Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Кафедра прикладной математики

Л.А. ПОПОВА

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА И ТЕОРИЯ АЛГОРИТМОВ

Методические указания для студентов направления
«Информатика и вычислительная техника»
очной и заочной форм обучения

Рубцовск 2021

ББК 22.12

Попова Л.А. Математическая логика и теория алгоритмов: Методические указания для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения / Л.А. Попова. – Рубцовск: РИИ, 2021. – 25 с. [ЭР].

Методические указания предназначены для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы по курсу «Математическая логика и теория алгоритмов» у студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.
Протокол № 9 от 18.03.2021 г.

Содержание

Введение

Методические указания написаны в соответствии с программой дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов направления «Информатика и вычислительная техника» очной и заочной форм обучения, предназначены для аудиторной и самостоятельной работы по данному курсу.

Указания содержат комплект заданий для лабораторных работ, а также вопросы для самостоятельной работы и подготовки к текущему контролю успеваемости и промежуточной аттестации.

Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с индикаторами достижения компетенций

Компе-тенция	Содержание компетенции	Индика-тор	Содержание индикатора
ПК-5	Способен разрабатывать требования и проектировать программное обеспечение	ПК-5.3	Применяет стандартные алгоритмы в профессиональной деятельности

Общий объем дисциплины в 5 семестре: 4 з.е. / 144 час

Форма промежуточной аттестации: Экзамен

Комплект заданий для практических занятий

Логика высказываний

1) Определить, являются ли данные предложения высказываниями. Для высказываний определить их истинностные значения.
   a) В неделе 10 дней.
   b) Волга впадает в Каспийское море.
   c) Да здравствует солнце!
   d) Который час?
   e) x>2
   f) Если x и y – действительные числа, то x+y=y+x.
   g) Завтра будет хорошая погода.
   h) Треугольник называется равнобедренным, если у него две стороны равны.
   i) Если треугольник равнобедренный, то у него два угла равны.
2) Составить таблицы истинности для пропозициональных форм и определить, какие из них являются равносильными.
   a) $A \& \overline{B \vee \overline{C}}$
   b) $\overline{A} \vee (B \to \overline{B} \& A)$
   c) $\overline{A \to B} \& C$
   d) $A \& (B \vee C) \to A$

e) $\overline{\overline{A}\vee\overline{C}}\,\&\,\overline{A\,\&\,C\vee B}$

f) $(\overline{A\,\&\,B\vee C})\,\&\,(B\,\&\,C\to A)$

3) Привести формы к регулярному виду.

a) $(X\to Y)\,\&\,\overline{Y\to X}\to X\vee Y$

b) $(X\to(Y\to Z))\to(\overline{X\to Y}\to Z)$

c) $((X\to Y)\,\&\,\overline{\overline{X}\to\overline{Y}})\to(X\vee Y)\,\&\,(\overline{X}\vee Y)$

4) Упростить формулы исчисления высказываний, используя основные равносильности между формулами.

a) $A\,\&\,C\vee A\,\&\,D\,\&\,\overline{C}\vee A\,\&\,\overline{C}\vee D\,\&\,\overline{\overline{B}\vee D}\vee B\,\&\,A\,\&\,\overline{C}\,\&\,D\vee B\vee B\,\&\,A\,\&\,(B\vee A)\,\&\,\overline{B}$

b) $A\,\&\,\overline{C\vee D}\,\&\,(\overline{A}\vee B\vee\overline{C}\vee D)\,\&\,(\overline{A}\vee\overline{C\,\&\,\overline{D}}\vee C\,\&\,\overline{B})\vee B\,\&\,A\,\&\,\overline{B}$

c) $(A\vee C)\,\&\,(D\vee\overline{A\vee C})\vee\overline{D}\,\&\,\overline{A}\vee(A\vee C)\,\&\,\overline{C\,\&\,D}\vee A\,\&\,(B\,\&\,\overline{A})$

d) $(\overline{A\,\&\,\overline{B}}\vee C\vee D)\,\&\,(\overline{A}\vee C\vee D\vee\overline{C}\,\&\,B)\,\&\,A\,\&\,\overline{\overline{C}\vee D}\vee(B\,\&\,C)\,\&\,\overline{B}$

5) Привести формулы к СКНФ и СДНФ двумя способами:

a) $(\overline{A}\to\overline{B})\to((B\,\&\,C)\to(A\to C))$

b) $((A\to B)\to\overline{A})\to(A\to(A\,\&\,B))$

c) $(\overline{A}\to C)\to\overline{\overline{B}\to\overline{A}}$

d) $\overline{A\,\&\,B\to A}\to A\,\&\,(B\vee C)$

6) Привести пропозициональные формы к КНФ и ДНФ с помощью равносильных преобразований.

a) $\overline{A\,\&\,C}\to B\,\&\,(A\vee\overline{D})$

b) $\overline{X\vee Z}\,\&\,(X\to Y)$

c) $(X\to(Y\to Z))\to((X\to Z)\to(X\to Y))$

7) Форма X(A,B,C) в итоговом столбце принимает значения 01100011 (сверху вниз). Найти СКНФ и СДНФ для X.

