МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Рубцовский индустриальный институт**
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

**А.С. Шевченко**

# ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Учебное пособие для студентов
направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»

***Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «ИВТ»***

Рубцовск 2021

УДК 519.8

Шевченко А.С. Линейное программирование: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 150 с.

Учебное пособие содержит теоретические сведения, необходимые для изучения раздела «Линейное программирование» учебного курса «Моделирование прикладных и информационных процессов». Изложение сопровождается примерами решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», а также для преподавателей вузов, инженеров и научных работников.

Рассмотрены и одобрены на заседании НМС Рубцовского индустриального института.
Протокол № _ от __.03.2021г.

Рецензент: канд. физ.–мат. наук, Дудник В.Г.

# Содержание

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В практических ситуациях, возникающих в экономике, планировании, управлении и других областях, часто требуется из множества допустимых решений выбрать одно, наилучшее в определенном смысле решения. Число допустимых вариантов поведения может быть слишком велико, и выбор наилучшего из них, исходя из практического опыта или ситуации, представляет собой весьма трудную задачу. В этом случае для поиска наилучшего решения используются научно обоснованные методы, в том числе математические. Для применения таких моделей исследуемый процесс должен быть представлен в виде математической модели, т.е. математической задачи, которая количественно описывает основные закономерности процесса и его цель (критерий оптимизации). Задачи нахождения наилучшего решения называются **оптимизационными**. Очень часто цель оптимизации описывается в виде функции многих переменных, а допустимое множество решений задается системой функциональных равенств и/ или неравенств.

Достаточно часто при анализе прикладных задач используются модели, в которых все функции линейные. Это **задачи линейного программирования**. Теория и методы решения такого типа задач хорошо известны. Основы линейного программирования были заложены в работах советского математика Л.В. Канторовича в конце 1930-х гг. Значительное развитие теория и алгоритмический аппарат линейного программирования получили после разработки в 1947 г. американским ученым Дж. Данцигом симплекс-метода, а также изобретения и распространения ЭВМ.

В учебном пособии излагаются основы линейного программирования, включая теорию двойственности. В пособии содержатся теоретические сведения по указанным разделам, примеры решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения направления подготовки 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

# ТЕМА 1: ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 1.1. Общая схема построения математических моделей задач линейного программирования

В общем смысле **модель** – это система, способная заменить оригинал (то есть реальную систему) так, чтобы её изучение давало информацию об оригинале. Модель может полностью или частично воспроизводить структуру моделируемой системы и её функции. **Моделирование** – процесс построения, реализации и исследования модели, который способен заменить реальную систему и дать информацию о ней.

**Математическая модель** – система математических и логических соотношений, которые описывают структуру и функции реальной системы.

**Математическая модель задачи линейного программирования** (ЗЛП) составляется путем анализа по следующей схеме:

1) вводят переменные;

2) формируют целевую функцию;

3) формируют ограничения;

4) налагают условия неотрицательности переменных (или указывают интервалы изменения переменных).

## 1.2. Задача об оптимальном использовании ресурсов (задача планирования производства)

Производственная задача об оптимальном использовании ресурсов является одной из важнейших задач линейного программирования. Рассмотрим её экономическую постановку. Пусть предприятие выпускает $n$ различных видов изделий $P_1, P_2, ..., P_n$, для изготовления которых требуется $m$ различных типов ресурсов $S_1, S_2, ..., S_m$. Ресурсами могут быть различные виды сырья, вспомогательные материалы, полуфабрикаты, электроэнергия, запасы машинного времени, людские ресурсы и т.п. Объём каждого типа ресурсов всегда ограничен и в планируемый период составляет соответственно $b_1, b_2, ..., b_m$ условных единиц.

Считаются известными также технологические коэффициенты $a_{ij}$, показывающие сколько единиц $i$-го ресурса $S_i$ требуется для производства единицы $j$-го вида изделия $P_j$ $\left(i=\overline{1,m}\,;\ j=\overline{1,n}\right)$. Кроме того, считается известной прибыль $c_j$, получаемая от реализации (продажи) единицы изделия вида $P_j$, $j=\overline{1,n}$.

В планируемый период все показатели $b_i$, $a_{ij}$ и $c_j$ предполагаются постоянными. Требуется составить такой оптимальный план выпуска продукции, при котором прибыль от её реализации будет максимальной.

Все данные производственной задачи представим для наглядности в виде табл. 1.1.

Таблица 1.1 – Исходная информация задачи об оптимальном использовании ресурсов

| **Виды ресурсов** | **Виды изделия** | | | | | | **Запасы ресурсов** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | … | $P_j$ | … | $P_n$ | |
| $S_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $S_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2j}$ | … | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | | | | | | … |
| $S_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ | $b_i$ |
| … | … | | | | | | … |
| $S_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| **Прибыль от реализации единицы изделия** | $c_1$ | $c_2$ | … | $c_j$ | … | $c_n$ | |

Составим математическую модель задачи. Введем обозначения:

$x_1$ – количество изделий вида $P_1$,

$x_2$ – количество изделий вида $P_2$,

…

$x_n$ – количество изделий вида $P_n$ планируется выпустить.

Для производства всех изделий вида $P_1$ потребуется использовать ресурс первого вида $S_1$ в количестве $a_{11}x_1$ усл. единиц. Общее количество ресурса $S_1$, используемого при выпуске всех видов изделий, определяется выражением $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n$. Количество ресурса $S_1$ ограничено величиной $b_1$. Поскольку расход ресурса $S_1$ не может превосходить его запаса, то должно выполняться неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1$. В общем виде расход *i*-го ресурса не должен быть больше $b_i$, поэтому соответствующее неравенство примет вид $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i$. Очевидно, что для всех применяемых видов ресурсов должны выполняться такие ограничения (ограничения по объему соответствующего ресурса). Иначе говоря, при производстве по заданному плану можно использовать либо весь запас этого ресурса, либо его часть.

Кроме того, $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$, так как количество выпускаемых изделий не может быть отрицательным числом.

Доход от реализации всех изделий вида $P_1$ равен $c_1x_1$ ден. единиц. Общая прибыль, получаемая от реализации (продажи) всей продукции $P_1,\ P_2,\ ...,\ P_n$, производимой соответственно в количестве $x_1, x_2, ..., x_n$ единиц, представляется в виде линейной функции $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$.

Требуется составить такой оптимальный план объёма выпускаемой продукции $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, при котором прибыль $Z(X)$ будет наибольшей. Функция $Z(X)$ выражает конечную цель производства – получение наибольшей прибыли. Поэтому её называют целевой или функцией цели.

Таким образом, математическая модель производственной задачи использования ресурсов в общей постановке имеет следующую формулировку: требуется найти такой план объёма выпускаемой продукции $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$

и условиям

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ ...,\ x_n \ge 0,$$

при котором целевая функция принимает наибольшее значение:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max.$$

Рассмотрим задачу с конкретными данными.

**Пример 1.1.** Прибыль от реализации единицы продукции $P_1$ составляет 4 рубля, а от единицы продукции $P_2$ – 5 рубля. Данные о запасах и количестве ресурсов, необходимых для изготовления единицы продукции, сведены в следующую таблицу:

| Виды ресурсов | Запасы ресурсов | Число единиц ресурса, затрачиваемых на изготовление единицы продукции | |
|---|---|---|---|
| | | $P_1$ | $P_2$ |
| $S_1$ | 20 | 1 | 3 |
| $S_2$ | 18 | 2 | 1 |
| $S_3$ | 7 | - | 1 |
| $S_4$ | 23 | 3 | – |

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

**Математическая модель** данной задачи будет иметь вид:

$$Z\left(x_1, x_2\right) = 4x_1 + 5x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 20, \\ 2x_1 + x_2 \le 18, \\ \qquad x_2 \le 7, \\ \quad 3x_1 \le 23, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

## 1.3 Задача составления рациона (задача о диете, задача о смесях)

Другая классическая задача линейного программирования связана с проблемой подбора оптимального набора пищевых продуктов для составления диеты.

Задача имеет следующее содержание. Рассмотрим условную ситуацию. Дневная диета содержит $m$ видов различных питательных веществ $S_1, S_2, \ldots, S_m$ соответственно не менее $b_1, b_2, \ldots, b_m$ условных единиц. Имеется $n$ различных видов продуктов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ , каждый из которых содержит $m$ видов питательных веществ, например, жиров, белков, углеводов. Обозначим $a_{ij}$ − содержание в весовых единицах $i$-го питательного вещества в единице веса $j$-го продукта, $c_j$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ − стоимость единицы веса продукта с номером $j$. Необходимо определить состав и количество продуктов, необходимых для включения в диету. При этом суточные потребности должны быть удовлетворены с минимальными денежными затратами. Сведем данные условия в табл. 1.2.

Таблица 1.2 – Исходная информация задачи о диете

| **Виды питательных веществ** | **Виды продуктов** | | | | | | **Минимальная суточная потребность в питательном веществе, усл.ед.** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $P_1$ | $P_2$ | $\dots$ | $P_j$ | $\dots$ | $P_n$ | |
| $S_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\dots$ | $a_{1j}$ | $\dots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| $S_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\dots$ | $a_{2j}$ | $\dots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| $\dots$ | $\dots$ | | | | | | $\dots$ |
| $S_i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $\dots$ | $a_{ij}$ | $\dots$ | $a_{in}$ | $b_i$ |
| $\dots$ | $\dots$ | | | | | | $\dots$ |
| $S_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\dots$ | $a_{mj}$ | $\dots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| **Стоимость единицы веса продукта** | $c_1$ | $c_2$ | $\dots$ | $c_j$ | $\dots$ | $c_n$ | |

Составим математическую модель задачи. Введем обозначения:

$x_1$ – количество потребления продукта вида $P_1$,

$x_2$ – количество потребления продукта вида $P_2$,

$\dots$

$x_n$ – количество потребления продукта вида $P_n$ в сутки.

В результате потребления $x_1$ ед. продукта вида $P_1$ содержание питательного вещества $S_1$ в суточной норме потребления составит $a_{11}x_1$ усл. единиц. Общее содержание питательного вещества $S_1$ в рационе определяется выражением $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n$. Поскольку содержание питательного вещества $S_1$ в рационе не должно быть меньше минимальной суточной потребности организма, т.е. величины $b_1$, то должно выполняться неравенство $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ge b_1$. В общем виде, содержание $i$-го питательного вещества в рационе не должно быть меньше $b_i$, поэтому необходимо выполнение неравенства $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$. Выполнение подобных ограничений описывает требование к диете, которое разрешает потреблять каждый вид питательного вещества в объеме не менее минимальной суточной потребности организма.

Кроме того, $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$, так как количество потребляемых продуктов не может быть отрицательным числом.

Стоимость всего рациона определяет линейная функция $Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$.

Итак, математическая формулировка задачи о диете имеет вид: найти неотрицательные значения переменных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

и минимизирующих функцию

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \min.$$

Рассмотрим задачу с конкретными данными.

**Пример 1.2.** Стоимость 1 кг корма вида I – 6 рубля, а вида II – 8 рублей. Необходимые данные представлены в таблице:

| **Виды питательных веществ** | **Необходимый минимум питательных веществ** | **Число единиц питательного вещества в 1кг корма** | |
|---|---|---|---|
| | | I | II |
| $S_1$ | 11 | 3 | 1 |
| $S_2$ | 10 | 1 | 2 |
| $S_3$ | 14 | 1 | 6 |

Необходимо составить такой рацион питания, чтобы стоимость его была минимальной и содержание каждого вида питательных веществ было не менее установленного предела.

**Математическая модель** данной задачи будет иметь вид:

$$Z(x_1, x_2) = 6x_1 + 8x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 11, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 + 6x_2 \ge 14, \\ x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0. \end{cases}$$

## 1.4 Транспортная задача

Имеются $m$ пунктов отправления груза (поставщики) и объемы отправления по каждому пункту $a_1, a_2, ..., a_m$. Известна потребность в грузах $b_1, b_2, ..., b_n$ по каждому из $n$ пунктов назначения (потребители). Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту $c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Требуется составить план перевозок груза так, чтобы максимально удовлетворить всех потребителей, вывезти груз от поставщиков и чтобы общие затраты на перевозки были минимальными. Все данные располагают в табл. 1.3, которую называют распределительной таблицей:

Таблица 1.3 – Исходная информация транспортной задачи

| **Поставщики** | **Потребители** | | | | **Запасы поставщиков** |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| **Спрос потребителей** | $b_1$ | $b_2$ | | $b_n$ | |

Введем обозначение: $x_{ij}$ – количество груза, которое нужно перевезти из $i$-го пункта отправления в $j$-й пункт назначения.

Запишем математическую модель задачи:

1) объем поставок $i$-го поставщика должен равняться количеству имеющегося у него груза:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m};$$

2) объем поставок $j$-му потребителю должен быть равен его спросу:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n};$$

3) запас груза у поставщиков должен равняться суммарному спросу потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

4) размер поставок должен выражаться неотрицательным числом:

$$x_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n};$$

5) общая сумма затрат на перевозку груза должна быть минимальной:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min.$$

Модель транспортной задачи линейного программирования может использоваться для планирования ряда операций, не связанных с перевозкой грузов. Так, с ее помощью решаются задачи по оптимизации размещения производства, топливно-энергетического баланса, планов загрузки оборудования, распределения сельскохозяйственных культур по участкам различного плодородия.

**Пример 1.3.** Две шахты обеспечивают три электростанции углём. Расстояния от каждой шахты к каждой электростанции, запасы угля на каждой шахте и потребности в угле каждой электростанции внесены в таблицу:

| **Количество угля на шахтах, тыс. т** | **Потребности в угле электростанциями, тыс. т** | | |
|---|---|---|---|
| | 170 | 110 | 160 |
| 120 | 30<br>$x_{11}$ | 40<br>$x_{12}$ | 0<br>$x_{13}$ |
| 320 | 20<br>$x_{21}$ | 50<br>$x_{22}$ | 15<br>$x_{23}$ |

Определите план закрепления шахт за электростанциями, чтобы транспортные расходы (суммарное количество тонно-километров) были минимальными (ограничиться составлением математической модели).

Введём переменные $x_{ij} \ge 0$ $(i=\overline{1,2};\ j=\overline{1,3})$ – количество угля, которое планируется перевозить от *i*-ой шахты до *j*-ой электростанции.

Модель нашей задачи закрыта, так как объём ресурсов равен объёму потребностей: 120+320=170+110+160.

**Математическая модель** данной задачи будет иметь вид:

$$Z(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23}) = 30x_{11} + 40x_{12} + 0x_{13} + 20x_{21} + 50x_{22} + 15x_{23} \to \min ,$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 120, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 320, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 170, \\ x_{12} + x_{22} = 110, \\ x_{13} + x_{23} = 160, \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0,\ \left(i=\overline{1,2},\ j=\overline{1,3}\right).$$

## 1.5 Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства продукции по времени и номенклатуре: требуется за время *T* выпустить $n_1,\ n_2,\ldots,\ n_k$ единиц продукции $P_1,\ P_2,\ldots,\ P_k$. Продукция производится на станках $S_1,\ S_2,\ldots,\ S_m$. Для каждого станка известны производительность $a_{ij}$ (т.е. число единиц продукции, которое можно произвести на станке $S_i$) и затраты $b_{ij}$ на изготовление продукции $P_j$ на станке $S_i$ в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков (т.е. так распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Составим математическую модель задачи.

Обозначим $x_{ij}$ − время, в течение которого станок $S_i$ будет занят изготовлением продукции $P_j$ ($i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}$).

Время работы каждого станка ограничено и не превышает *T*. Следовательно:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1k} \le T, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2k} \le T, \\ \qquad \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mk} \le T. \end{cases} \tag{1.1}$$

Для выполнения плана по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} + \ldots + a_{m1}x_{m1} = n_1, \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{21} + \ldots + a_{m2}x_{m2} = n_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{1k}x_k + a_{2k}x_{2k} + \ldots + a_{mk}x_{mk} = n_k. \end{cases} \tag{1.2}$$

Кроме того,

$$x_{ij} \ge 0 \ ( i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,k} ). \tag{1.3}$$

Затраты на производство всей продукции выразятся функцией

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}b_{ij} \to \min . \tag{1.4}$$

Задача состоит в том, чтобы найти такое решение $X = \left(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mk}\right)$, удовлетворяющее системам (1.1) − (1.2) и условию (1.3), при котором функция $Z$ принимает минимальное значение.

## 1.6 Задача о раскрое материалов

Эту задачу можно рассмотреть в двух постановках.

**Первая постановка**. Для изготовления изделий $m$ типов выполняется раскрой одинаковых заготовок материала. Имеется $n$ способов раскроя. Для каждого способа раскроя известно количество изделий каждого типа, получаемых из одной заготовки: $a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,\ n}$; здесь $a_{ij}$ – количество изделий $i$-го типа, получаемых из одной заготовки при ее раскрое $j$-м способом. Известны величины отходов для каждого способа раскроя: $c_j$, $j = \overline{1,\ n}$. Задано количество изделий каждого типа, которые требуется получить при раскрое: $b_i$, $i = \overline{1,m}$. Требуется составить оптимальный план раскроя материала, т.е. найти, сколько заготовок требуется раскроить каждым из способов, чтобы получить заданное количество изделий при минимальных отходах (табл. 1.4).

Таблица 1.4 – Схема раскроя материала

| **Виды заготовок** | **Варианты раскроя** | | | | | | **План по заготовкам** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | … | $j$ | ... | $n$ | |
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $\cdots$ | $a_{1j}$ | $\cdots$ | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $\cdots$ | $a_{2j}$ | $\cdots$ | $a_{2n}$ | $b_2$ |
| … | … | | | | | | … |
| $i$ | $a_{i1}$ | $a_{i2}$ | $\cdots$ | $a_{ij}$ | $\cdots$ | $a_{in}$ | $b_i$ |
| ... | … | | | | | | … |
| $m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | $\cdots$ | $a_{mj}$ | $\cdots$ | $a_{mn}$ | $b_m$ |
| **Величины отходов для каждого способа раскроя** | $c_1$ | $c_2$ | $\cdots$ | $c_j$ | $\cdots$ | $c_n$ | |

Обозначим количество заготовок, раскраиваемых по *j*–му способу, как $x_j$. Тогда **математическая модель задачи** формулируется следующим образом:

$$Z\left(X\right)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \to \min,$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases}$$
$$x_1,x_2,...,x_n \geq 0.$$

**Пример 1.4.** Требуется разработать оптимальный план раскроя стандартных листов стали, обеспечивая выход планового числа заготовок разного вида при минимальных суммарных отходах, если известно, что из партии листовой стали необходимо нарезать четыре вида различных заготовок в количестве 240, 200, 120, 140 штук. Лист стали стандартных размеров может быть раскроен четырьмя способами. Каждому возможному способу раскроя соответствует карта раскроя. Из карт раскроя известен выход заготовок в штуках разных видов $a_{ij}$, $i=\overline{1,4}$, $j=\overline{1,4}$, а также площадь отходов $c_j$, $j=\overline{1,4}$ при раскрое одного листа стали по *j*-му способу раскроя. Какое количество листов стали необходимо раскроить тем или иным способом, чтобы отходы были минимальными?

| Виды заготовок | План-задание по количеству заготовок ($b_i$) | Выход заготовок (шт.) разных видов из карт раскроя ($a_{ij}$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | **1** | **2** | **3** | **4** |
| **1** | 240 | 1 | 4 | 0 | 1 |
| **2** | 200 | 1 | 0 | 4 | 0 |
| **3** | 120 | 1 | 0 | 0 | 3 |
| **4** | 140 | 1 | 1 | 0 | 3 |
| **Площадь отходов,** $м^2$ **(**$c_j$**)** | | 1.4 | 0.1 | 2.1 | 0.1 |

Составим **математическую модель задачи**. Обозначим через $x_j$, $j=\overline{1,4}$ – количество исходного материала (листов стали), которые необходимо раскроить по одному из способов *j*. Ограничения в задаче должны соответствовать плановому выходу заготовок различных видов. Целевая функция сводиться к нахождению минимума отходов при раскрое:

$$Z\left(x_1, x_2, x_3, x_4\right) = 1.4\cdot x_1 + 0.1\cdot x_2 + 2.1\cdot x_3 + 0.1\cdot x_4 \to \min .$$

Ограничения по выходу заготовок *i*-го вида по всем *j* способам раскроя:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 0x_3 + x_4 = 240, \\ x_1 + 0x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 200, \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 120, \\ x_1 + x_2 + 0x_3 + 3x_4 = 140, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0 .$$

**Вторая постановка**. На раскрой (распил, обработку) поступает материал одного образца в количестве *a* единиц. Требуется изготовить из него *m* разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам $b_1,\ b_2,...,b_m$ (условие комплектности). Каждая единица материала может быть раскроена *n* различными способами, причем использование *i*-го способа $\left(i=\overline{1,n}\right)$ дает $a_{ij}$ единиц *j*-го изделия $\left(j=\overline{1,m}\right)$. Необходимо найти план раскроя, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Составим **математическую модель** задачи.

Обозначим через $x_i$ – число единиц материала, раскраиваемых *i*-ым способом, и *x* – число изготавливаемых комплектов изделий. Тогда целевая функция сводиться к нахождению

$$Z = x \to \max ,$$

при ограничениях (по общему количеству материала равного сумме его единиц, раскраиваемых различными способами; по требованию комплектности и не отрицательности переменных):

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i = a, \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = b_j x, \; j = \overline{1,m}, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \; i = \overline{1,n}.$$

**Пример 1.5.** Для изготовления брусьев длиной 1.2 м, 3 м и 5 м в соотношении 2:1:3 на распил поступает 190 бревен длиной 6 м. Определите план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов.

Составим математическую модель задачи. Определим сначала все возможные способы распила бревен, указав соответствующее число получающихся при этом брусьев и остаток:

| **Способ распила бревен** | **Число получающихся брусьев** | | | **Остаток** |
|---|---|---|---|---|
| | 1.2 м | 3 м | 5 м | |
| 1 | 5 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0.6 |
| 3 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 1 | 1 |

Через $x_i$ обозначим число бревен распиливаемых $i$-м способом, $i = \overline{1,4}$, а через $x$ – число комплектов брусьев.

Тогда **математическая модель** задачи будет иметь вид:

$$Z(x, x_1, x_2, x_3, x_4) = x \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 190, \\ 5x_1 + 2x_2 = 2x, \\ x_2 + 2x_3 = x, \\ x_4 = 3x, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \; i = \overline{1,4}.$$

## 1.7 Задачи для самостоятельного решения

**Составьте математические модели следующих задач:**

**1.** Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расхода полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции представлены в таблице:

| Полуфабрикаты | Нормы затрат на единицу продукции | | Объем полуфабрикатов |
|---|---|---|---|
| | $П_1$ | $П_2$ | |
| 1 | 1 | 2 | 1000 |
| 2 | 6 | 2 | 2400 |
| Прибыль | 10 | 35 | |

Определите план производства, обеспечивающий максимальную прибыль.

**2.** Для производства трех видов изделий ***A***, ***B***, ***C*** используется три различных вида сырья. Каждый вид сырья может быть использован в количестве не большем 4, 5, 3, соответственно. Нормы затрат каждого из видов сырья на единицу продукции данного вида и цена единицы продукции каждого вида приведены в таблице:

| Виды сырья | Нормы затрат сырья на единицу продукции | | | Объем сырья |
|---|---|---|---|---|
| | ***A*** | ***B*** | ***C*** | |
| I | 2 | 2 | 1 | 4 |
| II | 1 | 3 | – | 5 |
| III | – | 3 | 1 | 3 |
| Цена ед. продукции, д.е. | 1 | 2 | 3 | |

Определите план производства, при котором достигается максимальная прибыль.

**3.** На предприятии, в состав которого входят четыре производственных цеха, изготавливаются два вида изделий. Производственные мощности цехов (в часах) в расчете на сутки, нормы времени, необходимого для изготовления единицы изделий в соответствующих цехах, приведены в таблице:

| Цеха | Изделия | | Производственные мощности цехов |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| 1 | 2 | 2 | 12 |
| 2 | 1 | 2 | 8 |
| 3 | 4 | 0 | 16 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 4 | 12 |

Прибыль от продажи единицы первого изделия составляет 2 д.е., а от единицы второго изделия – 3 д.е. Определите тот из возможных вариантов производственного плана, при котором обеспечивается максимальная прибыль.

**4.** На предприятии для производства запасных частей для автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется следующей таблицей:

| Ресурсы | Расход материалов на производство одной запасной части, кг. | | | Запас ресурсов, кг. |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | |
| I | 5 | 5 | 2 | 1200 |
| II | 4 | - | 3 | 300 |
| III | 5 | 8 | 6 | 800 |
| Прибыль от реализации ед. запасной части, д.е. | 3 | 2 | 5 | |

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающих предприятию максимальную прибыль.

**5.** Цех выпускает три вида деталей – ***A***, ***B***, ***C***. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется таблицей:

| Станок | Длительность обработки детали, мин. | | | Фонд времени, час. |
|---|---|---|---|---|
| | ***A*** | ***B*** | ***C*** | |
| I | 12 | 10 | 9 | 220 |
| II | 15 | 18 | 20 | 400 |
| III | 6 | 4 | 4 | 100 |
| Отпускная цена за деталь | 30 | 32 | 30 | |

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

**6.** Фирма имеет возможность рекламировать свою продукцию, используя радио- и телевизионную сеть. Затраты на рекламу в бюджете фирмы ограничены суммой 1000 д.е. в месяц. Каждая минута радиорекламы обходится в 5 д.е., а каждая минута телерекламы – в 100 д.е. в месяц. Фирма хотела бы использовать радиосеть, по крайней мере, в два раза чаще, чем сеть телевидения. Опыт прошлых лет показал, что объем сбыта, который обеспечивает каждая минута телерекламы, в 25 раз больше сбыта, обеспечиваемого одной минутой радиорекламы. Определите оптимальное распределение финансовых средств, ежемесячно отпускаемых на рекламу, между радио и телерекламой. Определите прибыль фирмы от рекламы, если за 1 минуту радиорекламы прибыль составляет 10 д.е., а за 1 минуту телерекламы – 250 д.е.

**7.** Предприятие химической чистки и крашения располагает тремя видами производственных ресурсов: трудочасы, химические материалы, машиночасы. На предприятии есть два технологических способа выполнения работ. Затраты производственных ресурсов по каждому технологическому способу, наличный объем реализации по каждому способу приведены в таблице:

| Производственные ресурсы | Затраты ресурсов по каждому технологическому способу | | Наличный объем ресурсов |
|---|---|---|---|
| | I | II | |
| 1 | 14 | 10 | 12 |
| 2 | 5 | 10 | 10 |
| 3 | 60 | 70 | 80 |
| Объем реализации | 60 | 45 | |

Определите продолжительность работ предприятия по каждому технологическому способу, чтобы объем реализации был максимальный.

**8.** В дневном рационе сельскохозяйственных животных должны содержаться следующие питательные вещества: кормовых единиц − не менее 1.6 кг; протеина − не менее 200 г; каротина − не менее 10 мг. При откорме используют ячмень, бобы и сенную муку. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого из кормов и стоимости 1 кг кормов приведены в таблице:

| Питательное вещество | Количество единиц питательного вещества в 1 кг корма | | |
|---|---|---|---|
| | Ячмень | Бобы | Сенная мука |
| Кормовые единицы, кг | 0.8 | 0,9 | 0.6 |
| Протеин, г | 80 | 280 | 240 |
| Каротин, мг | 5 | 5 | 100 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Цена 1 кг корма, центы | 30 | 40 | 50 |

Составить дневной рацион минимальной стоимости, удовлетворяющий требованием питательности.

**9.** Для поддержания нормальной жизнедеятельности человеку ежедневно необходимо потреблять не менее 118 г белков, 56 г жиров, 500 г углеводов, 8 г минеральных солей. Количество питательных веществ, содержащихся в одном кг каждого вида потребляемых продуктов, а также цена 1 кг каждого из этих продуктов приведены в таблице:

| Питательные вещества | Содержание (г) питательных веществ в 1 кг продуктов | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | мясо | рыба | молоко | масло | сыр | крупа | картофель |
| Белки | 180 | 190 | 30 | 10 | 260 | 130 | 21 |
| Жиры | 20 | 3 | 40 | 865 | 310 | 30 | 2 |
| Углеводы | - | - | 50 | 6 | 20 | 650 | 200 |
| Минеральные соли | 9 | 10 | 7 | 12 | 60 | 20 | 10 |
| Цена 1 кг продуктов (руб.) | 1.8 | 1.0 | 0.28 | 3.4 | 2.9 | 0.5 | 0.1 |

Составить дневной рацион, содержащий не менее минимальной суточной нормы потребности человека в необходимых питательных веществах при минимальной общей стоимости потребляемых продуктов.

