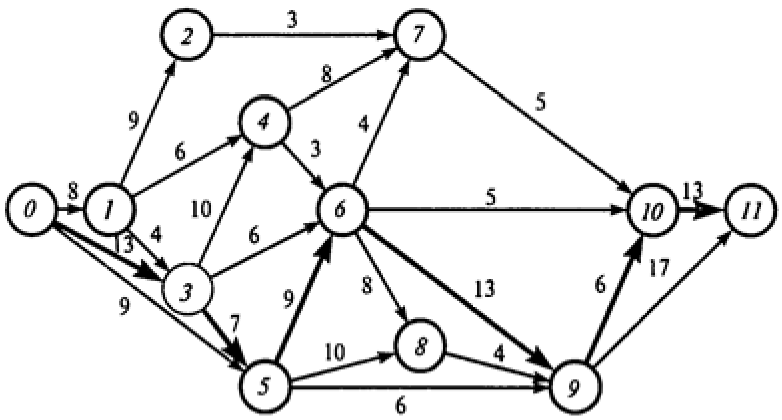


Рисунок 3.1. – Сетевой график

Решение. Найденные параметры сведем в табл. 3.2.

При определении **ранних сроков** свершения событий $t_p(i)$ двигаемся по сетевому графику слева направо и используем формулы (3.1) и (3.2).

Для i=0 (нулевого события), очевидно, что $t_p(0)=0$.

Для i=1 $t_p(1)=t_p(0)+t(0,1)=0+8=8$ (суток), т. к. для события 1 существует только один предшествующий путь L_{n1}: 0→1.

Для i=2 $t_p(2)=t_p(1)+t(1,2)=8+9=17$ (суток), т. к. для события 2 существует только один предшествующий путь L_{n2}: 0→1→2.

Для i=3

$t_p(3)=\max\left[t_p(0)+t(0,3);t_p(1)+t(1,3)\right]=\max[0+13;8+4]=\max[13;12]=13$ (суток), т. к. для события 3 существуют два предшествующих пути L_{n3}: 0→1→3 и 0→3 и два предшествующих события 0 и 1.

Аналогично:

$$t_p(4)=\max\left[t_p(1)+t(1,4);t_p(3)+t(3,4)\right]=$$
$$=\max[8+6;13+10]=\max[14;23]=23 \text{ (сут.)};$$
$$t_p(5)=\max\left[t_p(3)+t(3,5);t_p(0)+t(0,5)\right]=$$
$$=\max[13+7;0+9]=\max[20;9]=20 \text{ (сут.)};$$
$$t_p(6)=\max\left[t_p(4)+t(4,6);t_p(3)+t(3,6);t_p(5)+t(5,6)\right]=$$
$$=\max[23+3;13+6;20+9]=\max[26;19;29]=29 \text{ (сут.)}$$

и т.д.

Длина критического пути равна раннему сроку свершения завершающего события 11 (см. табл. 3.2): $t_{кр} = t_p(11) = 61$ (сут.).

При определении **поздних сроков** свершения событий $t_n(i)$ двигаемся по сети в обратном направлении, т.е. справа налево, и используем формулы (3.3) и (3.4).

Для *i*=11 (завершающего события) поздний срок свершения события должен равняться его раннему сроку (иначе изменится длина критического пути): $t_n(11) = t_p(11) = 61$ (сут.).

Для *i*=10 $t_n(10) = t_n(11) - t(10,11) = 61 - 13 = 48$ (сут.), т. к. для события 10 существует только один последующий путь L_{c10}: 10→11.

Для *i*=9

$$t_n(9) = \min\left[t_n(10) - t(9,10); t_n(11) - t(9,11)\right] =$$
$$= \min\left[48 - 6; 61 - 17\right] = \min\left[42; 44\right] = 42 \text{ (сут.)},$$

т. к. для события 9 существуют два последующих пути L_{c9}: 9→10→11 и 9→11 и два последующих события 10 и 11.

Аналогично:

$t_n(8) = t_n(9) - t(8,9) = 42 - 4 = 38$ (сут.);

$t_n(7) = t_n(10) - t(7,10) = 48 - 5 = 43$ (сут.);

$$t_n(6) = \min\left[t_n(7) - t(6,7); t_n(8) - t(6,8); t_n(9) - t(6,9); t_n(10) - t(6,10)\right] =$$
$$= \min\left[48 - 4; 38 - 8; 42 - 13; 48 - 5\right] = \min\left[39; 30; 29; 43\right] = 29 \text{ (сут.)}$$
и т.д.

По формуле (3.5) определяем **резервы времени *i*-го события**:

$R(0) = 0$;

$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 9 - 8 = 1$;

$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 40 - 17 = 23$,

$R(3) = t_n(3) - t_p(3) = 13 - 13 = 0$, и т.д.

Резерв времени, например, события 2 – $R(2) = 23$ – означает, что время свершения события 2 может быть задержано на 23 суток без увеличения общего срока выполнения проекта. Анализируя табл. 3.2, видим, что не имеют резервов времени события 0, 3, 5, 6, 9, 10, 11. Эти события и образуют критический путь (на рис. 3.1 он выделен жирным шрифтом).

Таблица 3.2. – Результаты расчетов

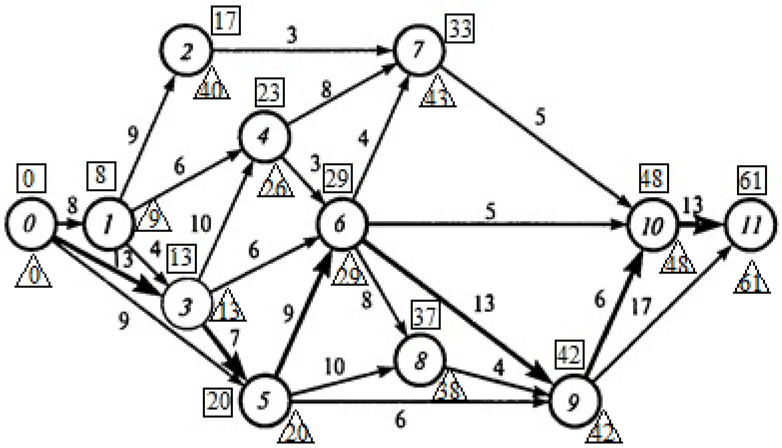
Номер события	**Сроки свершения события, сутки**		**Резерв времени $R(i)$, сутки**
	Ранний $t_p(i)$	**Поздний $t_n(i)$**	
0	0	0	0
1	8	9	1
2	17	40	23
3	13	13	0
4	23	26	3
5	20	20	0
6	29	29	0

7	33	43	10
8	37	38	1
9	42	42	0
10	48	48	0
11	61	61	0

Для наглядности полученные сроки свершения событий отметем на сетевом графике (см. рис. 3.2).

Перейдем к рассмотрению **параметров работ**.

Отдельная работа может начаться (и окончиться) в ранние, поздние или другие промежуточные сроки. В дальнейшем при оптимизации графика, возможно, любое размещение работы в заданном интервале.



□ - ранний срок свершения события,

△ - поздний срок свершения события.

Рисунок 3.2. – Сетевой график

Очевидно, что **ранний срок** $t_{рн}(i,j)$ **начала работы** (i,j) совпадает с ранним сроком наступления начального (предшествующего) события i, т.е.

$$t_{рн}(i,j)=t_р(i). \tag{3.6}$$

Тогда **ранний срок** $t_{ро}(i,j)$ **окончания работы** (i,j) определяется по формуле

$$t_{ро}(i,j)=t_р(i)+t(i,j). \tag{3.7}$$

Ни одна работа не может окончиться позже допустимого позднего срока своего конечного события i.

Поэтому **поздний срок** $t_{по}(i,j)$ **окончания работы** (i,j) определяется следующим соотношением

$$t_{по}(i,j)=t_п(j), \tag{3.8}$$

а **поздний срок** $t_{пн}(i,j)$ **начала этой работы** – соотношением

$$t_{пн}(i,j)=t_п(j)-t(i,j). \tag{3.9}$$

Т.о., в рамках сетевой модели моменты начала и окончания работы тесно связаны с соседними событиями ограничениями (3.6)—(3.9).

Прежде чем рассматривать резервы времени работ, обратимся к резерву времени пути. Такие резервы имеют все некритические пути. **Резерв времени пути** $R(L)$ определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути

$$R(L) = t_{кр} - t(L). \tag{3.10}$$

Он показывает, насколько в сумме могут быть увеличены продолжительности всех работ, принадлежащих этому пути. Если затянуть выполнение работ, лежащих на этом пути, на время большее чем $R(L)$, то критический путь переместится на путь L.

Отсюда можно сделать вывод, что любая из работ пути L на его участке, не совпадающем с критическим путем (замкнутым между двумя событиями критического пути), обладает резервом времени.

Среди резервов времени работ выделяют четыре разновидности.

Полный резерв времени $R_n\ (i,j)$ работы (i,j) показывает, насколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения комплекса работ не изменится. Полный резерв $R_n\ (i, j)$ определяется по формуле

$$R_n(i,j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i,j). \tag{3.11}$$

Полный резерв времени работы равен резерву максимального из путей, проходящего через данную работу. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы, если ее начальное событие свершится в самый ранний срок, и можно допустить свершение конечного события в его самый поздний срок.

Важным свойством полного резерва времени работы является то, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, проходящим через нее.

Остальные резервы времени работы являются частями ее полного резерва.

Частный резерв времени первого вида $R_1(i,j)$ работы (i,j) есть часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом позднего срока ее начального события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые поздние сроки. $R_1(i,j)$ находится по формулам

$$R_1(i,j) = t_n(j) - t_n(i) - t(i,j), \tag{3.12}$$

$$R_1(i,j) = R_n(i,j) - R(i). \tag{3.13}$$

Частный резерв времени второго вида, или **свободный резерв времени** $R_c(i,j)$ работы (i,j) представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершатся в свои самые ранние сроки. $R_c(i,j)$ находится по формулам

$$R_c(i,j)=t_p(j)-t_p(i)-t(i,j), \tag{3.14}$$

$$R_c(i,j)=R_n(i,j)-R(j). \tag{3.15}$$

Свободным резервом времени можно пользоваться для предотвращения случайностей, которые могут возникнуть в ходе выполнения работ. Если планировать выполнение работ по ранним срокам их начала и окончания, то всегда будет возможность при необходимости перейти на поздние сроки начала и окончания работ.

Независимый резерв времени $R_н(i,j)$ работы (i,j) – часть полного резерва времени, получаемая для случая, когда все предшествующие работы заканчиваются в поздние сроки, а все последующие работы начинаются в ранние сроки

$$R_н(i,j)=t_p(j)-t_n(i)-t(i,j) \tag{3.16}$$

или

$$R_н(i,j)=R_n(i,j)-R(i)-R(j). \tag{3.17}$$

Использование независимого резерва времени не влияет на величину резервов времени других работ. Независимые резервы стремятся использовать тогда, когда окончание предыдущей работы произошло в поздний допустимый срок, а последующие работы хотят выполнить в ранние сроки. Если величина независимого резерва, определяемая по формуле (3.16) или (3.17), равна нулю или положительна, то такая возможность есть. Если же величина $R_н(i,j)$ отрицательна, то этой возможности нет, так как предыдущая работа еще не оканчивается, а последующая уже должна начаться. Поэтому отрицательное значение $R_н(i,j)$ не имеет реального смысла. А фактически независимый резерв имеют лишь те работы, которые не лежат на максимальных путях, проходящих через их начальные и конечные события.

Т. о., если частный резерв времени первого вида может быть использован на увеличение продолжительности данной и последующих работ без затрат резерва времени предшествующих работ, а свободный резерв времени – на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ, то независимый резерв времени может быть использован для увеличения продолжительности только данной работы.

Работы, лежащие на критическом пути, так же как и критические события, резервов времени не имеют. С помощью критических работ, т.е. работ, не имеющих резервов времени, может быть определен критический путь сетевого графика. Этот способ определения критического пути целесообразно использовать тогда, когда сеть содержит несколько критических путей.

Если на критическом пути лежит начальное событие i, то

$$R_n(i,j)=R_1(i,j). \tag{3.18}$$

Если на критическом пути лежит конечное событие j, то

$$R_n(i,j)=R_c(i,j). \tag{3.19}$$

Если на критическом пути лежат начальное и конечное события i и j, но сама работа не принадлежит этому пути, то

$$R_п(i,j) = R_1(i,j) = R_с(i,j) = R_н(i,j). \qquad (3.20)$$

Соотношения (3.18)–(3.20) можно использовать при проверке правильности расчетов резервов времени отдельных работ.

Пример 3.2.Вычислите временные параметры работ для сетевого графика, изображенного на рис. 3.2.

Решение. Результаты расчетов сведем в табл. 3.3.

Вычисление временных параметров работы (i,j) покажем на примере работы (1, 4):

ранний срок начала работы (по формуле (3.6)): $t_{рн}(1,4) = t_р(1) = 8$ (суток);

ранний срок окончания работы (по формуле (3.7)): $t_{ро}(1,4) = t_р(1) + t(1,4) = 8 + 6 = 14$(суток);

поздний срок начала работы (по формуле (3.9)): $t_{пн}(1,4) = t_п(4) - t(1,4) = 26 - 6 = 20$(суток);

поздний срок окончания работы (по формуле (3.8)): $t_{по}(1,4) = t_п(4) = 26$ (суток).

Таким образом, работа (1, 4) должна начаться в интервале [8; 20] (суток) и окончиться в интервале [14; 26] (суток) от начала выполнения проекта.

Полный резерв работы (1,4) (по формуле (3.11)): $R_п(1,4) = t_п(4) - t_р(1) - t(1,4) = 26 - 8 - 6 = 12$ (суток), т.е. срок выполнения данной работы можно увеличить на 12 суток, при этом срок выполнения комплекса работ не изменится.

Таблица 3.3. – Результаты расчетов

№	**Работа** (i,j)	**Продолжительность работы** $t(i,j)$	**Сроки начала и окончания работы**				**Резервы времени работы**			
			$t_{рн}(i,j)$	$t_{ро}(i,j)$	$t_{пн}(i,j)$	$t_{по}(i,j)$	$R_п(i,j)$	$R_1(i,j)$	$R_с(i,j)$	$R_н(i,j)$
1	(0,1)	8	0	8	1	9	1	1	0	0
2	(0,3)	13	0	13	0	13	0	0	0	0
3	(0,5)	9	0	9	11	20	11	11	11	11
4	(1,2)	9	8	17	31	40	23	22	0	–
5	(1,4)	6	8	14	20	26	12	11	9	8
6	(1,3)	4	8	12	9	13	1	0	1	0
7	(2,7)	3	17	20	40	43	23	0	13	–
8	(3,4)	10	13	23	16	26	3	3	0	0
9	(3,5)	7	13	20	13	20	0	0	0	0
10	(3,6)	6	13	19	23	29	10	10	10	10
11	(4,7)	8	23	31	35	43	12	9	2	–
12	(4,6)	3	23	26	26	29	3	0	3	0

13	(5,6)	9	20	29	20	29	0	0	0	0
14	(5,8)	10	20	30	28	38	8	8	7	7
15	(5,9)	6	20	26	36	42	16	16	16	16
16	(6,7)	4	29	33	39	43	10	10	0	0
17	(6,10)	5	29	34	43	48	14	14	14	14
18	(6,9)	13	29	42	29	42	0	0	0	0
19	(6,8)	8	29	37	30	38	1	1	0	0
20	(7,10)	5	33	38	43	48	10	0	10	0
21	(8,9)	4	37	41	38	42	1	0	1	0
22	(9,10)	6	42	48	42	48	0	0	0	0
23	(9,11)	17	42	59	44	61	2	2	2	2
24	(10,11)	13	48	61	48	61	0	0	0	0

Покажем на примере работы (1,4), что полный резерв времени работы равен продолжительности максимального из путей, который проходит через данную работу.