Логика предикатов

1) Какие из следующих выражений (предложений) являются предикатами:

a) x=y+z
b) x=2y+1
c) 2x+3
d) Подобные треугольники равны
e) Все четные числа делятся на 2
f) 8 – нечетное число
g) 2×2=5
h) Два студента + 3 = группа

2) Предикаты A(x) = "x – простое число", B(x, y) = "x делится на y" заданы на множестве натуральных чисел. Записать высказывания символически и определить их истинностные значения:

a) Любое простое число не делится ни на 2, ни на 3.
b) Существует простое число, которое делится на 2.

c) Если данное число не простое, то оно делится на некоторое простое число.
d) Существуют числа простые и не простые.
e) Если число n не делится ни на какое простое число, то число n – простое.
f) Если число делится на 1 и на себя, то оно простое.

3) Записать математические высказывания на формальном языке.
a) Для любых двух точек плоскости существует содержащая их прямая.
b) Для любых двух точек плоскости существует не более одной содержащей их прямой.
c) Длина любой стороны треугольника меньше суммы двух других его сторон.
d) Все рациональные числа являются действительными.
e) Не все действительные числа являются рациональными.
f) Некоторые действительные числа являются рациональными.

4) Используя логико-математическую символику, записать предложения в виде формул формального языка 1 порядка и найти их истинностные значения:
a) Для любых двух целых чисел существует целое число, равное сумме двух данных чисел.
b) Для любых целых чисел x, y, z, если x+y=z то x+z=y.
c) Для любых целых чисел x, y, x<y тогда и только тогда, когда существует такое натуральное число k, что x+k=y.
d) Для любых двух целых чисел существует ровно одно целое число, равное их произведению.

5) Найти множества истинности предикатов, заданных на множестве действительных чисел, и изобразить эти множества на координатной прямой:
a) $P_1(x)$ = "$x^2-3x+2=0$";
b) $P_2(x)$ = "$3x+8\geq 7$";
c) $P_3(x)$ = "$|x|<2$";
d) $P_4(x)$ = "$x^2>0$".

6) Изобразить на координатной плоскости множества истинности двуместных предикатов, заданных на множестве действительных чисел:
a) R_1 = "$x=y$";
b) R_2 = "$x^2+y^2<9$";
c) R_3 = "$x^2\leq y$".

7) Определить истинностные значения высказываний, записанных на формальном языке первого порядка, заданных на множестве действительных чисел ($x, y\in R$):
a) $\forall x(|x|>0)$
b) $\exists x(|x|\leq 0)$

c) $\forall x(x^2-1=(x-1)(x+1))$
d) $\exists y(5+y=5)$
e) $\exists y(y^2+y+1=0)$
f) $\forall y(y^2-y+1>0)$
g) $\exists x(x^3<x^2)$
h) $\forall x\ \forall y(x^2+y^2>-1)$

8) Определить свободные и связанные переменные в следующих предикатах, заданных на R. Записать их множества истинности:
a) $\forall x(x\cdot y=x)$
b) $\forall y(x+y=y)$
c) $\exists x(x\cdot y=0)$
d) $\exists x(x\cdot y=1)$
e) $\forall x\ \exists y(x\cdot y=z)$

9) Пусть на множестве M заданы предикаты P(x,y) и Q(x,y,z).
a) Записать все одноместные предикаты, которые можно получить из $P^{(2)}$ и $Q^{(3)}$, приписывая к ним различные кванторы. Прочитать полученные предикаты, определить свободные и связанные переменные.
b) Составить таблицы истинности для предиката $Q^{(3)}$ и одноместных предикатов, полученных приписыванием к нему кванторов, если M={1,2,3}, Q(x,y,z)= "x+y=z".