**10.** Малое предприятие выпускает детали ***A*** и ***B***. Для этого оно использует литье, подвергаемое токарной обработке, сверлению и шлифованию. Производительность станочного парка предприятия по обработке деталей ***A*** и ***B*** приведена в таблице:

| Станки | Производительность, шт./ч | | Стоимость станочного времени, руб./ч |
|---|---|---|---|
| | ***A*** | ***B*** | |
| Токарные | 25 | 40 | 20 |
| Сверлильные | 28 | 35 | 14 |
| Шлифовальные | 35 | 25 | 17.5 |
| Цена детали, руб.: | | | |
| покупная | 2 | 3 | |
| продажная | 5 | 6 | |

Предполагая, что спрос на любую комбинацию деталей ***A*** и ***B*** обеспечен, постройте математическую модель для нахождения плана их выпуска, максимизирующего прибыль.

**11.** На фабрике эксплуатируются станки двух видов: старого и нового образца. Станок старого образца изготавливает 20 изделий в час, при этом вероятность того, что изделие окажется бракованным, составляет 7%. Станок нового образца изготавливает 30 изделий в час, при этом вероятность брака для него 2%. Расходы на обслуживание станков составляют 10 д.е. и 8 д.е. в день соответственно. В случае изготовления бракованного изделия фабрика несет убыток в размере 50 д.е. Могут быть закуплены не более 15 станков старого образца и не более 5 станков нового образца. Определите оптимальное количество станков старого и нового образца, при котором затраты будут минимальными, учитывая, что за 8-часовой рабочий день фабрика должна изготовить не менее 2000 изделий.

**12.** Предприятие, специализированное на производстве продукции двух видов, располагает следующими ресурсами: 5600 трудочасов рабочего времени; 2100 кг сырья; 200 станкосмен. Для производства изделий первого вида затрачивается: 5 трудочасов; 2 кг сырья; 0.2 станкосмен. Для производства изделий второго вида затрачивается: 8 трудочасов; 3 кг сырья; 0.4 станкосмен. Прибыль от продажи единицы продукции первого вида составляет 5 д.е., а от продажи единицы продукции второго вида – 4 д.е. Составьте план производства продукции, обеспечивающий наибольшую прибыль.

**13.** Процесс изготовления двух видов промышленных изделий состоит в последовательной обработке каждого из них на трех станках. Время использования этих станков для производства данных изделий ограничено 10 часами в сутки. Время обработки одного изделия первого вида составляет: 10 минут на первом станке, 6 минут на втором станке и 8 минут на третьем станке. Время обработки одного изделия второго вида составляет: 6 минут на первом станке, 20 минут на втором станке, 15 минут на третьем станке. Прибыль от реализации изделий составляет 2 д.е. и 3 д.е., соответственно. Найдите оптимальные объемы производства изделий каждого вида.

**14.** Фирма производит два вида продукции ***A*** и ***B***. Объем сбыта продукции вида ***A*** составляет не менее 60% общего объема реализации продукции обоих видов. Для изготовления продукции ***A*** и ***B*** используется одно и то же сырье, суточный запас которого ограничен величиной 100 единиц. Расход сырья на единицу продукции ***A*** составляет 2 ед., а на единицу продукции ***B*** – 4 ед. Цены продукции ***A*** и ***B*** равны 20 и 50 д.е., соответственно. Определите оптимальное распределение сырья для изготовления продукции ***A*** и ***B***.

**15.** Требуется изготовить 100 комплектов арматуры длиной 2.9 м., 2.1 м., 1.5 м. из стержней, длина которых 7.4 м. Такие стержни могут быть разрезаны на части указанных размеров различными способами, представленными таблицей:

| Способы | Виды заготовок, м. | | | Отходы |
|---|---|---|---|---|
| | 2.9 | 2.1 | 1.5 | |
| 1 | 1 | – | 3 | 0 |
| 2 | 2 | – | 1 | 0.1 |
| 3 | 1 | 2 | – | 0.3 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 0.9 |
| 5 | – | 2 | 2 | 0.2 |

Укажите, какие способы раскроя следует выбрать, чтобы, при соблюдении комплектности количество расходуемых стержней в 7.4 м было наименьшим (отходы были бы наименьшими).

**16.** Для изготовления брусьев трех размеров 0.6 м, 1.5 м и 2.5 м, количество которых должно находиться в соотношении 2:1:3, поступают на распил бревна длиной 3 м. Определите план распила, обеспечивающий максимальное число комплектов. Способы распила бревен, с указанием соответствующих брусьев указаны в таблице:

| Способы распила | Виды брусьев, м | | |
|---|---|---|---|
| | 0.6 | 1.5 | 2.5 |
| 1 | 5 | – | – |
| 2 | 2 | 1 | – |
| 3 | – | 2 | – |
| 4 | – | – | 1 |

**17.** Стальные бруски длиной 110 см необходимо разрезать на заготовки длиной 35, 45 и 50 см. Требуемое количество заготовок длиной 35 см – не менее 30, 45 см – не менее 40, 50 см – не менее 20. Возможные варианты разреза и величины отходов при каждом из них приведены в таблице:

| Длина заго- | Варианты разреза |
|---|---|

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 35 | – | 1 | – | 3 | 1 | – |
| 45 | 2 | 1 | 1 | – | – | – |
| 50 | – | – | 1 | – | 1 | 2 |
| Отходы, см | 20 | 30 | 15 | 5 | 25 | 10 |

Определить, сколько брусков необходимо разрезать по каждому варианту, чтобы получить не менее необходимого количества заготовок при минимальных отходах.

**18.** Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10000 клеток. В одной клетке могут быть либо 2 лисы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и 6000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма 4 ед., а каждому песцу – 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200000 ед. корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 д.е., а от реализации одной шкурки песца – 5 д.е. Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме, чтобы получить наибольшую прибыль.

**19.** Предприятию задана месячная программа на изготовление четырех типов изделий в количествах соответственно 5000, 2000, 3000 и 1800 штук. На предприятии имеется три группы станков с различной производительностью. Суммарное допустимое время для каждой группы станков составляет соответственно 800, 1000, 1500 часов. Данные о техническом процессе указаны в таблице:

| № группы станков | Нормы времени на изготовление одного изделия, час. | | | | Издержки на изготовление одного изделия, д.е. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | I | II | III | IV |
| 1 | 0.5 | 0.15 | 0.4 | 0.6 | 0.12 | 0.2 | 0.3 | 0.25 |
| 2 | 0.4 | 0.12 | 0.2 | 0.5 | 0.16 | 0.14 | 0.35 | 0.2 |
| 3 | 0.42 | 0.14 | 0.35 | 0.45 | 0.17 | 0.25 | 0.4 | 0.3 |

Распределите изделия по станкам так, чтобы месячная программа была выполнена при наименьших издержках.

**20.** Три типа самолетов следует распределить между четырьмя авиалиниями. Данные об организации процесса перевозок приведены в следующей таблице:

| Тип самолета | Число самолетов, ед | Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям, ед. | | | | Эксплуатационные расходы на один самолет по авиалиниям, д.е. | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | I | II | III | IV | I | II | III | IV |
| 1 | 50 | 15 | 10 | 20 | 50 | 15 | 20 | 25 | 40 |
| 2 | 20 | 20 | 25 | 10 | 10 | 70 | 28 | 15 | 45 |
| 3 | 30 | 35 | 50 | 30 | 45 | 40 | 70 | 50 | 65 |

Распределите самолеты по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных затратах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000, 500 ед. груза.

**21.** Для обслуживания двух авиалиний могут использоваться два типа самолетов. Имеется 25 самолетов 1-го типа и 30 самолетов 2-го типа. По 1-й авиалинии необходимо перевести 15 тыс. пассажиров, по 2-й – 20 тыс. В таблице указаны эксплуатационные расходы, связанные с использованием одного самолета, и количество пассажиров, которое может перевезти за данный период один самолет.

| Эксплуатационные расходы | | | Число пассажиров | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Тип самолета | Авиалиния | | Тип самолета | Авиалиния | |
| | 1 | 2 | | 1 | 2 |
| 1 | 10 | 6 | 1 | 500 | 800 |
| 2 | 8 | 7 | 2 | 1000 | 1200 |

Определить оптимальное распределение самолетов по авиалиниям, при котором суммарные расходы минимальны.

**22.** Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по бегу, прыжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину – 8 спортсменов, а в прыжках в высоту – не более 10. Количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в таблице:

| Разряд | Бег | Прыжки в высоту | Прыжки в длину |
|---|---|---|---|
| I | 4 | 5 | 5 |
| II | 2 | 3 | 3 |

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 10 спортсменов.

**23.** Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л. алкилата, 250 тыс. л. крекинг-бензина, 350 тыс. л. бензина прямой перегонки и 100 тыс. л. изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин ***A*** – 2:3:5:2, бензин ***B*** – 3:1:2:1, бензин ***C*** – 2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов бензина соответственно равна 120 д.е., 100 д.е., 150 д.е. Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

**24.** В угольном бассейне добывается уголь, который хранится на трех складах в количестве 120, 60, 100 ед. соответственно. Добытый уголь доставляется четырем энергетическим установкам в количестве 70, 90, 50, и 70 ед. Стоимость доставки 1 ед. угля из каждого склада соответствующим энергетическим установкам задана матрицей $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 9 \\ 7 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Определите оптимальный план доставки угля энергетическим установкам, обеспечивающий суммарные минимальные затраты.

**25.** В резерве трех железнодорожных станций ***A***, ***B***, ***C*** находятся соответственно 60, 80, 100 вагонов. Составьте оптимальный план перегона этих вагонов к четырем пунктам погрузки хлеба, если пункту 1 необходимо 40 вагонов, пункту 2 – 60 вагонов, пункту 3 – 80 вагонов и пункту 4 – 60 вагонов. Стоимости перегонов одного вагона со станции ***A*** в указанные пункты соответственно равны 1, 2, 3, 4 д.е., со станции ***B*** – 4, 3, 2 и 1 д.е., со станции ***C*** – 1, 2, 2, 1 д.е.

**26.** На складах ***A***, ***B***, ***C*** находится сортовое зерно 100, 150, 250 т., которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т., пункту 2 – 100 т., пункту 3 – 200 т., пункту 4 – 150 т. сортового зерна. Стоимость доставки 1 т. зерна со склада *A* в указанные пункты соответственно равна (д. е.) 80, 30, 50, 20; со склада ***B*** – 40, 10, 60, 70; со склада ***C*** – 10, 90, 40, 30. Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

**27.** Промышленный концерн имеет два завода и пять складов в различных регионах страны. Каждый месяц первый завод производит 40 ед. продукции, а второй – 70 ед. продукции. Вся продукция, произведенная заводами, должна быть направлена на склады. Вместимость первого склада равна 20 ед. продукции, второго – 30, третьего – 15, четвертого – 27, пятого – 28 ед. продукции. Издержки транспортировки продукции от завода до склада заданы матрицей $\begin{pmatrix} 250 & 480 & 650 & 500 & 720 \\ 450 & 525 & 630 & 560 & 750 \end{pmatrix}$.

Распределите план перевозок из условия минимизации ежемесячных расходов на транспортировку.

## ТЕМА 2: ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотренные выше примеры задач линейного программирования позволяют сформулировать общую задачу линейного программирования.

### 2.1. Формы моделей задач линейного программирования (ЗЛП)

Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \tag{2.1}$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, p}, \ \ p \le n, \tag{2.3}$$

называется **задачей линейного программирования**.

Задача в краткой записи имеет вид

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \ \ i = \overline{1, k}, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \ i = \overline{k+1, m}, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1, p}, \ \ p \le n.$$

Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

называется **задачей линейного программирования**, заданной в **канонической (основной) форме**.

Задача, в которой требуется найти экстремум функции

$$Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i,\ i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}$$

называется **задачей линейного программирования** заданной в **симметричной (стандартной**) форме записи.

Функция $Z(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ называется **целевой функцией** ЗЛП. Условия (2.2)-(2.3) – **ограничениями** ЗЛП.

Совокупность чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая ограничениям ЗЛП, называется **допустимым решением** ЗЛП или **планом**.

Множество всех допустимых решений ЗЛП называется **областью (множеством) допустимых решений**.

Допустимое решение, при котором целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение, называется **оптимальным решением** ЗЛП.

Существуют преобразования, позволяющие из одной формы ЗЛП получать любую другую. В связи с этим, формы задач линейного программирования считаются **эквивалентными**.

## 2.2. Переход от произвольной формы ЗЛП к канонической форме

Идея перехода от общей формы задачи линейного программирования к канонической форме заключается в преобразовании ограничения в виде неравенства в уравнение путем добавления неотрицательных переменных, которые одновременно включаются в целевую функцию с коэффициентом равным нулю.

При необходимости задачу на нахождение максимума целевой функции $Z$ можно заменить задачей на минимум новой целевой функции, и наоборот, воспользовавшись следующим равенством $\max Z = -\min(-Z)$.

Если дано неравенство вида $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} \le \\ \ge \end{Bmatrix} b_i$, то необходимо ввести в левую часть неравенства дополнительную (балансовую) неотрицательную переменную $x_{n+1} \ge 0$: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix} x_{n+1} = b_i$.

Если на переменную $x_j$ не наложено условие неотрицательности, то эту переменную надо представить в виде разности двух неотрицательных переменных: $x_j = x'_j - x''_j$, где $x'_j \ge 0,\ x''_j \ge 0$.

**Пример 2.1.** Приведите к канонической форме задачу линейного программирования: найти минимум линейной функции $Z = -3x_1 - x_2 + 2x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

**Решение.** Начнем с преобразования смешанной системы ограничений в систему уравнений. Первое ограничение является уравнением, поэтому не требует изменений. Необходимо перейти для второго и третьего ограничения от вида неравенства к виду уравнения. Для этого введем неотрицательные «балансовые» переменные $x_4$ и $x_5$ в левые части неравенств со знаками «плюс» или «минус» в зависимости от знака неравенства. Получаем систему ограничений в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \ge 0.$$

Переход к задаче максимизации линейной функции осуществляется путем введения новой функции из равенства $Z_1 = -Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3$.

Итак, каноническая форма задачи линейного программирования имеет вид: найти максимум функции $Z_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_1, \ldots, x_5 \ge 0.$$

**Пример 2.2.** Приведите к канонической форме задачу линейного программирования

$$Z(X) = x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 = 16, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0.$$

**Решение.** Делаем замену $x_2 = x_2' - x_2''$, $x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0$, $x_3 = x_3' - x_3''$, $x_3' \ge 0,\ x_3'' \ge 0$ и добавляем балансовые переменные: в первом ограничении добавляем $x_4$, а во втором вычитаем $x_5$. После указанных преобразований получаем каноническую ЗЛП:

$$Z(X) = x_1 + (x_2' - x_2'') - (x_3' - x_3'') \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2' - x_2'' + x_3' - x_3'' + x_4 = 7, \\ 2x_1 - \left(x_2' - x_2''\right) + x_3' - x_3'' - x_5 = 3, \\ x_1 - \left(x_2' - x_2''\right) + 9\left(x_3' - x_3''\right) = 16, \end{cases}$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3', x_3'', x_4, x_5 \ge 0.$$

## 2.3. Переход от канонической формы ЗЛП к симметричной форме

Чтобы привести задачу к симметричной форме, необходимо:

1. Некоторые неравенства умножают на –1, чтобы поменять знак неравенства.

2. Чтобы перейти от нахождения max к нахождению min или наоборот необходимо сделать замену $\max Z = -\min\left(-Z\right)$.

3. Сделать переменные неотрицательными.

4. Если ограничения записаны в виде системы уравнений, то методом Жордана−Гаусса находят одно общее решение системы и подставляют выражения каждой базисной переменной в целевую функцию. Отбрасывая базисные переменные из каждого уравнения общего решения, учитывая их неотрицательность, превращают уравнения в неравенства и получают ЗЛП относительно свободных переменных в симметричной форме. При этом количество переменных уменьшается.

**Пример 2.3.** Приведите к симметричной форме задачу линейного программирования:

$$Z(X) = -x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = -1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3, \end{cases}$$
$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

**Решение.** Методом Жордана−Гаусса в каждом уравнении выделяем базисные переменные

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & [1] & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

1.Третью строку прибавляем к первой и второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & [1] & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

2.Вторую строку вычитаем из первой строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & [1] & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

3.Вторую строку умножаем на 2 и вычитаем из третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 0 & [2] & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

4.Первую строку делим на 2:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1/2 & 0 & [1] & 1 & 0 & 1/2 \\ 5 & 0 & -2 & -3 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

5.Первую строку умножаем на 2 и прибавляем ко второй строке:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1/2 & 0 & [1] & 1 & 0 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ -7 & 1 & 3 & 4 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

6.Первую строку умножаем на 3 и вычитаем из третьей строки:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -1/2 & 0 & [1] & 1 & 0 & 1/2 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & [1] & 3 \\ -11/2 & [1] & 0 & 1 & 0 & -5/2 \end{array}\right)$$

Т.о., имеем

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_3 + x_4 = \frac{1}{2}, \\ 4x_1 - x_4 + x_5 = 3, \\ -\frac{11}{2}x_1 + x_2 + x_4 = -\frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - x_4 \geq 0, \\ x_5 = 3 - 4x_1 + x_4 \geq 0, \\ x_2 = -\frac{5}{2} + \frac{11}{2}x_1 - x_4 \geq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Выражаем $Z$ через свободные переменные $Z(X) = -x_1 + \left(-\frac{5}{2} + \frac{11}{2}x_1 - x_4\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_1 - x_4\right) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 + x_4 \to \max$.

Отбрасывая в системе (2.4) базисные переменные, получаем стандартный вид ЗЛП

$$Z(X) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2}x_1 + x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + x_4 \leq \frac{1}{2}, \\ 4x_1 - x_4 \leq 3, \\ -\frac{11}{2}x_1 + x_4 \leq -\frac{5}{2}, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_4 \geq 0.$$

## 2.4. Выпуклые множества

**Выпуклой линейной комбинацией** точек $X_1, X_2, \ldots X_n$ называется линейная комбинация вида $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_n X_n$, где все $\lambda_i \geq 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$.

В частности, когда имеются две точки $X_1$ и $X_2$, то их выпуклая комбинация $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$, $\lambda \in [0,1]$ представляет собой точку на отрезке, соединяющем эти точки.

**Выпуклой оболочкой** точек называется множество всевозможных выпуклых комбинаций этих точек.

Множество называется **выпуклым**, если вместе с двумя любыми его точками оно содержит и их произвольную выпуклую линейную комбинацию.

С геометрической точки зрения это означает, что выпуклое множество содержит вместе с любыми двумя своими точками и соединяющий их отрезок. Выпуклое множество совпадает со своей выпуклой оболочкой.

**Примерами выпуклых множеств** являются прямолинейный отрезок, квадрат, круг, прямая, полуплоскость, куб, шар, полупространство и другие.

**Угловыми точками** выпуклого множества называются точки, не являющиеся выпуклой линейной комбинацией двух произвольных точек множества.

Например, угловыми точками треугольника являются его вершины, угловыми точками круга – точки окружности. Таким образом, выпуклое множество может иметь конечное или бесконечное число угловых точек, но может не иметь их совсем. Например, прямая, плоскость, полуплоскость, пространство, полупространство угловых точек не имеют.

Одним из основных понятий теории линейного программирования является понятие выпуклого многогранника в $n$-мерном пространстве, частными случаями которого являются при $n=1$ отрезок на прямой, при $n=2$ выпуклый многоугольник на плоскости.

**Выпуклым многоугольником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество точек на плоскости, имеющее конечное число угловых точек, называемых **вершинами**. Прямолинейные отрезки, соединяющие две вершины и образующие границу, называются **сторонами** многоугольника. **Опорной прямой** выпуклого многоугольника называется прямая, имеющая с многоугольником, расположенным по одну сторону от неё, хотя бы одну общую точку.

**Выпуклым многогранником** называется выпуклое замкнутое ограниченное множество точек пространства, имеющее конечное число угловых точек, называемых его **вершинами**. Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются его **гранями**, а отрезки, по которым пересекаются грани, называются **рёбрами**. **Опорной плоскостью** многогранника называется плоскость, имеющая с многогранником, расположенным по одну сторону от неё, хотя бы одну общую точку.

**Теорема 2.1.** Выпуклый $n$-мерный многогранник является выпуклой линейной комбинацией своих угловых точек.

**Следствие 2.1**. Из теоремы вытекает, что выпуклый многогранник порождается своими угловыми точками (вершинами): отрезок – двумя точками, треугольник – тремя точками, $n$ – угольник на плоскости – $n$ точками и т.д.

В тоже время выпуклая многогранная область, содержащая бесконечно удалённую точку, являясь **неограниченным множеством**, не определяется однозначно своими угловыми точками: любую её точку нельзя представить в виде выпуклой линейной комбинации угловых точек.

## 2.5. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим стандартную задачу линейного программирования, система ограничений которой задана в форме неравенств. Найти экстремум целевой функции

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min) \tag{2.5}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \quad\quad\quad\quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}\ . \tag{2.7}$$

Еще раз напомним.

**Допустимым решением** (или **допустимым планом**) задачи линейного программирования называется любое решение $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющее системе ограничений (2.6) и условиям неотрицательности (2.7). Множество допустимых решений (планов) задачи образует **область допустимых решений** – ОДР. Термины «решение» и «план» – синонимы. Термин «решение» используется, обычно, когда говорят о математическом решении задачи. Термин «план» используется, когда говорят о содержательной экономической интерпретации задачи.

Если система (2.6) при условии (2.7) имеет хотя бы одно решение, она называется **совместной**, в противном случае – **несовместной**.

Рассмотрим сначала частный случай совместной системы (2.6) при $n = 2$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{2.8}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{2.9}$$

Каждое неравенство системы (2.8) на плоскости $Ox_1x_2$ геометрически определяет полуплоскость с граничной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1, m}$.

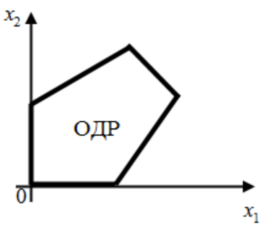



Рисунок 2.1 – ОДР

Условия (2.9) определяют первый квадрант с граничными прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, совпадающими с осями $Ox_1$ и $Ox_2$.

Для совместной системы (2.8) указанные полуплоскости, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть в I-м квадранте, которая является **выпуклым многоугольником решений** – ОДР

В частных случаях многоугольник может вырождаться в точку, отрезок, луч или неограниченную многоугольную область.

Если в совместной системе ограничений (2.6) и (2.7) $n = 3$, то она принимает вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 \le b_m; \end{cases} \tag{2.10}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \tag{2.11}$$

Каждое неравенство системы (2.10) геометрически определяет полупространство трёхмерного пространства $Ox_1x_2x_3$, граничная плоскость которого есть $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$, $i = \overline{1, m}$.

Условия (2.11) определяют 1-й октант с граничными плоскостями $x_j = 0,\ j = 1,\ 2,\ 3,$ совпадающими с координатными плоскостями.

Если система ограничений (2.10) и (2.11) совместна, то эти полупространства, как выпуклые множества, пересекаясь, образуют в 1-м октанте общую часть, которая образует **выпуклый многогранник решений** – ОДР. В частных случаях многогранник решений может вырождаться в точку, отрезок, луч или в многогранную неограниченную область.

Если в системе ограничений (2.6) имеем $n > 3$, то каждое её неравенство определяет полупространство $n$ – мерного пространства с граничной гиперплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n = b_i$, $i = \overline{1,m}$, а ограничения $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$ определяют полупространства с граничными гиперплоскостями $x_j = 0$, $j = \overline{1,n}$, совпадающими с координатными плоскостями.

Если система ограничений (2.6) и (2.7) совместна, то она образует общую часть $n$ – мерного пространства, называемую выпуклым $n$ – мерным многогранником.

Таким образом, геометрически стандартная задача линейного программирования с ограничениями в виде неравенств заключается в отыскании такой точки многогранника решений, координаты которой доставляют линейной целевой функции $Z(X)$ формулы (2.5) экстремальное значение. При этом все точки выпуклого многогранника являются допустимыми решениями.

## 2.6. Свойства решений задачи линейного программирования

Рассмотрим теперь каноническую задачу линейного программирования, в которой система ограничений есть система уравнений:

$$Z(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max(\min):$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим еще 2 вида записи данной задачи.

**Матричная форма записи** канонической задачи имеет вид:

$$Z = CX \to \max(\min),$$
$$AX = B,$$
$$X \geq 0,$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},\ C=(c_1, c_2,\ \dots, c_n).$$

Здесь $A$ – матрица системы, $X$ – вектор-столбец неизвестных, $B$ – матрица-столбец свободных членов, $C$ – вектор-строка.

**Векторная форма записи** канонической задачи имеет вид:

$$Z=\boldsymbol{CX}\to\max(\min), \tag{2.12}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_1x_1+\boldsymbol{A}_2x_2+\dots+\boldsymbol{A}_nx_n=\boldsymbol{A}_0, \\ &\boldsymbol{X}\ge 0, \end{aligned} \tag{2.13}$$

где $\boldsymbol{CX}$ скалярное произведение векторов $\boldsymbol{C}=(c_1, c_2,\ \dots, c_n)$ и $\boldsymbol{X}=(x_1, x_2,\ \dots, x_n)$, векторы $\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}_0=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ состоят из коэффициентов при переменных и свободных членов.

**Теорема 2.2 об области допустимых значений задач линейного программирования** Множество всех допустимых решений ЗЛП является выпуклым (если оно не пусто).

**Замечание 2.1.** Итак, ОДР задачи линейного программирования представляет выпуклый многогранник или выпуклую многогранную область, которые в дальнейшем будем называть одним термином – **многогранником решений.**

**Оптимальным решением** (или оптимальным планом) задачи линейного программирования будем называть такое допустимое решение (план) задачи, при котором целевая функция $Z(X)$ достигает экстремума. Ответ на вопрос, в какой точке многогранника решений достигается оптимальное решение задачи линейного программирования, даётся в следующей фундаментальной теореме.

**Теорема 2.3 о целевой функции.** Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то оно достигается в одной из угловых точек многогранника решений. Если же оптимальное решение достигается сразу в нескольких угловых точках, то оно также достигается в точках любой их выпуклой линейной комбинации.

Важное **следствие**. Согласно этой фундаментальной теореме для нахождения оптимального решения, доставляющего экстремум целевой функции $Z(X)$, необходимо исследовать лишь конечное число угловых точек многогранника решений, не исследуя бесконечное множество других допустимых решений.

Допустимое решение $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ задачи линейного программирования (2.12) − (2.13) называется **планом**.

План $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ называется **опорным**, если векторы $\boldsymbol{A}_i, i=\overline{1,m}$, входящие в разложение (2.13) с положительными коэффициентами $x_i$ являются линейно независимыми.

Так как векторы $A_i$ $m$-мерные, то число положительных компонент в опорном плане не может превышать $m$.

Опорный план называется **невырожденным**, если он содержит ровно $m$ положительных компонент, если меньше – вырожденным.

Сформулируем теоремы, которые устанавливают связь между множеством опорных планов задачи линейного программирования и множеством угловых точек её допустимого многогранника решений.

**Теорема 2.4 об угловой точке** (Достаточное условие). Если известно, что система векторов $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_k$ ($k\le n$) в разложении (2.13) линейно независима и такова, что $\boldsymbol{A}_1x_1+\boldsymbol{A}_2x_2+...+\boldsymbol{A}_kx_k=\boldsymbol{A}_0$, где все $x_j\ge 0$, то точка $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,...,x_k,0,...,0\right)$ является угловой точкой многогранника решений.

**Теорема 2.5 об угловой точке** (Необходимое условие). Если $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ − угловая точка многогранника решений, то векторы в разложении (2.13), соответствующие положительным $x_i$ являются линейно независимыми.

Каждый опорный план $\boldsymbol{X}=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)$ определяется системой $m$ линейно независимых векторов, содержащихся в данной системе из $n$ векторов $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,...,\boldsymbol{A}_n$

Все числа $x_1,x_2,...,x_n$ в опорном плане неотрицательные и среди них не более $m$ отличных от нуля.

Если существует оптимальный план, то существует такая точка многогранника решений, в которой линейная функция достигает своего наибольшего (наименьшего) значения.

Каждой угловой точке многогранника решений соответствует опорное решение, и каждый опорный план соответствует угловой точке многогранника решений.

Поэтому для отыскания оптимального плана задачи линейного программирования достаточно исследовать только опорные планы.