Через работу (1,4) проходят семь полных путей:

	Путь	**Продолжитель-ность, сутки**
L_1	0→1→4→6→7→10→11	39
L_2	0→1→4→6→8→9→10→11	48
L_3	0→1→4→6→8→9→11	46
L_4	0→1→4→6→9→10→11	49
L_5	0→1→4→6→9→11	47
L_6	0→1→4→6→10→11	35
L_7	0→1→4→7→10→11	40

Отсюда максимальным из путей, проходящих через работу (1,4), является путь L_4 продолжительностью 49 (суток), резерв времени которого (по формуле (3.10)) $R(L_4) = t_{кр} - t(L_4) = 61 - 49 = 12$ (суток).

Как видим, полный резерв времени работы (1, 4) оказался равным резерву пути L_4 – максимального из путей, проходящих через эту работу. Если увеличить продолжительность выполнения работы t(1, 4) на 12 суток, т.е. с 6 до 18 суток, то полностью будет исчерпан резерв времени пути L_4, т.е. этот путь станет также критическим, а резервы времени других путей уменьшатся соответственно на 12 суток.

Частный резерв времени работы (1, 4) первого вида определим по формуле (3.12) (или по формуле 3.13):

$R_1(1,4) = t_п(4) - t_п(1) - t(1,4) = 26 - 9 - 6 = 11$ (суток) или

$R_1(1,4) = R_п(1,4) - R(1) = 12 - 1 = 11$ (суток), т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 11 суток может быть задержано выполнение работы (1, 4) и последующих работ (по любому из путей L_1, L_2..., L_7) без затрат резерва времени предшествующих ей работ (в данном случае без затрат резерва времени одной предшествующей работы (0, 1)).

Частный резерв времени второго вида или свободный резерв времени, работы (1, 4) найдем по формуле (3.14) (или (3.15)):

$R_c(1,4) = t_p(4) - t_p(1) - t(1,4) = 23 - 8 - 6 = 9$ (суток) или

$R_c(1,4) = R_n(1,4) - R(4) = 12 - 3 = 9$ (суток),

т.е. при сохранении общего срока выполнения проекта на 9 суток может быть задержано выполнение работы (1, 4) и предшествующих ей работ (в данном случае работы (0, 1)) без нарушения резерва времени последующих работ.

Независимый резерв времени работы (1, 4) определим по формуле (3.16) (или (3.17)):

$R_н(1,4) = t_p(4) - t_n(1) - t(1,4) = 23 - 9 - 6 = 8$ (суток) или

$R_н(1,4) = R_n(1,4) - R(1) - R(4) = 12 - 1 - 3 = 8$ (суток),

т.е. на 8 суток может быть увеличена продолжительность работы (1, 4) без изменения резервов времени всех остальных работ.

Обратим внимание на то, что независимые резервы работ (1, 2), (2, 7) и (4, 7) отрицательны (в табл. 3.3 они обозначены прочерком). Например $R_н(2,7) = t_p(7) - t_n(2) - t(2,7) = 33 - 40 - 3 = -10$. Это означает, что работа (2, 7) продолжительностью 3 (суток) должна закончиться на 33-и сутки после начала комплекса работ, а начаться на 40-е сутки, что, естественно, невозможно.

Подчеркнем, что резервы критических работ (0, 3), (3, 5), (5, 6), (6, 9), (9, 10), (10, 11), так же как и резервы критических событий, равны нулю.

Следует отметить, что в случае достаточно простых сетевых графиков результаты расчета их временных параметров можно фиксировать прямо на графике. Параметры событий записываются в кружках, разделенных на четыре части, а параметры работ – над соответствующими стрелками (см. рис. 3.3). При этом отпадает необходимость составления таблиц.

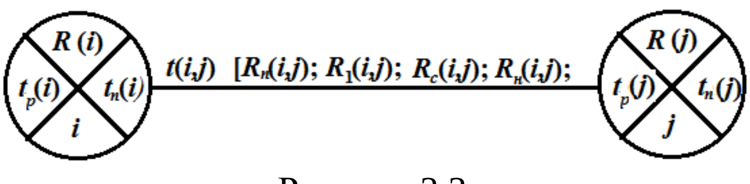


Рисунок 3.3

3.2. Сетевое планирование в условиях неопределенности

При определении временных параметров сетевого графика до сих пор предполагалось, что время выполнения каждой работы точно известно. Такое предположение в действительности выполняется редко: напомним, система

СПУ обычно применяется для планирования сложных разработок, не имевших в прошлом никаких аналогов. Чаще всего продолжительность работы по сетевому графику заранее не известна и может принимать лишь одно из ряда возможных значений. Другими словами, продолжительность работы $t(i,j)$ является случайной величиной, характеризующейся своим законом распределения, а значит, своими числовыми характеристиками – средним значением, или математическим ожиданием $\bar{t}(i,j)$ и дисперсией $\sigma^2(i,j)$.

Практически во всех системах СПУ априори принимается, что распределение продолжительности работ обладает тремя свойствами: а) непрерывностью; б) унимодальностью, т.е. наличием единственного максимума у кривой распределения; в) двумя точками пересечения кривой распределения с осью *Ох*, имеющими неотрицательные абсциссы.

Кроме того, установлено, что распределение продолжительности работ обладает положительной асимметрией, т.е. максимум кривой смещен влево относительно медианы (линии, делящей площадь под кривой на две равные части). Распределение, как правило, более круто поднимается при удалении от минимального значения t и полого опускается при приближении к максимальному значению t (рис. 3.4).

Простейшим распределением с подобными свойствами является известное в математической статистике β – распределение. Анализ большого количества статистических данных (хронометражи времени реализации отдельных работ, нормативные данные и т.д.) показывает, что β – распределение можно использовать в качестве априорного для всех работ.

Для определения числовых характеристик $\bar{t}(i,j)$ и $\sigma^2(i,j)$ этого распределения для работы (i,j) на основании опроса ответственных исполнителей проекта и экспертов определяют три временные оценки (рис. 3.4):

а) оптимистическую оценку $t_o(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при самых благоприятных условиях (минимальная продолжительность);

б) пессимистическую оценку $t_п(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при самых неблагоприятных условиях (максимальная продолжительность);

в) наиболее вероятную оценку $t_{нв}(i,j)$, т.е. продолжительность работы (i,j) при нормальных условиях.

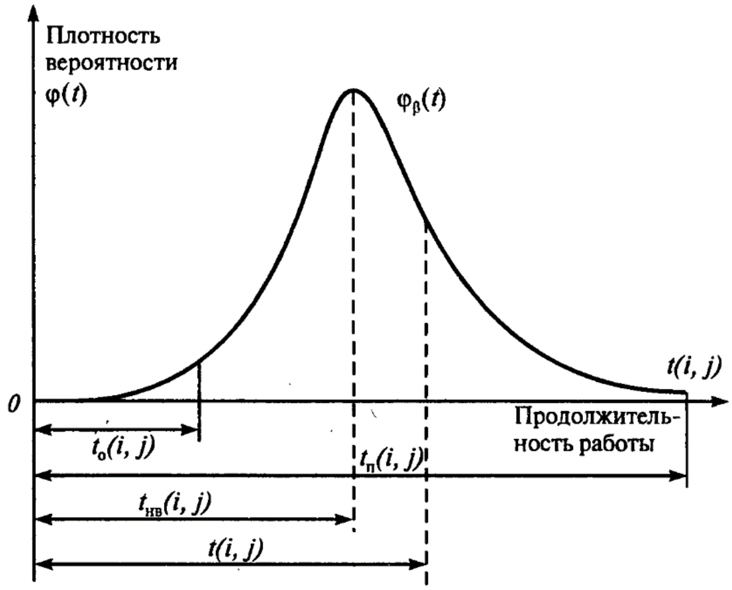


Рисунок 3.4

Предположение о $\beta-$ распределении продолжительности работы (i, j) позволяет получить следующие оценки ее числовых характеристик:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{t_o(i, j) + 4t_{нв}(i, j) + t_n(i, j)}{6}, \tag{3.21}$$

$$\sigma^2(i, j) = \left(\frac{t_n(i, j) - t_o(i, j)}{6}\right)^2. \tag{3.22}$$

Следует отметить, что обычно специалистам сложно оценить наиболее вероятное время выполнения работы $t_{нв}(i, j)$. Поэтому в реальных проектах используется упрощенная (и менее точная) оценка средней продолжительности работы (i, j) на основании лишь двух задаваемых временных оценок $t_o(i, j)$ и $t_n(i, j)$:

$$\bar{t}(i, j) = \frac{3t_o(i, j) + 2t_n(i, j)}{5}, \tag{3.23}$$

$$\sigma^2(i, j) = \left(\frac{t_n(i, j) - t_o(i, j)}{5}\right)^2. \tag{3.24}$$

Зная $\bar{t}(i, j)$ и $\sigma^2(i, j)$, можно определять временные параметры сетевого графика и оценивать их надежность.

Так, при достаточно большом количестве работ, принадлежащих пути L, и выполнении некоторых весьма общих условий можно применить центральную предельную теорему Ляпунова, на основании которой можно утверждать, что общая продолжительность пути L имеет нормальный закон распределения со средним значением $\bar{t}(L)$, равным сумме средних значений продолжительности составляющих его работ $\bar{t}(i, j)$ и дисперсией $\sigma^2(L)$, равной сумме соответствующих дисперсий $\sigma^2(i, j)$:

$$\bar{t}(L) = \sum_{i,j} \bar{t}(i, j), \quad \sigma^2(L) = \sum_{i,j} \sigma^2(i, j). \tag{3.25}$$

Предположим, что сетевой график на рис. 3.1 (см. пример 3.1) представляет сеть не с детерминированными (фиксированными), а со случайными продолжительностями работ и цифры над работами-стрелками указывают средние значения $\bar{t}(i, j)$ продолжительности соответствующих операций, найденные по формуле (3.21) или (3.23), и известны все дисперсии $\sigma^2(i, j)$, вычисленные по формуле (3.22) или (3.24). Следует отметить, что и в этом случае временные параметры сетевого графика – длина критического пути, ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий и работ и т.д. – будут такие же, как в предыдущем разделе. Но при этом необходимо учесть, что эти параметры, представленные в табл. 3.2 и 3.3, теперь будут являться средними значениями соответствующих случайных величин: средней длиной критического пути $\bar{t}_{кр}$, средним значением раннего срока наступления события $\bar{t}_р(i)$, средним значением полного резерва времени работы $\bar{R}_п(i, j)$ и т.п.

Так, $\bar{t}_{кр} = 61$ будет означать, что длина критического пути лишь в среднем составляет 61 сутки, а в каждом конкретном проекте возможны заметные отклонения длины критического пути от ее среднего значения (причем, чем больше суммарная дисперсия продолжительности работ критического пути, тем более вероятны значительные по абсолютной величине отклонения).

Поэтому предварительный анализ сетей со случайными продолжительностями работ, как правило, не ограничивается расчетами временных параметров сети. Весьма важным моментом анализа становится **оценка вероятности того, что срок выполнения проекта $t_{кр}$ не превзойдет заданного директивного срока *T*.**

Полагая $t_{кр}$ случайной величиной, имеющей нормальный закон распределения, получим

$$P\left(t_{кр} \le T\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right), \qquad (3.26)$$

(на рис. 3.5 это площадь заштрихованной фигуры), $\Phi(z)$ – значение интеграла вероятностей Лапласа, где $z = \dfrac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}$; $\sigma_{кр}$ – среднее квадратическое отклонение длины критического пути:

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\sigma^2_{кр}}\,, \qquad (3.27)$$

$\sigma^2_{кр}$, $\bar{t}_{кр}$ определяются по формуле (3.25).

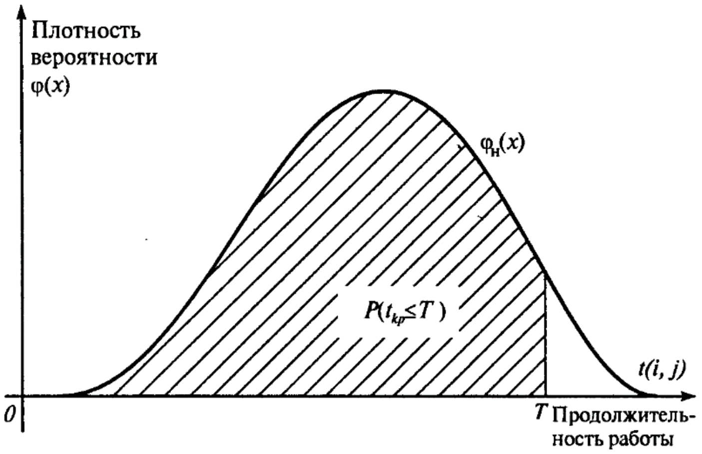


Рисунок 3.5.

Если $P\left(t_{кр} \le T\right)$ мала (например, меньше 0.3), то опасность срыва заданного срока выполнения комплекса велика, необходимо принятие дополнительных мер. Если $P\left(t_{кр} \le T\right)$ значительна (например, более 0.8), то, очевидно, с достаточной степенью надежности можно прогнозировать выполнение проекта в установленный срок.

В некоторых случаях представляет интерес и решение обратной задачи: **определение максимального срока выполнение проекта *T***, который возможен с заданной надежностью (вероятностью) β. В этом случае

$$T = \bar{t}_{кр} + z_\beta \sigma_{кр}, \tag{3.28}$$

где z_β – нормированное отклонение случайной величины, определяемое с помощью функции Лапласа $\Phi\left(z_\beta\right) = \beta$.

Пример 3.3. Пусть, например, для сети (рис. 3.1, пример 3.1) дисперсии продолжительности работ критического пути равны: $\sigma^2(0,3) = 2.5;$ $\sigma^2(3,5) = 2.1$; $\sigma^2(5,6) = 3.2$; $\sigma^2(6,9) = 4$; $\sigma^2(9,10) = 1.5$; $\sigma^2(10,11) = 3.5$. Оцените вероятность выполнения проекта в срок T = 63 суткам.

Решение: Найдем $\sigma_{кр}$, используя формулы (3.25) и (3.27):

$$\sigma_{кр}^2 = \sum_{i,j} \sigma^2(i,\, j) =$$
$$= \sigma^2(0,3) + \sigma^2(3,5) + \sigma^2(5,6) + \sigma^2(6,9) + \sigma^2(9,10) + \sigma^2(10,11) = \quad \sigma_{кр} = \sqrt{\sigma_{кр}^2} = \sqrt{16.8} \approx 4.1 .$$
$$= 2.5 + 2.1 + 3.2 + 4 + 1.5 + 3.5 = 16.8,$$

Теперь искомая вероятность равна

$$P\left(t_{кр} \le 63\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) =$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{63-61}{4.1}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(0.49\right) = 0.5 + 0.5 \cdot 0.376 \approx 0.69,$$

где $\Phi\left(0.49\right) \approx 0.376$ (см. таблицу значений функции Лапласа).

Т.е. можно с известным риском предполагать выполнение проекта в срок.

Рассмотрим и пример решения обратной задачи: оценить максимально возможный срок T выполнения проекта с надежностью $\beta = 0.95$.

По формуле (3.28)

$$T = \bar{t}_{кр} + z_{\beta}\sigma_{кр} = 61 + z_{0.95}4.1 = 61 + 1.96 \cdot 4.1 \approx 69,$$

где $z_{0.95} = 1.96$ (см. таблицу значений функции Лапласа).

Т.е. с надежностью 0.95 срок выполнения проекта не превысит 69 суток.

Следует отметить, что для данной сети мы можем найти лишь весьма приближенные оценки $P(t_{кр} \le T)$ и T, ибо на основании теоремы Ляпунова вывод о нормальном законе распределения случайной величины $t_{кр}$, правомерен лишь для достаточно большого числа критических работ, а в рассматриваемой сети их всего 6.

Однако приведенный метод расчета имеет принципиальные недостатки оценки параметров даже сложных сетей с большим количеством работ. Дело в том, что на практике нередки случаи, когда дисперсии $\sigma^2(L)$ длин некритических (но близких к критическому) путей существенно больше, чем $\sigma^2_{кр}$. Поэтому при изменении ряда условий в данном конкретном комплексе работ возможен переход к новым критическим путям, которые в расчете не учитываются.

Различия между событиями с детерминированными случайными продолжительностями работ не следует пугать с различием детерминированных и стохастических сетей. Последнее различие связано со структурой самой сети.