10) Предикат P(x,y)="x<y" задан на множестве M={2,3,6}. Найти множества истинности предикатов: a) $\forall$xP(x,y); b) $\exists$yP(x,y).
a) Решение:

В предикате $\forall$xP(x,y) переменная x является связанной, а переменная y – свободной, поэтому данный предикат зависит от y.

Составим таблицу истинности и выберем те значения переменной y, при которых в результирующем столбце получили 1.

y	x	x<y	$\forall$x(x<y)
2	2 3 6	0 1 1	0
3	2 3 6	0 0 1	0
6	2 3 6	0 0 0	0

Таким образом, показано, что не существует значения переменной y, при котором $\forall$xP(x,y)=1, поэтому множество истинности этого предиката $\varnothing$.

11) Каким условиям удовлетворяют множества истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве M, если при всех значениях $x\in M$:
a) $P(x)\&Q(x)$ принимает значение 1

b) $P(x)\&Q(x)$ принимает значение 0
c) $P(x)\&Q(x)$ принимает значение 1 при любом $x \in M_x(P)$
d) $P(x) \lor Q(x)$ принимает значение 1
e) $P(x) \to Q(x)$ принимает значение 1

12) Каким условиям удовлетворяют множества истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$, заданных на множестве M, если истинны высказывания:
a) $\forall x(P(x) \to Q(x)) \,\&\, \exists x(\overline{P}(x) \to Q(x))$
b) $\overline{\exists x(P(x) \,\&\, Q(x))} \,\&\, \forall x(P(x) \to Q(x))$
c) $\exists x(P(x) \,\&\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$

13) В интерпретации J={⟨***N***, {"≤", "="}⟩, λ}, где λ: $P^{(2)}$ |→ "≤", $Q^{(2)}$ |→ "=", записать формулы и определить их истинностные значения:
a) $\forall x \forall y \forall z(P(x,y) \to (P(y,z) \to P(x,z)))$
b) $\forall y \exists x(\overline{Q}(x,y) \,\&\, P(x,y))$
c) $\forall z \forall x(\forall y(P(y,x) \to Q(y,x)) \to Q(x,z))$

14) В интерпретации J={⟨***N***, {"x=1", "y=x+1", "<"}⟩, λ}, где λ: $P(x)$ |→ "x=1", $Q(x,y)$ |→ "y=x+1", $R^{(2)}$ |→ "<", записать формулы и определить их истинностные значения:
a) $\forall x \exists y Q(x,y)$
b) $\exists y \forall x Q(x,y)$
c) $\forall x(\overline{P}(x) \to \exists y R(y,x))$
d) $\forall x(P(x) \to \forall y \overline{R}(y,x))$

15) Предикат P(x, y) определен на множестве M={a, b, c, d} и задан с помощью таблицы:

y\x	a	b	c	d
a	1	1	1	0
b	0	1	1	0
c	0	1	1	1
d	1	0	1	1

a) Определить истинностные значения высказываний:
∀x∀y P(x, y)
∀y∀x P(x, y)
∀x∃y P(x, y)
∃y∀x P(x, y)
∃x∀y P(x, y)

b) Составить таблицы истинности для предикатов:
∃x P(x, y)
∀y P(x, y)
∀x (P(x, y) & P(y, x))
∀x∃y (P(x, z) → P(z, y))

16) На множестве M={-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5} заданы предикаты A(x) = "x – положительное число"; B(x) = "x – делится на 6". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)&B(x).
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.

17) Доказать, что формула $\exists xP(x) \,\&\, \exists xQ(x) \to \exists x(P(x) \,\&\, Q(x))$ не общезначимая, но выполнимая.

18) Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists xA(x) \,\&\, \forall xB(x) \to \forall xA(x) \to \forall xB(x)$.

19) Даны формулы:
   a) $\exists x \exists y A(x, y)$
   b) $\forall x\, B(x) \to \exists x\, C(x)$
   c) $\forall x \exists y\, (A(x, y) \to B(y))$
   d) $\exists y \forall x\, A(x, y) \to \forall x\, B(x) \,\&\, \exists y\, C(y) \to \forall x \exists y\, A(y, x)$

и интерпретация J={⟨Z, ∑⟩, λ}, где ∑={"быть меньше или равным", "быть положительным", "делиться на 3"}, λ: $A^{(2)}$ |→ "быть меньше или равным", $B^{(1)}$ |→ "быть положительным", $C^{(1)}$ |→ "делиться на 3".
   a) Составить и записать высказывания на языке первого порядка, определить их истинностные значения.
   b) Для каждой формулы записать ее отрицание, которое привести к предваренной нормальной форме (ПНФ), затем к сколемовской нормальной форме (СНФ).