## 2.7. Задачи для самостоятельного решения

**1. Решите систему уравнений:**

| | |
|---|---|
| **2.** $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 5. \end{cases}$ | **3.** $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1. \end{cases}$ |
| **4.** $\begin{cases} 16x_1 + 14x_2 + x_3 + x_4 = 104, \\ 4x_1 - 4x_2 + x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$ | **5.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ |

**2. Найдите базис решения:**

| | |
|---|---|
| **1.** $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases}$ | **2.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 + \phantom{x_2 +} x_3 + 2x_4 = -4. \end{cases}$ |
| **3.** $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = 2. \end{cases}$ | **4.** $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 9, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$ |

**3. Постройте множество решений неравенства:**

| | |
|---|---|
| **1.** $4x_1 - 5x_2 + 20 \le 0.$ | **2.** $4x_1 - 3x_2 \ge 0.$ |
| **3.** $3x_1 - 4x_2 + 12 \le 0.$ | **4.** $3x_1 - 2x_2 \ge 0.$ |

**4. Постройте множества решений системы неравенств и найдите их угловые точки:**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$ | **2.** $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_1 - 4x_2 \le 4. \end{cases}$ | **3.** $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$ |
| **4.** $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le -1, \\ x_2 \le 1. \end{cases}$ | **5.** $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 2x_1 - 5x_2 \le 10, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6. \end{cases}$ | **6.** $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \ge 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 1. \end{cases}$ |
| **7.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 15 \ge 0, \\ 0 \le 4x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 - 17 \le 0, \\ 0 \le x_1 \le 11. \end{cases}$ | **8.** $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \le 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$ | **9.** $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 \le 20, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ 0 \le x_2 \le 6. \end{cases}$ |

**5. Постройте множества допустимых решений уравнений:**

| | |
|---|---|
| **1.** $3x_1 + 5x_2 = 15.$ | **2.** $2x_1 - 3x_2 = 0.$ |
| **3.** $2x_1 + 3x_2 = 6.$ | **4.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$ |
| **5.** $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + x_2 - x_4 = 1. \end{cases}$ | **6.** $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2. \end{cases}$ |

**6. Приведите к канонической форме задачу линейного программирования:**

| | |
|---|---|
| **1.** $Z = 5x_1 + 2x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 5, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \end{cases}$ $x_1,\ x_2 \ge 0.$ | **2.** $Z = -x_1 + x_2 + 3x_3 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 \le -2, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 5, \end{cases}$ $x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$ |

| | |
|---|---|
| **3.** $Z = x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 \to \max;$ $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 \ge 3, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 \ge 7, \end{cases}$ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.$ | **4.** $Z = 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 4, \\ 3x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 = 5, \end{cases}$ $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \ge 0.$ |
| **5.** $Z = x_1 + x_2 - x_3 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \end{cases}$ $x_1,\ x_2,\ x_3 \ge 0.$ | **6.** $Z = -5x_1 + x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge 0 \\ x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$ |

**7. Приведите к симметричной форме задачу линейного программирования:**

| | |
|---|---|
| **1.** $Z = 4x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 8x_4 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 12, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | **2.** $Z = -2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 6x_4 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| **3.** $Z = 6x_1 + 8x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + x_5 = 5, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_6 = 12, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}.$ | **4.** $Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 9, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8, \end{cases}$ $x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}.$ |

# ТЕМА 3: МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 3.1. Графический метод решения задач линейного программирования

### 3.1.1. Графический метод решение ЗЛП с двумя переменными

Графический метод решения задачи линейного программирования является наиболее простым и наглядным. Этот метод целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами. В случае трех переменных графическое решение становится менее наглядным, а при большем числе переменных – даже невозможным.

Данный метод основывается на возможности графического изображения области допустимых решений задачи и целевой функции, и нахождении среди них оптимального решения.

Рассмотрим стандартную ЗЛП относительно двух переменных:

$$Z(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to \max(\min);$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \;\; x_2 \ge 0.$$

**Решение задачи начинают с построения области допустимых решений**. При этом возможны следующие случаи:

1. Область допустимых решений − пустое множество. В этом случае задача линейного программирования не имеет оптимального решения из-за несовместности системы ограничений.

2. Область допустимых решений − единственная точка. Тогда задача линейного программирования имеет единственное и оптимальное решение.

3. Область допустимых решений − выпуклый многоугольник. В этом случае, чтобы найти оптимальное решение задачи, можно найти координаты всех угловых точек многоугольника, вычислить значения целевой функции во всех угловых точках и выбрать наибольшее (или наименьшее) из этих значений. Координаты соответствующей угловой точки являются оптимальным решением.

Существует и другой способ, который позволяет сразу найти графически угловую точку, соответствующую оптимальному решению.

Пусть $c_0$ − некоторое число. Прямая $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$ является линией уровня целевой функции. В каждой точке этой прямой целевая функция принимает одно и то же значение, равное $c_0$. Вектор – градиент целевой функции $\bar{c} = gradL(X) = \left( \frac{\partial L}{\partial x_1}; \frac{\partial L}{\partial x_2} \right) = (c_1; c_2)$ перпендикулярен линиям уровня и показывает направление, в котором эта функция возрастает с наибольшей скоростью. Выбирая из линий уровня, проходящих через область допустимых решений, наиболее удаленную в направлении вектора $\bar{c}$ (в случае минимизации – в противоположном направлении), определим угловую точку, в которой целевая функция принимает максимальное (минимальное) значение. Если экстремум достигается сразу в двух смежных угловых точках, то, по теореме 2.3 оптимальным решением будет любая точка отрезка, соединяющего эти точки: $X_{опт} = tX_{1опт} + (1-t)X_{2опт}$, $t \in [0,1]$.

4. Область допустимых решений − выпуклая неограниченная область.

В этом случае экстремум может не существовать из-за неограниченности целевой функции сверху в задаче на максимум, т.е. $Z(X) \to +\infty$, или снизу в задаче на минимум, т.е. $Z(X) \to -\infty$, или находиться в одной из угловых точек области допустимых решений.

**Алгоритм графического метода:**

1.Построить область допустимых решений.

2.Построить вектор-градиент целевой функции $\bar{c} = (c_1; c_2)$.

3.Построить семейство линий уровня, перпендикулярных вектору $\bar{c}$, проходящих через область допустимых решений.

4.Выбрать линию уровня, проходящую через область допустимых решений и наиболее удаленную в направлении вектора $\bar{c} = (c_1; c_2)$ (или в противоположном вектору $\bar{c}$ направлении − в задаче на минимум). Определить угловые точки области, через которые она проходит.

5.Найти координаты точек экстремума и значение целевой функции в этих точках.

**Пример 3.1.** Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$Z(X) = 3x_1 + 4x_2$$

при ограничениях: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 15, \\ x_1 - 3x_2 \leq -2, \\ 3x_1 - 2x_2 \geq -10, \end{cases}$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

**Решение.**

1. Строим область допустимых решений. Она представляет собой выпуклый четырехугольник ***ABDE*** (рис. 3.1).

2. Строим вектор $\bar{c}(3;4)$ и перпендикулярно ему линии уровня, проходящие через область.

3. Из рисунка 3.1 видно, что наиболее удаленной в направлении градиента угловой точкой является точка ***D***, так как через нее проходит самая дальняя линия уровня $l_2$. Следовательно, в точке ***D*** целевая функция принимает наибольшее значение, т.е. $L_{\max}(X) = L(D)$. Через угловую точку ***A*** проходит ближайшая линия уровня $l_1$, следовательно, функция в точке ***A*** принимает наименьшее значение, т.е. $L_{\min}(X) = L(A)$.

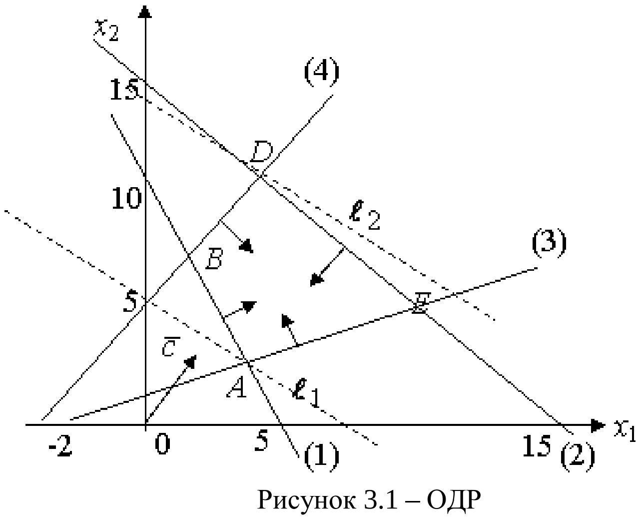



Рисунок 3.1 – ОДР

Чтобы найти координаты точек ***A*** и ***D***, нужно решить систему из уравнений тех прямых, на пересечении которых лежат эти точки.

Точка ***A*** лежит на пересечении первой и третьей прямых.

Решим систему, составленную из уравнений этих прямых

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - 3x_2 = -2. \end{cases}$$

Получим $X_{\min}(4;2)$, $Z_{\min}(X) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 = 20.$

Точка ***D*** лежит на пересечении второй и четвертой прямых.

Решим систему, составленную из уравнений этих прямых

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 15, \\ 3x_1 - 2x_2 = -10. \end{cases}$$

Получим $X_{\max}(4;11)$, $L_{\max}(X) = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 11 = 56.$

**Пример 3.2.** Найти наибольшее значение функции $Z(X) = 2x_1 + 4x_2$

при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 21, \\ 5x_1 - 11x_2 \le 0, \\ x_1 + 3x_2 \ge 15, \\ x_1 - x_2 \ge -6, \end{cases}$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

**Решение.**

1. Строим область допустимых решений. Получим пятиугольник ***ABDEK*** (рис. 3.2).

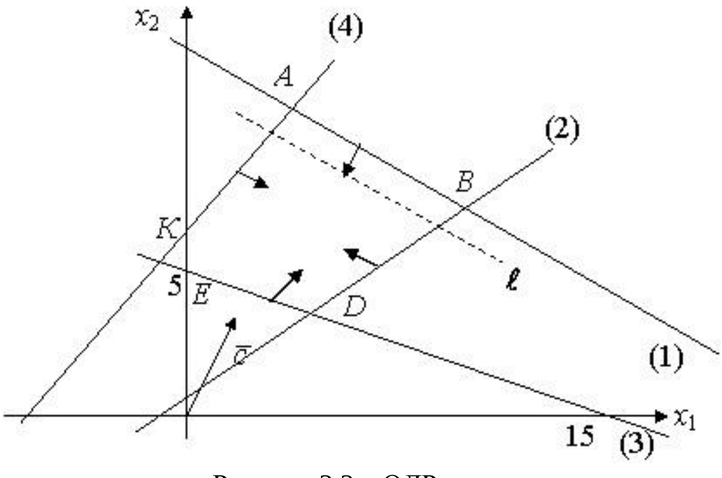



Рисунок 3.2 – ОДР

2. Строим вектор $\bar{c}(2;4)$ и перпендикулярно ему линию уровня $l$.

3. В данном случае линии уровня параллельны прямой, проходящей через точки ***A*** и ***B***.

Наибольшее значение целевая функция принимает в любой точке отрезка ***AB*** (случай альтернативного оптимума). Найдем координаты точек ***A*** и ***B***.

Точка ***A*** лежит на пересечении первой и четвертой прямых.

Решим систему, составленную из уравнений этих прямых

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 21, \\ x_1 - x_2 = -6. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 3,$ $x_2 = 9,$ $A(3;9),$ $X_{1опт} = (3;9),$ $Z_{\max}(X) = Z(X_{1опт}) = 2 \cdot 3 + 4 \cdot 9 = 42.$

Точка ***B*** лежит на пересечении первой и второй прямых.

Решая систему, составленную из уравнений этих прямых

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 21, \\ 5x_1 - 11x_2 = 0, \end{cases}$$

получим $x_1 = 11,$ $x_2 = 5,$ $B(11;5),$ $X_{2опт} = (11;5),$ $Z_{\max}(X) = Z(X_{2опт}) = 2 \cdot 11 + 4 \cdot 5 = 42.$

Так как целевая функция принимает наибольшее значение в любой точке отрезка ***AB***, то $X_{опт} = tX_{1опт} + (1-t)X_{2опт}, t \in [0,1]$ или $X_{опт} = (t \cdot 3 + (1-t) \cdot 11; t \cdot 9 + (1-t) \cdot 5) = (11 - 8t; 5 + 4t).$

**Пример 3.3.** Найдите наибольшее значение функции $Z(X) = 2x_1 + 5x_2$

при ограничениях: $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ -2x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - 2x_2 \leq 4, \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

**Решение.**

1. Строим область допустимых решений. ОДР представляет собой выпуклую неограниченную область ***MABDEN*** (рис. 3.3).

2. Строим вектор $\bar{c}(2;5)$ и линию уровня $l$, перпендикулярную к вектору $\bar{c}$.

3.Так как в направлении вектора $\bar{c}$ можно провести сколь угодно удаленную линию уровня, проходящую через ОДР, следовательно, функция в этой области не достигает своего наибольшего значения $Z(X) \to +\infty$.

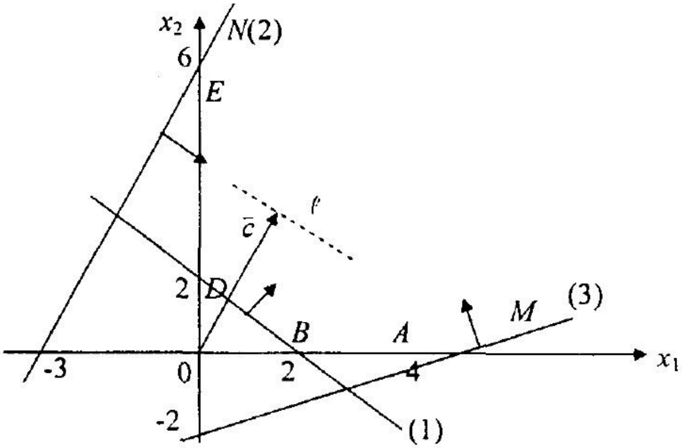


Рисунок 3.3 – ОДР

**Пример 3.4.** Найдите наибольшее значение функции $Z(X) = 4x_1 + 5x_2$

при ограничениях: $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \geq 3, \end{cases}$

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$

**Решение.** Строим область допустимых решений. ОДР представляет собой пустое множество (рис. 3.4). Задача не имеет решения в виду несовместимости системы ограничений.

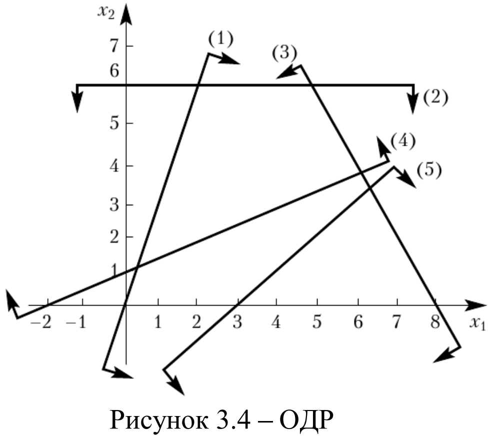


Рисунок 3.4 – ОДР

### 3.1.2. Графическое решение ЗЛП, записанных в канонической форме при условии, что *n*−*m*=2

С помощью графического метода может быть решена каноническая задача линейного программирования, система ограничений которой содержит $n$ неизвестных и $m$ линейно независимых уравнений, если $n$ и $m$ связаны соотношением $n-m=2$. Для этого её надо свести к стандартной задаче с двумя неизвестными следующим образом.

Пусть требуется найти оптимальное значение функции

$$Z(X)=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \to \max(\min)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1,\,n-1}x_{n-1}+a_{1\,n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2,\,n-1}x_{n-1}+a_{2\,n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{m,\,n-1}x_{n-1}+a_{m\,n}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$x_j\ge 0,\;\; j=\overline{1,n};\;\; n-m=2.$$

Используя метод Жордана – Гаусса, преобразуем систему (3.1) в систему $m$ уравнений с базисом $x_1,x_2,\ldots,x_m$ и свободными неизвестными $x_{m+1}=x_{n-1}$ и $x_{m+2}=x_n$. Тогда система ограничений (3.1) примет вид:

$$\begin{cases} x_1+a'_{1,\,n-1}x_{n-1}+a'_{1\,n}x_n=b'_1, \\ x_2+a'_{2,\,n-1}x_{n-1}+a'_{2\,n}x_n=b'_2, \\ \qquad\qquad\ldots \\ x_m+a'_{m,\,n-1}x_{n-1}+a'_{m\,n}x_n=b'_m, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$x_j\ge 0,\;\; j=\overline{1,n}.$$

С помощью уравнений преобразованной системы (3.2) выразим целевую линейную функцию $Z(X)$ только через свободные неизвестные $x_{n-1},\ x_n$ и, учитывая, что все базисные неизвестные $x_j\ge 0,\; j=\overline{1,m}$, отбрасываем их, переходим к системе ограничений стандартной задачи, выраженных неравенствами.

Таким образом, окончательно получаем стандартную задачу линейного программирования с двумя неизвестными: найти оптимальное значение линейной целевой функции

$$Z(X)=c'_{n-1}x_{n-1}+c'_nx_n \to \max(\min) \tag{3.3}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a'_{1,\,n-1}x_{n-1} + a'_{1\,n}x_n \le b'_1, \\ a'_{2,\,n-1}x_{n-1} + a'_{2\,n}x_n \le b'_2, \\ \qquad \dots \\ a'_{m,\,n-1}x_{n-1} + a'_{m\,n}x_n \le b'_m, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$x_{n-1} \ge 0\ ,\ \ x_n \ge 0.$$

Преобразованная задача (3.3) – (3.4) содержит две неизвестных $x_{n-1}$ и $x_n$. Решая её графическим методом, найдём оптимальные значения неизвестных $x_{n-1},\ x_n$. Подставляя их затем в систему с базисом (3.2), легко найдём оптимальные значения остальных неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m$.

**Замечание 3.1.** Графический метода прост, нагляден, позволяет достаточно быстро и легко получить ответ, но не годится для решения практических экономических задач, так как не позволяет выявить экономический смысл величин, и непригоден при $n - m \ne 2$.

**Пример 3.5.** Найдите наибольшее значение функции

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5$$

при ограничениях: $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = 30, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + x_5 = 21, \end{cases}$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

**Решение**. Выразим базисные переменные через свободные:

$$\begin{cases} x_3 = -30 + 5x_1 + 6x_2, \\ x_4 = 9 + 2x_1 - 3x_2, \\ x_5 = 21 - 7x_1 + 3x_2. \end{cases}$$

Исключим базисные переменные из целевой функции, для этого в целевую функцию вместо базисных переменных подставим их выражения через свободные переменные. Получим:

$$Z(X) = 5x_1 + 2x_2 + (-30 + 5x_1 + 6x_2) - (9 + 2x_1 - 3x_2) + (21 - 7x_1 + 3x_2) =$$
$$= -18 + x_1 + 14x_2.$$

Так как $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0$ и $x_5 \ge 0$, то получим систему неравенств

$$\begin{cases} x_3 = -30 + 5x_1 + 6x_2 \ge 0, \\ x_4 = 9 + 2x_1 - 3x_2 \ge 0, \\ x_5 = 21 - 7x_1 + 3x_2 \ge 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \ge 30, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ -7x_1 + 3x_2 \ge -21. \end{cases}$$

Исходная задача сведена к новой, которую можно решить графически.

$$Z(X) = -18 + x_1 + 14x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \geq 30, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -9, \\ -7x_1 + 3x_2 \geq -21, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Решая эту задачу графически, получим $X_{\max}(6;7)$, $Z_{\max}(X) = -18 + 6 + 14 \cdot 7 = 86.$

Найдем оптимальное решение исходной задачи, для этого найдем значения базисных переменных при $x_1 = 6,\ x_2 = 7$.

Тогда $x_3 = -30 + 5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 42,$ $x_4 = 9 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 7 = 0,$ $x_5 = 21 - 7 \cdot 6 + 3 \cdot 7 = 0,$

$X_{\max}(6;7;42;0;0)$, $Z_{\max}(X) = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 42 - 0 + 0 = 86.$

**Пример 3.6.** Решите задачу ЛП графическим способом:

$$Z(X) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

**Решение.** Это задача с тремя переменными. Ее можно решить графически, если в канонической записи будет присутствовать не более двух свободных переменных. Приведем данную задачу в каноническую форму. Для этого из 2-го уравнения выразим базисную переменную $x_3$: $x_3 = 4 - x_1$ и подставим ее значение в целевую функцию:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 3x_1 + 2x_2 + 4 - x_1 = 2x_1 + 2x_2 + 4 \to \max .$$

Из условия $x_3 \geq 0$ следует, что $4 - x_1 \geq 0$, что равносильно неравенству $x_1 \leq 4$. Следовательно, симметричная ЗЛП примет следующий вид:

$$Z(X) = 2x_1 + 2x_2 + 4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 \leq 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 14, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Полученную задачу решим обычным графическим способом.

Так как $x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$, то область допустимых решений находится в первой координатной четверти. На плоскости $Ox_1x_2$ построим прямые, уравнения которых получаются в результате замены в системе ограничений знаков неравенства на знаки точных равенств

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 12, \\ x_1 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{12} + \dfrac{x_2}{6} = 1 \ \text{– прямая } l_1, \\ x_1 = 4 \ \text{– прямая } l_2, \\ \dfrac{x_1}{7} + \dfrac{x_2}{7} = 1 \ \text{– прямая } l_3. \end{cases}$$

Относительно каждой прямой определим полуплоскость, соответствующую исходным неравенствам (рис. 3.5):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 \le 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14. \end{cases}$$

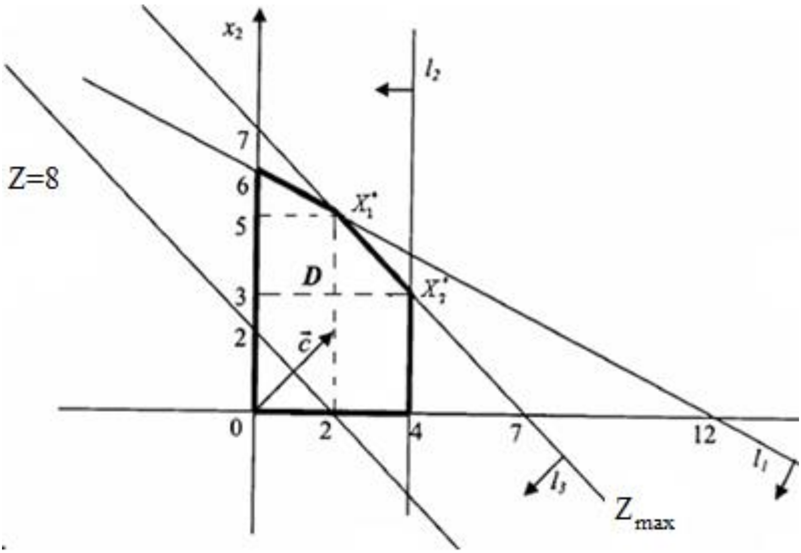



Рисунок 3.5 – ОДР

Построим вектор градиента $\bar{c}(2;2)$. Перпендикулярно к нему построим одну из прямых семейства $Z = 2x_1 + 2x_2 + 4 = const.$ Например, при $x_1 = x_2 = 1$ получим $Z$=8, причем эта прямая оказалась параллельной прямой $2x_1 + 2x_2 = 14$. Полученную прямую будем параллельно передвигать в направлении вектора $\bar{c}$ до последней точки пересечения с областью допустимых решений ***D***. Наша прямая $Z_{\max}$ совпадает с прямой $l_3$: $2x_1 + 2x_2 = 14$. Поэтому исходных точек экстремума $X$ будет множество, т.е. все точки отрезка $\left[X_{1опт},\ X_{2опт}\right]$.

Координаты точек $X_{1опт}$ и $X_{2опт}$ можно определить из рисунка: $X_{1опт}(2;5)$ и $X_{2опт}(4;3)$, но так как исходная задача имеет три переменные, то $x_3$ найдем, подставив значение переменной $x_1$ во 2-ое ограничение: при $X_{1опт}(2;5)$ получим $x_3 = 4 - x_1 = 4 - 2 = 2 \Rightarrow X_{1опт}(2;5;2)$; при $X_{2опт}(4;3)$ получим $x_3 = 4 - x_1 = 4 - 4 = 0 \Rightarrow X_{2опт}(4;3;0)$.

Для аналитической записи любого оптимального решения $X$ необходимо составить выпуклую линейную комбинацию опорных решений $X_{1опт}$ и $X_{2опт}$: $X = tX_{1опт} + (1-t)X_{2опт}, t \in [0;1]$.

Следовательно,

$$X = t(2;\ 5;\ 2) + (1-t)(4;\ 3;\ 0) =$$
$$= \left(2t + (1-t)4;\ 5t + (1-t)3;\ 2t + (1-t)0\right) = (-2t + 4; 2t + 3; 2t).$$

Тогда

$$Z_{\max} = Z_{\max}(X_{1опт}) = 3\cdot 2 + 2\cdot 5 + 1\cdot 2 = Z_{\max}(X_{2опт}) = 3\cdot 4 + 2\cdot 3 + 1\cdot 0 = 18.$$

### 3.2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Как уже отмечалось, использование графического способа удобно только при решении задач ЛП с двумя переменными. При большем числе переменных необходимо применение алгебраического аппарата. Общий метод решения задачи ЛП − метод последовательного улучшения плана − впервые был предложен советским математиком Л.В. Канторовичем в 1939 г. В дальнейшем аналогичный метод, получивший название симплекс-метода (или прямого симплекс-метода), был разработан американским математиком Дж. Данцигом в 1947. Идея этих методов состоит в целенаправленном переборе вершин множества допустимых решений.

Симплексный метод решения задачи линейного программирования применим только к задачам в канонической форме. Если задача линейного программирования представлена не в канонической форме, то прежде чем применять симплексный метод следует записать исходную задачу в основной форме.

**Симплекс-метод** − алгоритм решения оптимизационной задачи линейного программирования путём перебора вершин выпуклого многогранника в многомерном пространстве.

### 3.2.1. Необходимые теоретические сведения

Рассмотрим каноническую задачу линейного программирования (КЗЛП):

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max; \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0. \tag{3.7}$$

Система линейных уравнений (3.6) называется **системой с базисом**, если в каждом уравнении имеется переменная, которая входит в него с коэффициентом +1 и отсутствует в остальных уравнениях. Такие переменные называются **базисными**, а остальные **небазисными**.

Каноническая задача ЛП называется приведенной задачей линейного программирования (ПЗЛП), если

– система уравнений (3.6) есть система с базисом;
– целевая функция $Z(X)$ выражена только через небазисные переменные.

Введем обозначения для вектор-столбцов, составленных из коэффициентов системы (3.6):

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

Решение $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы линейных уравнений (3.6) называется **базисным**, если система вектор – столбцов $\boldsymbol{A}_j$, соответствующих ненулевым компонентам $x_j$, линейно независима.

Неотрицательное базисное решение системы линейных уравнений (3.6) называется **базисным решением** канонической задачи линейного программирования.

**Замечание 3.1.** Допустимое решение $X = (0, 0, \ldots, 0)$ канонической задачи линейного программирования также называется базисным.

**Базисное решение** канонической задачи линейного программирования называется **невырожденным**, если значения всех базисных переменных отличны от нуля. Если все базисные решения канонической задачи линейного программирования являются невырожденными, то **задача** также называется **невырожденной**.

**Теорема 3.1.** Если каноническая задача линейного программирования разрешима, то существует ее оптимальное базисное решение.

Поэтому оптимальное решение канонической задачи линейного программирования следует искать среди ее базисных решений, число которых конечно. Заметим, что базисное решение соответствует некоторой вершине многогранного множества, которое является допустимым множеством решений задачи.

### 3.2.2. Симплекс-метод решения приведенной задачи линейного программирования

Для решения приведенной задачи ЛП был разработан прямой симплекс-метод, идея которого состоит в целенаправленном переборе базисных решений.

#### Построение начального опорного плана

Рассмотрим задачу линейного программирования в симметричной форме:

$$Z(X) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max;$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0.$$

Приведем задачу к канонической форме задачи линейного программирования, добавив балансовые переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} \geq 0$, и получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \tag{3.8}$$

Введенные переменные $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ являются **базисными** переменными, соответственно все остальные переменные системы уравнений $x_1, x_2, ..., x_n$ будут **небазисными** переменными или свободными.

Далее будем предполагать, что $b_1, b_2, ..., b_m \geq 0$.