Рассмотренные до сих пор сети являлись детерминированными, хотя работы в них могли характеризоваться не только детерминированными, но и случайными продолжительностями. Вместе с тем встречаются проекты, когда на некоторых этапах тот или иной комплекс последующих работ зависит от неизвестного заранее результата. Какой из этих комплексов работ будет фактически выполняться, заранее не известно, а может быть предсказано лишь с некоторой вероятностью. Например, может быть предусмотрено несколько вариантов продолжения исследования в зависимости от полученных опытных данных или несколько вариантов строительства предприятий различной мощности по обработке сырья в зависимости от результатов разведки запасов этого сырья. Такие сети называются стохастическим.

В свою очередь стохастические сети, так же как и детерминированные, могут характеризоваться детерминированными либо случайными продолжительностями.

Пример 3.4. Найдите критическое время $t_{кр}$ выполнения комплекса операций, представленного на рис. 3.6, используя средние оценки продолжительности и дисперсию, а также определить:

1. Вероятность выполнения комплекса операций за T=35 дней и за T=42 дня;

2. Время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью не меньшей P=0.75 и P=0.35;

3. Вероятность завершения операции (2,5) на 8 день.

Оптимистическая и пессимистические оценки для каждой операции заданы в таблице 3.4. Случайные отклонения времени выполнения операций от математических ожиданий не меняют критического пути.

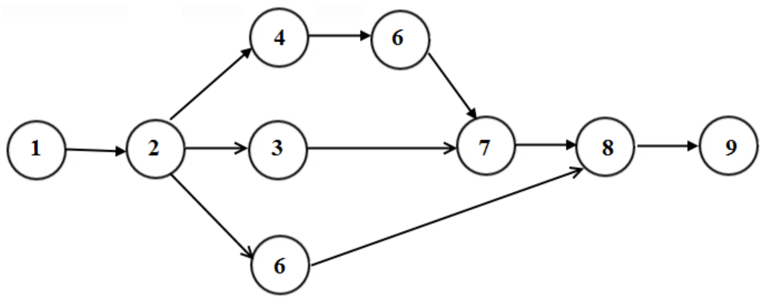


Рисунок 3.6.

Таблица 3.4. – Результаты расчетов

Исходные параметры		
(i, j)	$t_o(i, j)$	$t_n(i, j)$
(1,2)	1	3.5
(2,3)	2	4.5
(2,4)	2.5	6.25
(2,5)	4	6.5
(3,7)	1.5	2.75
(4,6)	5	10
(5,8)	4.5	8.25
(6,7)	3	5.5
(7,8)	8	10.5
(8,9)	8	18

Решение. По формулам (3.23), (3.24) вычислим $\bar{t}(i, j) = \frac{3t_o(i, j) + 2t_n(i, j)}{5}$, $\sigma^2(i, j) = \left(\frac{t_n(i, j) - t_o(i, j)}{5}\right)^2$ и занесем в таблицу 3.5.

Таблица 3.5. – Результаты расчетов

Исходные параметры			Расчетные параметры	
(i, j)	$t_o(i, j)$	$t_n(i, j)$	$\bar{t}_{ij}$	$\sigma^2(i, j)$
(1,2)	1	3.5	$\bar{t}(1,2) = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 3.5}{5} = 2$	$\sigma^2(1,2) = \left(\frac{3.5 - 1}{5}\right)^2 = 0.25$
(2,3)	2	4.5	$\bar{t}(2,4) = \frac{3 \cdot 2.5 + 2 \cdot 6.25}{5} = 3$	$\sigma^2(2,4) = \left(\frac{6.25 - 2.5}{5}\right)^2 = 0.25$
(2,4)	2.5	6.25	4	0.563
(2,5)	4	6.5	5	0.250
(3,7)	1.5	2.75	2	0.063
(4,6)	5	10	7	1.000
(5,8)	4.5	8.25	6	0.563

(6,7)	3	5.5	4	0.250
(7,8)	8	10.5	9	0.250
(8,9)	8	18	12	4.000

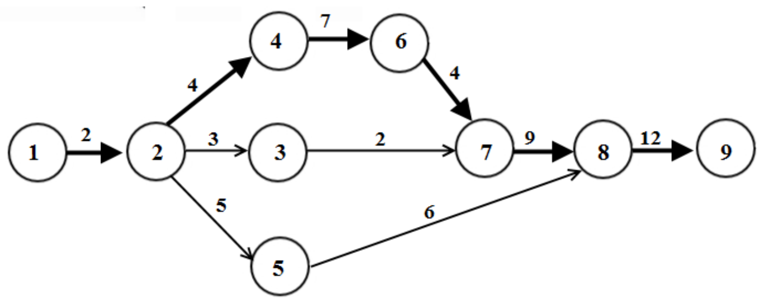


Рисунок 3.7.

Продолжительность критического пути, найденного по средним оценкам времени (средние оценки приписаны дугам графа, см. рис. 3.7),

$$\bar{t}_{кр} = \bar{t}(1,2) + \bar{t}(2,4) + \bar{t}(4,6) + \bar{t}(6,7) + \bar{t}(7,8) + \bar{t}(8,9) =$$

$$= 2 + 4 + 7 + 4 + 9 + 12 = 38 \text{ дней},$$

по оптимистическим оценкам

$$t_{кр.о} = t_о(1,2) + t_о(2,4) + t_о(4,6) + t_о(6,7) + t_о(7,8) + t_о(8,9) =$$

$$= 1 + 2.5 + 5 + 3 + 8 + 8 = 27.5 \text{ дня},$$

по пессимистическим оценкам

$$t_{кр.п} = t_п(1,2) + t_п(2,4) + t_п(4,6) + t_п(6,7) + t_п(7,8) + t_п(8,9) =$$

$$= 3.5 + 6.25 + 10 + 5.5 + 10.5 + 18 = 53.75 \text{ дня}.$$

Практически комплекс операций может быть выполнен с некоторой вероятностью в любой срок интервала [27.5;53.75].

Т.к. критический путь включает шесть операций и, согласно центральной предельной теореме, его длина подчиняется нормальному закону распределения, она характеризуется следующими параметрами:

$$\bar{t}_{кр} = 38,$$

$$\sigma^2_{кр} = \sigma^2(\bar{t}_{кр}) = \sum_{i,j} \sigma^2(i,\ j) =$$

$$= \sigma^2(1,2) + \sigma^2(2,4) + \sigma^2(4,6) + \sigma^2(6,7) + \sigma^2(7,8) + \sigma^2(8,9) =$$

$$= 0.25 + 0.563 + 1 + 0.25 + 0.25 + 4 = 6.313,$$

$$\sigma_{кр} = \sqrt{\sigma^2_{кр}} = \sqrt{6.313} \approx 2.513.$$

1. Вычислим вероятность выполнения комплекса операций за T=35 дней по формуле (3.26)

$$P\left(t_{кр} \le 35\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{35 - 38}{2.513}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(-1.19) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\Phi(1.19) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}0.766 = 0.117.$$

Вероятность выполнения комплекса операций за T=42 дня

$$P\left(t_{кр} \le 42\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{42-38}{2.513}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(1.59) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.8882 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}0.766 = 0.9441.$$

2. Определим время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью не меньшей P=0.75 по формуле (3.26)

$$P\left(t_{кр} \le T\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) \Rightarrow 2P\left(t_{кр} \le T\right) = 1 + \Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) \Rightarrow \Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) = 2P\left(t_{кр} \le T\right) - 1.$$

Интегралу $\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) = 2P\left(t_{кр} \le T\right) - 1 = 2 \cdot 0.75 - 1 = 0.5$ соответствует значение $\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}} = 0.68$. Следовательно, $T = \bar{t}_{кр} + 0.68 \cdot \sigma_{кр} = 38 + 0.68 \cdot 2.513 \approx 39.7 \approx 40$ дней.

Для P=0.35 имеем

$$\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}}\right) = 2P\left(t_{кр} \le T\right) - 1 = 2 \cdot 0.35 - 1 = -0.3.$$

Тогда $\frac{T - \bar{t}_{кр}}{\sigma_{кр}} = -0.39$, а, следовательно, $T = \bar{t}_{кр} - 0.39 \cdot \sigma_{кр} = 38 - 0.39 \cdot 2.513 \approx 37.02 \approx 37$ дней.

3. Ожидаемый срок свершения 5-го события $\bar{t}_5 = \bar{t}(1,2) + \bar{t}(2,5) = 2 + 5 = 7$ дней. Сумма дисперсий операций, принадлежащих пути 1→2→5, ведущему к 5-му событию $\sigma^2(1,2) + \sigma^2(2,5) = 0.250 + 0.250 = 0.5$.

Т. о.,

$$P\left(t_{кр} \le 8\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{8-7}{\sqrt{0.5}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(1.41) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}0.8415 \approx 0.921.$$

Следовательно, с вероятностью 0.921 операция (2,5) будет завершена в плановый срок.

3.3. Коэффициент напряженности работы. Анализ и оптимизация сетевого графика

После нахождения критического пути и резервов времени работ и оценки вероятности выполнения проекта в заданный срок должен быть проведен всесторонний анализ сетевого графика и приняты меры по его оптимизации. Этот весьма важный этап в разработке сетевых графиков раскрывает основную идею СПУ. Он заключается в приведении сетевого графика в соответствие с заданными сроками и возможностями организации, разрабатывающей проект.

Вначале рассмотрим анализ и оптимизацию календарных сетей, в которых заданы только оценки продолжительности работ.

Анализ сетевого графика начинается с анализа топологии сети, включающего контроль построения сетевого графика, установление целесообразности выбора работ, степени их расчленения.

Затем проводятся классификация и группировка работ по величинам резервов. Следует отметить, что величина полного резерва времени далеко не всегда может достаточно точно характеризовать, насколько напряженным является выполнение той или иной работы некритического пути. Все зависит от того, на какую последовательность работ распространяется вычисленный резерв, какова продолжительность этой последовательности.

Определить степень трудности выполнения в срок каждой группы работ некритического пути можно с помощью **коэффициента напряженности работ**.

Коэффициентом напряженности *Kн* работы (i,j) называется отношение продолжительности несовпадающих (заключенных между одними и теми же событиями) отрезков пути, одним из которых является путь максимальной продолжительности, проходящий через данную работу, а другим – критический путь:

$$K_н(i,j)=\frac{t(L_{\max})-t'_{кр}}{t_{кр}-t'_{кр}}, \tag{3.29}$$

где $t(L_{\max})$ – продолжительность максимального пути, проходящего через работу (i,j);

$t_{кр}$ – продолжительность (длина) критического пути;

$t'_{кр}$ – продолжительность отрезка рассматриваемого пути, совпадающего с критическим путем.

Формулу (3.29) можно легко привести к виду

$$K_н(i,j)=1-\frac{R_п(i,j)}{t_{кр}-t'_{кр}}, \tag{30}$$

где $R_п(i,j)$ – полный резерв времени работы (i,j).

Коэффициент напряженности $K_н$ может изменяться в пределах от 0 (для работ, у которых отрезки максимального из путей, не совпадающие с критическим путем, состоят из фиктивных работ нулевой продолжительности) до 1 (для работ критического пути).

Пример 3.5. Найти коэффициент напряженности работы (1, 4) для сетевого графика (рис.8).

Решение. Ранее мы установили, что длина критического пути $t_{кр}=61$ (сутки), а максимальный путь, проходящий через работу (1, 4) – путь L_4 (0→1→4→6→9→10→11), имеющий продолжительность $t(L_{\max})=t(L_4)=8+6+3+13+6+13=49$ (суток). Максимальный путь L_4 совпадает с критическим (см. рис.3.8) на отрезке 6→9→10→11 продолжительностью $t'_{кр}$ =13+6+13=32 (сутки). Используя формулу (3.29), найдем

$$K_н(1,4)=\frac{t(L_{\max})-t'_{кр}}{t_{кр}-t'_{кр}}=\frac{49-32}{61-32}=\frac{17}{29}\approx 0.59.$$

Или иначе: зная полный резерв работы $R_п(1,4)=12$, по формуле (3.30) находим

$$K_н(1,4)=1-\frac{R_п(1,4)}{t_{кр}-t'_{кр}}=1-\frac{12}{61-32}=\frac{17}{29}\approx 0.59.$$

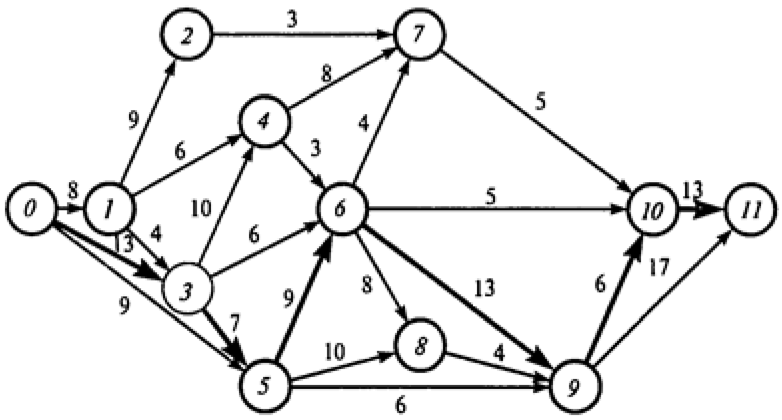


Рисунок 3.8. – Сетевой график

Чем ближе коэффициент напряженности $K_н(i,j)$ к 1, тем сложнее выполнить данную работу в установленные сроки. Чем ближе $K_н(i,j)$ к нулю, тем большим относительным резервом обладает максимальный путь, проходящий через данную работу.

Работы могут обладать одинаковыми полными резервами, но степень напряженности сроков их выполнения, выражаемая коэффициентом напряженности $K_н(i,j)$, может быть различна. И наоборот, различным полным резервам могут соответствовать одинаковые коэффициенты напряженности.

Так, полные резервы работ (3,6) и (6,7) для сетевого графика равны: $R_п(3,6)=R_п(6,7)=10$ (суток) – см. табл. 3.3, а их коэффициенты напряженности различны:

$$K_н(3,6)=1-\frac{10}{61-45}=1-\frac{10}{16}=\frac{6}{16}\approx 0.375,\quad K_н(6,7)=1-\frac{10}{61-42}=1-\frac{10}{19}=\frac{9}{19}\approx 0.474.$$

Обратим внимание на то, что больший полный резерв одной работы (по сравнению с другой) не обязательно свидетельствует о меньшей степени напряженности ее выполнения. Так, в рассматриваемой сети (см. рис. 3.8), хотя работа (2, 7) обладает большим полным резервом по сравнению с работой (6, 10): $R_п(2,7)=23>R_п(6,10)=14$, но имеет вдвое больший коэффициент напряженности: $K_н(2,7)=1-\frac{23}{61-13}=1-\frac{23}{48}=\frac{25}{48}\approx 0.52$ против $K_н(6,10)=1-\frac{14}{61-42}=1-\frac{14}{19}=\frac{5}{19}\approx 0.26$.

Это объясняется разным удельным весом полных резервов работ в продолжительности отрезков максимальных путей, не совпадающих с критическим путем.

Вычисленные коэффициенты напряженности позволяют дополнительно классифицировать работы по зонам. В зависимости от величины $K_н(i,j)$ выделяют три зоны: критическую ($K_н(i,j)>0.8$); подкритическую ($0.6\le K_н(i,j)\le 0.8$); резервную ($K_н(i,j)<0.6$).

Оптимизация сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения. Оптимизация проводится с целью сокращения длины критического пути, выравнивания коэффициентов напряженности работ, рационального использования ресурсов.

В первую очередь принимаются меры по сокращению продолжительности работ, находящихся на критическом пути. Эго достигается:

− перераспределением всех видов ресурсов, как временных (использование резервов времени некритических путей), так и трудовых, материальных, энергетических (например, перевод части исполнителей, оборудования с некритических путей на работы критического пути); при этом перераспределение ресурсов должно идти, как правило, из зон, менее напряженных, в зоны, объединяющие наиболее напряженные работы;

− сокращением трудоемкости критических работ за счет передачи части работ на другие пути, имеющие резервы времени;

− параллельным выполнением работ критического пути;

− пересмотром топологии сети, изменением состава работ и структуры сети.

В процессе сокращения продолжительности работ критический путь может измениться, и в дальнейшем процесс оптимизации будет направлен на сокращение продолжительности работ нового критического пути и так будет продолжаться до получения удовлетворительного результата. В идеале длина любого из полных путей может стать равной длине критического пути или, по крайней мере, пути критической зоны. Тогда все работы будут вестись с равным напряжением, а срок завершения проекта существенно сократится.

Весьма эффективным является использование метода статистического моделирования, основанного на многократных последовательных изменениях продолжительности работ (в заданных пределах) и “проигрывании” на компьютере различных вариантов сетевого графика с расчетами всех его временных параметров и коэффициентов напряженности работ. Процесс “проигрывания” продолжается до тех пор, пока не будет получен приемлемый вариант плана или пока не будет установлено, что все имеющиеся возможности улучшения плана исчерпаны и поставленные перед разработчиком проекта условия невыполнимы.

До сих пор мы говорили лишь о соблюдении директивных сроков выполнения комплекса работ и не затрагивали непосредственно вопросов стоимости разработки проектов. Однако на практике при попытках эффективного улучшения составленного плана неизбежно введение дополнительно к оценкам сроков фактора стоимости работ.

3.4. Оптимизация сетевого графика методом «время – стоимость»

Оптимизация сетевого графика в зависимости от полноты решаемых задач может быть условно разделена на **частную** и **комплексную**. Видами **частной оптимизации** сетевого графика являются: минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта.

Комплексная оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

При использовании **метода «время – стоимость»** предполагают, что уменьшение продолжительности работы пропорционально возрастанию ее стоимости. Каждая работа (i,j) характеризуется продолжительностью $t(i,j)$, которая может находиться в пределах

$$a(i,\ j) \le t(i,\ j) \le b(i,\ j)\,, \tag{3.31}$$

где $a(i,\ j)$ – минимально возможная (экстренная) продолжительность работы (i,j), которую только можно осуществить в условиях разработки;

$b(i,\ j)$ – нормальная продолжительность выполнения работы (i,j).

При этом стоимость $c(i,j)$ работы (i,j) заключена в границах от $c_{\min}(i,j)$ (при нормальной продолжительности работы) до $c_{\max}(i,j)$ (при экстренной продолжительности работы).

Используя аппроксимацию по прямой (см. рис. 3.9), можно легко найти изменение стоимости работы $\Delta c(i,j)$ при сокращении ее продолжительности на величину

$$\Delta c(i,j) = \left[b(i,j) - t(i,j)\right]h(i,j)\,. \tag{3.32}$$

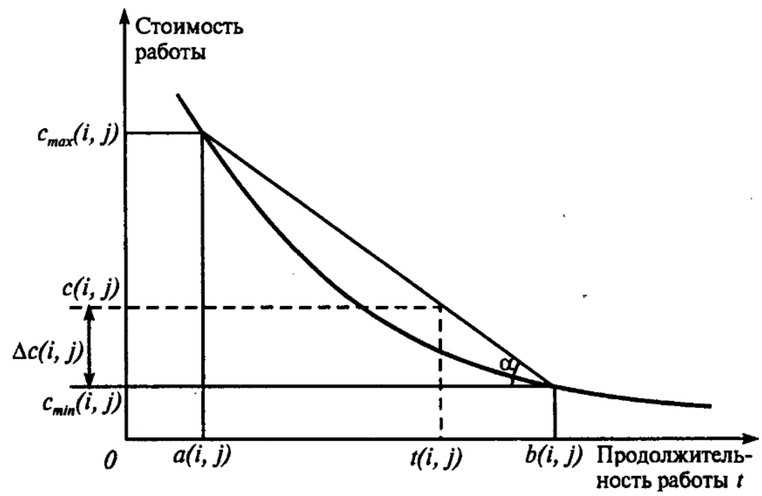


Рисунок 3.9.

Величина $h(i,j)$ равная тангенсу угла α наклона аппроксимирующей прямой (см. рис. 3.9), показывает затраты на ускорение работы (i,j) (по сравнению с нормальной продолжительностью) на единицу времени:

$$h(i, j) = tg\alpha = \frac{c_{\max}(i,j) - c_{\min}(i,j)}{b(i,j) - a(i,j)}. \tag{3.33}$$

Самый очевидный вариант частной оптимизации сетевого графика с учетом стоимости предполагает использование резервов времени работ. Продолжительность каждой работы, имеющей резерв времени, увеличивают до тех пор, пока не будет исчерпан этот резерв или пока не будет достигнуто верхнее значение продолжительности $b(i,j)$. При этом стоимость выполнения проекта, равная до оптимизации

$$C = \sum_{i,j} c(i,j), \tag{3.34}$$

уменьшится на величину

$$\Delta C = \sum_{i,j} \Delta c(i,j) = \sum_{i,j} \left[b(i,j) - t(i,j) \right] h(i,j) \tag{3.35}$$

Для проведения частной оптимизации сетевого графика кроме продолжительности работ $t(i,j)$, необходимо знать их граничные значения $a(i,j)$ и $b(i,j)$, а также показатели затрат на ускорение работ $h(i,j)$, вычисляемые по формуле (3.33). Продолжительность каждой работы $t(i,j)$ целесообразно увеличить на величину такого резерва, чтобы не изменить ранние (ожидаемые) сроки наступления всех событий сети, т.е. на величину свободного резерва времени $R_c(i, j)$.

Пример 3.6. Провести частную оптимизацию сетевого графика (рис. 3.8). Граничные значения продолжительностей работ $a(i,j)$ и $b(i,j)$, их стоимости $c(i,j)$, коэффициенты затрат на ускорение работ $h(i,j)$ приведены в табл. 3.4.

Решение. Свободные резервы времени работ $R_c(i, j)$. были вычислены нами ранее (см. табл. 3.3). Их ненулевые значения даны в табл. 3.4. Там же представлены результаты частной оптимизации рассматриваемой сети.

Стоимость первоначального варианта сетевого графика или плана по формуле (3.34) равна сумме стоимостей всех работ (включая работы, не имеющие резервов и не включенные в табл. 3.4):

***C*=694**+50+45+82+55+72+30+26+75+42+35+10=1216 (усл. руб.).

Примечания:

1. В таблице представлены параметры лишь тех работ, которые имеют свободный резерв времени.

2. Стоимости $c(i,\ j)$ остальных работ: $c(0,\ 1)=50$; $c(0,3)=45$; $c(1,2)=82$; $c(3,4)=55$; $c(3,5)=72$: $c(5,6)=30$; $c(6,7)=26$; $c(6,9)=42$; $c(9,10)=35$; $c(10,11)=10$ (усл. руб.).

3. Подчеркнуты те работы, свободные резервы времени которых полностью использованы на увеличение их продолжительности.

Таблица 3.4 – Результаты расчетов

№	**Работа (*i, j*)**	**Продолжительность работы, в сутки**			**Свободный резерв времени работы, в сутки**	**Стоимость работы**	**Коэффициент затрат на ускорение работы, руб./сутки**	**Уменьшение стоимости проекта, усл. руб.**
		$a(i,j)$	$t(i,j)$	$b(i,j)$	$R_c(i,j)$	$c(i,j)$	$h(i,j)$	$\Delta C(i,j)$
1	(0,5)	5	9	14	11	60	8	(14-9)·8=40
2	(1,4)	4	6	10	9	28	4	(10-6)·4=16
3	(1,3)	3	4	6	1	37	12	(6-4)·12=24
4	(2,7)	2	3	7	13	86	6	(7-3)·6=24
5	(3,6)	4	6	9	10	92	10	(9-6)·10=30
6	(4,7)	3	8	14	2	48	5	(14-8)·5=30
7	(4,6)	1	3	6	3	64	12	(6-3)·12=36
8	(5,8)	5	10	18	7	15	1	(18-10)·1=8
9	(5,9)	3	6	12	16	86	7	(12-6)·7=42
10	(6,10)	2	5	10	14	44	5	(10-5)·5=25
11	(7,10)	1	5	18	10	74	4	(18-5)·4=52
12	(8,9)	2	4	8	1	20	3	(8-4)·3=12
13	(9,11)	11	17	23	2	40	4	(23-17)·4=24
Итого						694		363

Стоимость нового плана равна $C-\Delta C=1216-363=853$ (усл. руб.), т.е. уменьшилась почти на 30%. Новый оптимизированный сетевой график представлен на рис. 3.10. Нетрудно убедиться в том, что появились новые критические пути длиной $t_{кр}=61$ (сутки), например:

0→1→3→4→ 7→10→11;

0→3→5→8→9→11;

0→1→3→4→6→7→10→11;

0→3→5→6→8→9→11 и т.д.

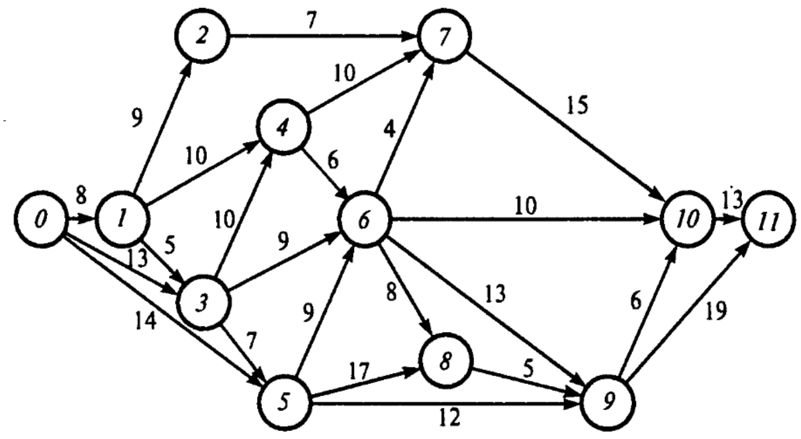


Рисунок 3.10.

Можно показать, что в этом варианте сетевого графика из 64 полных путей 28 – критические. Если бы верхние границы продолжительностей работ дали возможность полностью использовать резерв времени всех работ, представленных в табл. 3.4, то в новом плане все полные пути были бы критические.

Итак, в результате оптимизации сети мы пришли к плану, позволяющему выполнить комплекс работ в срок $t_{кр} = 61$ (сутки) при минимальной его стоимости C = 363 (усл. руб.).

В реальных условиях выполнения проекта может потребоваться ускорение его выполнения, что, естественно, отразится на стоимости проекта: она увеличится. Поэтому необходимо определить оптимальное соотношение между стоимостью проекта C и продолжительностью его выполнения $t = t_{кр}$, представленное, например, в виде функции $C = C(t)$.

Для оптимизации сетей и, в частности, для нахождения функции $C(t)$ могут быть использованы эвристические методы, т.е. методы, учитывающие индивидуальные особенности сетевых графиков.

Пример 3.7. Оптимизировать сетевой график, изображенный на рис. 3.11, в котором указаны максимально возможные продолжительность работ (в сутках). Необходимые для оптимизации исходные данные представлены в табл. 3.5.

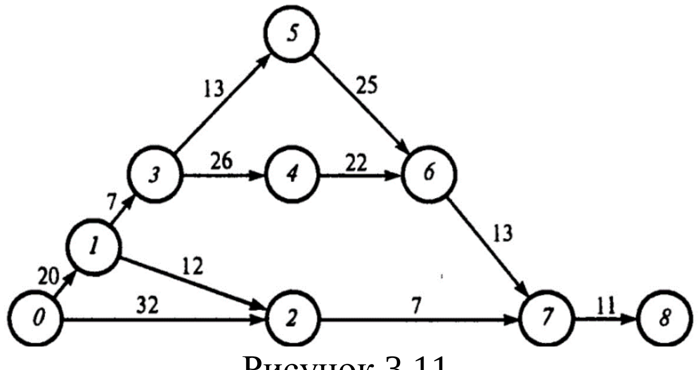


Рисунок 3.11.

Таблица 3.5. – Результаты расчетов

№	Работа (i, j)	Продолжительность работы, сутки		Стоимость работы усл. руб.	Коэффициент затрат на ускорение работы
		$a(i,j)$	$b(i,j)$	$c(i,j)$ **при** $t(i,j)=b(i,j)$	$h(i,j)$
1	(0,1)	10	20	35	6
2	(0,2)	12	32	50	3
3	(1,2)	2	12	15	3
4	(1,3)	2	7	10	8
5	(2,7)	2	7	10	3
6	(3,4)	16	26	50	2
7	(3,5)	8	13	15	6
8	(4,6)	12	22	40	4
9	(5,6)	20	25	30	4
10	(6,7)	8	13	25	5
11	(7,8)	6	11	29	9
Итого				300	

Решение. Исходный для оптимизации план (см. рис. 3.12) имеет максимальную продолжительность работ $t(i, j)=b(i, j)$ и соответственно минимальную стоимость C=300 (усл. руб.). Найдем все полные пути сетевого графика. Их четыре:

L_1 0→1→3→5→6→7→8 продолжительностью $t(L_1)=89$ (суток);

L_2 0→1→3→4→6→7→8 продолжительностью $t(L_2)=99$ (суток);

L_3 0→1→2→7→8 продолжительностью $t(L_3)=50$ (суток);

L_4 0→2→7→8 продолжительностью $t(L_4)=50$ (суток).

Для удобства дальнейших расчетов представим эти пути графически в виде цепочек работ (рис. 3.12), в которых цифры над стрелками показывают коэффициенты затрат на ускорение работ $h(i, j)$, а под стрелками – максимально возможные величины уменьшения продолжительности работ $\Delta t(i,j)=b(i,j)-a(i,j)$.

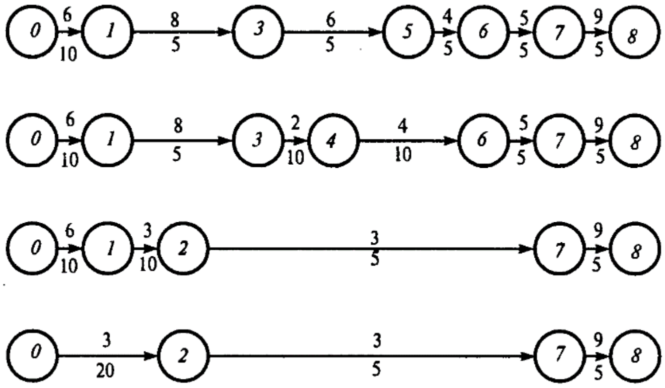


Рисунок 3.12.

I шаг. Уменьшить продолжительность выполнения комплекса можно, как известно, только за счет сокращения продолжительности работ критического пути $t_{кр} = t(L_2)$. Из работ критического пути L_2 наименьший коэффициент затрат на ускорение *h*(*i*, *j*) имеет работа (3,4): $h_{\min}(i,j) = \min\{h(0,1), h(1,3), h(3,4), h(4,6), h(6,7), h(7,8)\} = = \min\{6,8,2,4,5,9\} = 2$, т.е. $h_{\min}(i,j) = h(3,4) = 2$. Продолжительность работы *t*(3,4) можно сокращать не более чем на 10 суток. При этом изменится длина только критического пути (с 99 до 89 суток) L_2 – единственного из четырех путей, проходящего через работу (3,4). А стоимость проекта за счет ускорения работы (3,4) с учетом формул (34) и (35) возрастет до 300+2·10=320 (усл. руб.). Итак, на 1 шаге:

$C = 300 + 2\cdot(99 - t)$, где $89 \le t \le 99$.

Новые длины путей равны $t(L_1) = t(L_2) = 89,\ t(L_3) = t(L_4) = 50.$

II шаг. Теперь мы имеем два критических пути L_1 и L_2 и сократить срок выполнения проекта можно за счет одновременного сокращения их продолжительности. Сократить одновременно $t(L_1),\ t(L_2)$ можно, уменьшив продолжительность работ, лежащих на этих путях (см. рис. 3.12): либо *t*(0, 1), либо *t*(1, 3), либо *t*(6, 7), либо *t*(7, 8). Останавливаемся на *t*(6, 7), поскольку при этом обеспечивается минимум затрат на ускорение работы: $h_{\min}(i,j) = \min\{h(0,1), h(1,3), h(6,7), h(7,8)\} = \min\{6,8,5,9\} = 5$.