Для определения **первого допустимого базисного решения**, или другими словами, **начального опорного плана** примем значения свободных переменных равными нулю $x_1, x_2, ..., x_n = 0$. Подставим в систему уравнения значения свободных переменных

$$\begin{cases} a_{11} \cdot 0 + a_{12} \cdot 0 + ... + a_{1n} \cdot 0 + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21} \cdot 0 + a_{22} \cdot 0 + ... + a_{2n} \cdot 0 + x_{n+2} = b_2, \\ \qquad ... \\ a_{m1} \cdot 0 + a_{m2} \cdot 0 + ... + a_{mn} \cdot 0 + x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

После подстановки, мы получили значения базисных переменных $x_{n+1} = b_1,\ x_{n+2} = b_2, ..., x_{n+m} = b_m$.

Таким образом, начальный опорный план примет вид $X_Б^0 = (\underbrace{0, ..., 0,}_{n} b_1, b_2, ..., b_m)$.

Если в системе ограничений имеется единичный неотрицательный базис, например,

$$\begin{cases} x_1 + a_{1,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad ... \\ x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

то в качестве базисных переменных принимают переменные $x_1, x_2, ..., x_m$, а остальные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$ будут являться небазисными или свободными. В этом случае, получаем начальный опорный плана вида $X_{Б}^{0}=(b_1,b_2,\dots,b_m,\underbrace{0,\dots,0}_{n-m})$.

Преобразуем целевую функцию:

$$Z-c_1x_1-c_2x_2-\dots-c_nx_n=c_0.$$

Исследование опорного плана на оптимальность и вычислительный процесс удобнее вести с помощью специальных таблиц.

Составим начальную симплексную таблицу 3.1:

Таблица 3.1 – Начальная симплексная таблица

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | $c_1$ | $c_2$ | | $c_q$ | | $c_n$ | $c_{n+1}$ | $c_{n+2}$ | | $c_{n+m}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | **…** | $x_q$ | | $x_n$ | $x_{n+1}$ | $x_{n+2}$ | **…** | $x_{n+m}$ |
| $x_{n+1}$ | $c_{n+1}$ | $b_1$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1q}$ | | $a_{1n}$ | 1 | 0 | … | 0 |
| $x_{n+2}$ | $c_{n+2}$ | $b_2$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2q}$ | | $a_{2n}$ | 0 | 1 | … | 0 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | 0 | … | … |
| $x_{n+p}$ | $c_{n+p}$ | $b_p$ | $a_{p1}$ | $a_{p2}$ | … | $a_{pq}$ | | $a_{pn}$ | 0 | 0 | … | 0 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| $x_{n+m}$ | $c_{n+m}$ | $b_m$ | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | … | $a_{mq}$ | | $a_{mn}$ | 0 | 0 | … | 1 |
| $\Delta_j=Z_j-c_j$ | | $c_0$ | $-c_1$ | $-c_2$ | … | $-c_q$ | … | $-c_n$ | 0 | 0 | 0 | 0 |

Симплексная таблица называется прямо допустимой, если $b_1,b_2,\dots,b_m\ge 0$ и двойственно допустимой, если $\Delta_j\ge 0,\ j=\overline{1,n+m}$. Таблица называется оптимальной, если она прямо и двойственно допустима.

**Итерация симплекс-метода**

**Шаг 1. Проверка на оптимальность.**

Если для некоторого опорного плана все оценки $\Delta_j$ неотрицательны, то такой план оптимален (признак оптимальности опорного плана). Иначе переходим к шагу 2.

**Шаг 2. Проверка на неразрешимость.**

Если существует такая отрицательная оценка $\Delta_j$, что в соответствующем столбце нет ни одного положительного элемента, то задача ЛП неразрешима, т.е. целевая функция на множестве допустимых планов не ограничена (признак неограниченности целевой функции).

**Шаг 3. Выбор ведущего (разрешающего) столбца *q*.**

Столбец с номером $q \in \{1,...,n+m\}$ выбирается ведущим, если $\Delta_q < 0$ и хотя бы один элемент $a_{iq} > 0$. Если отрицательных оценок несколько, то в столбец базисной переменной (Б.п.) вводят ту переменную, которой соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная оценка. Переходим к шагу 4.

**Шаг 4. Выбор ведущей (разрешающей) строки *p*.**

Строка с номером $p \in \{1,...,m\}$ выбирается ведущей, если

$$\frac{b_p}{a_{pq}} = \min_{a_{iq}>0} \frac{b_i}{a_{iq}}.$$

Элемент, находящейся на пересечении ведущих (разрешающих) столбца и строки называется ведущим (разрешающим) элементом.

**Шаг 5. Преобразование симплексной таблицы с ведущим элементом $a_{pq}$:**

– небазисная переменная $x_q$ заменяет базисную переменную в строке с номером *p*;

– элементы новой таблицы в строке с номером *p* вычисляются по формулам:

$$b'_p = \frac{b_p}{a_{pq}},\ a'_{pj} = \frac{a_{pj}}{a_{pq}},\ j = \overline{1, n+m};$$

– остальные элементы таблицы вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} b'_i = b_i - a_{iq}\frac{b_p}{a_{pq}} = b_i - a_{iq}\cdot b'_p, \\ a'_{ij} = a_{ij} - a_{iq}\frac{a_{pj}}{a_{pq}} = a_{ij} - a_{iq}\cdot a'_{pj}, i = \overline{1,m},\ i \neq p,\ j = \overline{1,n+m}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Переход на шаг 1.

Заметим, что преобразования симплексной таблицы соответствуют элементарным преобразованиям строк системы линейных уравнений ПЗЛП, которые не изменяют множества решений системы. Правило выбора ведущей строки гарантирует, что $b_i' \geq 0, i = \overline{1, m}$. Это означает, что новой симплексной таблице будет соответствовать также базисное решение задачи.

Формулу (3.9) называют правилом прямоугольника, так как она имеет следующее графическое представление:

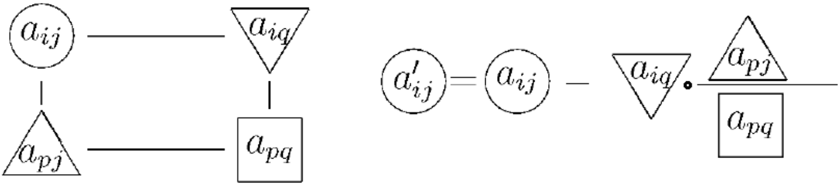


Рисунок 3.6 – Правило прямоугольника

**Примечание 3.1.** Если целевая функция требует нахождения минимального значения, то критерием оптимальности задачи является неположительность оценок $\Delta_j$ при всех $j = \overline{1, n+m}$.

**Пример 3.7.** Предприятие располагает тремя производственными ресурсами (сырьем, оборудованием, электроэнергией) и может организовать производство продукции двумя различными способами. Расход ресурсов за один месяц и общий ресурс при каждом способе производства даны в табл. 3.2. (в усл. ед.).

Таблица 3.2 – Исходные данные задачи

| Производственные ресурсы | Расход ресурсов за 1 месяц при работе | | Общий ресурс |
|---|---|---|---|
| | 1-м способом | 1-м способом | |
| Сырье | 1 | 2 | 4 |
| Оборудование | 1 | 1 | 3 |
| Электроэнергия | 2 | 1 | 8 |

При первом способе производства предприятие выпускает за один месяц 3 тыс. изделий, при втором — 4 тыс. изделий. Сколько месяцев должно работать предприятие каждым из этих способов, чтобы при наличных ресурсах обеспечить максимальный выпуск продукции?

**Решение.** Составим математическую модель задачи. Обозначим: $x_1$ − время работы предприятия первым способом, $x_2$ − время работы предприятия вторым способом.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$Z = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$Z - 3x_1 - 4x_2 = 0,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Составляем начальную симплексную таблицу (см. табл. 3.3.1).

Таблица 3.3.1 – Начальная симплекс таблица

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | $c_1 = 3$ | $c_2 = 4$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | 4 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |

Начальный опорный план имеет вид: $X_Б^0 = (0,0,4,3,8)$, $Z\left(X_Б^0\right) = 0$.

В индексной строке $\Delta_j$ имеются две отрицательные оценки, значит, найденное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

**Выбираем ведущий столбец**. Ведущим столбцом будет столбец переменной $x_2$, так как $\max\{|-3|,|-4|\} = \max\{3,4\} = 4$ (см. табл. 3.3.2).

Таблица 3.3.2 – Выбор ведущего столбца

| **Б.п.** | $C_Б$ | **B** | $c_1=3$ | $c_2=4$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | 4 | 1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |

**Выбираем ведущую строку**. Ведущей строкой будет строка переменной $x_3$, так как $\min\left\{\frac{4}{2},\frac{3}{1},\frac{8}{1}\right\} = \min\{2,3,8\} = 2$ (см. табл. 3.3.3).

Таблица 3.3.3 – Выбор ведущей строки

| **Б.п.** | $C_Б$ | **B** | $c_1=3$ | $c_2=4$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | 4 | 1 | **2** | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |

Ведущим (разрешающим) элементом является **2**.

**Составляем новую симплексную таблицу.** Вводим в столбец базисной переменной (***Б.п.)*** $x_2$, выводим $x_3$. Элементы ведущей строки делим на ведущий элемент 2 (см. табл. 3.3.4). Остальные элементы таблицы вычисляются по формуле (3.9) (см. табл. 3.3.5).

Таблица 3.3.4 – Пересчет элементов ведущей строки и столбца

| **Б.п.** | $C_Б$ | **B** | $c_1=3$ | $c_2=4$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | $\frac{4}{2}=2$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{2}=1$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{0}{2}=0$ | $\frac{0}{2}=0$ |
| $x_4$ | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 8 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j=Z_j-c_j$ | | 0 | -3 | -4 | 0 | 0 | 0 |

Таблица 3.3.5 – Пересчет остальных элементов

| **Б.п.** | $C_Б$ | **B** | $c_1=3$ | $c_2=4$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | $3-1\cdot2=1$ | $1-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ | 0 | $0-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ | $1-1\cdot0=1$ | $0-1\cdot0=0$ |
| $x_5$ | 0 | $8-1\cdot2=6$ | $2-1\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ | 0 | $0-1\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$ | $0-1\cdot0=0$ | $1-1\cdot0=1$ |
| $\Delta_j=Z_j-c_j$ | | $0-(-4)\cdot2=8$ | $-3-(-4)\cdot\frac{1}{2}=$ $=-1$ | 0 | $0-(-4)\cdot\frac{1}{2}=2$ | $0-(-4)\cdot0=$ $=0$ | $0-(-4)\cdot0=$ $=0$ |

Таблица 3.3.6 – Новая симплексная таблица

| **Б.п.** | $C_Б$ | **B** | $c_1=3$ | $c_2=4$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 6 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| $\Delta_j=Z_j-c_j$ | | 8 | -1 | 0 | 2 | 0 | 0 |

Получим $X_Б^1 = (0,2,0,1,6)$, $Z\left(X_Б^1\right) = 8$. В индексной строке имеется одна отрицательная оценка. Полученное решение можно улучшить.

**Выбираем ведущий столбец**. Ведущим столбцом будет столбец переменной $x_1$ (см. табл. 3.3.6).

**Выбираем ведущую строку**. Ведущей строкой будет строка переменной $x_4$, так как $\min\left\{2\Big/\frac{1}{2}, 1\Big/\frac{1}{2}, 6\Big/\frac{3}{2}\right\} = \min\{4,2,4\} = 2$. Ведущим элементом является $1/2$ (см. табл. 3.3.6).

**Составляем новую симплексную таблицу.** Вводим в столбец базисной переменной (***Б.п.***) $x_1$, выводим $x_4$. Элементы ведущей строки делим на ведущий элемент $1/2$ (см. табл. 3.3.7).

Таблица 3.3.7 – Пересчет элементов таблицы

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | $c_1 = 3$ | $c_2 = 4$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | 2 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | 0 |
| $x_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | $-1$ | 2 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 6 | $\frac{3}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 8 | $-1$ | 0 | 2 | 0 | 0 |

Остальные элементы таблицы вычисляются по формуле (3.9) (см. табл. 3.3.8).

Таблица 3.3.8 – Пересчет элементов таблицы

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | $c_1 = 3$ | $c_2 = 4$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | $2 - \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ | 0 | 1 | $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1) = 1$ | $0 - \frac{1}{2}\cdot 2 = -1$ | 0 |
| $x_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 |
| $x_5$ | 0 | $6 - \frac{3}{2}\cdot 2 = 3$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}(-1) = 1$ | $0 - \frac{3}{2}\cdot 2 = -3$ | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | $8 - (-1)\cdot 2 = 10$ | 0 | 0 | $2 - (-1)\cdot(-1) = 1$ | $0 - (-1)\cdot 2 = 2$ | 0 |

Таким образом, получаем.

Таблица 3.3.9 – Итоговая симплекс таблица

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | $c_1 = 3$ | $c_2 = 4$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 1 | -1 | 0 |
| $x_1$ | 3 | 2 | 1 | 0 | -1 | 2 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 3 | 0 | 0 | 1 | -3 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 10 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 |

Все оценки свободных переменных $\Delta_j \geq 0$, следовательно, найденное опорное решение является оптимальным: $X_Б^2 = (2,1,0,0,3)$, $Z\left(X_Б^2\right) = 10$.

Таким образом, по первому способу предприятие должно работать два месяца, по второму — один месяц, при этом максимальный выпуск продукции составит 10 тыс. ед.

### 3.2.3. Альтернативный оптимум

При решении задач линейного программирования симплексным методом критерием оптимальности является условие $\Delta_j \geq 0$ для задач на максимум и условие $\Delta_j \leq 0$ для задач на минимум. Если на каком-то шаге окажется, что хотя бы одна оценка свободной переменной $\Delta_j = 0$, а все остальные $\Delta_j > 0$ для задач на максимум ($\Delta_j < 0$ для задач на минимум), то, приняв в качестве ключевого столбца столбец, где $\Delta_j = 0$, и найдя новое оптимальное решение, заметим, что значение целевой функции при этом не изменится. Говорят, что в этом случае задача имеет альтернативный оптимум.

Критерием альтернативного оптимума при решении задач симплексным методом является равенство нулю хотя бы одной оценки свободной переменной ($\Delta_j = 0$).

Если только одна оценка свободной переменной равна нулю, то решение находится по формуле

$$X_{опт} = tX_{опт,1} + \left(1-t\right)X_{опт,2},$$

где $0 \leq t \leq 1$.

Если две оценки и более, например, $s$ свободных переменных равны нулю, то оптимальное решение определяется по формуле

$$X_{опт} = \sum_{i=1}^{s} t_i X_{опт,i}\ ,\ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1, t_i \ge 0.$$

В задачах, имеющих альтернативный оптимум, возникает возможность включения в ее модель других критериев эффективности.

## 3.3. Задачи для самостоятельного решения

1. Постройте на плоскости область допустимых решений системы линейных неравенств, найдите наибольшее и наименьшее значения линейной функции $Z(X)$.

| | |
|---|---|
| 1. $Z = 2x_1 + 3x_2,\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \ge -9, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 2. $Z = 5x_1 - 3x_2,\ \begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 3. $Z = 2x_1 + 3x_2,\ \begin{cases} -6x_1 + x_2 \le 3, \\ -5x_1 + 9x_2 \le 45, \\ x_1 - 3x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 4. $Z = 2x_1 + 2x_2,\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 4, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 4x_1 - x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 5. $Z = 2x_1 + 4x_2,\ \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ x_1 - 5x_2 \le 5, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 6. $Z = 15x_1 + 10x_2,\ \begin{cases} 6x_1 - x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 7. $Z = 3x_1 + 2x_2,$ $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -2, \\ 4x_1 - x_2 \le 16, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 8. $Z = 2x_1 + 5x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ -x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 5, \\ x_1 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 9. $Z = 2x_1 - x_2,$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 2, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 16, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 10. $Z = 3x_1 + 2x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 11. $Z = 2x_1 + 4x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 9, \\ x_1 + 2x_2 \le 15, \\ x_1 + 2x_2 \ge 9, \\ 2x_1 + x_2 \le 15, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 12. $Z = x_1 - 3x_2,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \le 6, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \le 6. \end{cases}$ |
| 13. $Z = 3x_1 - x_2,$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 \le 6, \\ x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 14. $Z = x_1 - 2x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ -x_1 + 2x_2 \le 7, \\ -4x_1 + 3x_2 \ge -12, \\ x_1 + 3x_2 \ge 18, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 15. $Z = 2x_1 + 5x_2,$ $\begin{cases} -4x_1 + x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \ge -3, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 16. $Z = 5x_1 + 5x_2,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 17. $Z=-x_1-x_2,$ $\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 4, \\ -x_1+2x_2\le 8, \\ x_1+x_2\ge 10, \\ 4x_1-x_2\le 20, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ | 18. $Z=-x_1-x_2,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 0, \\ -5x_1+9x_2\le 45, \\ x_1-2x_2\le 4, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ |
| 19. $Z=4x_1+2x_2,$ $\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6, \\ x_1+2x_2\ge 10, \\ x_1-3x_2\le 6, \\ x_1+x_2\ge 3, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ | 20. $Z=-3x_1-x_2,$ $\begin{cases} 4x_1-x_2\ge 0, \\ 2x_1-x_2\le 0, \\ x_1+x_2\le 3, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ |
| 21. $Z=2x_1+3x_2,$ $\begin{cases} x_1+2x_2\ge 2, \\ x_1+x_2\ge 2, \\ 2x_1+x_2\ge 4, \\ 2x_1-3x_2\le 0, \\ x_1\ge 0. \end{cases}$ | 22. $Z=4x_1+6x_2,$ $\begin{cases} 4x_1-5x_2\ge 0, \\ 2x_1-3x_2\le 0, \\ 2x_1+3x_2\ge 6, \\ 2x_1+x_2\ge 2. \end{cases}$ |
| 23. $Z=-x_1+4x_2,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2\le 6, \\ 3x_1-2x_2\le 6, \\ 2x_1+3x_2\ge 0, \\ x_1+x_2\ge -1, \\ x_2\ge 0. \end{cases}$ | 24. $Z=x_1+4x_2,$ $\begin{cases} 2x_1+3x_2\ge 6, \\ -2x_1+3x_2\ge 6, \\ x_1+x_2\le 3, \\ 2x_1-3x_2\le 0, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ |
| 25. $Z=x_1-4x_2,$ $\begin{cases} x_1-3x_2\le 0, \\ x_1-x_2\ge 0, \\ 2x_1+x_2\ge 6, \\ 2x_1+3x_2\le 18, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ | 26. $Z=-5x_1+x_2,$ $\begin{cases} 2x_1-3x_2\ge 0, \\ x_1+3x_2\ge 9, \\ x_1-3x_2\le 3, \\ -x_1+3x_2\le 3, \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 27. $Z = 4x_1 + 3x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ 3x_1 - x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 28. $Z = 2x_1 + 3x_2,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge 6, \\ 3x_1 - x_2 \ge 6. \end{cases}$ |
| 29. $Z = 3x_1 - x_2,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \\ 3x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ x_1 - x_2 \le 0. \end{cases}$ | 30. $Z = 3x_1 + 4x_2,$ $\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge 0, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ 2x_1 - 5x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |

2 Решите графическим методом задачу с $n$ переменными.

| | |
|---|---|
| 1. $Z = 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 13x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 8, \\ -7x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -2, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 2. $Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 - 12x_4 - 9x_5 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 7x_3 - 3x_4 - 7x_5 = 13, \\ x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 2x_4 - 14x_5 = 20, \\ x_1 + 3x_2 + 20x_3 + 6x_4 - 23x_5 = 19, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 3. $Z = 4x_1 + 13x_2 + 3x_3 + 6x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 9x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 4. $Z = x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ 11x_1 - 14x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 5. $Z = 11x_2 + x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 11x_1 - 11x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 11, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 6. $Z = 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + 13x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 19, \\ 3x_1 + 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 16, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 7. $Z=12x_1+8x_2+5x_3+4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -6x_1+x_2-x_3+2x_4=-2, \\ 11x_1-x_2+2x_3-3x_4=7, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ | 8. $Z=x_1-19x_2-5x_3-7x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 5x_1-4x_2+x_3-x_4=-1, \\ -6x_1+7x_2-x_3+2x_4=10, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 9. $Z=7x_1+3x_2+3x_3+2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -10x_1-x_2+2x_3+3x_4=-2, \\ 6x_1+2x_2+3x_3+x_4=18, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ | 10. $Z=3x_1+4x_2+2x_3+7x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1-x_2+10x_3-5x_4=10, \\ -x_1+x_2-6x_3+4x_4=-2, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 11. $Z=2x_1+5x_2+x_3 \to \max(\min),$ $\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=6, \\ 4x_1-6x_2+x_4=12, \\ 8x_1+12x_2 \leq 24, \\ 6x_1+9x_2 \leq 54, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,3}. \end{cases}$ | 12. $Z=3x_1+2x_2+5x_3+4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 8x_1-7x_2+3x_3-2x_4=4, \\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4=20, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 13. $Z=-2x_1+x_2+3x_3-2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1-x_2-4x_3+x_4=2, \\ 5x_1-x_2-7x_3+2x_4=6, \\ x_j \geq 0, \ \ j=1,4. \end{cases}$ | 14. $Z=-2x_1+2x_2-3x_3-7x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1-8x_2+x_3+6x_4=-2, \\ 3x_1+27x_2-4x_3-22x_4=-2, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 15. $Z=2x_1+x_2-4x_3+3x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1+3x_3-x_4=-2, \\ 3x_1+x_2-5x_3+2x_4=7, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ | 16. $Z=2x_1+6x_2+x_3+x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -4x_1+5x_2+2x_3-x_4=-2, \\ 5x_1-8x_2-3x_3+x_4=-1, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 17. $Z=2x_1+5x_2+x_3+x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1-2x_2-3x_3+x_4=1, \\ 3x_2+2x_3+x_4=6, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ | 18. $Z=9x_1+2x_2+4x_3-8x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1+3x_2+2x_3-7x_4=12, \\ 2x_1+2x_2+x_3-4x_4=4, \\ x_j \geq 0, \ \ j=\overline{1,4}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 19. $Z = x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -6x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 20. $Z = 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 21. $Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max(\min),$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 22. $Z = 3x_1 + x_5 \to \max(\min),$ $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 12, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 23. $Z = x_1 - x_2 \to \max(\min),$ $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 24. $Z = -4x_1 + 3x_2 + x_4 + x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + x_6 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_7 = 4, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,7}. \end{cases}$ |
| 25. $Z = x_1 + 3x_2 \to \max(\min),$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_5 + x_6 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_4 + x_6 = 25, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_5 = -9, \\ 6x_2 + x_3 + x_4 = 36, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 26. $Z = -22x_1 + 19x_2 - 5x_3 - 6x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 - 13x_2 + 7x_3 - x_4 = -1, \\ -4x_1 + 18x_2 - 10x_3 + 2x_4 = 6, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 27. $Z = 5x_2 + x_3 + x_4 \to \max(\min),$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 7, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \le 3, \\ -5x_1 - 3x_2 \le -15, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 28. $Z = x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 5x_1 + 5x_2 + x_4 = 25, \\ 7x_1 + 7x_2 + x_5 = 49, \\ 3x_1 - 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 6x_2 \ge -18, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 29. $Z = 3x_1 + 2x_2 \to \min(\max),$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 = 9, \\ 3x_1 + x_3 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_4 - 3x_5 - x_6 = 5, \\ x_1 + x_2 + 3x_5 - 2x_6 = -1, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$ | 30. $Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \quad + 7x_4 = 21, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 = -12, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |

3.Решите задачи линейного программирования симплекс-методом.

| | |
|---|---|
| 1. $Z = x_1 - x_2 \to \max;$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ | 2. $Z = -x_2 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 3. $Z = 2x_1 + 6x_2 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$ | 4. $Z = 4x_1 + 16x_2 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0.$ |
| 5. $Z = 2x_1 - 4x_2 + x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \ge -2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$ | 6. $Z = 2x_1 - x_2 \to \min;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 11, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$ |
| 7. $Z = 3x_1 - 12x_2 + 4x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge -2, \\ x_1 - 4x_2 + 4x_3 \le 1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$ | 8. $Z = -x_1 - 2x_2 - 3x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \ge -1, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le -1, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 9. $Z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 10. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_3 - x_4 = 3, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 11. $Z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 10, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 12. $Z = x_1 - 2x_2 \to \max;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 + x_5 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 13. $Z = -x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 4 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ -2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 14. $Z = x_1 + x_2 + 5x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 15. $Z = -x_1 + 4x_2 - x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 16. $Z = x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 17. $Z = x_1 - x_2 - 2x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \geq 1, \\ -2x_1 + 3x_2 = 1, \\ -3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 1, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 18. $Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 10, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 15, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 19. $Z = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \min;$ $\begin{cases} x_1 + x_3 \leq 4, \\ 2x_1 + x_2 = 4, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 20. $Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - x_6 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7, \\ x_1 - x_3 + x_5 - x_6 = -2, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + 2x_6 = 5, \\ x_i \geq 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 21. $Z = x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 22. $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 - 2x_6 \to \max(\min);$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 - x_6 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 10, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$ |
| 23. $Z = -x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 15, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 2, \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 \ge 17, \\ x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 24. $Z = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max;$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 \le 18, \\ -2x_2 + 3x_3 + x_4 \ge 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 25. $Z = -2x_1 - 8x_2 - x_3 - 5x_4 \to \max;$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \ge 18, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 24, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 30, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 26. $Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max;$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 \ge 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \le 4, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 27. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min;$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 3, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 28. $Z = x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 - x_6 \to \min;$ $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_5 + x_6 \ge 10, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 + 2x_6 \ge 7, \\ x_i \ge 0,\ i = \overline{1,6}. \end{cases}$ |

## ТЕМА 4: ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

### 4.1. Прямая и двойственная задачи

Важную роль в линейном программировании играют двойственные или сопряженные задачи, особенно по отношению к задачам, связанным с планированием производства и распределением ресурсов.

Идея двойственности заключается в том, что нельзя получить максимальную прибыль не минимизировав затраты.

Каждой задаче линейного программирования можно определенным образом поставить в соответствие другую задачу линейного программирования, называемую **сопряженной** или **двойственной** по отношению к исходной или прямой задаче, сформулированную по стандартным правилам.

Каждая из этих задач может быть решена самостоятельно, но при этом допустимые решения их прямо связаны между собой, что позволяет, зная оптимальное решение одной из них, определить оптимальное решение другой, при этом часто решение двойственной задачи намного легче найти, чем решение прямой.

В качестве примера рассмотрим задачу планирования производства.

Предприятие № 1 имеет $m$ видов ресурсов в количестве $b_i,\ \overline{1,m}$ единиц каждого вида ресурсов, из которых производится $n$ – видов продукции. Для производства единицы $j$-го вида продукции используется $a_{ij}$ – единиц $i$-того вида ресурсов, а стоимость единицы продукции $c_j$. Необходимо составить план выпуска продукции (указать, сколько и какого типа надо произвести), обеспечивающей ее максимальную стоимость.

Это **прямая задача**. Следовательно, прямая задача линейного программирования в стандартной форме звучит следующим образом: надо определить вектор $X=\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)$, удовлетворяющий ограничениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,n}$$

и обеспечивающей максимум целевой функции

$$Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max .$$

Допустим, что предприятие № 2 решило закупить все ресурсы, которыми располагает предприятие № 1. В этом случае предприятию № 2 необходимо установить оптимальные цены на эти ресурсы.

Поставим каждому ограничению исходной задачи в соответствие двойственную переменную $Y = \left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$, как вектор оценок видов сырья, где $y_i$ − оценка стоимости единицы *i*-го ресурса:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \;\Leftrightarrow\; y_i \,,\; i = \overline{1,m}, \\ x_j \ge 0,\; j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

Оценка ресурсов исходит из следующих условий:

− общая стоимость ресурсов (общие затраты) для предприятия № 2 должна быть минимальной: $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$;

− стоимость всех ресурсов, затраченных на продажу единицы *j*-го товара, должна быть не меньше дохода, получаемого при реализации единицы *j*-го товара (за каждый вид ресурса предприятию № 1 надо уплатить не менее той суммы, которую это предприятие могло бы получить при переработке данного вида ресурса в готовую продукцию, т.е. не меньше стоимости окончательного продукта): $\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_j \,,\; j = \overline{1,n}.$

Таким образом, **двойственная задача по отношению к исходной задаче** планирования производства формально записывается следующим образом: необходимо определить вектор $Y = \left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$, обеспечивающий минимум функции

$$F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \,,\;\; j = \overline{1,n},$$

$$y_i \ge 0,\;\; i = \overline{1,m}.$$

**Замечание 4.1**. Стоимостное выражение ресурса не есть его цена, т.е. $\left(y_1, y_2, ..., y_m\right)$ – это неявные или учетные цены.