Продолжительность работы *t*(6, 7), можно уменьшить не более чем на 5 суток. На эту величину уменьшатся длины критических путей $t(L_1),\ t(L_2)$, а, следовательно, и срок выполнения проекта $t = t(L_1) = t(L_2)$. При этом стоимость проекта увеличится с 320 до 320+5·5=345 (усл. руб). Итак, на II шаге:

$C = 320 + 5\cdot(89 - t)$, где $84 \le t \le 89$,

$t(L_1) = t(L_2) = 84,\ t(L_3) = t(L_4) = 50.$

Продолжая аналогичным образом сокращать продолжительность работ, получим **III шаг**.
$h_{\min}(i,j) = \min\{h(0,1), h(1,3), h(7,8)\} = \min\{6,8,9\} = 6$, т.е. $h_{\min}(i,j) = h(0,1) = 6$. Сокращая продолжительность работы *t*(1, 3) до 10 суток, найдем

$C = 345 + 6\cdot(84 - t)$, где $74 \le t \le 84$,

$t(L_1) = t(L_2) = 74,\ t(L_3) = 40,\ t(L_4) = 50.$

IV шаг. $h_{\min}(i,j) = \min\{h(1,3), h(7,8)\} = \min\{8,9\} = 8$, т.е. $h_{\min}(i,j) = h(1,3) = 8$. Сокращая продолжительность работы *t*(1, 3) до 5 суток, найдем

$C = 405 + 8\cdot(74 - t)$, где $69 \le t \le 74$,

$t(L_1) = t(L_2) = 69,\ t(L_3) = 40,\ t(L_4) = 50.$

V шаг. Сокращая продолжительность работы *t*(7, 8) до 5 суток, найдем (учитывая, что $h(7,8) = 9$)

$C = 445 + 9\cdot(69 - t)$, где $64 \le t \le 69$,

$t(L_1) = t(L_2) = 64,\ t(L_3) = 35,\ t(L_4) = 45.$

VI шаг. Теперь несокращенными остались продолжительности трех критических работ: *t*(3,5) и *t*(5, 6) критического пути L_1, каждую из которых можно сократить до 5 суток, и *t* (4, 6) критического пути L_2, которую можно сократить до 10 суток. Сокращение какой-либо одной из названных величин не приведет к сокращению продолжительности выполнения проекта, ибо при этом сократится лишь один из двух путей, а длина несокращенного пути, который станет единственным критическим путем, не изменится. Поэтому последовательно сокращая *t* (4, 6) и *t*(5, 6) до 5 суток (с учетом времени сокращения продолжительности работ), найдем (теперь коэффициент затрат на ускорение работ равен *h*(4, 6) + *h*(5, 6)=4+4=8):

$C = 490 + 8 \cdot (64 - t)$, где $59 \le t \le 64$,

$t(L_1) = t(L_2) = 59,\ t(L_3) = 35,\ t(L_4) = 45.$

VII шаг. Продолжительность работы *t* (4, 6) можно сократить еще до 5 суток и на тот же срок можно сократить *t* (3, 5) (иначе срок выполнения проекта не изменится). Полагая, что *h*(4,6)+*h*(3,5)=4+6=10, найдем

$C = 530 + 10 \cdot (59 - t)$, где $54 \le t \le 59$,

$t(L_1) = t(L_2) = 59,\ t(L_3) = 35,\ t(L_4) = 45.$

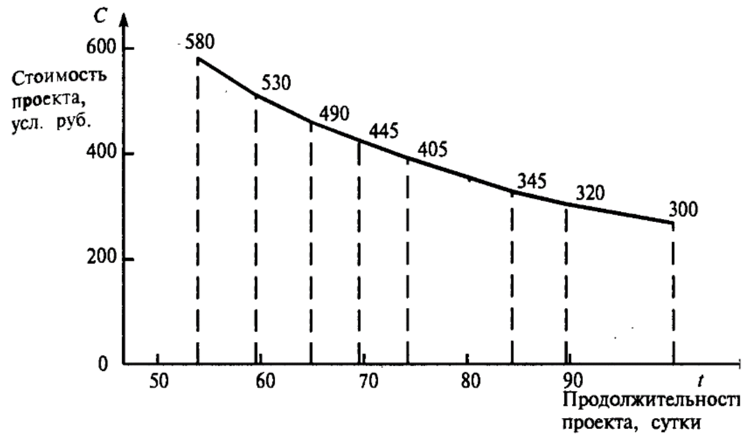


Рисунок 3.13.

График оптимальной зависимости стоимости проекта *C*(*t*) от продолжительности его выполнения показан на рис. 3.13. С помощью этого графика можно, с одной стороны, оценить минимальную стоимость проекта при любом возможном сроке его выполнения, а с другой стороны – найти предельную продолжительность выполнения проекта при заданной его стоимости. Например, при продолжительности проекта *t* =79 (суток) минимальная стоимость выполнения рассматриваемого комплекса составит 375 (усл. руб), а при стоимости выполнения комплекса, например, 540 (усл. руб.) предельная продолжительность проекта составит 55 (суток). С помощью функции *C*(*t*) можно оценить дополнительные затраты, связанные с сокращением сроков завершения комплекса. Так, сокращение продолжительности проекта с 79 до 55 суток потребует дополнительных затрат 570-375=195 (усл. руб.).

Итак, мы рассмотрели один из возможных эвристических алгоритмов оптимизации сетевого графика (см. рис. 3.11). Можно было использовать и другие алгоритмы. Например, взять в качестве первоначального план, имеющий не максимальные, а минимальные значения продолжительности работ *t*(*i*, *j*)=*a*(*i*, *j*) и соответственно максимальную стоимость проекта. А затем последовательно увеличивать продолжительность выполнения комплекса работ путем увеличения продолжительности работ, расположенных на некритических, а затем и на критическом (ских) пути в порядке убывания коэффициентов затрат $h(i, j)$.

3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте сетевую модель переноса участка воздушной высоковольтной линии, используя упорядочение работ из таблицы. Рассчитайте временные параметры событий и работ, коэффициенты напряженности работ, определите критические пути и их длительность. Постройте линейный график Ганта.

Таблица 3.6. – Исходные данные

Содержание работы	Непосредственно предшествующие работы	Длительность, ед. времени
A – оценка состава и содержания работ	–	3
B – осведомление потребителей электроэнергии о временном отключении системы	*A*	2.5
C – составление заявки на материалы и оборудование	*A*	3
D – обследование района проведения работ	*A*	2.5
E – доставка опор и материалов	*C,D*	5
F – распределение опор по точкам монтажа	*E*	5.5
G – увязка точек монтажа	*D*	2.5
H – разметка точек монтажа	*G*	2.5
I – рытье ям под опоры	*H*	5
J – монтаж опор	*F,I*	6
K – защита старых проводов	*F,I*	3
L – протяжка новых проводов	*J,K*	4
M – монтаж арматуры	*L*	4

N – выверка провиса новых проводов	*L*	4
O – подстрижка деревьев	*D*	4
P – обесточивание и переключение линий	*B,M,N,O*	1.2
Q – включение и фразировка новой линии	*P*	1.6
R – уборка строительного мусора	*Q*	3
S – снятие старых проводов	*Q*	3
T – демонтаж старых опор	*S*	4
U – доставка неиспользованных материалов на склад	*I*	4

2. Постройте сетевую модель покупки нового автомобиля, используя упорядочение работ из таблицы. Рассчитайте временные параметры событий и работ, коэффициенты напряженности работ, определите критические пути и их длительность. Постройте линейный график Ганта.

Таблица 3.7. – Исходные данные

Работа	Предшествующая работа	Длительность (дни)
A: Принятие окончательного решения о покупке автомобиля	-	4
B: Поиск потенциального покупателя имеющегося автомобиля	*A*	15
C: Составление списка желаемых моделей машин	*A*	2
D: Исследование желаемых моделей	*C*	4
E: Консультации у автомехаников	*C*	2
F: Сбор рекламных материалов продавцов автомобилей	*C*	3
G: Обобщение полученной информации	*D*, *E*, *F*	2

Работа	Предшествую-щая работа	Длитель-ность (дни)
H: Выбор трех наиболее подходящих моделей	*G*	2
I: Знакомство с выбранными моделями	*H*	4
J: Сбор финансовой информации	*H*	3
K: Выбор одного автомобиля	*I, J*	3
L: Выбор продавца автомобиля	*K*	3
M: Выбор автомобиля желаемого цвета	*L*	5
N: Повторная дорожная проверка выбранной модели	*L*	2
O: Покупка нового автомобиля	*B, M, N*	4

Сколько работ на критическом пути? Насколько можно отложить начало выполнения работы *J*, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?

3. Постройте сетевую модель выполнения работ по замене линии электропередач, используя упорядочение работ из таблицы. Рассчитайте временные параметры событий и работ, коэффициенты напряженности работ, определите критические пути и их длительность. Постройте линейный график Ганта.

Таблица 3.8. – Исходные данные

Работа	Предшествующие работы	Длительность (дни)
A: Определение объема работ	-	2
B: Извещение пользователей о временном отключении электросети	*A*	1,5
C: Подвозка материалов и оборудования	*A*	2
D: Предварительные работы	*A*	1.5
E: Заготовка опор и материалов	*C, D*	4
F: Развозка опор	*E*	4.5
G: Определение нового местоположения опор	*D*	1.5
H: Разметка местоположения опор	*G*	1.5
I: Земляные работы для установки	*H*	4

новых опор		
J: Установка новых опор	*F, I*	5
К: Ограждение старой линии	*F, I*	2
L: Прокладка новых проводов	*J, K*	3
M: Обустройство новой линии	*L*	3
N: Натяжка проводов	*L*	3
O: Подрезка деревьев	*D*	3
P: Отключение старой электролинии	*B, M, N, O*	1.1
Q: Подключение новой электролинии	*P*	1.5
R: Уборка территории	*Q*	2
S: Удаление проводов старой линии	*Q*	2
T: Удаление опор старой линии	*S*	3
U: Возврат материалов и оборудования	*R, T*	3

4. Определите критические пути и указанные параметры работ в сетевой модели (рис. 3.14-3.15). Проанализируйте, как повлияет на ход выполнения проекта, представленного на рис. 3.14, одновременная задержка следующих работ: (1,5) – на 18 дней, (3,6) – на 4 дня. Проанализируйте, как повлияет на ход выполнения проекта, представленного на рис. 3.15, одновременная задержка следующих работ: (1,2) – на 2 дня, (1,3) – на 11 дней, (3,7) –на 3 дня, (5,6) – на 1 день. Аргументируйте свой ответ.

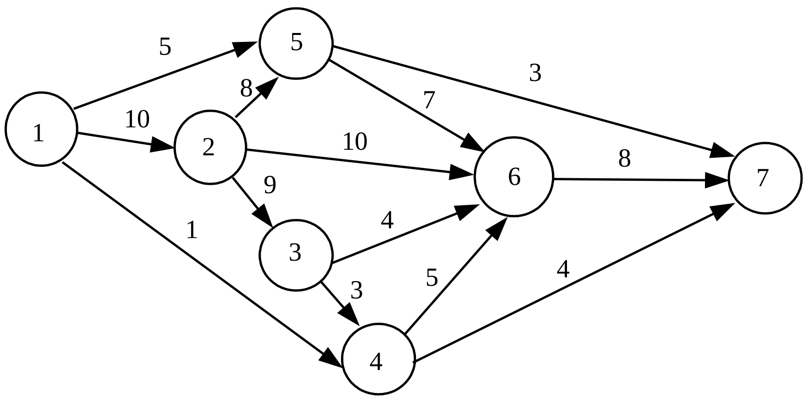


Рисунок 3.14

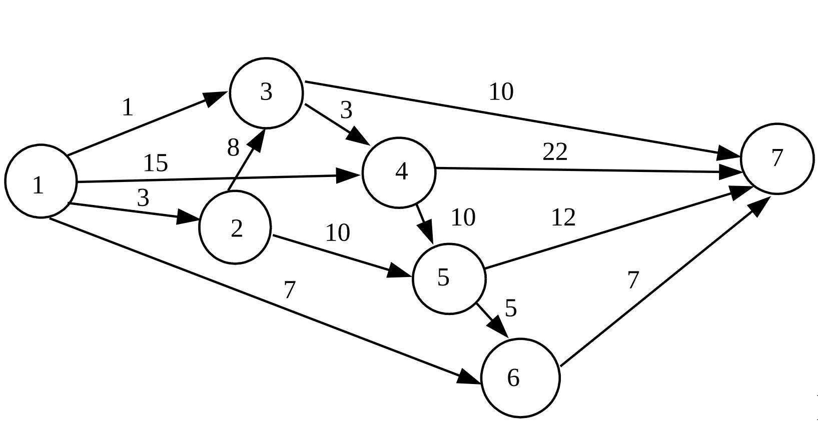


Рисунок 3.15

5. По данным о кодах и длительностях работ (см. табл. 3.9) постройте сетевой график, определите критические пути и их длительность, численные значения свободных и полных резервов каждой работы, отметьте на графике свободные резервы работ.

Таблица 3.9. – Исходные данные

Задача №1		Задача №2		Задача №3	
(i,j)	$t(i,j)$	(i,j)	$t(i,j)$	(i,j)	$t(i,j)$
1,2	5	1,2	4	1,2	2
1,3	7	1,3	1	1,3	4
2,4	6	1,4	3	1,4	3
2,6	0	2,3	3	2,5	5
3,4	3	2,5	1	3,4	5
3,5	2	3,5	0	3,6	6
4,6	8	3,6	7	4,5	0
4,8	9	4,7	2	4,7	4
5,6	0	5,8	6	4,8	3
5,7	6	6,9	5	5,7	5
6,7	2	7,8	8	6,8	7
6,8	7	7,9	7	7,8	4
7,8	4	8,9	9	7,11	3
7,9	7			8,9	8
8,9	4			8,10	6
				9,10	0
				9,11	7
				10,11	2

6. Некоторая фирма выпускает ряд средств для ухода за волосами и для бритья, включая опасные бритвы. Ее конкурент организовал недавно производство нового вида опасных бритв, которые за последние шесть месяцев приобрели большую популярность на потребительском рынке, что оказало обратное воздействие на объемы продаж фирмы. Администрация приняла решение о скорейшем внедрении в производство конкурентоспособной продукции и поручила главному бухгалтеру составить план разработки нового продукта и внедрения его на потребительский рынок.

Первый шаг, предпринятый бухгалтером при разработке этого проекта, состоял в определении основных задач, которые необходимо решить в процессе создания нового продукта. Эти задачи перечислены ниже. Он произвел также оценку времени, которое займет решение каждой задачи, и выявил задачи, которые ей предшествуют.

Таблица 3.10. – Исходные данные

Задача	Время, недель	Предшествующие задачи
A Создание новой продукции	8	-
B Создание упаковки	4	-
C Подготовка производственных мощностей	4	*A*
D Получение сырья и материалов	2	*A*
E Выпуск опытной партии продукции	3	*C*,*D*
F Упаковка	2	*B*
G Принятие решения о выборе пробного рынка сбыта	1	-
H Упаковка опытной партии	2	*E*,*F*
I Поставка продукции на пробный рынок сбыта	3	*H*,*G*
J Продажа продукции на пробном рынке сбыта	4	*I*
K Оценка результатов внедрения продукции на рынок	3	*J*
L Планирование выпуска продукции на национальном уровне	4	*K*

Постройте сетевой граф и определите, какой период времени пройдет с момента разработки плана до налаживания серийного выпуска новой продукции.

Рассчитайте значения резерва времени, соответствующие каждой из некритических операций.

Время, которое потребуется для выполнения задач *A, B, D, K* и *L*, подвержено влиянию неопределенности, поэтому для получения наиболее вероятных значений сроков выполнения этих операций, которые приведены выше, были разработаны следующие оценки оптимистических и пессимистических сроков:

Таблица 3.11. – Исходные данные

Задача	Оптимистический срок, недель	Пессимистический срок, недель
A	6	14
B	3	7
D	2	5
K	3	7
L	3	8

С учетом приведенной выше информации определите ожидаемое время, которое пройдет до момента серийного выпуска продукции, и вероятность того, что этот период превысит 35 недель.

7. Компания выполняет заказ, полученный от ее потребителя. Необходимая информация приведена в таблице 3.12.

Косвенные издержки, связанные с выполнением проекта, составляют 300 ф. ст. в день. В контракте, который заключен с потребителем, оговорено, что если заказ не будет выполнен в течение 15 дней, сумма штрафа составит 100 ф. ст. за каждый последующий день.