Экономически двойственные задачи можно интерпретировать следующим образом.

**Прямая задача:** сколько и какой продукции $x_j \ge 0,\;\; j = \overline{1,n}$ необходимо произвести, чтобы при заданных стоимостях единицы продукции $c_j \ge 0,\;\; j = \overline{1,n}$, объемах имеющихся ресурсов $b_i \ge 0,\;\; i = \overline{1,m}$ и нормах расходов $a_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ получить максимальную прибыль от реализации произведенной продукции?

**Двойственная задача:** какова должна быть оценка единицы каждого из ресурсов $y_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$, чтобы при заданных количествах ресурсов $b_i \ge 0,\ i = \overline{1,m}$, величинах стоимости единицы продукции $c_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}$ и нормах расходов $a_{ij} \ge 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}$ общие затраты производства были минимальными?

Прямая и двойственная задачи образуют пару задач, называемую в линейном программировании **двойственной парой**.

## 4.2. Правила составления двойственных задач

Двойственные задачи обычно подразделяют на **симметричные** и **несимметричные**.

Двойственные задачи, ограничения которых задаются неравенствами, называются **симметричными**, одна из которых называется **основной**, а другая − **двойственной.**

Таким образом, **пара симметричных двойственных** задач имеет вид:

| Прямая задача | Двойственная задача |
|---|---|
| $Z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$<br>$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m},$<br>$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}.$ | $F = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$<br>$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ \ j = \overline{1,n},$<br>$y_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}.$ |
| $Z = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$<br>$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i,\ i = \overline{1,m},$<br>$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}.$ | $F = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max,$<br>$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j,\ \ j = \overline{1,n},$<br>$y_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}.$ |

Двойственные задачи, ограничения которых задаются уравнениями, называются **несимметричными.** Это означает, что в несимметричном случае двойственная переменная $y_i,\ i = \overline{1,m}$ свободна по знаку.

**Несимметричные двойственные задачи** имеют вид:

| **Прямая задача** | **Двойственная задача** |
|---|---|
| $Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\min,$<br>$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m},$<br>$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}.$ | $F=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\max,$<br>$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\le c_j,\ \ j=\overline{1,n},$<br>$y_i$ − *любое*, $i=\overline{1,m}.$ |
| $Z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\to\max,$<br>$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{1,m},$<br>$x_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,n}.$ | $F=\sum_{i=1}^{m}b_iy_i\to\min,$<br>$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i\ge c_j,\ \ j=\overline{1,n}.$<br>$y_i$ − *любое*, $i=\overline{1,m}.$ |

Когда система ограничений одной из задач содержит как уравнения, так и неравенства, и некоторые переменные неотрицательны, пара двойственных задач называется **смешанной**:

| **Прямая задача** | **Двойственная задача** |
|---|---|
| $Z=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n\to\max,$<br>$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\le b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\le b_2,\\ \ldots\\ a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+\ldots+a_{kn}x_n\le b_k,\\ a_{k+1,1}x_1+a_{k+1,2}x_2+\ldots+a_{k+1,n}x_n=b_{k+1},\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}$<br>$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,p},\ \ p\le n.$ | $F=b_1y_1+b_2y_2+\ldots+b_my_m\to\min,$<br>$\begin{cases}a_{11}y_1+a_{21}y_2+\ldots+a_{m1}y_m\ge c_1,\\ a_{12}y_1+a_{22}y_2+\ldots+a_{m2}y_m\ge c_2,\\ \ldots\\ a_{1p}y_1+a_{2p}y_2+\ldots+a_{mp}y_m\ge c_p,\\ a_{1p+1}y_1+a_{2p+1}y_2+\ldots+a_{mp+1}y_m=c_{p+1},\\ \ldots\\ a_{1n}y_1+a_{2n}y_2+\ldots+a_{mn}y_m=c_n,\end{cases}$<br>$y_i\ge 0,\ i=\overline{1,k}.$ |

При построении двойственной задачи в смешанной паре придерживаются следующего правила. Если двойственная переменная поставлена в соответствие ограничению-неравенству, то она неотрицательна, если уравнению − то произвольна по знаку. Если исходная переменная неотрицательна, ей ставится в соответствие ограничение − неравенство; если переменная произвольна по знаку − соответствующее ей ограничение − уравнение. Далее используют то же правило, что и для симметричной пары.

**Введем обозначения:**

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов системы ограничений;

$C_{1\times n}=\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{pmatrix}$ – матрица-строка коэффициентов целевой функции;

$$B_{m\times 1}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец свободных членов;

$$X_{n\times 1}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – матрица-столбец неизвестных.

Тогда схема составления двойственных задач имеет вид:

**Схема составления двойственных задач:**

| **Прямая задача** | **Двойственная задача** |
|---|---|
| $\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \\ \hline c_1 & c_2 & \dots & c_n & Z(X) \end{array}$ <br> $Z=CX\to\max,$ <br> $AX\le B,$ <br> $X\ge 0.$ | $\begin{array}{cccc\|c} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} & c_n \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_m & F(Y) \end{array}$ <br> $F=BY\to\min,$ <br> $A^TY\ge C,$ <br> $Y\ge 0.$ |

Сравнивая две сформулированные задачи, видно, что двойственная задача составляется согласно **следующим правилам**.

1. Если целевая функция задачи исследуется на max, то ограничения должны иметь знак «$\le$» или «=», а если целевая функция задачи исследуется на min, то ограничения должны иметь знак «$\ge$» или «=».

2. Каждому ограничению исходной задачи ставится в соответствие двойственная переменная $y_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, и наоборот, т.е. число переменных двойственной задачи равно числу ограничений прямой задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных исходной задачи.

3. Если целевая функция прямой задачи исследуется на max, то целевая функция двойственной задачи исследуется на min, и наоборот: $Z \to \max \Leftrightarrow F \to \min$.

4. Коэффициенты целевой функции $C = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$ прямой задачи являются свободными членами системы ограничений двойственной задачи.

5. Свободные члены системы ограничений прямой задачи $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ являются свободными коэффициентами целевой функции двойственной задачи.

6. Матрица коэффициентов системы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу.

7. Если на переменную $x_j,\ j = \overline{1,p}$ прямой задачи наложено ограничение на знак ($x_j \geq 0,\ j = \overline{1,p}$), то $j$-е ограничение двойственной задачи записывается в виде неравенства, и наоборот.

8. Если переменная $x_j,\ j = \overline{p+1,n}$ исходной задачи произвольная по знаку, то $j$-е ограничение двойственной задачи имеет вид равенства, и наоборот.

9. Если в прямой задаче имеются ограничения-равенства, то на соответствующие переменные двойственной задачи не налагаются условия неотрицательности.

10. Если на переменную двойственной задачи наложено условие неотрицательности $y_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$, то в прямой задаче соответствующее ограничение двойственной задачи записывается в виде неравенства.

**Пример 4.1**. Составьте к следующей задаче ЛП двойственную:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 \ge -12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

**Решение.**

1. Упорядочим запись задачи. Для этого первое ограничение умножим на (-1):

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

2. Каждому ограничению исходной задачи поставим в соответствие двойственную переменную $y_i, \ i = \overline{1,3}$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12 & \leftrightarrow y_1 \ge 0, \\ x_1 + x_3 = 4 & \leftrightarrow y_2 - \text{любая}, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 14 & \leftrightarrow y_3 \ge 0, \\ x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,3}. & \end{cases}$$

Таким образом, число переменных исходной задачи равно числу ограничений двойственной, т.е. $m$=3.

3. Так как целевая функция прямой задачи исследуется на max, то целевая функция двойственной задачи будет исследоваться на min:

$$Z \to \max \Leftrightarrow F \to \min.$$

4. Свободные члены системы ограничений прямой задачи $B = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ станут свободными коэффициентами целевой функции двойственной, т.е.

$$F = 12y_1 + 4y_2 + 14y_3 \to \min.$$

5. Коэффициенты целевой функции прямой задачи $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ станут свободными членами системы ограничений двойственной.

6. Матрица коэффициентов системы ограничений прямой и двойственной задач являются транспонированными друг к другу, т.е.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&1\\2&2&0\end{pmatrix}\rightarrow A^T=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

7. Так как все три переменные $x_j$, $j=\overline{1,3}$ исходной задачи принимают только лишь неотрицательные значения, то в системе ограничений двойственной задачи должны быть три неравенства. Вид неравенства выбирается по целевой функции. Поскольку $F$ исследуется на min, то неравенства должны быть со знаком «$\geq$». Следовательно, система ограничений примет следующий вид:

$$\begin{cases}y_1+y_2+2y_3\geq 3,\\2y_1+2y_3\geq 2,\\y_2\geq 1.\end{cases}$$

8. Так как второе ограничение в прямой задаче имеются вид равенства, то на соответствующую переменную двойственной задачи не будет налагаться условие неотрицательности $y_2$ – *любая.*

Таким образом, двойственная задача имеет вид:

$$F=12y_1+4y_2+14y_3\rightarrow\min,$$

при ограничениях

$$\begin{cases}y_1+y_2+2y_3\geq 3,\\2y_1+2y_3\geq 2,\\y_2\geq 1,\\y_1,y_3\geq 0,\ y_2\ -\ \textit{любая}.\end{cases}$$

**Пример 4.2.** Составьте к следующей задаче ЛП двойственную:

$$Z=2x_1+3x_2-x_3+x_4\rightarrow\max,$$

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+x_3-4x_4=5,\\x_1+2x_2+3x_3+x_4=6,\\2x_1-x_2+x_3+2x_4\leq 4,\\3x_1+3x_2-4x_3+5x_4\leq 10,\end{cases}$$

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0.$$

**Решение:**

$$Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \le 4, \\ 3x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 5x_4 \le 10, \end{cases} \left| \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{array} \right.$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$ :

$$A_1 = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 1 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & -4 & 5 & 10 \\ \hline 2 & 3 & -1 & 1 & Z(X) \end{array} \right), \quad A_1^T = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & -4 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ \hline 5 & 6 & 4 & 10 & F(Y) \end{array} \right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F = 5y_1 + 6y_2 + 4y_3 + 10y_4 \to \min,$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 + 3y_4 \ge 2, \\ 3y_1 + 2y_2 - y_3 + 3y_4 \ge 3, \\ y_1 + 3y_2 + y_3 - 4y_4 = -1, \\ -4y_1 + y_2 + 2y_3 + 5y_4 = 4, \end{cases}$$
$$y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0,\ y_1, y_2 \ - \ \textit{любые}.$$

## 4.3. Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание

Пусть имеется симметричная пара двойственных задач:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \qquad F = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j,\ \ j = \overline{1,n},$$

$$x_j \ge 0,\ \ j = \overline{1,n}. \qquad y_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,m}.$$

Связь между решениями прямой и двойственной задач может быть сформулирована следующими леммой и теоремами двойственности.

**Лемма 4.1 (основное неравенство теории двойственности).** Если $X$ − план исходной задачи, а $Y$ − план двойственной задачи, то значение целевой функции исходной задачи при плане $X$ всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане $Y$, то есть

$$Z(X) \le F(Y) \text{ или } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i .$$

**Экономическое содержание неравенства** означает, что для любых допустимых планов $X$ и $Y$ общая стоимость произведенной продукции не превосходит суммарной оценки ресурсов.

Связь между оптимальными решениями двойственных задач устанавливается теоремами двойственности.

**Теорема 4.1 (Первая теорема двойственности).** Если одна из двойственных задач имеет оптимальное решение, то и другая также имеет оптимальное решение. При этом значения целевых функций для их оптимальных планов $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ равны между собой, т.е. $Z\left(X^*\right) = F\left(Y^*\right)$.

**Следствие 4.1.** Для разрешимости одной из задач двойственной пары необходимо и достаточно, чтобы множество допустимых планов каждой из двойственных задач было не пусто.

**Следствие 4.2.** Если целевая функция одной из задач двойственной пары не ограничена, то другая задача двойственной пары не имеет планов.

**Следствие 4.3.** Для оптимальности планов $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ пары двойственных задач необходимо и достаточно выполнение равенства $Z\left(X^*\right) = F\left(Y^*\right)$.

**Следствие 4.4.** Если в одной из двойственных задач нарушается единственность оптимального решения, то оптимальное решение двойственной задачи вырожденное.

**Экономический смысл первой теоремы двойственности** в том, что план производства и вектор оценок ресурсов являются оптимальными тогда и только тогда, когда цена произведенной продукции равна суммарной оценке ресурсов.

Это означает, что двойственные оценки выступают инструментом балансировки затрат и результатов.

**Теорема 4.2 (Вторая теорема двойственности).** Для оптимальности допустимых решений прямой и двойственной задач $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ и

$Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$y_i^* \left( \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) = 0, \ i = \overline{1, m},$$

$$x_j^* \left( \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* - c_j \right) = 0, \ j = \overline{1, n}.$$

**Экономически первое условие означает**, что если оценка *i*-го вида ресурса положительна в оптимальном плане $y_i^* > 0$, то в оптимальном плане этот ресурс используется полностью $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$. Если же в оптимальном плане этот ресурс используется не полностью $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$, то оценка в оптимальном плане равна нулю $y_i^* = 0$.

**Экономически второе условие означает**, что если производство *j*-го продукта включено в оптимальный план $x_j^* > 0$, то оно в оптимальных оценках неубыточно $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$. Если же производство убыточно (его затратная цена превосходит цену реализации) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* > c_j$, то этот продукт не производится в оптимальном плане $x_j^* = 0$.

## 4.4. Геометрическая интерпретация двойственных задач

Если число переменных в прямой и двойственной задачах, образующих данную пару, равно двум, то, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования, можно легко найти решение данной пары задач.

При этом имеет место один из следующих трех взаимно исключающих друг друга случаев: 1) обе задачи имеют планы; 2) план имеет только одна задача; 3) для каждой задачи двойственной пары множество планов пусто.

**Пример 4.3**. Составьте к следующей задаче ЛП двойственную и найти решение обеих задач:

$$Z = 2x_1 + 7x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,2}.$$

**Решение.** Двойственной задачей по отношению к исходной является следующая задача:

$$Z = 14y_1 + 8y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 \ge 2, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \ j = \overline{1,2}.$$

Как в исходной, так и в двойственной задаче число неизвестных равно двум. Следовательно, их решение можно найти, используя геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования (рис. 4.1 и 4.2).

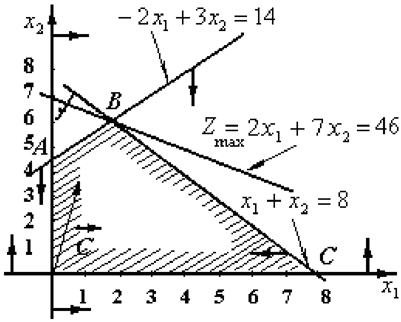



Рисунок 4.1

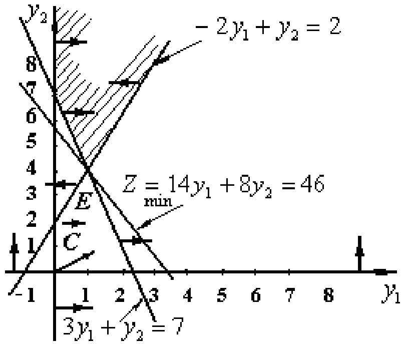



Рисунок 4.2

Из рис. 4.1 видно, что при всяком плане исходной задачи значение целевой функции не больше 46. Одновременно, как видно из рис. 4.2, значение целевой функции двойственной задачи при любом ее плане не меньше 46.

Таким образом, при любом плане исходной задачи значение целевой функции не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при ее произвольном плане.

Как видно из рис. 4.1, максимальное значение целевая функция исходной задачи принимает в точке $B$. Следовательно, $X^* = (2;\ 6)$ является оптимальным планом, при котором $Z_{\max} = 46$.

Минимальное значение целевая функция двойственной задачи принимает в точке $E$ (рис. 4.2). Значит, $Y^* = (1;\ 4)$ является оптимальным планом двойственной задачи, при котором $F_{\min} = 46$.

Таким образом, значения целевых функций исходной и двойственной задач при их оптимальных планах равны между собой.

## 4.5. Нахождение решения двойственных задач

**Первый способ** нахождения решения двойственной задачи в симметричной паре основан на применении основных теорем двойственности.

**Пример 4.4**. Дана задача линейного программирования в неканоническом виде

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 4x_1 + 3x_2 \le 15, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Данная задача имеет оптимальное решение $X^* = (1.2;\ 3.4)$, $Z(X^*) = 12.6$. Составьте двойственную задачу и найдите её оптимальное решение.

**Решение.**

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, & \bigg|\ y_1 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 15, & \bigg|\ y_2 \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 15 \\ \hline 2 & 3 & Z(X) \end{array}\right), \quad A_1^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ \hline 8 & 15 & F(Y) \end{array}\right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y) = 8y_1 + 15y_2 \to \min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_2 \geq 2, \\ 2y_1 + 3y_2 \geq 3, \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 \neq 0, \\ x_2 \neq 0, \end{array} \right.$$

$$y_1, y_2 \geq 0.$$

Из первой теоремы двойственности следует, что $Z_{\max}\left(X^*\right) = F_{\min}\left(Y^*\right) = 12.6$.

Применим вторую теорему двойственности: так как в оптимальном решении исходной задачи $x_1^* = 1.2 \neq 0, x_2^* = 3.4 \neq 0$, то на оптимальном решении двойственной задачи первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства

$$\begin{cases} y_1^* + 4y_2^* = 2, \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 3. \end{cases}$$

Решим систему. Первое уравнение умножим на 2: $\begin{cases} 2y_1^* + 8y_2^* = 4, \\ 2y_1^* + 3y_2^* = 3. \end{cases}$

Вычтем из первого уравнения второе: $5y_2^* = 1,\ y_2^* = \dfrac{1}{5} = 0.2$.

Тогда $y_1^* = 2 - 4y_2^* = 2 - 4 \cdot \dfrac{1}{5} = \dfrac{10}{5} - \dfrac{4}{5} = \dfrac{6}{5} = 1.2$.

**Ответ:** $Y^* = \left(1.2, 0.2\right), F_{\min}\left(Y^*\right) = 12.6.$

**Пример 4.5.** Дана задача линейного программирования в неканоническом виде

$$Z(X) = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 \leq 240, \\ 4x_1 + 5x_2 \leq 200, \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 360, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Данная задача имеет оптимальное решение $X^* = (23.53;\ 21.18)$, $Z(X^*) = 110.6$. Составьте двойственную задачу и найдите её оптимальное решение.

**Решение.**

Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 8 & 240 \\ 4 & 5 & 200 \\ 9 & 4 & 360 \\ \hline 2 & 3 & Z(X) \end{array}\right), \quad A_1^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 9 & 2 \\ 8 & 5 & 4 & 3 \\ \hline 240 & 200 & 360 & F(Y) \end{array}\right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y) = 240y_1 + 200y_2 + 360y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_4 \ge 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 \ge 3, \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

Из первой теоремы двойственности следует, что $Z_{\max}\left(X^*\right) = F_{\min}\left(Y^*\right) = 110.6.$

Применим вторую теорему двойственности: так как в оптимальном решении исходной задачи $x_1^* = 23.53 \ne 0, x_2^* = 21.18 \ne 0$, то на оптимальном решении двойственной задачи первое и второе ограничения двойственной задачи выполняются как равенства:

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 + 9y_3 = 2, \\ 8y_1 + 5y_2 + 4y_3 = 3. \end{cases}$$

Подставим $X^* = (23.53;\ 21.18)$ в ограничения исходной задачи и получим, что третье ограничение выполняется как строгое неравенство:

$$\begin{cases} 3 \cdot 23.53 + 8 \cdot 21.18 = 240 = 240, \\ 4 \cdot 23.53 + 5 \cdot 21.18 = 200 = 200, \\ 9 \cdot 23.53 + 4 \cdot 21.18 = 296.49 < 360. \end{cases}$$

Следовательно $y_3^* = 0$.

Получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 3y_1^* + 4y_2^* + 9y_3^* = 2, \\ 8y_1^* + 5y_2^* + 4y_3^* = 3, \\ y_3^* = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y_1^* + 4y_2^* = 2, \\ 8y_1^* + 5y_2^* = 3. \end{cases}$$

Решая систему, получим $Y^* = \left(\frac{2}{17}; \frac{7}{17}; 0\right)$.

**Ответ:** $Y^* = \left(\frac{2}{17}; \frac{7}{17}; 0\right)$, $F_{\min}\left(Y^*\right) = 110.6$.

**Пример 4.6.** Дана задача линейного программирования

$$Z(X) = x_1 + 7x_2 - 5x_3 + 3x_4 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j = \overline{1,4}.$$

Данная задача имеет оптимальное решение $X^* = (0;\ 14;9;0)$, $Z_{\max}(X^*) = 53$. Составьте двойственную задачу и найдите её оптимальное решение.

**Решение.** Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -4 & -5 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ \hline 1 & 7 & -5 & 3 & Z(X) \end{array}\right), \quad A_1^T = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \\ -4 & -1 & -5 \\ -5 & 1 & 3 \\ \hline 6 & 5 & F(Y) \end{array}\right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y) = 6y_1 + 5y_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \ge 1, \\ 3y_1 + y_2 \ge 7, \\ -4y_1 - y_2 \ge -5, \\ -5y_1 + y_2 \ge 3, \end{cases}$$

$y_1$, $y_2$ свободные по знаку.

Из первой теоремы двойственности следует, что $Z_{\max}\left(X^*\right) = F_{\min}\left(Y^*\right) = 53.$

По второй теореме двойственности, так как в оптимальном решении исходной $x_2^* = 14 \ne 0, x_3^* = 9 \ne 0$, то, выписывая второе и третье ограничения двойственной задачи как уравнения, получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 3y_1^* + y_2^* = 7, \\ -4y_1^* - y_2^* = -5. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $y_1^* = -2,\ y_2^* = 13$, $Y^* = \left(-2;13\right)$.

**Ответ:** $Y^* = (-2;13)$, $F_{\min}(Y^*) = 53$.

**Пример 4.7.** Дана задача линейного программирования

$$Z(X) = -x_1 - 7x_2 - 8x_3 + x_4 + 4x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Составьте двойственную задачу и найдите её оптимальное решение.

**Решение.** Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -2 & 4 \\ \hline -1 & -7 & -8 & 1 & 4 & Z(X) \end{array}\right), \quad A_1^T = \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & -8 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 \\ \hline 1 & 4 & F(Y) \end{array}\right)$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y) = y_1 + 4y_2 \to \min.$$

$$\begin{cases} y_1 - y_2 \ge -1, & (1) \\ y_1 + y_2 \ge -7, & (2) \\ -y_1 + 2y_2 \ge -8, & (3) \\ -y_1 - y_2 \ge 1, & (4) \\ -y_1 - 2y_2 \ge 4. & (5) \end{cases}$$

Функция $F(Y)$ минимизируется, так как целевая функция исходной задачи максимизируется.

Поскольку на переменные исходной задачи наложены условия неотрицательности $x_j \ge 0$ $(j = \overline{1,5})$, то соотношения (1) – (5) в системе ограничений двойственной задачи являются неравенствами. Переменные $y_1$, $y_2$ не должны удовлетворять условию неотрицательности, т.к. они соответствуют ограничениям-неравенствам исходной задачи.

Решим полученную задачу графическим методом. На рис.4.3 изображены: область допустимых решений задачи, $\bar{c}(1,4)$, линии уровня *l*.

Наименьшее значение целевая функция достигает в угловой точке $D$. Найдем координаты точки $D$, для этого решим систему из уравнений второй и третьей прямой:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = -7, \\ -y_1 + 2y_2 = -8. \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем $3y_2 = -15$, $y_2 = -\frac{15}{3} = -5$. Тогда $y_1 = -7 - y_2 = -7 - (-5) = -2.$

Таким образом $Y^* = (-2;-5)$, $F_{\min}(Y^*) = -2 + 4 \cdot (-5) = -22$.

По первой теореме двойственности $Z_{\max}(X^*) = F_{\min}(Y^*) = -22.$

Подставим оптимальное решение $Y^* = (-2;-5)$ в систему ограничений.

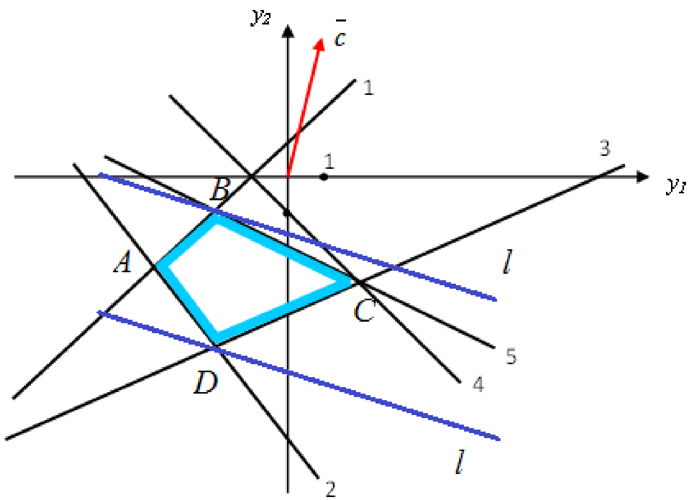



Рисунок 4.3 – ОДР

Получим ограничения:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 = -2 + 5 = 3 > -1 \Rightarrow x_1^* = 0, \\ y_1 + y_2 = -2 - 5 = -7, \\ -y_1 + 2y_2 = 2 - 10 = -8, \\ -y_1 - y_2 = 2 + 5 = 7 > 1 \Rightarrow x_4^* = 0, \\ -y_1 - 2y_2 = 2 + 10 = 12 > 4 \Rightarrow x_5^* = 0. \end{cases}$$

1, 4, 5 выполняются как строгие неравенства. Согласно второй теореме двойственности соответствующие компоненты оптимального плана двойственной задачи, т.е. исходной задачи, равны нулю: $x_1^* = x_2^* = x_3^* = 0$. Учитывая это, из системы ограничений исходной задачи найдем ее оптимальное решение: $\begin{cases} x_2^* - x_3^* = 1, \\ x_2^* + 2x_3^* = 4. \end{cases}$ Складывая уравнения, получаем $-3x_3^* = -3,\ x_3^* = 1.$ Тогда $x_2^* = 1 + x_3^* = 1 + 1 = 2.$ Таким образом $X^* = (0;2;1;0;0)$.

**Ответ:** $Z_{\max}\left(X^*\right) = -22,\quad X^* = (0;2;1;0;0).$

**Второй способ** нахождения решения двойственной задачи в симметричной паре основан на использовании симплексного метода.

Если одна из двойственных задач решена симплексным методом, то оптимальное решение двойственной задачи можно найти из оценочной строки последней итерации. Для этого нужно установить соответствие между основными переменными одной задачи и балансовыми переменными двойственной задачи.

Запишем системы ограничений симметричной пары двойственных задач:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad i = \overline{1,m}, \qquad\qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j = \overline{1,n}.$$

Приведем их к каноническому виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = \overline{1,m}, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i - y_{m+j} = c_j, \quad j = \overline{1,n},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – основные, $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ – балансовые; $y_1, y_2, \ldots, y_m$ – основные, $y_{m+1}, y_{m+2}, \ldots, y_{m+n}$ – балансовые переменные.

Если исходная задача решена симплексным методом, то $y_i = \left|\Delta_{n+i}\right|,\ i = \overline{1,m}$, $\Delta_{n+i}$ – симплексные оценки переменных исходной задачи.

Если двойственная задача решена симплексным методом, то $x_j = \left|\Delta_{m+j}\right|,\ j = \overline{1,n}$, где $\Delta_{m+j}$ – симплексные оценки переменных двойственной задачи.

**Пример 4.8.** Найдите наименьшее значение функции

$$Z(X) = 2x_1 + x_2 + 3x_3$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \ge 5, \\ -x_1 + x_2 - x_3 \ge 8, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge 4, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

**Решение**. Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 3 & Z(X) \end{array}\right), \qquad A_1^T = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ \hline 5 & 8 & 4 & F(Y) \end{array}\right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y) = 5y_1 + 8y_2 + 4y_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 2y_3 \le 2, \\ y_1 + y_2 - y_3 \le 1, \\ y_1 - y_2 - 2y_3 \le 3, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,3}.$$

Решим двойственную задачу симплексным методом, для этого приведем ее к каноническому виду

$$F(Y) - 5y_1 - 8y_2 - 4y_3 = 0,$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 2, \\ y_1 + y_2 - y_3 + y_5 = 1, \\ y_1 - y_2 - 2y_3 + y_6 = 3, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0, \;\; j = \overline{1,6}.$$

Результаты решений представлены в симплексных таблицах:

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **5** | **8** | **4** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
| $y_4$ | 0 | 2 | 2 | -1 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| $y_5$ | 0 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_6$ | 0 | 3 | 1 | -1 | -2 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j$ |  | 0 | -5 | -8 | -4 | 0 | 0 | 0 |

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **5** | **8** | **4** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
| $y_4$ | 0 | 3 | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 8 | 1 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 | 0 |
| $y_6$ | 0 | 4 | 2 | 0 | -3 | 0 | 1 | 1 |
| $\Delta_j$ |  | 8 | 3 | 0 | -12 | 0 | 8 | 0 |

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **5** | **8** | **4** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
|  |  |  | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ |
| $y_3$ | 4 | **3** | 3 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| $y_2$ | 8 | **4** | 4 | 1 | 0 | 1 | 2 | 0 |
| $y_6$ | 0 | **13** | 11 | 0 | 0 | 3 | 4 | 1 |
| $\Delta_j$ |  | **44** | 39 | 0 | 0 | **12** | **20** | **0** |

Результат: $Y^* = (0;4;3;0;0;13)$. Отбрасывая балансовые переменные, получим оптимальное решение двойственной задачи: $Y^* = (0;4;3)$; $F_{\max}(Y^*) = 44$.

Тогда по первой теореме двойственности $Z_{\min}(X^*) = F_{\max}(Y^*) = 44$.

Установим связь между балансовыми переменными двойственной задачи и основными переменными исходной задачи: $x_1 \to y_4$, $x_2 \to y_5$, $x_3 \to y_6$.

Тогда $x_1 = \Delta_4$, $x_2 = \Delta_5$, $x_3 = \Delta_6$, $X^* = (12;20;0)$.

**Пример 4.9.** Решите задачу линейного программирования:

$$Z(X) = x_1 - x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,2}.$$

**Решение**. Составим расширенную матрицу системы $A_1$ и запишем матрицу $A_1^T$:

$$A_1=\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 1 & -1 & Z(X) \end{array}\right),\quad A_1^T=\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 5 & F(Y) \end{array}\right).$$

Формулируем двойственную задачу:

$$F(Y)=2y_1+2y_2+5y_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} -2y_1+y_2+y_3 \ge 1, \\ y_1-2y_2+y_3 \ge -1, \end{cases}$$

$$y_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,3}.$$

Решим исходную задачу симплексным методом, для этого приведем ее к каноническому виду

$$Z(X)-x_1+x_2=0,$$

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3=2, \\ x_1-2x_2+x_4=2, \\ x_1+x_2+x_5=5, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ \ j=\overline{1,5}.$$

Результаты решений представлены в симплексных таблицах:

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **1** | **-1** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | 2 | -2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 5 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $\Delta_j$ | | 0 | -1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **1** | **-1** | **0** | **0** | **0** |
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | 6 | 0 | -3 | 1 | 2 | 0 |
| $x_1$ | 1 | 2 | 1 | -2 | 0 | 1 | 0 |

| $x_5$ | 0 | 3 | 0 | 3 | 0 | -1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta_j$ | | 2 | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

| ***Б.п.*** | $C_Б$ | ***B*** | **1** | **-1** | **0** | **0** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_3$ | 0 | **9** | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| $x_1$ | 1 | **4** | 1 | 0 | 0 | $\frac{1}{3}$ | $\frac{2}{3}$ |
| $x_2$ | 0 | **1** | 0 | 1 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |
| $\Delta_j$ | | **3** | 0 | 0 | **0** | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Результат $X^* = (4;1;9)$.

Отбрасывая балансовые переменные, получим оптимальное решение двойственной задачи: $X^* = (4;1)$; $Z_{\max}(Y^*) = 3$.

Тогда по первой теореме двойственности $Z_{\max}(X^*) = F_{\min}(Y^*) = 3$.

Установим связь между балансовыми переменными двойственной задачи и основными переменными исходной задачи: $y_1 \to x_3$, $y_2 \to x_4$, $y_3 \to x_5$.

Тогда $y_1 = \Delta_3$, $y_2 = \Delta_4$, $y_3 = \Delta_5$, $Y^* = \left(0; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

## 4.6. Задачи для самостоятельного решения

**1.** Дана задача линейного программирования. Составьте двойственную к ней задачу и найдите оптимальное решение обеих задач.

| | |
|---|---|
| 1. $Z = 5x_1 + 2x_2 + 6x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 2. $Z = 7x_1 + 3x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 3, \\ x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 2, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3. | $Z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 \le 7, \\ x_1 + x_2 + x_4 \le 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 4. | $Z = x_1 + 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \le 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 \le 4, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 5. | $Z = -x_1 + x_2 - x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 5, \\ 2x_2 + x_4 \le 3, \\ x_1 + 2x_4 \le 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 6. | $Z = -x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \le 14, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 7. | $Z = x_1 - 2x_2 - 6x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 8. | $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 + 5x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 \le 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \ge 4, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 9. | $Z = x_1 + 2x_2 - x_5 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 6, \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 24, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ | 10. | $Z = -4x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 15, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |
| 11. | $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 12. | $Z = x_1 + x_2 - 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 4x_3 + x_4 = 6, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 13. | $Z = 3x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ x_1 \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 14. | $Z = 4x_2 - 3x_5 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1 - 9x_2 + x_3 = 5, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 15. $Z = 5x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} -2x_1 + 15x_2 - 19x_3 + 21x_4 \le 182, \\ 12x_1 + 31x_2 - 28x_3 + 5x_4 \le 235, \\ 7x_1 + 37x_2 - 49x_3 + 71x_4 \le 473, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 16. $Z = 5x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \max,$ $\begin{cases} 9x_1 + 11x_2 + 2x_3 + 13x_4 \le 351, \\ 21x_1 + 5x_2 = 14x_3 - 37x_4 \le 312, \\ 81x_1 - 46x_2 + 54x_3 - 92x_4 \le 763, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 17. $Z = x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 16x_1 - 5x_2 - 9x_3 + 22x_4 \ge 182, \\ 19x_1 - 2x_2 + 83x_3 - 15x_4 \ge 345, \\ 27x_1 + 37x_2 + 49x_3 + 71x_4 \ge 473, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 18. $Z = x_1 + 7x_2 + x_3 + x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + 13x_2 + 21x_3 + 15x_4 \ge 51, \\ 31x_1 - 11x_2 - 24x_3 + 16x_4 \ge 112, \\ 17x_1 + 12x_2 - 22x_3 + 32x_4 \ge 163, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 19. $Z = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 7x_4 - x_5 \ge 1, \\ 9x_1 + 5x_2 - 14x_3 + 6x_4 + x_6 \ge 8, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,6}. \end{cases}$ | 20. $Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1 + 7x_2 + x_3 + 2x_4 + 5x_5 \le 73, \\ 2x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 7x_4 - x_5 \le 87, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}. \end{cases}$ |

**2.** Для исходной задачи составьте двойственную. Решите обе задачи симплексным методом и по решению каждой из них найдите решение другой. Одну из задач решите графическим методом.

| | |
|---|---|
| 1. $Z = 2x_1 + 4x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 2. $Z = 6x_1 + 5x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \ge 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \ge 3, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 3. $Z = 2x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_j \ge 0, j = 1,2. \end{cases}$ | 4. $Z = -x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0, j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| 5. $Z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 \le 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \le -3, \\ x_j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 6. $Z = 3x_1 + x_2 \to \min,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$ |
| 7. $Z = 10x_1 + 6x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 3, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 8. $Z = -2x_1 - x_2 - x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 \le 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |
| 9. $Z = 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 10x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \ge 4, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 2, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ | 10. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \ge 2, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \ge 3, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4}. \end{cases}$ |
| 11. $Z = -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \le -2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 1, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ | 12. $Z = x_1 + 2x_2 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$ |
| 13. $Z = 2x_1 + x_2 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 4, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2. \end{cases}$ | 14. $Z = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 + 0{,}2x_3 \ge 60, \\ 0{,}5x_1 + 0{,}8x_3 \ge 20, \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,3}. \end{cases}$ |

# ТЕМА 5: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

## 5.1. Общая постановка задачи

**Транспортная задача** − одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель − разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

Имеются $m$ пунктов отправления груза (поставщики) и объемы отправления по каждому пункту $a_1, a_2, ..., a_m$. Известна потребность в грузах $b_1, b_2, ..., b_n$ по каждому из $n$ пунктов назначения (потребители). Задана матрица стоимостей доставки по каждому варианту $c_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Требуется составить план перевозок груза так, чтобы максимально удовлетворить всех потребителей, вывезти груз от поставщиков и чтобы общие затраты на перевозки были минимальными. Все данные располагают в таблице, которую называют распределительной таблицей 5.1:

Таблица 5.1 – Исходная информация транспортной задачи

| **Поставщики** | **Потребители** | | | | **Запасы поставщиков** |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | … | $B_n$ | |
| $A_1$ | $c_{11}$ $x_{11}$ | $c_{12}$ $x_{12}$ | | $c_{1n}$ $x_{1n}$ | $a_1$ |
| $A_2$ | $c_{21}$ $x_{21}$ | $c_{22}$ $x_{22}$ | | $c_{2n}$ $x_{2n}$ | $a_2$ |
| … | … | … | … | … | … |
| $A_m$ | $c_{m1}$ $x_{m1}$ | $c_{m2}$ $x_{m2}$ | | $c_{mn}$ $x_{mn}$ | $a_m$ |
| **Спрос потребителей** | $b_1$ | $b_2$ | | $b_n$ | |

Введем обозначение: $x_{ij}$ − количество груза, которое нужно перевезти из $i$-го пункта отправления в $j$-й пункт назначения.

Так как нужно перевезти весь груз из каждого пункта отправления $A_i$, то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2, \\ \ldots \\ x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m. \end{cases}$$

В каждый пункт назначения $B_j$ должен быть завезен весь требуемый груз, поэтому

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{m1} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2, \\ \ldots \\ x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n. \end{cases}$$

Размер поставок должен выражаться неотрицательным числом:

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Стоимость всех запланированных перевозок должна быть минимальной:

$$F = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{mn}x_{mn} \to \min.$$

**Математическая модель транспортной задачи** (ТЗ) в общем случае имеет вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min, \tag{5.1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = \overline{1,m}, \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5.2}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}. \tag{5.3}$$

Таким образом, математически ТЗ формируется по следующей схеме. Заданы система ограничений (5.2) при условии (5.3) и целевая функция (5.1); требуется среди множества решений системы (5.2) найти такое неотрицательное решение, которое минимизирует функцию (5.1).

В рассмотренной модели ТЗ предполагается, что суммарные запасы поставщиков равны суммарным запросам потребителей, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{5.4}$$

Такая задача называется **задачей с правильным балансом (сбалансированной задачей)**, ее модель – **закрытой**.

Для того чтобы ТЗ линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно выполнение равенства (5.4).

В случае если $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ , то транспортная задача линейного программирования называется **открытой**.

Если $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ , то это **несбалансированная задача с дефицитом**. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ , то это **несбалансированная задача с избытком**. В случае открытой транспортной задачи выполнение условия (5.4) достигается введением фиктивного поставщика или фиктивного потребителя с соответствующими тарифами равными нулю.

Всякое неотрицательное решение системы линейных уравнений (5.2), определяемое матрицей $X = \left(x_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$ называется **планом ТЗ**.

План $X^* = \left(x_{ij}^*\right)_{m\times n}$ при котором целевая функция (5.1) принимает свое минимальное значение, называется **оптимальным планом** ТЗ.

Матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ & \dots & \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$ называется **матрицей тарифов** (издержек или транспортных расходов).

## 5.2. Свойства транспортной задачи

**Свойство 5.1 (разрешимость).** Сбалансированная транспортная задача всегда имеет решение.

**Свойство 5.2 (размерность)**. Ранг матрицы из коэффициентов при неизвестных системы ограничений ТЗ равен $m+n-1$ , где $m$ и $n$ – количество поставщиков и потребителей соответственно.

Клетки матрицы перевозок, где $x_{ij} > 0$, называются **базисными**, а остальные, где $x_{ij} = 0$ – **свободными**.

В матрице есть $m+n-1$ базисных клеток. Их число совпадает с числом независимых уравнений – ограничений. Значение $x_{ij} = 0$ в свободной клетке не пишется явно, а вместо этого в ней ставится точка.

Решение (план перевозок) назовем **допустимым**, если оно удовлетворяет системе ограничений (5.2), **опорным**, если в нем отличны от нуля не более $m+n-1$ базисных переменных, остальные равны нулю.

В ТЗ всегда существуют допустимые планы, содержащие не более $m+n-1$ положительных элементов.

**Свойство 5.3 (целочисленность).** Если в транспортной задаче все числа $a_i$, $b_j$ целые или кратны $Q$, то все опорные планы транспортной задачи, втом числе оптимальный план, также целочисленны или кратны $Q$.

Транспортная задача как задача линейного программирования может быть решена симплексным методом, однако наличие большого числа переменных и ограничений делает вычисления громоздкими. Поэтому для решения транспортных задач разработан специальный метод, имеющий те же этапы, что и симплексный метод, а именно:

– нахождение первоначального опорного решения;
– проверка этого решения на оптимальность;
– переход от одного опорного решения к другому.

Рассмотрим каждый из этих этапов.

## 5.3. Нахождение первоначального опорного решения

Нахождение первоначального опорного плана задачи − возможно любым из известных методов: наименьшей стоимости, северо-западного угла, Фогеля, наибольшего предпочтения. Однако для всех способов непременным является требование, чтобы в процессе заполнения распределительной таблицы в каждую загружаемую клетку вписывалась максимально возможная по величине поставка. В таком случае каждый раз будет либо исчерпываться весь запас груза у поставщика (мы будем говорить: «закрывается строка»), либо полностью удовлетворяться спрос потребителя («закрывается столбец»). Соблюдение этого требования обеспечит заполнение именно $m+n-1$ клеток.

### Метод северо-западного угла

Рассмотрим метод **северо-западного угла**. «Северо-западным углом» называется ячейка таблицы поставок, соответствующая значению переменной $x_{11}$. В эту ячейку записываем максимально возможную поставку, определяя её по формуле

$$x_{11} = min(a_1; b_1) = D. \qquad (5.5)$$

Если $D = a_1$, то запас первого поставщика распределен полностью, и переходим к заполнению клетки с $x_{21}$, записывая в неё наименьшее из чисел $a_2$ и $b_1 - D$.

Если $D = b_1$, то полностью удовлетворена потребность первого потребителя, тогда переходим к заполнению клетки с $x_{12}$, записывая в неё наименьшее из чисел $a_1 - D$ и $b_2$. Так, постепенно двигаясь по таблице поставок, распределяем все запасы и удовлетворяем все потребности. Движение по таблице поставок может быть или по горизонтали, или строго по вертикали, а повороты при движении делаются только под прямым углом.

**Примечание 5.1**. При нахождении первоначального плана перевозок возможен случай вырождения, когда в результате вычислений значения $x_{ij}$ получается, что потребности в пункте $B_j$ удовлетворены, а запасы в пункте $A_i$ исчерпаны. Тогда одновременно из рассмотрения выбывают строка и столбец. Рекомендуется в одну из клеток выбывающих строки и столбца (лучше в клетку с наименьшей стоимостью) ставить так называемый базисный нуль. Эта клетка считается базисной (в ней пишется 0), а общее число базисных клеток остается равным $m + n - 1$ .

Существенным **недостатком** метода северо-западного угла является игнорирование при загрузке клеток тарифов $c_{ij}$, поэтому построенный опорный план обычно оказывается весьма далеким от оптимального.

**Пример 5.1.** Найдите первоначальный план перевозок методом северо-западного угла, если груз находится у трех поставщиков в количествах 340, 200 и 160 единиц, который необходимо доставить потребителям в количествах 120, 170, 150 и 260 единиц. Причём известна стоимость перевозки товара от каждого поставщика к каждому потребителю $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 4 & 8 \\ 8 & 9 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

**Решение.** Условие задачи запишем в таблицу и найдем решение методом северо-западного угла:

Таблица 5.2 – Исходные данные задачи

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков, $a_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 7 | 2 | 4 | 8 | 340 |
| $A_2$ | 8 | 9 | 6 | 5 | 200 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 7 | 2 | 160 |
| Спрос потребителей, $b_j$ | 120 | 170 | 150 | 260 | $\sum a_i = 700$ $\sum b_j = 700$ |

Начинаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.1.), т.е. $x_{11} = \min\{340,\ 120\} = 120$. Тогда в пункте $B_1$ потребности удовлетворены, и, следовательно, $x_{21} = 0,\ x_{31} = 0$. Первый столбец выбывает из рассмотрения (в пустые клетки ставим точку или звездочку (*)).

Таблица 5.2.1.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 **120** | 2 | 4 | 8 | 340 | 340-120 =220 |
| $A_2$ | 8 * | 9 | 6 | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3 * | 5 | 7 | 2 | 160 | |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 120-120 =0 | | | | | |

Продолжаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.2.), т.е. $x_{12} = \min\{340 - 120,\ 170\} = \min\{220,\ 170\} = 170$.

В пункте $B_2$ потребности удовлетворены, и, следовательно, $x_{22} = 0,\ x_{32} = 0$. Второй столбец выбывает из рассмотрения.

Таблица 5.2.2.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 **120** | 2 **170** | 4 | 8 | 340 | 220-170 =50 |
| $A_2$ | 8 * | 9 * | 6 | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3 * | 5 * | 7 | 2 | 160 | |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 0 | 170-170 =0 | | | | |

Продолжаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.3.), т.е. $x_{13} = \min\{220 - 170,\ 150\} = \min\{50,\ 150\} = 50$. Запасы в пункте $A_1$ исчерпаны и, следовательно, $x_{14} = 0$. Первая строка выбывает из рассмотрения.

Таблица 5.2.3.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 **120** | 2 **170** | 4 **50** | 8 * | 340 | 50-50 =0 |
| $A_2$ | 8 * | 9 * | 6 | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3 * | 5 * | 7 | 2 | 160 | |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 0 | 0 | 150-50 =100 | | | |

Продолжаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.4.), т.е. $x_{23} = \min\{200,\ 150 - 50\} = \min\{200,\ 100\} = 100$.

В пункте $B_3$ потребности удовлетворены, и, следовательно, $x_{33} = 0$. Третий столбец выбывает из рассмотрения.

Таблица 5.2.4.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**120** | 2<br>**170** | 4<br>**50** | 8<br>* | 340 | 0 |
| $A_2$ | 8<br>* | 9<br>* | 6<br>**100** | 5 | 200 | 200-100<br>=100 |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2 | 160 | |
| Спрос потре-<br>бителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 0 | 0 | 0 | | | |

Продолжаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.5.), т.е. $x_{24} = \min\{200 - 100,\ 260\} = \min\{100,\ 260\} = 100$.

Запасы в пункте $A_2$ исчерпаны и, следовательно, вторая строка выбывает из рассмотрения.

Таблица 5.2.5.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остат-<br>ки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**120** | 2<br>**170** | 4<br>**50** | 8<br>* | 340 | 0 |
| $A_2$ | 8<br>* | 9<br>* | 6<br>**100** | 5<br>**100** | 200 | 0 |
| $A_3$ | 3<br>* | *<br>* | 7<br>* | 2 | 160 | |
| Спрос потре-<br>бителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 0 | 0 | 0 | 260-100<br>=160 | | |

Продолжаем с северо-западного угла (см. табл. 5.2.6.), т.е. $x_{34} = \min\{160,\ 260 - 100\} = \min\{160,\ 160\} = 160$.

В пункте $B_4$ потребности удовлетворены, и, следовательно, четвертый столбец выбывает из рассмотрения.

Таблица 5.2.6.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**120** | 2<br>**170** | 4<br>**50** | 8<br>* | 340 | 0 |
| $A_2$ | 8<br>* | 9<br>* | 6<br>**100** | 5<br>**100** | 200 | 0 |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | 0 |
| Остатки | 0 | 0 | 0 | 0 | | |

Получен начальный план перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 170 & 50 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix}$$

с суммарной стоимостью

$$F = 7 \cdot 120 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 50 + 6 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2800 .$$

Число базисных клеток $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$.

**Метод наименьшей стоимости**

Получаемый методом северо-западного угла, начальный план перевозок не зависит от их стоимости и поэтому в общем случае далек от наилучшего. В методе минимального элемента учитываются затраты на перевозку. Соответствующий начальный план позволяет обеспечить суммарную стоимость перевозок, более близкую к оптимальной.

В этом методе по формуле (5.5) последовательно заполняются клетки с наименьшей стоимостью перевозок. Если есть несколько клеток с наименьшей стоимостью, то из них выбирается любая.

**Пример 5.2.** Найдите первоначальный план перевозок методом наименьшей стоимости для примера 5.1.

**Решение.** Условие задачи запишем в таблицу и найдем решение методом наименьшей стоимости:

Таблица 5.3.1

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 | 2<br>**170** | 4 | 8 | 340 | 340-170 =170 |
| $A_2$ | 8 | 9<br>* | 6 | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3 | 5<br>* | 7 | 2 | 160 | |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | | 170-170 =0 | | | | |

Так, в рассматриваемом примере начнём с клетки $(A_1, B_2)$, имеющей тариф 2 (см. табл. 5.3.1.). От первого поставщика ко второму потребителю поставим максимально возможное количество груза, а именно $x_{12} = \min\{340,170\} = 170$. Потребности второго потребителя полностью удовлетворены, и все клетки второго столбца далее не рассматриваем.

На втором шаге распределения выбираем клетку $(A_3, B_4)$ с тарифом 2 (см. табл. 5.3.2.) и делаем в неё поставку $x_{34} = \min\{160, 260\} = 160$. Теперь запас третьего поставщика полностью израсходован и все клетки третьей строки далее не рассматриваем.

Таблица 5.3.2

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 | 2<br>**170** | 4 | 8 | 340 | 170 |
| $A_2$ | 8 | 9<br>* | 6 | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 160-160 =0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | | 0 | | 260-160 =100 | | |

Соответственно, по наименьшим значениям остающихся неиспользованных в табл. 5.3.2 тарифов делаем следующие поставки (см. табл. 5.3.3.): $x_{13} = \min\{340-170, 150\} = \min\{170, 150\} = 150.$

Таблица 5.3.3

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8 | 340 | 170-150=20 |
| $A_2$ | 8 | 9<br>* | 6<br>* | 5 | 200 | |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | | 0 | 150-150 =0 | 100 | | |

В таблице 5.3.4 $x_{24} = \min\{200, 260-160\} = \min\{200, 100\} = 100.$

Таблица 5.3.4

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7 | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8<br>* | 340 | 20 |
| $A_2$ | 8 | 9<br>* | 6<br>* | 5<br>**100** | 200 | 200-100 =100 |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | | 0 | 0 | 100-100 =0 | | |

В таблице 5.3.5

$x_{11} = \min\{340-150-170, 120\} = \min\{20, 120\} = 20.$

Таблица 5.3.5

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**20** | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8<br>* | 340 | 20-20 =0 |
| $A_2$ | 8 | 9<br>* | 6<br>* | 5<br>**100** | 200 | 100 |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 120-20 =100 | 0 | 0 | 0 | | |

В таблице 5.3.6

$$x_{21} = \min\{200-100, 120-20\} = \min\{100, 100\} = 100.$$

Таблица 5.3.6

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Остатки |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**20** | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8<br>* | 340 | 0 |
| $A_2$ | 8<br>**100** | 9<br>* | 6<br>* | 5<br>**100** | 200 | 100-100 =0 |
| $A_3$ | 3<br>* | 5<br>* | 7<br>* | 2<br>**160** | 160 | 0 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Остатки | 100-100 =0 | 0 | 0 | 0 | | |

Последняя поставка получается автоматически, так как остаётся только одна клетка для заполнения и туда помещается остаток запасов и потребностей. Они равны, поскольку сумма всех запасов и сумма всех потребностей равны.

Найденный опорный план записывается матрицей

$$X = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 100 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 160 \end{pmatrix},$$

а значение целевой функции на этом плане равно

$$F = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 8 \cdot 100 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 160 = 2700.$$

Методом наименьшей стоимости получился лучший опорный план, так как значение целевой функции на нем меньше на 100 единиц. Тем не менее, и этот план может быть не оптимальным.

## 5.4. Метод потенциалов

**Теорема 5.1.** Если план $X^* = (x_{ij}^*)$ транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система из $m$+$n$ чисел $u_i^*$ и $v_j^*$, удовлетворяющих условиям:

$u_i^* + v_j^* = c_{ij}$ для $x_{ij}^* \geq 0$,

$u_i^* + v_j^* \leq c_{ij}$ для $x_{ij}^* = 0$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Числа $u_i^*$, $v_j^*$ называются **потенциалами** соответственно поставщиков и потребителей.

Данная теорема позволяет построить алгоритм нахождения решения транспортной задачи.

**Алгоритм решения транспортной задачи закрытого типа:**

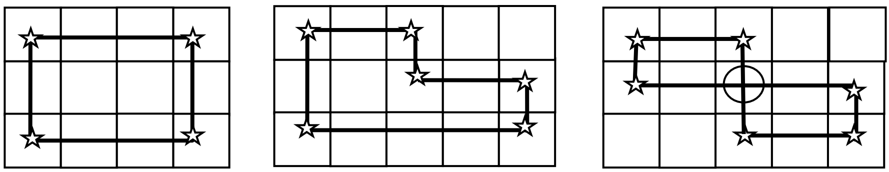
1. Для ТЗ с правильным балансом находим первоначальный план перевозок методом северо-западного угла или методом наименьшей стоимости.

2. Для каждой базисной клетки (для занятых) составляем уравнение $u_i + v_j = c_{ij}$. Так как число базисных клеток $m + n - 1$, то система $m + n - 1$ уравнений с $m + n$ неизвестными имеет бесконечное множество решений. Для определенности положим $u_1 = 0$. Тогда все остальные потенциалы находятся однозначно. Вносим их в матрицу перевозок.

3. Для всех свободных клеток рассчитываем оценки $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Если все $\Delta_{ij} \leq 0$, то найденное решение оптимально. Если среди оценок есть хотя бы одно положительное число, то найденное решение не является оптимальным.

4. Если решение не оптимально, необходимо перейти к новому опорному решению (новому плану поставок), которое ближе к оптимальному, чем предыдущее. Необходимо ввести в базис свободную переменную, имеющую наибольшую положительную оценку. Для этого необходимо построить цикл, соответствующей этой переменной клетки.

**Циклом** пересчета в транспортной таблице называют несколько клеток, соединенных замкнутой ломаной линией, которая в каждой клетке совершает поворот на 90°.



*а* *б* *в*

Рисунок 5.4 – Простейшие циклы

На рис 5.4. звездочкой отмечены клетки матрицы, включенные в состав цикла, а кружком отмечена точка самопересечения.

**Свойства цикла** пересчета.

1) каждый цикл имеет четное число вершин;

2) одна вершина цикла находится в свободной (пустой) клетке (для которой образуется цикл), остальные клетки базисные (заполненные);

3) если ломанная линия, образующая цикл, пересекается, то точка самопересечения не является вершиной цикла;

4) для каждой свободной клетки можно построить цикл пересчета и притом единственный.

После того как для выбранной свободной клетки построен цикл, следует перейти к новому допустимому решению. Для этого необходимо переместить перевозки $x_{ij}$ в пределах клеток, связанных циклом. Это перемещение перевозок производят по следующим правилам:

– каждой из клеток, связанных циклом со свободной клеткой, приписывают определенный знак, причем свободной клетке – знак «+», а всем остальным клеткам – поочередно знаки «–» и «+»;

– в свободную клетку перемещают меньшую из перевозок $x_{ij}$, находящихся в клетках со знаком «–», чтобы не нарушить условие неотрицательности перевозок $x_{ij}$. Одновременно это же число перевозок прибавляют к перевозкам, находящихся в клетках со знаком «+» и вычитают из клеток со знаком «–». В результате свободная клетка становится занятой (базисной), а клетка, в которой находилась меньшая перевозка $x_{ij}$ стала свободной.

**Замечания 5.1:**

1)все описанные действия производятся над клетками, связанными циклом;

2) при переносе перевозок по циклу балансовые условия не нарушаются;

3)при переносе перевозки по циклу пересчета число занятых клеток остается неизменным, равным $m + n - 1$;

4)если в клетках со знаком «–» имеется две или более одинаковые перевозки $x_{ij}$ , то освобождают одну из клеток, содержащих эту перевозку, а остальные оставляют занятыми нулевыми перевозками.