Таблица 3.12. – Исходные данные

Операция	Предшествующие операции	Срок, дней			Стоимость для ожидаемой продолжительности, ф.ст.
		Оптимистический	Наиболее вероятный	Пессимистический	
A	-	3	4	5	1000
B	-	4	7	10	1400
C	-	4	5	6	2000
D	*A*	5	6	7	1200
E	*B*	2	2,5	6	900
F	*C*	10	10,5	14	2500
G	*D*,*E*	3	4	5	800
H	*G*,*F*	1	2	9	300

Требуется:

Построить сетевой граф. Каково ожидаемое значение времени выполнения всего проекта? Каково значение соответствующей стоимости?

Какой путь в графе является критическим?

Какова вероятность того, что проект будет завершен без выплаты штрафов?

8. В таблице 3.13. указаны оценки времени выполнения работ сетевого графика, данные ответственными исполнителями и экспертами.

Таблица 3.13. – Исходные данные

№	Работа	Оценки времени выполнения работы, сутки		
		Оптимистическая $t_o(i, j)$	Пессимистическая $t_п(i, j)$	Наиболее вероятная $t_{нв}(i, j)$
1	(1,2)	5	9	6
2	(1,3)	2	7	5
3	(1,4)	4	10	8
4	(3,4)	9	14	11
5	(2,5)	7	13	10
6	(4,5)	1	4	3

Постройте сетевой график. Определите средние (ожидаемые) значения продолжительности работ. Определите критический путь и его длину.

Полагая, что продолжительность критического пути распределена по нормальному закону, найти: а) вероятность того, что срок выполнения комплекса работ не превысит 17 суток; б) максимальное значение продолжительности выполнения проекта, которое можно гарантировать с надежностью 0.95.

9. По данным таблице необходимо: 1) построить сетевой график; 2) определить критический путь и стоимость проекта при минимально возможных значениях продолжительности всех работ; 3) найти минимальную стоимость проекта при том же сроке его завершения; 4) рассчитать и построить оптимальную зависимость стоимости проекта от продолжительности его выполнения, используя в качестве первоначального варианта сетевого графика: а) план с максимальными значениями продолжительности всех работ и соответственно минимальной стоимостью проекта; б) план, полученный в результате выполнения п.3.

Таблица 3.14. – Исходные данные

Работа	Нормативный план выполнения работы, сутки		Срочный план выполнения работы, сутки		Коэффициент затрат на ускорение работы
	min	max	min	max	
(1,2)	4	5	2	15	5
(1,3)	4	3	2	11	4
(1,4)	12	150	9	180	10
(2,3)	6	11	5	30	19
(2,4)	7	18	6	30	12
(3,4)	10	10	8	20	5
(3,5)	24	147	19	212	13
(4,5)	10	4	7	25	7
(5,6)	3	2	2	5	3

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 1. Составить сетевой график, используя упорядочение работ из таблицы. Определите критические пути и их длительность. Постройте график Ганта. Вся необходимая информация представлена в таблицах К.1, К.2.

Таблица К.1

Содержание работы	**Обозначение**	**Предыдущая работа**	**Продолжительность, дн.**
Исходные данные на изделие	a_1		t_1
Заказ комплектующих деталей	a_2	a_1	t_2
Выпуск документации	a_3	a_1	t_3
Изготовление деталей	a_4	a_3	t_4
Поставка комплектующих деталей	a_5	a_2	t_5
Сборка изделия	a_6	a_4, a_5	t_6
Выпуск документации на испытание	a_7	a_3	t_7
Испытание и приемка изделия	a_8	a_6, a_7	t_8

Таблица К.2. Значения коэффициентов условия задачи

№ варианта / **Значения**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t_1	28	31	35	34	24	19	14	29	24	19
t_2	5	7	6	4	6	9	8	3	7	5
t_3	13	15	16	12	14	18	28	11	18	17
t_4	33	31	30	32	29	33	10	35	37	36
t_5	23	22	19	18	20	21	24	23	16	19
t_6	11	13	8	10	11	14	15	14	16	14
t_7	10	14	7	9	7	12	17	12	13	17
t_8	12	15	11	11	9	16	16	17	15	18

Задание 2. По данным о кодах и длительностях работ (см. табл. К.4) необходимо построить сетевой график, рассчитать среднее время выполнения работ

$\bar{t}(i, j)$, дисперсию $\sigma^2(i, j)$, временные параметры событий и резервы времени работ. Найдите критическое время $\bar{t}_{кр}$ выполнения проекта.

Оцените вероятность выполнения проекта в директивный срок, равный $T=t_{кр} \cdot k$ временных единиц, где k – коэффициент, на который необходимо увеличить полученную продолжительность критического пути (см. табл. К.5).

Оцените время, за которое комплекс операций будет выполнен с вероятностью не меньшей $P=0.70+0.02 \cdot N$ и $P=0.4\text{-}0.01 \cdot N$; N–-номер варианта.

Рассчитайте коэффициенты напряжённости работ по вариантам (см. табл. К.6)

Оптимизируйте сетевой график методом «время-стоимость». Для этого условно принять, что в соотношении $a(i, j) \le t(i, j) \le b(i, j)$, $a(i, j) = t_o(i, j)$, $b(i, j) = t_n(i, j)$, $t(i, j) = \bar{t}(i, j)$.

Увеличте все показатели ($t_o(i, j)$, $t_n(i, j)$, $t_{нв}(i, j)$, $c(i, j)$, $c_{\max}(i, j)$, $c_{\min}(i, j)$), используя табл. К.3. Значения длительности и стоимости работ округлите до целых.

Таблица К.3. Определение коэффициентов для таблиц К.4 и К.7

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Процент увеличения показателей	5	7	10	12	15	18	20	22	25	27

Таблица К.4. Коды и длительности работ

Работа, (i, j)	$t_o(i, j)$	$t_n(i, j)$	$t_{нв}(i, j)$	**Работа (i, j)**	$t_o(i, j)$	$t_n(i, j)$	$t_{нв}(i, j)$
(1,2)	2	13	7	(9,12)	3	16	12
(1,3)	5	9	6	(10,12)	6	9	8
(1,4)	4	11	6	(10,16)	7	17	14
(1,5)	3	7	6	(10,13)	2	19	13
(1,7)	5	13	10	(11,13)	6	9	7
(1,9)	3	12	8	(12,15)	3	20	14
(2,6)	6	18	10	(12,16)	6	27	18
(3,6)	5	17	15	(12,18)	9	25	21
(3,9)	7	14	12	(13,16)	3	10	8
(4,7)	2	5	3	(13,19)	9	17	12
(4,10)	2	10	6	(14,17)	3	9	7
(4,13)	4	17	15	(15,17)	2	10	6
(4,11)	3	8	7	(15,21)	7	14	11
(5,11)	9	20	17	(15,20)	6	16	13
(6,8)	5	10	6	(15,18)	9	17	13
(6,9)	11	21	17	(16,18)	10	16	13
(6,15)	10	14	11	(16,20)	3	6	4
(7,9)	9	23	16	(16,19)	5	10	8

(7,12)	8	20	13	(17,21)	5	10	8
(7,10)	2	7	5	(18,20)	3	9	6
(8,14)	10	16	13	(19,20)	9	17	13
(8,150	9	16	14	(19,21)	2	10	8
(9,15)	15	24	19	(20,21)	8	13	11

Таблица К.5. Коэффициенты для расчета директивного срока

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
k	1.05	1.08	1.1	1.11	1.12	1.14	1.16	1.17	1.19	1.2

Таблица К.6. Номера работ для расчёта коэффициентов напряжённости

(*i*, *j*)	**Вариант**									
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
	1,2	1,3	1,4	1,5	1,7	1,9	2,6	3,6	3,9	4,7
	6,9	6,15	7,9	7,12	7,10	8,14	8,15	9,15	9,12	10,12
	12,18	13,16	13,19	14,17	15,17	15,21	15,20	15,18	16,18	16,20

Таблица К.7.Стоимости работ

Работа, (i, j)	$c(i, j)$	$c_{\max}(i, j)$	$c_{\min}(i, j)$	Работа, (i, j)	$c(i, j)$	$c_{\max}(i, j)$	$c_{\min}(i, j)$
(1,2)	15	52	13	(9,12)	33	58	21
(1,3)	31	43	24	(10,12)	24	55	5
(1,4)	26	31	15	(10,16)	30	36	1
(1,5)	28	52	23	(10,13)	23	32	15
(1,7)	18	59	18	(11,13)	36	39	28
(1,9)	36	45	25	(12,15)	39	41	5
(2,6)	28	53	23	(12,16)	21	42	9
(3,6)	32	47	14	(12,18)	9	50	9
(3,9)	29	50	22	(13,16)	26	45	6
(4,7)	35	42	27	(13,19)	20	31	19
(4,10)	25	54	20	(14,17)	13	34	1
(4,13)	19	44	5	(15,17)	46	52	24
(4,11)	15	52	13	(15,21)	33	58	21
(5,11)	31	43	24	(15,20)	24	55	5
(6,8)	26	31	15	(15,18)	30	36	1
(6,9)	28	52	23	(16,18)	23	32	15
(6,15)	18	59	18	(16,20)	36	39	28
(7,9)	36	45	25	(16,19)	39	41	5
(7,12)	28	53	23	(17,21)	21	42	9
(7,10)	32	47	14	(18,20)	9	50	9
(8,14)	29	50	22	(19,20)	26	45	6
(8,150	35	42	27	(19,21)	20	31	19
(9,15)	25	54	20	(20,21)	31	43	24

ТЕСТ

1. Впишите пропущенное слово.

____________________ – план выполнения некоторого комплекса взаимосвязанных работ (операций), который задан в специфической форме сети, графическое изображение которой называется сетевым графиком.

2. Впишите пропущенное слово.

____________________ – момент завершения какого-либо процесса, который отражает отдельный этап выполнения проекта.

3. Установите соответствие между терминами и их определениями, вписав соответствующий номер определения в окошко напротив термина.

№	ТЕРМИН	ОПРЕДЕЛЕНИЕ
	Действительная работа	1. Протяжённый во времени процесс, требующий затрат ресурсов (например, сборка изделия, испытание прибора и т.п.).
	Ожидание	2. Логическая связь между двумя или несколькими работами (событиями), не требующими затрат труда, материальных ресурсов или времени.
	Фиктивная работа	3. Протяжённый во времени процесс, не требующий затрат труда (например, процесс сушки после покраски, старения металла, твердения бетона и т.п.).

4. Впишите пропущенное слово.

________________ любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей за ней работы.

5. Впишите пропущенные слова.

____________________ – наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике.

6. Впишите пропущенные слова.

_________________ – любой путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, а конец – с завершающим.

7. На сетевых графиках сплошными стрелками обозначаются:

а)Фиктивные работы.

б)Действительные работы.

в)Ожидания.

8. Верно ли построен сетевой график, изображенный на рис. Т.1?

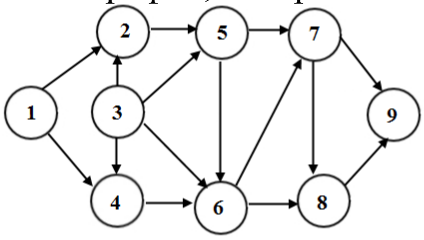


Рисунок Т.1

а)Верно.
б)Неверно.

9. В сети продолжительность любой фиктивной работы равна нулю. Верно ли это утверждение?
а)Верно.
б)Неверно.

10. В сети программы какая-либо последовательность работ может образовывать замкнутый контур. Верно ли это утверждение?
а)Верно.
б)Неверно.

11. На рис.Т.2 среди предложенных вариантов укажите корректно построенную сетевую модель:

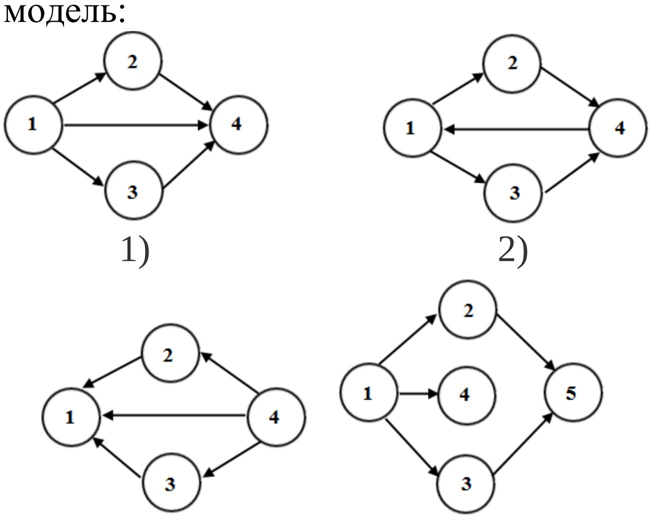


Рисунок Т.2

12. При построении сетевого графика, который изображен на рисунке Т.3, допущены следующие ошибки:

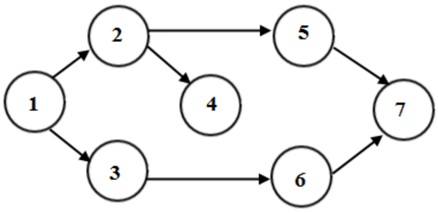


Рисунок Т.3

а)между событиями 2 и 3 неправильно изображены две параллельные работы;

б)событие 4 хвостовое;

в)событие 4 тупиковое;

13. Правильно ли построен сетевой график, изображенный на рис. Т.1?

а) сетевой график построен правильно.

Допущены следующие ошибки

б) события 3,5,6 образуют цикл;

в) событие 3 хвостовое;

г) нарушена кодировка событий в работе 3-2.

14. Укажите какие допущены ошибки при построении сетевого графика, изображенного на рис.Т.4?

а) событие 7 хвостовое;

б) события 2,4,6,7,8 и 5 образуют цикл;

в) события 4,8 и 5 образуют цикл;

г) события 6,7,8,5,4 образуют цикл;

д) на графике изображено 3 цикла.

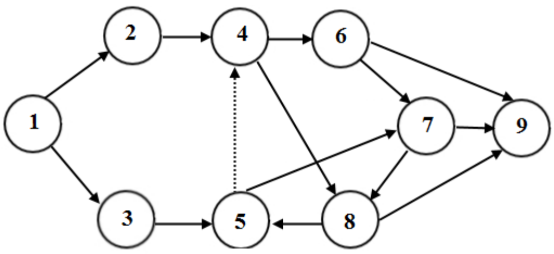


Рисунок Т.4

15. Укажите какие допущены ошибки при построении сетевого графика, изображенного на рис.Т.5?

а) между событиями 0 и 11 неправильно изображены параллельные работы;

б) события 1, 4, 6, 7, 8, 5, 2 образуют цикл;

в) нарушена кодировка событий в работе 2–1;

г) событие 3 – хвостовое;

д) на графике изображен один цикл;

е) на графике изображено два цикла;

ж) кодировка событий нарушена в шести работах;
з) кодировка событий нарушена в четырех работах.

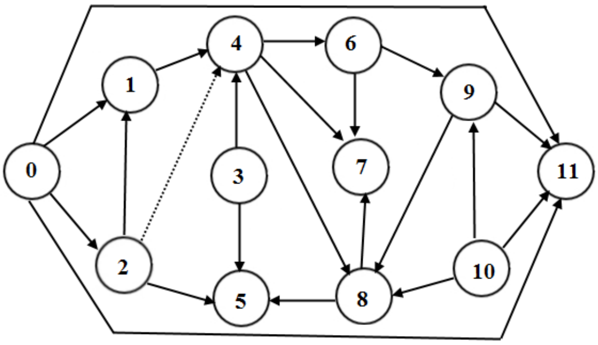


Рисунок Т.5

16. Выберите правильный вариант упорядочения представленного сетевого графика на рис. Т.6.