Выписать новое решение и значение целевой функции.

5.Переход в п. 2.

**Пример 5.4.** Решите транспортную задачу с опорным планом, заданным в табл. 5.4, методом потенциалов.

Таблица 5.4

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 7<br>**20** | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8 | 340 |
| $A_2$ | 8<br>**100** | 9 | 6 | 5<br>**100** | 200 |
| $A_3$ | 3 | 5 | 7 | 2<br>**160** | 160 |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | |

**Решение.**

Вычислим потенциалы для занятых клеток и результаты расчётов поместим в табл. 5.4.1:

$u_1 = 0;$

$u_1 + v_1 = c_{11} \Rightarrow 0 + v_1 = 7 \Rightarrow v_1 = 7;$

$u_1 + v_2 = c_{12} \Rightarrow 0 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 2;$

$u_1 + v_3 = c_{13} \Rightarrow 0 + v_3 = 4 \Rightarrow v_3 = 4;$

$u_2 + v_1 = c_{21} \Rightarrow u_2 + 7 = 8 \Rightarrow u_2 = 8 - 7 = 1;$

$u_2 + v_4 = c_{24} \Rightarrow 1 + v_4 = 5 \Rightarrow v_4 = 5 - 1 = 4;$

$u_3 + v_4 = c_{34} \Rightarrow u_3 + 4 = 2 \Rightarrow u_3 = 2 - 4 = -2.$

Рассчитаем оценки свободных клеток таблицы поставок:

$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 4 - 8 = -4 < 0;$

$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = 1 + 2 - 9 = -6 < 0;$

$\Delta_{23} = u_2 + v_4 - c_{24} = 1 + 4 - 6 = -1 < 0;$

$\Delta_{31} = u_3 + v_1 - c_{31} = -2 + 7 - 3 = 2 > 0;$

$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -2 + 2 - 5 = -5 < 0;$

$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -2 + 4 - 7 = -5 < 0.$

Среди найденных оценок одна больше нуля, следовательно, найденный план не является оптимальным.

Делаем перераспределение поставки в клетку $(A_3, B_1)$. Цикл, найденный для перемены плана поставок, показан в табл. 5.4.1.

Таблица 5.4.1

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Потенциалы $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**20** | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8 | 340 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 8<br>– **100** | 9 | 6 | 5<br>+ **100** | 200 | $u_2 = 1$ |
| $A_3$ | 3<br>+ | 5 | 7 | 2<br>– **160** | 160 | $u_3 = -2$ |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Потенциалы $v_j$ | $v_1 = 7$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 4$ | | |

Находим размер перемещаемой в клетку $(A_3, B_1)$ поставки по размерам отмеченных знаком «–» поставок, а именно:

$$x_{31} = \min(x_{21}, x_{34}) = \min(100, 160) = 100.$$

Прибавляем число 100 к поставкам, отмеченным знаком «+», вычитаем число 100 из поставок, отмеченных знаком «–», получаем новое распределение поставок. Заносим результаты в новую таблицу поставок (табл. 5.4.2). Для вновь полученного плана поставок и по тарифам занятых клеток считаем значения потенциалов:

$$u_1 = 0;$$
$$u_1 + v_1 = c_{11} \Rightarrow 0 + v_1 = 7 \Rightarrow v_1 = 7;$$
$$u_1 + v_2 = c_{12} \Rightarrow 0 + v_2 = 2 \Rightarrow v_2 = 2;$$
$$u_1 + v_3 = c_{13} \Rightarrow 0 + v_3 = 4 \Rightarrow v_3 = 4;$$
$$u_3 + v_1 = c_{31} \Rightarrow u_3 + 7 = 3 \Rightarrow u_3 = 3 - 7 = -4.$$
$$u_3 + v_4 = c_{34} \Rightarrow -4 + v_4 = 2 \Rightarrow v_4 = 2 + 4 = 6;$$
$$u_2 + v_4 = c_{24} \Rightarrow u_2 + 6 = 5 \Rightarrow u_2 = 5 - 6 = -1;$$

Таблица 5.4.2.

| Поставщики | Потребители | | | | Запасы поставщиков | Потенциалы $u_i$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | | |
| $A_1$ | 7<br>**20** | 2<br>**170** | 4<br>**150** | 8 | 340 | $u_1 = 0$ |
| $A_2$ | 8 | 9 | 6 | 5<br>**200** | 200 | $u_2 = -1$ |
| $A_3$ | 3<br>**100** | 5 | 7 | 2<br>**60** | 160 | $u_3 = -4$ |
| Спрос потребителей | 120 | 170 | 150 | 260 | | |
| Потенциалы $v_j$ | $v_1 = 7$ | $v_2 = 2$ | $v_3 = 4$ | $v_4 = 6$ | | |

Находим оценки свободных клеток:

$$\Delta_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 6 - 8 = -2 < 0;$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -1 + 7 - 8 = -2 < 0;$$
$$\Delta_{22} = u_2 + v_2 - c_{22} = -1 + 2 - 9 = -8 < 0;$$
$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = -1 + 4 - 6 = -3 < 0;$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = -4 + 2 - 5 = -7 < 0;$$
$$\Delta_{33} = u_3 + v_3 - c_{33} = -4 + 4 - 7 = -7 < 0.$$

Т.к. все $\Delta_{ij} \le 0$, следовательно, найденное решение оптимально, его можно записать в виде матрицы:

$$X_{опт} = \begin{pmatrix} 20 & 170 & 150 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 \\ 100 & 0 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Подсчитаем значение целевой функции:

$$F_{\min} = 7 \cdot 20 + 2 \cdot 170 + 4 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 3 \cdot 100 + 2 \cdot 60 = 2500.$$

**Ответ.** Минимальная стоимость перевозок определяется значением целевой функции на этом плане, и она равна 2500 денежных единиц.

### Решение транспортной задачи открытого типа

При нарушении баланса между объемами производства и потребления в алгоритм решения транспортной задачи вносятся следующие дополнения.

Если суммарные поставки меньше суммарных потребностей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный пункт производства с объемом $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$. При этом в таблице появляется дополнительная строка. Тарифы в клетках этой строки выбираются одинаковыми, равными нулю.

Если суммарные поставки больше суммарных потребностей, т.е. $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$, то вводят фиктивный пункт потребления с объемом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$. При этом в таблице появляется дополнительный столбец. Тарифы в клетках этого столбца выбираются аналогично предыдущему правилу.

Модель задачи становится закрытой, и далее задачу решают по общей схеме. Ответ выписывается из таблицы без фиктивной строки (столбца), и в расчете целевой функции фиктивные поставки (потребление) не учитываются.

### Вырожденность и альтернативный оптимум в транспортных задачах

Если в процессе решения транспортной задачи получено решение, в котором количество занятых клеток меньше $m+n-1$, то это решение называется вырожденным. Расчет потенциалов выполнить невозможно. В этом случае недостающее число занятых клеток восполняется путем введения нулевых поставок в некоторые клетки (их выбор определяется возможностью расстановки потенциалов). Далее такие клетки считаются занятыми, и решение продолжается обычным образом.

Признаком наличия альтернативного оптимума в транспортной задаче является равенство нулю оценки хотя бы одной из свободных клеток в оптимальном решении. Для решении задачи следует найти все оптимальные решения (дающие одинаковое значение целевой функции), последовательно строя циклы относительно всех клеток, имеющих нулевые оценки.

Если два решения $X_{опт,1}$ и $X_{опт,2}$ являются оптимальными, то множество всех оптимальных решений имеет вид:

$$X_{опт} = tX_{опт,1} + \left(1-t\right) X_{опт,2},$$

где $0 \le t \le 1$.

Если оптимальных решений более двух, то множество всех оптимальных решений является множеством выпуклых линейных комбинаций этих оптимальных решений, т.е. ответ следует записать в виде:

$$X_{опт} = \sum_{i=1}^{s} t_i X_{опт,i}, \ \sum_{i=1}^{s} t_i = 1, t_i \ge 0.$$

## 5.5. Задачи для самостоятельного решения

**1.** В пунктах ***A*** и ***B*** находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта ***A*** в пункты 1, 2, 3 равна 60, 10, 40 тыс. руб. за 1 т соответственно, а из пункта ***B*** в пункты 1, 2, 3 − 120, 20, 80 тыс. руб. за 1 т соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

**2.** Завод имеет три цеха − ***A***, ***B***, ***C*** и четыре склада − 1; 2; 3; 4. Цех ***A*** производит 30 тыс. шт. изделий, цех ***B*** − 40; цех ***C*** − 20 тыс. шт. изделий. Пропускная способность складов за то же время характеризуется следующими показателями: склад 1 − 20 тыс. шт. изделий; склад 2 − 30; склад 3 − 30 и склад 4 − 10 тыс. шт. изделий. Стоимость перевозки 1 тыс. шт. изделий из цеха ***A*** на склады 1, 2, 3, 4 − соответственно (д. е.): 20, 30, 40, 40, из цеха ***B*** – соответственно 30, 20, 50, 10, а из цеха ***C*** − соответственно 40, 30, 20, 60. Составьте такой план перевозки изделий, при котором расходы на перевозку 90 тыс. шт. изделий были бы наименьшими.

**3.** На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей: $C=\begin{pmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

**4.** В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 175, 125 и 140 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочных станции в количествах, равных соответственно 180, 110, 60 и 40 т. Тарифы перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей: $C=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 & 1 \end{pmatrix}$. Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

**5.** Мясокомбинат имеет в своем составе четыре завода, на каждом из которых может изготовляться три вида колбасных изделий. Мощности каждого из заводов соответственно равны 320, 280, 270 и 350 т/сут. Ежедневные потребности в колбасных изделиях каждого вида также известны и, соответственно, равны 450, 370 и 400 т. Зная себестоимость 1 т каждого вида колбасных изделий на каждом заводе, которая определяется матрицей $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Найти такое распределение выпуска колбасных изделий между заводами, при котором себестоимость изготовляемой продукции является минимальной.

**6.** Для строительства четырех дорог используется гравий из трех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 280 и 160 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 130, 220, 60 и 70 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого карьера к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей $C=\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

**7.** Три предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 180, 350 и 20 ед. Эта продукция должна быть поставлена пяти потребителям в количествах, соответственно равных 110, 90, 120, 80 и 150 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей $C = \begin{pmatrix} 7 & 12 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 8 & 6 & 5 & 3 \\ 6 & 13 & 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$. Составьте такой план прикрепления потребителей к поставщикам, при котором общие затраты являются минимальными.

**8.** Продукция определенного вида производится в городах $A_1$, $A_2$, $A_3$ и потребляется в городах $B_1, B_2$, $B_3$ и $B_4$.

В таблице указаны: объем производства, спрос, стоимость перевозки единицы продукции.

Составить оптимальный план перевозки продукции, при котором стоимость всех перевозок будет минимальна.

Предварительно следует проверить, сбалансирована ли данная транспортная задача. Если задача не сбалансирована, то нужно ввести фиктивных потребителей или производителей, добавляя к исходной таблице столбцы или строки.

**8.1**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 26 | 47 | 25 | 20 | 48 |
| $A_2$ | 10 | 40 | 43 | 6 | 28 |
| $A_3$ | 9 | 34 | 46 | 15 | 71 |
| Спрос | 47 | 81 | 25 | 44 | |

**8.2**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 47 | 25 | 20 | 47 | 41 |
| $A_2$ | 23 | 47 | 28 | 17 | 41 |
| $A_3$ | 7 | 43 | 39 | 10 | 79 |
| Спрос | 40 | 46 | 88 | 37 | |

**8.3**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 25 | 20 | 47 | 30 | 32 |
| $A_2$ | 40 | 43 | 6 | 36 | 49 |
| $A_3$ | 22 | 47 | 29 | 16 | 46 |
| Спрос | 13 | 50 | 46 | 28 | |

**8.4**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 20 | 47 | 30 | 14 | 22 |
| $A_2$ | 47 | 28 | 17 | 46 | 58 |
| $A_3$ | 34 | 46 | 15 | 29 | 78 |
| Спрос | 43 | 42 | 50 | 18 | |

**8.5**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 47 | 30 | 14 | 45 | 10 |
| $A_2$ | 43 | 6 | 36 | 45 | 61 |
| $A_3$ | 43 | 39 | 10 | 40 | 60 |
| Спрос | 44 | 23 | 48 | 6 | |

**8.6**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 30 | 14 | 45 | 35 | 10 |
| $A_2$ | 28 | 17 | 46 | 33 | 44 |
| $A_3$ | 47 | 29 | 16 | 46 | 41 |
| Спрос | 15 | 43 | 41 | 6 | |

**8.7**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 14 | 45 | 35 | 7 | 22 |
| $A_2$ | 6 | 36 | 45 | 13 | 83 |
| $A_3$ | 46 | 15 | 29 | 47 | 56 |
| Спрос | 39 | 24 | 30 | 18 | |

**8.8**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 45 | 35 | 7 | 43 | 83 |
| $A_2$ | 17 | 46 | 33 | 10 | 18 |
| $A_3$ | 39 | 10 | 40 | 43 | 82 |
| Спрос | 47 | 42 | 15 | 29 | |

**8.9**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 4 | 5 | 6 | 10 | 530 |
| $A_2$ | 8 | 6 | 3 | 8 | 405 |
| $A_3$ | 7 | 10 | 4 | 11 | 540 |
| Спрос | 425 | 415 | 335 | 400 | |

**8.10**

| Производители | Потребители | | | | Объем производства |
|---|---|---|---|---|---|
| | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ | $B_4$ | |
| $A_1$ | 3 | 7 | 4 | 8 | 513 |
| $A_2$ | 9 | 6 | 4 | 4 | 448 |
| $A_3$ | 6 | 10 | 5 | 8 | 522 |
| Спрос | 437 | 417 | 333 | 396 | |

## ТЕМА 6: ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Задача о назначениях является типичным примером оптимального принятия управленческих решений. Эта задача позволяет распределить объекты из некоторого множества по группе субъектов из другого множества и это распределение должно соответствовать оптимальности одного или нескольких итоговых показателей.

Рассмотрим несколько примеров.

Организуется рекламная акция, в которой участвуют некоторое количество промоутеров. Мероприятия нужно провести в нескольких районах города. Как распределить промоутеров по районам, чтобы эффективность акции была максимальной?

На предприятии в цеху работают несколько рабочих, которым необходимо изготовить какое-то количество деталей разного вида. Каждый рабочий изготавливает разного вида детали с разным процентом брака. Как распределить заказ деталей по рабочим, чтобы суммарный процент брака был минимален?

Через отдел подготовки крупного издательства проходит множество рукописей книг. Эти рукописи необходимо распределять между сотрудниками. Каждая рукопись может быть охарактеризована оценками по таким критериям, как важность, срочность выполнения, тематика. В свою очередь, сотрудники могут быть охарактеризованы оценками по таким критериям, как качество работы, индивидуальная «пропускная способность», предпочитаемая тематика и т.д. Необходимо так распределить рукописи среди сотрудников, чтобы получить приемлемое качество выполнения всех работ при минимальных ресурсных затратах.

Большая фирма переезжает в новое здание. Возникает необходимость распределить сотрудников по помещениям. С одной стороны, каждый сотрудник выдвигает определенные требования к своим соседям (например, предпочитает некурящих) и к расположению комнаты (например, вблизи от коллег по совместному проекту). С другой стороны, каждое помещение имеет определенные характеристики. Необходимо найти такой вариант распределения, при котором, по меньшей мере, не ухудшился бы психологический климат в коллективе.

Помимо описанных выше примеров, такая задача имеет место при назначении людей на должности или работы, автомашин на маршруты, водителей на машины, при распределении студенческих групп по аудиториям, научных тем по научно-исследовательским лабораториям и т.п. Как видно из примеров, задача о назначениях является частным случаем общих классов оптимизационных задач, и поэтому существует много разнообразных методов ее решения.

## 6.1. Постановка задачи

Пусть требуется выполнить $n$ различных работ и имеется $n$ механизмов (машин) для их выполнения, причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Производительность механизма на различных работах, вообще говоря, различна. Обозначим через $c_{ij}$ производительность $i$-го механизма на $j$-й работе. Задача заключается в таком распределении механизмов по работам, при котором суммарная производительность максимальна.

Построим математическую модель этой задачи.

Сопоставим каждому из возможных вариантов распределения машин по работам набор значений неизвестных $x_{ij}$, относительно которых условимся, что $x_{ij}=1$, если в данном варианте $i$-й механизм назначается на $j$-ю работу, и $x_{ij}=0$, если $i$-й механизм назначается не на $j$-ю работу. Для любого варианта среди чисел $x_{ij}$ должно быть точно $n$ единиц, причем должны выполняться условия: $\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}$ (каждый механизм назначается на одну работу); $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}$ (на каждую работу назначен один механизм). Суммарная производительность при данном варианте назначения машин на работы выразится суммой: $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ .

**Математическая постановка задачи:**

$$L=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1,\ j=\overline{1,n}; \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1,\ i=\overline{1,n}; \end{cases}$$

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \text{если } i\text{-й механизм назначен на } j\text{-ю работу;} \\ 0, \text{если } i\text{-й механизм не назначен на } j\text{-ю работу;} \end{cases} \quad i,\ j=\overline{1,n}.$$

Условия выводят задачу о назначениях из класса задач линейного программирования, так как они нелинейны. Задачи математического программирования, в которых на переменные наложены такие условия, называются **задачами с булевыми переменными**. Поскольку все остальные условия и целевая функция нашей задачи линейны, мы должны формально отнести её к классу задач линейного программирования с булевыми переменными. Однако задачу можно рассмотреть как частный случай транспортной (и, следовательно, просто линейной) задачи. В самом деле, если отбросить последнее условие, заменив его условиями неотрицательности переменных, то задача превращается в обычную транспортную задачу, имеющую ту особенность, что в ней все $a_i$ и все $b_j$, $i, j = \overline{1,n}$ равны единице.

Если решить эту задачу методом потенциалов или любым другим методом, который при целых $a_i$ и $b_j$ приводит к целочисленному оптимальному решению, то полученное решение автоматически будет удовлетворять не учтенному нами условию булевости переменных: если сумма нескольких целочисленных неотрицательных переменных равна единице, то каждая из переменных может быть равна только нулю или единице. Таким образом, в задаче о назначениях ограничение на значения переменных можно заменить просто условием неотрицательности переменных, если только метод решения обеспечивает целочисленность оптимального решения, к которому он приводит. Хотя для транспортной задачи есть методы, которые проще методов решения общей задачи линейного программирования, особенности задачи позволяют решить её с помощью ещё более простых приемов.

Нам будет удобно предварительно перейти от данной задачи выбора на максимум к задаче выбора с теми же условиями, но на минимум, т. е. от матрицы $C = c_{ij}$ перейти к матрице $C = \left(-c_{ij}\right)$ и искать выбор, дающий минимальную сумму элементов.

## 6.2. Венгерский алгоритм

Алгоритм был разработан и опубликован Гарольдом Куном (Harold Kuhn) в 1955 г. Сам Кун дал алгоритму название «венгерский», потому что он был в значительной степени основан на более ранних работах двух венгерских математиков: Денеша Кёнига (Dénes Kőnig) и Эйгена Эгервари (Jenő Egerváry).

В 1957 г. Джеймс Манкрес (James Munkres) показал, что этот алгоритм работает за (строго) полиномиальное время (т.е. за время порядка полинома от $n$, не зависящего от величины стоимостей).

Поэтому в литературе данный алгоритм известен не только как «венгерский», но и как «алгоритм Куна-Манкреса» или «алгоритм Манкреса».

Впрочем, недавно (в 2006 г.) выяснилось, что точно такой же алгоритм был изобретён за век до Куна немецким математиком Карлом Густавом Якоби (Carl Gustav Jacobi). Дело в том, что его работа «About the research of the order of a system of arbitrary ordinary differential equations», напечатанная посмертно в 1890 г., содержавшая помимо прочих результатов и полиномиальный алгоритм решения задачи о назначениях, была написана на латыни, а её публикация прошла незамеченной среди математиков.

Также стоит отметить, что первоначальный алгоритм Куна имел асимптотику $O\left(n^4\right)$, и лишь позже Джек Эдмондс (Jack Edmonds) и Ричард Карп (Richard Karp) (и независимо от них Томидзава (Tomizawa)) показали, каким образом улучшить его до асимптотики $O\left(n^3\right)$.

Этот алгоритм состоит из трех этапов:

**Этап 1. Приведение по строкам и столбцам:**

1. Формализация проблемы в виде транспортной таблицы по аналогии с решением транспортной задачи.
2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.
3. Повторить ту же самую процедуру для столбцов.

Теперь в каждой строке и в каждом столбце таблицы есть, по крайней мере, один нулевой элемент. Представленная в полученной с помощью описанного выше приема «приведенной» транспортной таблице задача о назначениях эквивалентна исходной задаче, и оптимальное решение для обеих задач будет одним и тем же. Сущность Венгерского метода заключается в продолжение процесса приведения матрицы до тех пор, пока все подлежащие распределению единицы не попадут в клетки с нулевой стоимостью. Это означает, что итоговое значение приведенной целевой функции будет равно нулю. Так как существует ограничение на неотрицательность переменных, то нулевое значение целевой функции является оптимальным.

**Этап 2. Получение оптимального решения**

Если некоторое решение является допустимым, то каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Если процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью, то он приведет к получению минимального значения целевой функции.

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и пометит его ( $0^*$ или (0)). Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.

2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.

3. Пункты 1 и 2 повторять до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые являются не зачеркнутыми, то необходимо:

4. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, и пометить этот элемент.

5. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке.

6. Повторять пункты 4 и 5 до тех пор, пока дальнейшая их реализация окажется невозможной.

Если окажется, что таблица содержит неучтенные нули, повторить операции 1-6. Если решение является допустимым, т.е. отмеченных нулей столько каков порядок матрицы, то полученное решение одновременно является оптимальным. Если решение является недопустимым, осуществляется переход к этапу 3.

**Этап 3. Перераспределение нулей.**

1. Отметить те строки, где нет отмеченных нулей.

2. В отмеченных строках найти вычеркнутые нули и отметить те столбцы, где они стоят.

3. В отмеченных столбцах найти отмеченные нули и отметить те строки, где они стоят.

4. Повторяем пункты 2, 3 пока будет что отмечать.

5. Вычеркнуть отмеченные столбцы и неотмеченные строки (минимальный набор строк и столбцов матрицы, содержащие все нули).

6. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

7. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.

8. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении, проведенных ранее прямых.

9. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

В результате применения данной процедуры в таблице появляется, по крайней мере, один новый нуль. Необходимо возвратиться к этапу 2 и повторять алгоритм до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

**Примечания 6.1.**

1. Если исходная матрица не является квадратной, то нужно ввести фиктивные ресурсы или фиктивные объекты, чтобы матрица стала квадратной.

2. Если какой-либо ресурс не может быть назначен на какой-то объект, то соответствующая стоимость полагается равной достаточно большому числу $M$.

3. Если исходная задача является задачей максимизации, то все элементы матрицы $C = c_{ij}$ следует умножить на $(-1)$ и сложить их с достаточно большим числом так, чтобы матрица не содержала отрицательных элементов. Затем задачу следует решать как задачу минимизации.

**Пример 6.1.** Некоторая компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В табл. 6.1 содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 6.1 – Исходные данные задачи

| **Сбытовая база** | **Расстояние, миль Потребители** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | 68 | 72 | 75 | 83 |
| 2 | 56 | 60 | 58 | 63 |
| 3 | 38 | 40 | 35 | 45 |
| 4 | 47 | 42 | 40 | 45 |

**Решение.**

Понимание существа проблемы можно в значительной степени облегчить, если перед тем, как применять Венгерский метод, попытаться решить поставленную задачу, используя один из широко известных методов. Примените метод Фогеля и проследите, насколько он приближает нас к оптимальному решению, которое мы рассмотрим в конце данного раздела. Значения общего спроса и общего предложения для всех строк и столбцов равны единице.

**Этап 1 Венгерского метода:** В каждой строке находим наименьший элемент.

| **Сбытовая** | **Расстояние, миль** | **Наименьший элемент строки** |
|---|---|---|

| база | Потребители | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV | |
| 1 | 68 | 72 | 75 | 83 | **68** |
| 2 | 56 | 60 | 58 | 63 | **56** |
| 3 | 38 | 40 | 35 | 45 | **35** |
| 4 | 47 | 42 | 40 | 45 | **40** |

Наименьший элемент вычитаем из всех элементов соответствующей строки.

| **Сбытовая база** | **Расстояние, миль Потребители** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | 0 | 4 | 7 | 15 |
| 2 | 0 | 4 | 2 | 7 |
| 3 | 3 | 5 | 0 | 10 |
| 4 | 7 | 2 | 0 | 5 |

В каждом столбце находим наименьший элемент.

| **Сбытовая база** | **Расстояние, миль Потребители** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |
| 1 | 0 | 4 | 7 | 15 |
| 2 | 0 | 4 | 2 | 7 |
| 3 | 3 | 5 | 0 | 10 |
| 4 | 7 | 2 | 0 | 5 |
| **Наименьший элемент столбца** | **0** | **2** | **0** | **5** |

Наименьший элемент вычитаем из всех элементов соответствующего столбца.

| **Сбытовая база** | **Расстояние, миль Потребители** | | | |
|---|---|---|---|---|
| | I | II | III | IV |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 2 | 7 | 10 |
| 2 | 0 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 3 | 0 | 5 |
| 4 | 7 | 0 | 0 | 0 |

В соответствии с процедурой, описанной **в этапе 2**, осуществляются назначения.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 0 | 5 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 0 | 5 |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 3 | 0* | 5 |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |

На данном этапе мы можем осуществить только три нулевых назначения, тогда как требуемое их количество равно четырем. Полученное распределение является недопустимым. Переходим к **этапу 3**. Проводим наименьшее число прямых, проходящих через все нули таблицы.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 | |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 | √ |
| 3 | 3 | 0* | 5 | |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 | |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 | √ |
| 3 | 3 | 0* | 5 | |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ | |
| √ | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 | √ |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 | √ |
| 3 | 3 | 0* | 5 | |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ | |
| √ | | | | |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0* | 2 | 7 | 10 | √ |
| ~~0~~ | 2 | 2 | 2 | √ |
| 3 | 3 | 0* | 5 | |
| 7 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ | |
| √ | | | | |

Наименьшим элементом, через который не проходит ни одна из прямых, является число 2. Скорректируем таблицу так, как это описано выше в соответствии с этапом 3, т.е. вычтем 2 из каждого элемента, через который не проходит ни одна прямая, и добавим 2 ко всем элементам, лежащим на пересечении двух прямых, оставив без изменения все прочие элементы, через которые проходит только одна прямая.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | **2-2=0** | **7-2=5** | **10-2=8** |
| 0 | **2-2=0** | **2-2=0** | **2-2=0** |
| 3 | 3 | 0 | 5 |
| 7 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| **3+2=5** | 3 | 0 | 5 |
| **7+2=9** | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 8 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 5 | 3 | 0 | 5 |
| 9 | 0 | 0 | 0 |

Теперь перераспределим соответствующие назначения сбытовых баз и потребителей.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 8 |
| 0 | 0 | ~~0~~ | 0 |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | 0 | ~~0~~ | 0 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | ~~0~~ | 5 | 8 |
| 0 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0 |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 5 | 8 |
| 0 | 0 | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | ~~0~~ | 5 | 8 |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | 0 |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | ~~0~~ | 5 | 8 |
| ~~0~~ | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ~~0~~ | 0* | 5 | 8 |
| 0 | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | ~~0~~ | 5 | 8 |
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0* | ~~0~~ | 5 | 8 |
| ~~0~~ | 0* | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |

| | | | |
|---|---|---|---|
| ~~0~~ | 0* | 5 | 8 |
| 0* | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 5 | 3 | 0* | 5 |
| 9 | ~~0~~ | ~~0~~ | 0* |

Теперь требование о размещении четырех назначений в клетки с нулевой стоимостью выполняется, следовательно, полученные решения является оптимальными.

1. Перевозки осуществляются со сбытовой базы 1 к потребителю I, с базы 2 − к потребителю IV, с базы 3 − к потребителю III и с базы 4 − к потребителю II.

2.Перевозки осуществляются со сбытовой базы 1 к потребителю I, с базы 2 − к потребителю II, с базы 3 − к потребителю III и с базы 4 − к потребителю IV.

3.Перевозки осуществляются со сбытовой базы 1 к потребителю II, с базы 2 − к потребителю I, с базы 3 − к потребителю III и с базы 4 − к потребителю IV.

Минимальную дальность перевозок для каждого из трех решений можно вычислить из исходной таблицы:

Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 = 208 миль;

Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 миль;

Решение 3: 72 + 56 +35 + 45 = 208 миль.

Общая дальность перевозок для всех трех решений одинакова.

### 6.3. Задачи для самостоятельного решения

**1.** В каждом из пяти филиалов производственного объединения могут изготовляться изделия пяти видов. Учитывая необходимость углубления специализации, в каждом из филиалов решено выпускать только один вид продукции, при этом каждый из видов изделий должен выпускаться одним из филиалов. Себестоимость каждого изделия в каждом из филиалов различна и задается матрицей $C = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & 2 & 7 & 10 \\ 3 & 10 & 2 & 5 & 11 \\ 3 & 1 & 1 & 5 & 10 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Найдите распределение выпуска продукции между филиалами, чтобы общая себестоимость выпущенной продукции была минимальной.

**2.** На предприятии пять станков различных видов, каждый из которых может выполнять пять различных операций по обработке деталей. Известна производительность каждого станка при выполнении каждой операции, заданная матрицей

$$C=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4 & 6 & 7\\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5\\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6\\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3\\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5\end{pmatrix}.$$

Определите, какую операцию и за каким станком следует закрепить, чтобы суммарная производительность была максимальной при условии, что за каждым станком закреплена только одна операция.

**3.** Фирма имеет три механизма $A_1$, $A_2$, $A_3$, каждый из которых может быть использован на каждом из трех видов работ $B_1$, $B_2$, $B_3$ с производительностью, заданной матрицей (в условных единицах)

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Распределите механизмы по одному на каждую из работ так, чтобы суммарная производительность всех механизмов была максимальной.

**4.** Пять человек должны выполнить четыре работы, причем каждый из работников с разной производительностью может выполнить любую из этих работ. Предусматривается, что каждый работник в состоянии сделать только одну работу. Производительности работников при выполнении работ заданы матрицей

$$\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3\\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Распределите людей на работу так, чтобы выполнить ее с максимальной производительностью.

**5.** Фирма, имеющая четыре склада, получила четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы имеют вполне достаточное количество товара, чтобы выполнить любой один из этих заказов. Расстояния между каждой базой и каждым потребителем приведены в матрице

$$\begin{pmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{pmatrix}.$$

Как следует распределить заказы по базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

**6.** Фирма объединяет три предприятия, каждое из которых производит 3 вида изделий. Себестоимости каждого изделия в усл. ед. при изготовлении на каждом предприятии указаны в матрице

$$\begin{pmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 13 & 11 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{pmatrix}.$$

Учитывая необходимость специализации каждого предприятия только по одному изделию, распределить производство изделий по предприятиям так, чтобы изделия имели минимальную себестоимость.

**7.** Имеется 5 ракет и 5 целей. Вероятность поражения цели каждой из ракет задана в следующей таблице:

| Ракеты | Цели | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 0.12 | 0.02 | 0.5 | 0.43 | 0.15 |
| 2 | 0.71 | 0.18 | 0.81 | 0.05 | 0.26 |
| 3 | 0.84 | 0.76 | 0.26 | 0.37 | 0.52 |
| 4 | 0.22 | 0.45 | 0.83 | 0.81 | 0.65 |
| 5 | 0.49 | 0.02 | 0.5 | 0.26 | 0.27 |

Распределите ракеты по целям так, чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным.

**8.** Решите задачу о назначениях венгерским методом ($F \to \max$):

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 7 & 7 & 8 \\ 5 & 9 & 2 & 7 & 13 \\ 3 & 10 & 2 & 5 & 11 \\ 3 & 11 & 1 & 5 & 10 \\ 4 & 12 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 26 & 18 & 11 & 17 & 28 \\ 15 & 19 & 22 & 17 & 13 \\ 23 & 10 & 21 & 15 & 11 \\ 23 & 11 & 16 & 15 & 10 \\ 34 & 12 & 17 & 14 & 28 \end{pmatrix}$$

**9.** Решите задачу о назначениях венгерским методом ($F \to \min$):

$$C=\begin{pmatrix}1&2&1&2\\3&2&2&1\\2&3&1&1\\1&1&3&4\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&2&1&1\\2&1&3&2\\3&1&2&1\\1&4&1&3\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}12&22&19&31\\22&13&31&25\\23&16&26&19\\11&14&18&31\end{pmatrix}$$

# ТЕМА 7: ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

## 7.1. Постановка задачи и методы решения

Значительная часть экономических задач, относящихся к задачам линейного программирования, требует целочисленного решения. К ним относятся задачи, у которых переменные величины обозначают количество единиц неделимой продукции, например, распределение производственных заданий между предприятиями, раскрой материалов, загрузка оборудования, распределение судов по линиям, самолетов по рейсам, а также задачи по производству неделимой продукции и т.д.

Такие задачи решаются методами целочисленного программирования, где общая постановка задачи линейного программирования дополняется требованием о том, чтобы найденные переменные в оптимальном плане были целыми.

Если функция и ограничения в таких задачах линейны и на переменные задачи наложено условие целочисленности, то такие задачи называются **задачами линейного целочисленного программирования**.

Задача линейного целочисленного программирования формулируется следующим образом: найти такое решение (план) $X=\left(x_1,\ x_2,...,x_n\right)$, при котором линейная функция $Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ принимает максимальное или минимальное значение при ограничениях

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i=\overline{1,m}, \\ x_j \ge 0,\ \textit{целые}\quad j=\overline{1,n}. \end{cases}$$

Если не на все переменные наложено условие целочисленности, то такие задачи называются **частично целочисленными**.

Несмотря на то, что к настоящему времени разработан ряд методов решения целочисленных задач, ни один из них не обеспечивает желаемой эффективности соответствующих вычислительных процедур, что особенно проявляется при увеличении размерности задачи. Таким образом, в отличие от задач линейного программирования, время решения которых относительно невелико, реализация целочисленных алгоритмов в ряде случаев весьма затруднительна.

Одна из основных трудностей в целочисленном программировании связана с эффектом ошибки округления, возникающим при использовании цифровых ЭВМ. Даже наличие алгоритмов, применимых для решения задач с целочисленными коэффициентами и позволяющих обойтись без оперирования дробями (и, следовательно, избежать влияния ошибок округления), не упрощает ситуации, поскольку такие алгоритмы (в ряде случаев) сходятся чрезвычайно медленно.

Методы решения задач целочисленного программирования можно классифицировать как методы отсечений и комбинаторные методы.

Исходной задачей для демонстрации возможностей **методов отсечений**, используемых при решении линейных целочисленных задач, является задача с ослабленными ограничениями, которая возникает в результате исключения требования целочисленности переменных. По мере введения специальных дополнительных ограничений, учитывающих требование целочисленности, многогранник допустимых решений ослабленной задачи постепенно деформируется до тех пор, пока координаты оптимального решения не станут целочисленными. Название «методы отсечений» связано с тем обстоятельством, что вводимые дополнительные ограничения отсекают (исключают) некоторые области многогранника допустимых решений, в которых отсутствуют точки с целочисленными координатами.

В основе **комбинаторных методов** лежит идея перебора всех допустимых целочисленных решений. Разумеется, на первый план здесь выдвигается проблема разработки тестовых процедур, позволяющих непосредственно рассматривать лишь (относительно небольшую) часть указанных решений, а остальные допустимые решения учитывать некоторым косвенным образом.

## 7.2. Графическое решение задачи целочисленного линейного программирования

Рассмотрим случай, когда число неизвестных равно двум. Для решения задачи графическим методом прежде строят многоугольник решений без условия целочисленности. Условию целочисленности переменных удовлетворяют не все координаты точек области допустимых решений, поэтому область допустимых решений ослабленной задачи (без условия целочисленности) заменяется на выпуклый многоугольник, содержащий только допустимые точки с целочисленными координатами. Чтобы найти максимум или минимум целевой функции на выпуклой оболочке строят вектор градиент $\bar{c}=(c_1;c_2)$. Передвигая прямую $c_1x_1+c_2x_2=c_0$ в направлении вектора $\bar{c}$, в результате чего находят точку, в которой целевая функция принимает оптимальное значение. Затем определяем координаты точки экстремума функции и вычисляем значение целевой функции в этой точке.

**Пример 7.1**. Найдите максимальное значение целевой функции $Z = 2x_1 + 4x_2$ при заданных ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \textit{целые}. \end{cases}$$

**Решение**. Поскольку число неизвестных задачи равно двум, то решение данной задачи можно найти графически. Для этого построим многоугольник решений задачи без условия целочисленности.

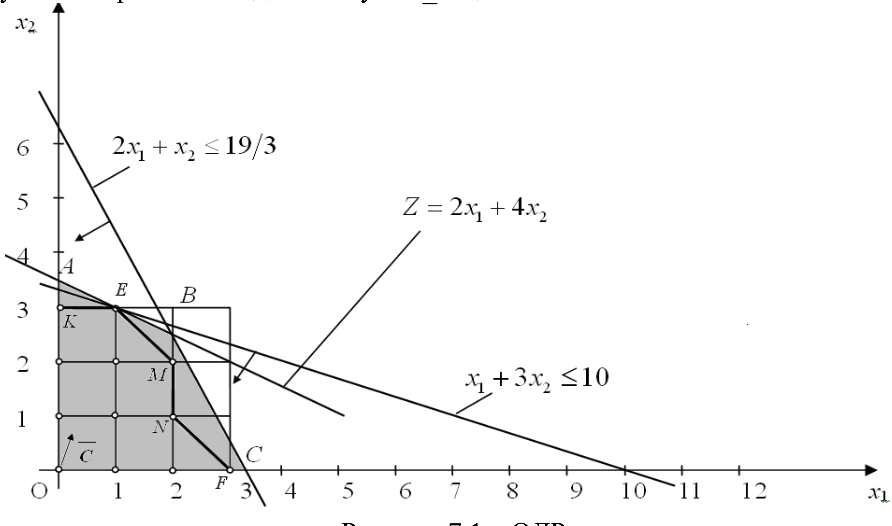



Рисунок 7.1 – ОДР

Условию целочисленности удовлетворяют лишь 12 точек, отмеченных на рисунке. Чтобы найти точку, координаты которой определим решение исходной задачи, заменяя многоугольник *OABC* многоугольником *OKEMNF*, содержащий все допустимые точки с целочисленными координатами.

Для определения максимального значения целевой функции на многоугольнике *OKEMNF* построим вектор градиент $\overline{c}\,(2;4)$ и прямую $2x_1 + 4x_2 = 0$. Построенную прямую передвигаем в направлении вектора градиента до тех пор, пока она не пройдет через последнюю общую точку ее с этим многоугольником. Координаты полученной точки $E(1;3)$ и являются оптимальным решением задачи, а значение целевой функции в ней $F_{\max}=14$ является максимальным.

## 7.3. Метод отсечения. Метод Гомори

Основная идея решения целочисленных задач, первоначально предложенная Данцигом, Фулкерсоном и Джонсоном, заключается в том, что задача сначала решается без ограничения целочисленности (ослабленная задача). Если решение получается целочисленным, то задача решена, если нет, то к задаче присоединяют новое дополнительное ограничение, которое называют сечением. Получают новую задачу, для которой множество допустимых решений будет меньше, чем для исходной задачи, но будет содержать все допустимые целочисленные решения.

Дополнительное ограничение отсекает часть области, содержащую нецелочисленное оптимальное решение.

Вновь полученную задачу решают методом линейного программирования. Процесс построения сечений и решения задачи повторяется до получения целочисленного оптимального решения. Общий систематический способ построения сечений разработал Гомори в 1958 г.

Метод Гомори решения задач целочисленного программирования является **методом отсечения**.

Для нахождения целочисленного решения задачи методом Гомори используется следующий алгоритм.

1. Решаем ослабленную задачу симплексным методом без учета условия целочисленности. Если все компоненты оптимального плана целые, то он является оптимальным и для задачи целочисленного программирования. Если обнаруживается неразрешимость задачи, то и неразрешима задача целочисленного программирования.
2. Если в результате решения задачи линейного программирования в полученном оптимальном плане $X^* = \left(x_1^*,\ x_2^*, ..., x_n^*\right)$ есть нецелая базисная переменная $x_i^*$, то к ограничениям задачи добавляется новое ограничение, обладающее следующими **свойствами**:

− оно должно быть линейным;

− должно отсекать найденный оптимальный нецелочисленный план;

− не должно отсекать ни одного целочисленного плана.

Если нецелых базисных переменных несколько, то для составления ограничения выбираем компоненту оптимального плана $x_i^*$ **с наибольшей дробной частью** (если таких переменных несколько, то выбираем любую).

Этой переменной соответствует строка симплексной таблицы, называемая **строкой, производящей отсечение (производящей строкой)**.

Для изложения метода вводим следующие понятия. Пусть $a$ – действительное число.

Под ***целой частью*** некоторого числа $a$ понимается максимальное целое число $[a]$, не превосходящее данного.

Под ***дробной частью*** некоторого числа $a$ понимается наименьшее неотрицательное число $\{a\}$ такое, что разность между ним и $a$ есть $[a]$ – целая часть числа.

Для выбранной базисной переменной $x_i^*$ ***с наибольшей дробной частью*** находим дробную часть $\{x_i^*\}$ этой переменной и дробные части всех коэффициентов при переменных $i$ - й строки системы ограничений $\{a_{ij}\}$, $j=\overline{1,n}$ (производящей строкой).

Обозначим $[x_i^*]$ и $[a_{ij}]$ целые части чисел $x_i^*$ и $a_{ij}$. Величины дробных частей $\{x_i^*\}$ и $\{a_{ij}\}$ ($0 \le \{x_i^*\} < 1,\ 0 \le \{a_{ij}\} < 1$) определяются следующим образом

$$\{x_i^*\} = x_i^* - [x_i^*],$$

$$\{a_{ij}\} = a_{ij} - [a_{ij}].$$

3.Составляем неравенство Гомори $\{x_i^*\} - \sum_{j=1}^{n} \{a_{ij}\} \cdot x_j \le 0$ и включаем его в систему ограничений исходной задачи.

Для этого по производящей строке симплексной таблицы выписывается уравнение, предполагая, что первые $m$ переменных являются базисными для данного оптимального плана

$$x_i^* = x_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \text{ или } \ x_i = x_i^* - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j .$$

Переносим все целые части коэффициентов в одну сторону, оставляя все дробные в другой:

$$x_j - [x_j^*] + \sum_{j=1+m}^{n} \left[a_{ij}\right] x_j = \{x_j^*\} - \sum_{j=1+m}^{n} \{a_{ij}\} x_j \ ,$$

$$\{x_j^*\} - \sum_{j=1+m}^{n} \{a_{ij}\} x_j \le \{x_j^*\} .$$

Так как $\{x_j^*\} < 1$, то заменяя в правой части $\{x_j^*\}$, получим строгое неравенство

$$\left\{x_j^*\right\} - \sum_{j=1+m}^{n} \left\{a_{ij}\right\} x_j < 1.$$

Так как левая часть неравенства должна принимать целые значения, то, следовательно, необходимое условие ее целочисленности можно записать только в следующем виде:

$$\left\{x_j^*\right\} - \sum_{j=1+m}^{n} \left\{a_{ij}\right\} x_j \le 0.$$

4. Неравенство преобразуется в уравнение путем введения дополнительной неотрицательной переменной и включается в оптимальную симплексную таблицу.

5. Решаем задачу, используя двойственный симплексный метод. Если новый оптимальный план расширенной задачи будет целочисленным, то задача решена. Если же решение нецелое, то нужно повторять алгоритм метода Гомори вплоть до получения целочисленного решения.

**Пример 7.2.** Методом Гомори найдите решение задачи целочисленного программирования, состоящей в определении максимального значения функции $Z = 5x_1 + 11x_2$ при условии

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le \dfrac{21}{4}, \\ 2x_1 + 5x_2 \le 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \ge 0, \ \textit{целые}.$$

**Решение**. Выравнивая неравенства с помощью вспомогательных переменных $x_3, x_4$, получаем задачу линейного программирования в канонической форме:

$$Z = 5x_1 + 11x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = \dfrac{21}{4}, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_4 = 10, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 - \textit{целые}.$$

Решаем задачу линейного программирования симплексным методом, используя поэтапный переход от одного базиса к другому.

Ход решения задачи и полученное оптимальное решение представлены в таблицах.

| *Б.п.* | *C_Б* | *B* | $c_1=5$ | $c_2=11$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $x_3$ | 0 | $\frac{21}{4}$ | 3 | 4 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 10 | 2 | 5 | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 0 | -5 | -11 | 0 | 0 |

| *Б.п.* | *C_Б* | *B* | $c_1=5$ | $c_2=11$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ |
| $x_2$ | 11 | $\frac{21}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 |
| $x_4$ | 0 | $\frac{55}{16}$ | $-\frac{7}{4}$ | 0 | $-\frac{5}{4}$ | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | $\frac{231}{16}$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $\frac{11}{4}$ | 0 |

В найденном оптимальном плане значение переменной $x_2$ равно дробному числу. Находим его дробную часть и дробные части всех элементов строки, содержащей переменную $x_2$, а именно:

$$\left\{\frac{21}{16}\right\}=\frac{21}{16}-\left[\frac{21}{16}\right]=\frac{21}{16}-1=\frac{5}{16}, \qquad \left\{\frac{3}{4}\right\}=\frac{3}{4}-\left[\frac{3}{4}\right]=\frac{3}{4}-0=\frac{3}{4},$$

$$\{1\}=1-[1]=1-1=0, \quad \left\{\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{4}\right]=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}, \quad \{0\}=0.$$

Теперь составляем для найденных значений дробных частей неравенство Гомори:

$$\frac{5}{16}-\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{4}x_3\le 0.$$

Выравниваем неравенство Гомори с помощью новой вспомогательной переменной $x_5$, переносим свободный член уравнения в правую часть и получаем новое ограничение:

$$-\frac{3}{4}x_1-\frac{1}{4}x_3+x_5=-\frac{5}{16}.$$

Добавляем в симплексную таблицу строку, содержащую новое ограничение, и столбец, содержащий новую переменную, и продолжаем решать задачу двойственным симплексным методом, так как теперь в таблице записан псевдоплан.

| *Б.п.* | $C_Б$ | $B$ | $c_1=5$ | $c_2=11$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 11 | $\frac{21}{16}$ | $\frac{3}{4}$ | 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 |
| $x_4$ | 0 | $\frac{55}{16}$ | $-\frac{7}{4}$ | 0 | $-\frac{5}{4}$ | 1 | 0 |
| $x_5$ | 0 | $-\frac{5}{16}$ | $-\frac{3}{4}$ | 0 | $-\frac{1}{4}$ | 0 | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | $\frac{231}{16}$ | $\frac{13}{4}$ | 0 | $\frac{11}{4}$ | 0 | 0 |

| *Б.п.* | $C_Б$ | $B$ | $c_1=5$ | $c_2=11$ | $c_3=0$ | $c_4=0$ | $c_5=0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $x_2$ | 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $x_4$ | 0 | $\frac{25}{6}$ | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 1 | $-\frac{7}{3}$ |
| $x_1$ | 0 | $\frac{5}{12}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | $\frac{157}{12}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{13}{3}$ |

Полученное оптимальное решение расширенной задачи содержит нецелое значение переменной $x_1$, поэтому находим для этой строки дробные части всех нецелых чисел, а именно:

$$\left\{\frac{5}{12}\right\}=\frac{5}{12}-\left[\frac{5}{12}\right]=\frac{5}{12}-0=\frac{5}{12}, \qquad \{1\}=1-[1]=1-1=0,$$

$$\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}, \quad \{0\}=0, \quad \left\{-\frac{4}{3}\right\}=-\frac{4}{3}-\left[-\frac{4}{3}\right]=-\frac{4}{3}-(-2)=\frac{2}{3}$$

и новое неравенство Гомори имеет вид: $\frac{5}{12}-\frac{1}{3}x_3-\frac{2}{3}x_5\le 0.$

Выравниваем неравенство Гомори с помощью новой вспомогательной переменной $x_6$, переносим свободный член уравнения в правую часть и получаем новое ограничение: $-\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_5 + x_6 = -\frac{5}{12}$.

Добавляем его к решаемой задаче, выравниваем с помощью вспомогательной переменной и решаем расширенную задачу.

| *Б.п.* | $C_Б$ | *B* | $c_1 = 5$ | $c_2 = 11$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | $c_6 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| $x_2$ | 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 0 | $\frac{25}{6}$ | 0 | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 1 | $-\frac{7}{3}$ | 0 |
| $x_1$ | 0 | $\frac{5}{12}$ | 1 | 0 | $\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{4}{3}$ | 0 |
| $x_6$ | 0 | $-\frac{5}{12}$ | 0 | 0 | $-\frac{1}{3}$ | 0 | $-\frac{2}{3}$ | 1 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | $\frac{157}{12}$ | 0 | 0 | $\frac{5}{3}$ | 0 | $\frac{13}{3}$ | 0 |

| *Б.п.* | $C_Б$ | *B* | $c_1 = 5$ | $c_2 = 11$ | $c_3 = 0$ | $c_4 = 0$ | $c_5 = 0$ | $c_6 = 0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ |
| $x_2$ | 11 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| $x_4$ | 0 | 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | -2 |
| $x_1$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | -2 | 1 |
| $x_3$ | 0 | $\frac{5}{4}$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 | -3 |
| $\Delta_j = Z_j - c_j$ | | 11 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 5 |

Таким образом, найдено оптимальное решение задачи целочисленного программирования: $Z_{max} = 11$ при $X^* = (0,\ 1)$.

**Замечание 7.1**: Если в процессе решения в симплексной таблице появится уравнение с нецелой компонентой $x_i^*$ и целыми коэффициентами в соответствующей строке системы ограничений $a_{ij}$, $j=\overline{1,n}$, то данная задача не имеет целочисленного решения.

### 7.4. Задачи для самостоятельного решения

**Задание 1. Графическим методом решите задачу целочисленного программирования**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $Z = x_1 + 2x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 15, \\ x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ | **1.** $Z = 2x_1 + 1{,}5x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 7x_1 + 12x_2 \le 66, \\ 4x_1 + x_2 \le 12, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ | **2.** $Z = 7x_1 + 3x_2 \to \max;$ $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \le 20, \\ 8x_1 + 4x_2 \le 38, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ |

**Задание 2. Решите методом Гомори задачу целочисленного программирования**

| | |
|---|---|
| **1.** $F = x_1 + x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1 - 3x_2 \le 24, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ | **2.** $F = x_1 + 4x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le \dfrac{19}{3}, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ |
| **3.** $F = 2x_1 - 8x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 17, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ | **4.** $F = 2x_1 - 8x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 17, \\ x_2 \le 4, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ |
| **5.** $F = x_1 + 5x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7, \\ -3x_1 + 2x_2 \le 5, \\ x_1 \le 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ | **6.** $F = 7x_1 - 9x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 9, \\ 3x_2 \le 7, \\ 4x_1 + 5x_2 \le 5, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \textit{целые}.$ |

| | |
|---|---|
| **7.** $F = x_1 - 7x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 8, \\ x_1 - 3x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0,$ $x_1, x_2 - \text{\textit{целые.}}$ | **8.** $F = x_1 + 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ -x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые.}} \end{cases}$ |
| **9.** $F = x_1 + 2x_2 \to \max,$ $\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \\ x_1, x_2 - \text{\textit{целые.}} \end{cases}$ | **10.** $F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 25, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 15, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ |
| **11.** $F = 110x_1 + 90x_2 \to \max,$ $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 10, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 5, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,2}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ | **12.** $F = x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3, \\ 2x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 4, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ |
| **13.** $F = x_1 - x_2 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,4}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ | **14.** $F = x_4 - x_5 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,5}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ |
| **15.** $F = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 10, \\ 2x_1 + 4x_3 \ge 14, \\ 2x_2 + x_3 \ge 7, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ | **16.** $F = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max,$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 16, \\ x_1 + x_2 \le 7, \\ 3x_1 + 2x_3 \ge 18, \\ x_j \ge 0 \ \ (j = \overline{1,3}) \ \ \text{\textit{и целые.}} \end{cases}$ |

| | |
|---|---|
| **17.** $F=4x_1+3x_2\to\max,$ $\begin{cases}8x_1+2x_2\le 88,\\ x_1\le 22,\\ 5x_2\le 90,\\ x_j\ge 0\ \ (j=\overline{1,2})\ \ \textit{и}\ \ \textit{целые}.\end{cases}$ | **18.** $F=2x_1+4x_2\ \ -x_3+x_4\to\max,$ $\begin{cases}30x_1-15x_2+20x_3+21x_4\le 324,\\ 21x_1+51x_2+28x_3+25x_4\le 483,\\ 12x_1-44x_2+32x_3+62x_4\le 367,\\ x_j\ge 0,\ \ x_j-\textit{целые},\ \ j=\overline{1,4}.\end{cases}$ |
| **19.** $Z=5x_1+x_2\ \ +x_3+2x_4\to\max,$ $\begin{cases}9x_1+16x_2+27x_3+33x_4\le 455,\\ 14x_1+23x_2-18x_3-41x_4\le 512,\\ 5x_1-9x_2+72x_3-12x_4\le 739,\\ x_j\ge 0,\ \ x_j-\textit{целые},\ \ j=\overline{1,4}.\end{cases}$ | **20.** $Z=8x_1+x_2\ \ +x_3-x_4\to\min,$ $\begin{cases}43x_1+63x_2-21x_3+35x_4\ge 151,\\ 51x_1-17x_2+16x_3+16x_4\ge 167,\\ 37x_1+12x_2-12x_3+32x_4\ge 133,\\ x_j\ge 0,\ \ x_j-\textit{целые},\ \ j=\overline{1,4}.\end{cases}$ |
| **21.** $Z=-x_1+6x_2\ \ -x_3+x_4\to\min,$ $\begin{cases}8x_1+3x_2+2x_3+5x_4\ge 45,\\ 15x_1+11x_2-14x_3+6x_4\ge 32,\\ 7x_1+23x_2-18x_3-12x_4\ge 13,\\ x_j\ge 0,\ \ x_j-\textit{целые},\ \ j=\overline{1,4}.\end{cases}$ | **22.** $F=x_1+x_2\ \ +x_3-4x_4\to\min,$ $\begin{cases}73x_1+13x_2+61x_3+15x_4\ge 651,\\ 61x_1-61x_2-24x_3+76x_4\ge 612,\\ 97x_1+12x_2+92x_3+32x_4\ge 863,\\ x_j\ge 0,\ \ x_j-\textit{целые},\ \ j=\overline{1,4}.\end{cases}$ |

# ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмадиев, Ф. Г. Математическое моделирование и методы оптимизации : учебное пособие / Ф. Г. Ахмадиев, Р. М. Гильфанов. – Казань : Казанский государственный архитектурно-строительный университет, ЭБС АСВ, 2017. – 179 с. – ISBN 978-5-7829-0534-7. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/73309.html

2. Балдин, К.В. Математическое программирование : учебник / К.В. Балдин, Н.А. Брызгалов, А.В. Рукосуев ; под общ. ред. К.В. Балдина. – 2-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2018. – 218 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=112201

3. Грешилов, А.А. Прикладные задачи математического программирования : учебное пособие / А.А. Грешилов. – 2-е изд., доп. – Москва : Логос, 2006. – 288 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=89784

4. Кириллов, Ю.В. Прикладные методы оптимизации : учебное пособие : [16+] / Ю.В. Кириллов, С.О. Веселовская. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2012. – Ч. 1. Методы решения задач линейного программирования. – 235 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=228968

5. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации : учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – Москва : Логос, 2011. – 424 с. – ISBN 978-5-98704-540-4. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/9093.html

6. Струченков, В. И. Методы оптимизации в прикладных задачах / В. И. Струченков. – Москва : СОЛОН-ПРЕСС, 2016. – 315 с. – ISBN 978-5-91359-061-9. – Текст : электронный // Электронно-библиотечная система IPR BOOKS : [сайт]. – URL: http://www.iprbookshop.ru/90289.html

7. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций : учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – 7-е изд. – Москва : Дашков и К°, 2019. – 398 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=573373

8. Шелехова, Л. В. Методы оптимальных решений : учебное пособие / Л. В. Шелехова. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2017. – 304 с. – ISBN 978-5-8114-2165-7. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/91895

Шевченко Алеся Сергеевна

**ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ**

Учебное пособие для студентов направления 09.03.01«Информатика и вычислительная техника»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати __.__.19. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 9,,37. Тираж 35 экз. Зак. Рег. № .

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.