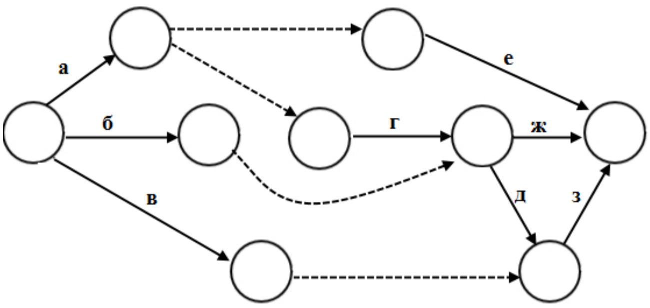
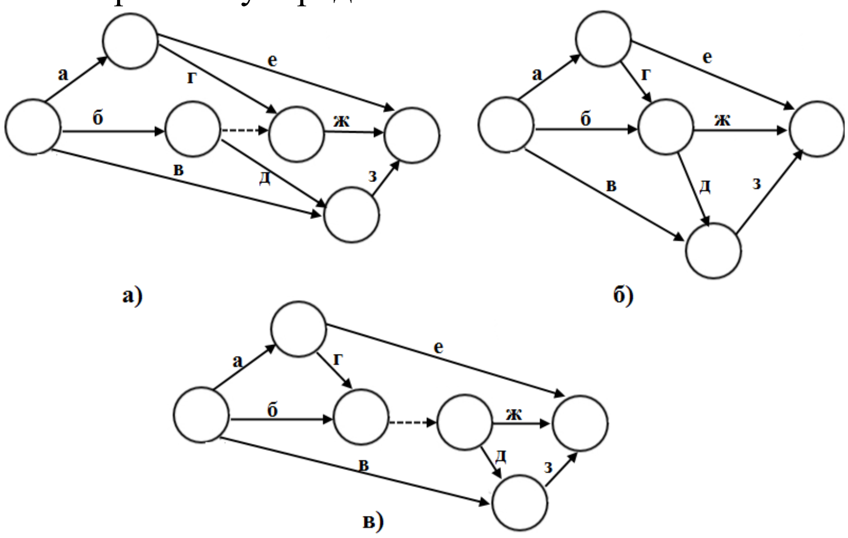


Рисунок Т.6

Варианты упорядочения:



17. Выберите правильный вариант упорядочения представленного сетевого графика на рис. Т.7.

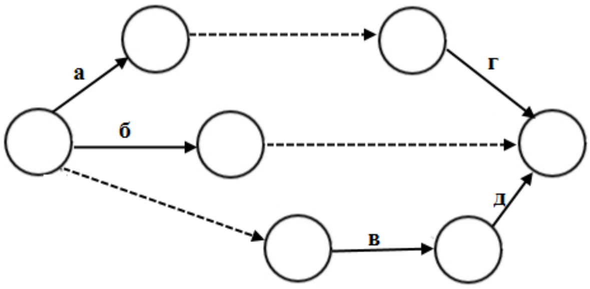
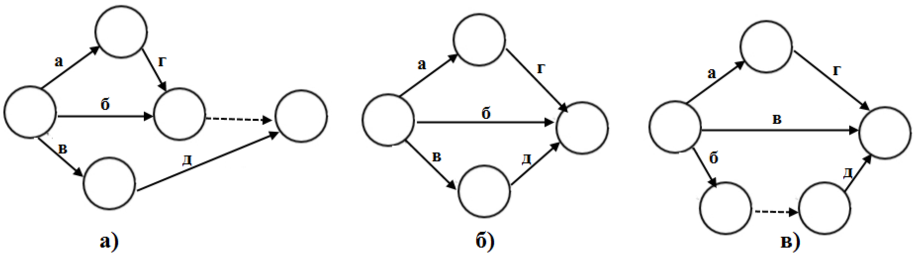
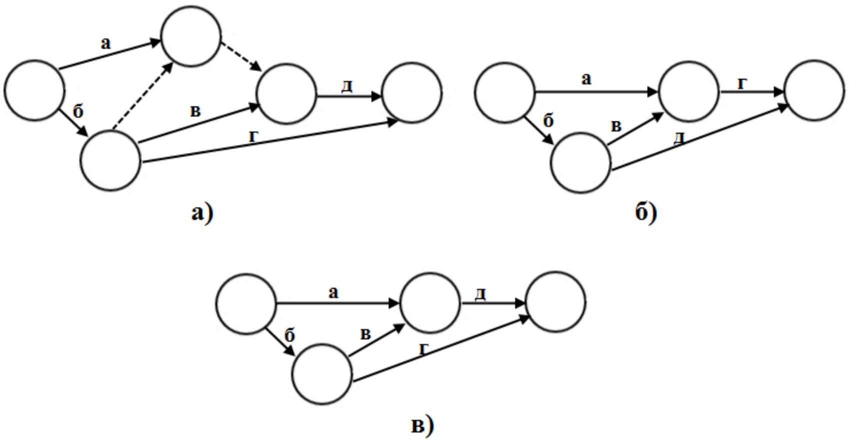


Рисунок Т.7

Варианты упорядочения:



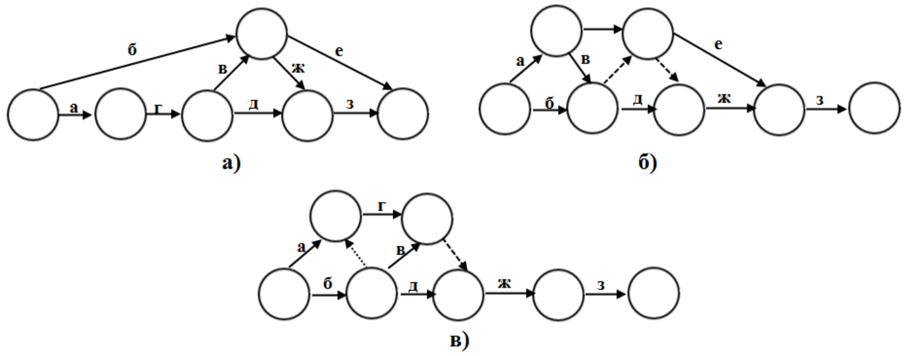
18. Даны работы **а, б, в, г, д**. Работу **г** можно начать по окончании работ **а** и **в**, работу **д**, **в** – по окончании работы **б**. Выберите правильный сетевой график.



19. Логическая связь между данной (*i-j*) и предшествующими работами (*h-i*) представлена в таблице.

h-i	*i-j*
–	а
–	б
а	в
а	г
б,в	д
б,в,г	е
б,в,г,д	ж
е,ж	з

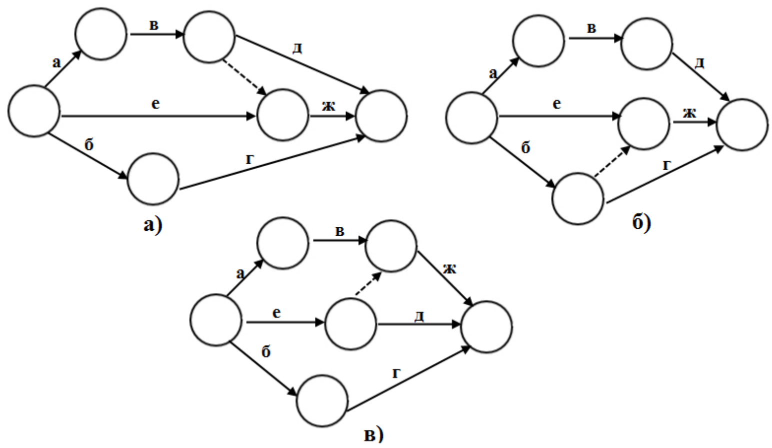
Выберите правильный сетевой график



20. Логическая связь между данной (*i-j*) и предшествующими работами (*h-i*) представлена в таблице.

h-i	*i-j*
–	а
–	б
а	в
б	г
в	д
–	е
в,е	ж

Выберите правильный сетевой график



21. Для сети (см. рис.Т.8) критический путь задается последовательностью под №__ и равен ______ .

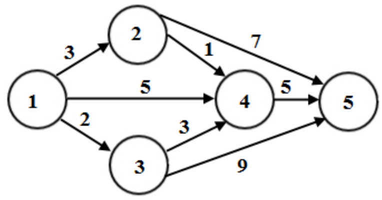


Рисунок Т.8

Варианты критического пути:

1)1→3→5; 2)1→4→5;

3)1→2→3→5; 4)1→4→3→5.

22. Для сетевой модели (см. рис. Т.9) полная продолжительность комплекса работ равна _____.

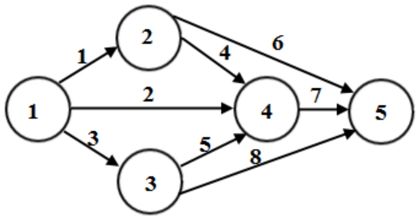


Рисунок Т.9

23. Критический путь в сети определяет минимально возможную продолжительность реализации всей программы. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

24. Сетевая модель может содержать более одного критического пути. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

25. Если в сети более одного критического пути, то их продолжительности могут быть различными. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

26. Если сетевой график имеет единственный критический путь, то этот путь проходит через все критические события. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

27. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью на рис. Т.10, является...

Варианты ответов:

1) 13; 2)16; 3)15; 4)14.

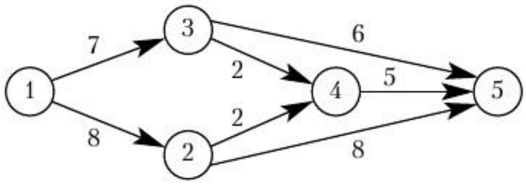


Рисунок Т.10

28. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью на рис. Т.11, является ____.

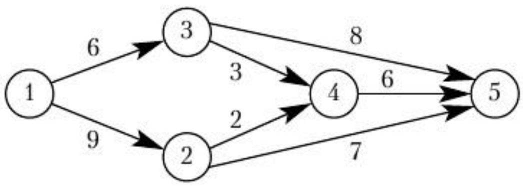


Рисунок Т.11

29. Ближайшим сроком завершения комплекса работ, представленного сетевой моделью на рис. Т.12, является ____.

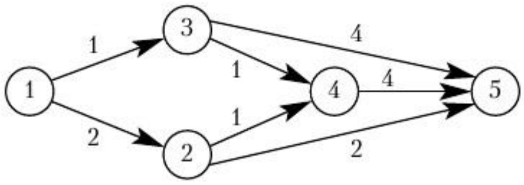


Рисунок Т.12

30. Какие работы в сетевой модели (см. рис. Т.13) являются критическими работами?

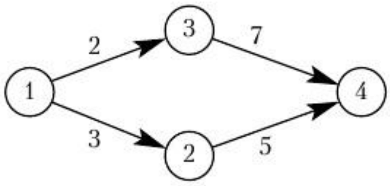


Рисунок Т.13

Варианты ответа:

1) (1,3) 2) (3,4) 3) (1,2) 4) (2,4)

31. Критическими работами в сетевой модели комплекса работ (см. рис. Т.14) являются

1) (0,2) 2) (2,4) 3) (0,1)
4) (1,3) 5) (1,4) 6) (3,4)

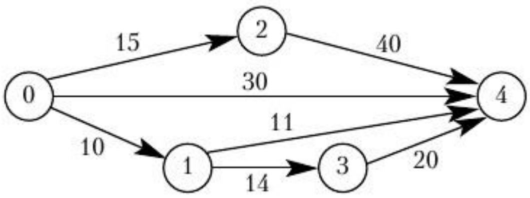


Рисунок Т.14

32. Найдите критический путь для сетевой модели, представленной на рис. Т.15.

Критический путь:__________.(Укажите номера событий, например 1267).

Длительность проекта составляет _____.

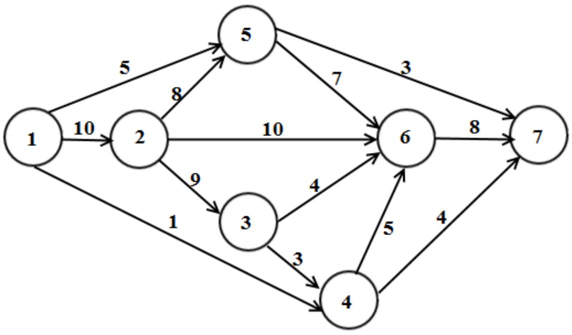


Рисунок Т.15

33. Ранний срок наступления события 4 (см. рис. Т.16) равен _____.

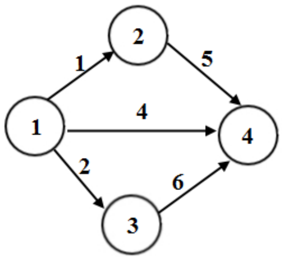


Рисунок Т.16

34. Поздний срок наступления события 2 (см. рис. Т.16) равен _____.

35. Рассчитайте ранний и поздний срок свершения событий 1,2,3,4 (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.1.

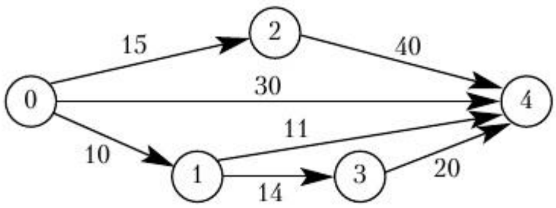


Рисунок Т.17

Таблица Т.1

Событие	**Ранний срок свершения события** $t_p(i)$	**Поздний срок свершения события** $t_n(i)$
1		
2		
3		
4		

36. Рассчитайте ранний срок окончания работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.2.

Таблица Т.2

Работа	Ранний срок окончания работ $t_{ро}(i, j)$
(0,1)	
(0,2)	
(0,4)	
(1,3)	
(1,4)	
(2,4)	
(3,4)	

37. Рассчитайте ранний срок начала работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.3.

Таблица Т.3

Работа	Ранний срок окончания работ $t_{рн}(i, j)$
(0,1)	
(0,2)	
(0,4)	
(1,3)	
(1,4)	
(2,4)	
(3,4)	

38. Найдите резерв времени наступления событий 1,2,3,4 (см. рис.Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.4.

Таблица Т.4

Событие	Резерв времени наступления события $R(i)$
1	11
2	0
3	11
4	0

39. Рассчитайте поздний срок окончания работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.5.

Таблица Т.5

Работа	Поздний срок окончания работ $t_{по}(i,j)$
(0,1)	21
(0,2)	15
(0,4)	55
(1,3)	35
(1,4)	55
(2,4)	55
(3,4)	55

40. Рассчитайте поздний срок начала работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.6.

Таблица Т.6

Работа	Поздний срок начала работ $t_{пн}(i,j)$
(0,1)	11
(0,2)	0
(0,4)	25
(1,3)	21
(1,4)	44
(2,4)	15
(3,4)	35

41. Рассчитайте полный резерв времени работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.7.

Таблица Т.7

Работа	Полный резерв времени работ $R_п(i,j)$
(0,1)	11
(0,2)	0
(0,4)	25
(1,3)	11
(1,4)	34
(2,4)	0
(3,4)	11

42. Рассчитайте свободный резерв времени работ (см. рис. Т.17). Результаты занесите в таблицу Т.8.

Таблица Т.8

Работа	**Независимый резерв времени работ** $R_c(i,j)$
(0,4)	25
(1,4)	34
(2,4)	0
(3,4)	11

43. Коэффициент напряженности для работы (2,4) (см. рис. Т.17) равен ____.

44. Сколько работ имеют одинаковый свободный резерв времени (см. рис. Т.17)? Впишите ответ _____.

45. Сколько работ имеют одинаковый частный резерв времени первого вида (см. рис. Т.17)? Впишите ответ _____.

46. Сколько работ имеют одинаковый независимый резерв времени (см. рис. Т.17)? Впишите ответ _______.

47. Частый резерв времени первого вида работы (0,1) (см. рис. Т.17) равен ___.

48. Частый резерв времени первого вида работы (0,4) (см. рис. Т.17) равен ___.

49. Полный и свободный резерв времени критической операции должны быть равны 0. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

50. Впишите пропущенное слово.

_______________ времени пути определяется как разность между длиной критического и рассматриваемого пути.

51. Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление этого события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

52. Важным свойством полного резерва времени работы заключается в том, что он принадлежит не только этой работе, но и всем полным путям, которые проходят через нее. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

53. Рассчитайте независимый резерв времени работ (см. рис. Т. 17). Результаты занесите в таблицу Т.9.

Таблица Т.9

Работа	**Независимый резерв времени работ** $R_н(i,j)$
(0,4)	25
(1,3)	-11
(1,4)	23
(3,4)	0

54. У каких работ все резервы времени одинаковые (рис.Т.17)?

а) (1,4) б)(2,4) в)(3,4)

г)(0,2) д)(0,1) е)(0,4) ж)(1,3)

55. Анализ сетевого графика начинается с классификации и группировки работ по величинам резервов. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

56. Установите соответствие между значением коэффициента напряжения и зоной, вписав соответствующий номер зоны в окошко напротив значения коэффициента напряжения.

Таблица Т.10

№	**Значение коэффициента напряжения**	**Зона**
	$K_н(i,j) < 0.6$	1. Подкритическая.
	$0.6 \le K_н(i,j) \le 0.8$	2. Резервная.
	$K_н(i,j) > 0.8$	3. Критическая.

57. Рассчитайте коэффициент напряженности работ (см. рис. Т.18). Результаты занесите в таблицу Т.11.

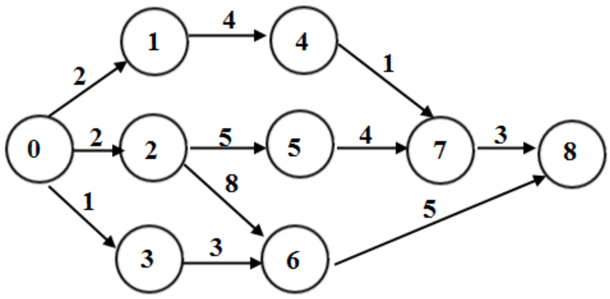


Рисунок Т.18

Таблица Т.11

Работа	**Коэффициент напряженности работ** $K_н(i, j)$
(2,6)	
(3,6)	
(4,7)	
(5,7)	

58. Сколько работ относится к критической зоне (рис.Т.18)?

59. Сколько работ относится к резервной зоне (рис. Т.18)?

60. Выберите правильный вариант расчета представленного сетевого графика (см. рис.Т.19). В верхнем секторе должен быть указан номер предшествующего события, через которое ведет максимальный путь к данному событию, в нижнем секторе – номер данного события.

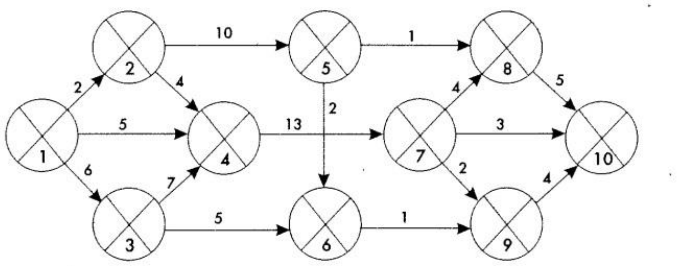
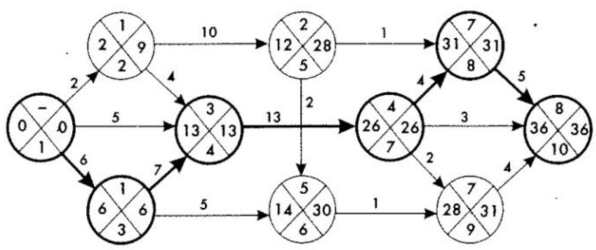


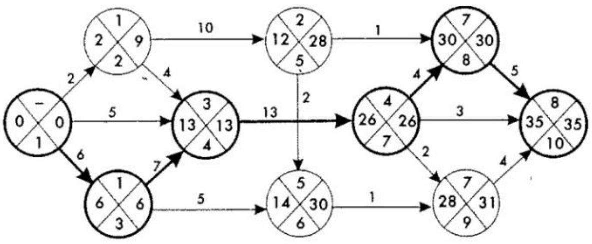
Рисунок Т.19

Варианты расчета:

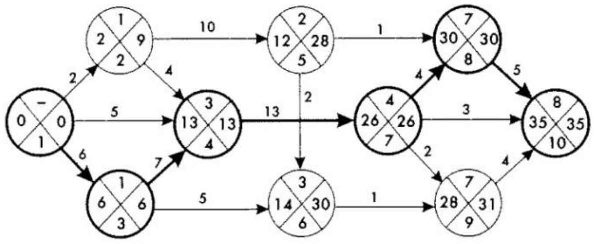
а)



б)



в)



61. Выберите правильный вариант расчета представленного сетевого графика (см. рис. Т.20). В нижнем секторе указан полный резерв данного события.

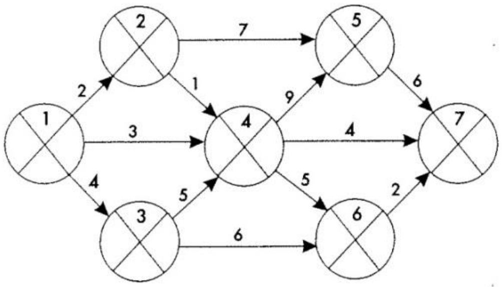
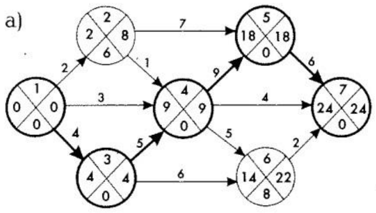
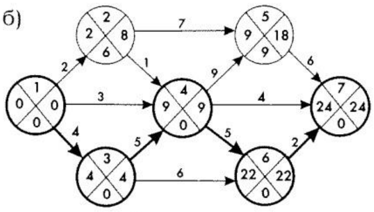
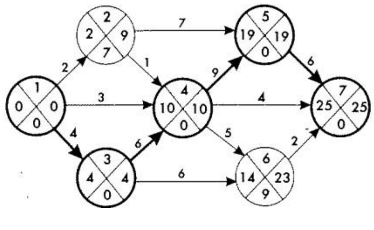


Рисунок Т.20

Варианты расчета:







62. Выберите правильный вариант расчета представленного сетевого графика (см. рис. Т.21). В верхнем секторе должен быть указан номер предшествующего события, через которое ведет максимальный путь к данному событию, в нижнем секторе — номер данного события.

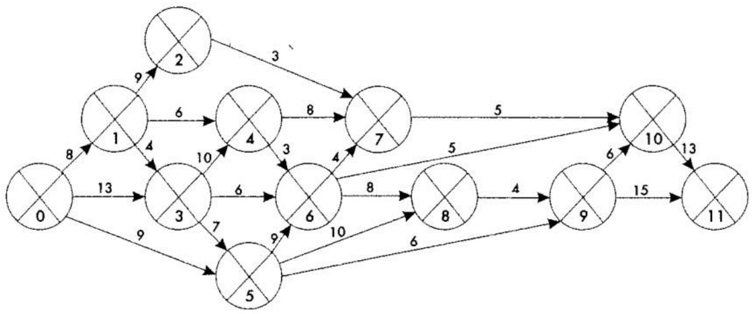
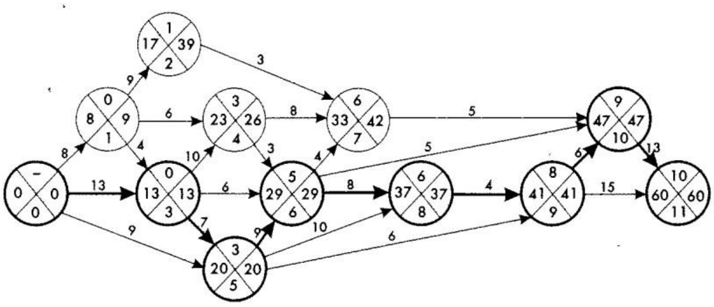


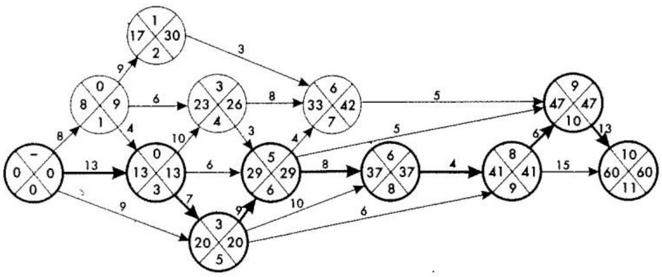
Рисунок Т.21

Варианты расчета:

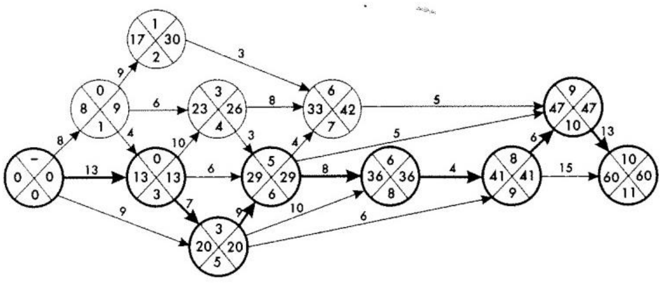
а)



б)



в)



63. Впишите пропущенное слово.

_________________ сетевого графика представляет процесс улучшения организации выполнения комплекса работ с учетом срока его выполнения.

64. Впишите пропущенное слово.

_____________________ оптимизация представляет собой нахождение оптимального соотношения величин стоимости и сроков выполнения проекта в зависимости от конкретных целей, ставящихся при его реализации.

65. Какая методика позволяет рассчитывать сетевые графики с вероятностной продолжительностью работ?

а)GERT б)PERT в)CPM

66. Видами комплексной оптимизации сетевого графика являются: минимизация времени выполнения комплекса работ при заданной его стоимости; минимизация стоимости комплекса работ при заданном времени выполнения проекта. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

67. При использовании метода «время – стоимость» предполагают, что уменьшение продолжительности работы пропорционально уменьшению ее стоимости. Верно ли это утверждение?

а)Верно.

б)Неверно.

68. Вероятностная продолжительность работы характеризуется:

а)средним значением;

б)дисперсией;

в)медианой;

г)средним геометрическим отклонением;

д) модой.

69. Расчет средней продолжительности работы осуществляется исходя из:

а) двух оценок;

б) трех оценок;

в) одной оценки.

70. При вероятностной оценке продолжительности всего проекта рассчитываются:

а) стандартное нормальное отклонение продолжительности критического пути;

б) среднее квадратическое отклонение продолжительности критического пути;

в) средняя продолжительность критического пути.

71. Найдите критическое время выполнения комплекса операций, представленного на рисунке Т.22, используя средние оценки продолжительности и дисперсию. Оптимистическая и пессимистические оценки для каждой операции заданы в таблице Т.12. Результаты (округлите до сотых, например, 5.56) занесите в табл. Т.13.

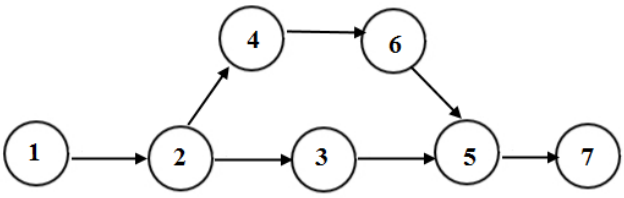


Рисунок Т.22

Таблица Т.12

Исходные параметры		
Работа (i,j)	$t_o(i,j)$	$t_n(i,j)$
(1,2)	1	3.5
(2,3)	2	4.5
(2,4)	2.5	6.25
(4,6)	5	10
(6,5)	3	5.5
(3,5)	1.5	2.75
(5,7)	8	10.5

Таблица Т.13

Работа	$\bar{t}_{кр}(i,j)$	$\bar{\sigma}_{кр}(i,j)$
(1,2)	2	0.25
(2,3)	3	0.25
(2,4)	4	0.56
(4,6)	7	1
(6,5)	4	0.25
(3,5)	2	0.06
(5,7)	9	0.25
$\bar{t}_{кр}$	26	

72. Определите дисперсию критического пути выполнения комплекса операций, представленного на рисунке Т.22, используя средние оценки продолжительности. Оптимистическая и пессимистические оценки для каждой операции заданы в таблице Т.12.Результаты округляйте до сотых, например, 5.56.

73. Определите вероятность выполнения комплекса операций за Т=25 дней (рис. Т.22). В таблице Т.12 для каждой операции заданы оптимистическая и пессимистические оценки. Результаты округлите до сотых, например, 5.56.

74. Определите вероятность выполнения комплекса операций за T=32 дня. Известно, что $\bar{t}_{кр}$=26, $\overline{\sigma^2}_{кр}$=2.31. Результаты округлите до сотых, например, 5.56.

75. За какое время комплекс операций будет выполнен с вероятностью не меньшей P=0.75. Известно, что $\bar{t}_{кр}$=26, $\overline{\sigma^2}_{кр}$=2.31. Результаты округлите до сотых, например, 5.56.

ОТВЕТЫ К ТЕСТУ

1. Сетевая модель.
2. Событие.
3. 1-3-2.
4. Путь.
5. Критическим путем.
6. Полный путь.
7. б.
8. Неверно.
9. Верно.
10. Неверно.
11. 1.
12. в.
13. г.
14. в,г,д.
15. а,в,г,д
16. б.
17. б.
18. б.
19. б.
20. а.
21. 1 и 11
22. 15.
23. Неверно.
24. Верно.
25. Неверно.
26. Верно.
27. 2.
28. 17.
29. 7.
30. 1,2.
31. 1,2.
32. 123467, 35.
33. 8.
34. 3.
35. 10,15,24,55; 21,15,35,55.
36. 10, 15,30,24,21,55,44.
37. 0,0,0,10,10,15,24.
38. 11,0,11,0.
39. 21,15,55,35,55,55,55.
40. 11,0,25,21,44,15,35.
41. 11,0,25,11,34,0,11.
42. 25,34,0,11.
43. 1.
44. 4.

45. 5.
46. 4.
47. 11.
48. 25.
49. Верно.
50. Резерв.
51. Верно.
52. Верно.
53. 25,-11,23,0.
54. б,г,е.
55. Неверно.
56. 2-1-3.
57. 1;0.4;0.67;0.93.
58. 3.
59. 2.
60. б.
61. а.
62. а.
63. оптимизация.
64. комплексная.
65. б.
66. Неверно.
67. Неверно.
68. а,б.
69. а,б.
70. в.
71. Результаты

Работа	$\bar{t}_{кр}(i,j)$	$\bar{\sigma}_{кр}(i,j)$
(1,2)	2	0.25
(2,3)	3	0.25
(2,4)	4	0.56
(4,6)	7	1
(6,5)	4	0.25
(3,5)	2	0.06
(5,7)	9	0.25
$\bar{t}_{кр}$	26	

72. 2.31
73. 0.25
74. 1
75. 27.03

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бенгина, Т. А. Сетевое планирование и управление: учебное пособие / Т. А. Бенгина. – Самара : Самарский государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2021. – 44 с. – Текст: электронный // Цифровой образовательный ресурс IPR SMART: [сайт]. – URL: https://www.iprbookshop.ru/111773.html (дата обращения: 18.04.2022). – Режим доступа: для авторизир. пользователей).

2. Вентцель, Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология : учеб. Пособие. 5-е изд., стер. / Е.С. Вентцель. − М.: КНОРУС, 2010. − 192с.

3. Исследование операций в экономике: учебник для академического бакалавриата / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; пол ред. Н.Ш. Кремера. – 3-е изд., перераб. и доп. − М.: Юрайт, 2018. − 438с.

4. Новиков, А. И. Экономико-математические методы и модели: учебник / А. И. Новиков. – Москва: Дашков и К°, 2020. – 532 с.: ил. – (Учебные издания для бакалавров). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573375 (дата обращения: 18.04.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-03782-5. – Текст : электронный.

5. Плескунов, М.А. Задачи сетевого планирования: учебное пособие/ М.А. Плескунов. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 92 с.

6. Попов, А.М. Экономико-математические методы и модели: учебник для прикладного бакалавриата / А.П. Попов, В.Н. Сотников; под общ. ред. А.М. Попова. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Юрайт, 2017. – 345с.

7. Шапкин, А. С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. – 7-е изд. – Москва: Дашков и К°, 2019. – 398 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373 (дата обращения: 18.04.2022). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-394-02736-9. – Текст: электронный.

Шевченко Алеся Сергеевна

МЕТОДЫ СЕТВЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие для студентов направления 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»

Подписано к печати 08.06.22. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,69. Тираж 25 экз. Зак. 221817. Рег. № 18.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.