20) Методом резолюций доказать, что следующее множество дизъюнктов невыполнимо:
   a) $P\vee Q\vee R$, $\neg P\vee R$, $\neg Q$, $\neg R$;
   b) $P\vee Q$, $\neg Q\vee R$, $\neg P\vee Q$, $\neg R$;
   c) P, Q, R, W, $\neg P\vee\neg Q\vee\neg R\vee\neg W$;
   d) $\neg P\vee\neg Q\vee R$, $P\vee R$, $Q\vee R$, $\neg R$.

Формальная аксиоматическая теория

1) Доказать помощью построения формального вывода:
   a) $A\to B,\ \overline{B} \vdash \overline{A}$
   b) $A\&B \vdash B\&A$
   c) $A\&B \vdash B\vee A$
   d) $A\to B,\ A,\ C \vdash B\&C$
   e) $X\to(Y\to Z),\ \overline{\overline{X}},\ \overline{\overline{Y}} \vdash Z$
   f) $\overline{A},\ B \vdash \overline{A \,\&\, B}$
   g) $\vdash \overline{A\vee B} \leftrightarrow \overline{A} \,\&\, \overline{B}$,
   h) $\vdash \overline{A\& B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$,
   i) $\vdash \overline{\overline{A}\vee \overline{C}} \vee A \,\&\, \overline{C} \to A$.

j) $\vdash A \to \overline{\overline{A} \vee \overline{C}} \vee A \& \overline{C}$.

2) Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   a) $\vdash A\to((A\to B)\to B)$
   b) $\vdash (A\to B)\to(A\to B\vee C)$
   c) $\vdash (A\to B)\to(A\& C\to B\& C)$
   d) $\vdash (A\to(B\to C))\to(A\& B\to C)$
   e) $\vdash ((A\to B)\to C)\to(A\to(B\to C))$

3) Проверить правильность рассуждений (с помощью формального вывода и построением таблиц истинности):
   a) Если число оканчивается 0, то оно делится на 5. Число делится на 5. Следовательно, оно оканчивается на 0.
   b) Если число делится на 5, то оно оканчивается 0 или 5. Число не делится на 5. Следовательно, оно не оканчивается ни 0, ни 5.
   c) Если число целое, то оно рациональное. Если число – несократимая дробь, то оно не целое. Данное число – несократимая дробь. Следовательно, оно не рациональное.
   d) Если посылки истинны и рассуждение правильно, то заключение истинно. Заключение ложно. Следовательно, посылки ложны или рассуждение неправильно.
   e) Если a=0 или b=0, то ab=0. ab≠0. Следовательно, a≠0 и b≠0.

4) Доказать с помощью метода математической индукции:
   a) Сумма первых n ($n\in N$) первых нечетных чисел равна квадрату их количества, т.е. 1 + 3 + 5 +…+ (2n - 1) = n2.
   b) При каждом натуральном n справедлива формула:

$$1^1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

   c) .
   d) При каждом натуральном $n \geq 2$ справедливо равенство:

$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

   e)

5) Доказать выводимость формул исчисления предикатов:
   a) $\vdash \forall x_i A(x_i) \to \exists x_i A(x_i)$
   b) A(xi) |– ∀xiA(xi)
   c) $\forall x_i A(x_i) \to B(x_i), A(\theta) \mid -B(\theta)$, где θ – терм, не содержащий xi.
   d) Пусть формула C не содержит переменной xi. Тогда, если G,A(xi) |– C, то G, ∃xi A(xi) |– C.
   e) $\vdash \forall x\forall y((x=y)\to(y=x))$.
   f) $\vdash \forall x\forall y\forall z((x=y)\to((y=z)\to(x=z)))$.

Теория алгоритмов

6) На информационной ленте машины Тьюринга содержится массив символов +. Необходимо разработать функциональную схему машины Тьюринга, которая каждый второй символ + заменит на -. Каретка в начальном состоянии находится где-то над указанным массивом.

7) Дано число n в восьмеричной системе счисления. Разработайте машину Тьюринга, которая увеличивала бы заданное число n на 1.

8) Дана десятичная запись натурального числа n. Разработайте машину Тьюринга, которая уменьшала бы заданное число n на 1. При этом запись числа n - 1 не должна содержать левый нуль, например, 100-1 = 99, а не 099. Начальное положение головки - правое.

9) Дан массив из открывающихся и закрывающихся скобок. Постройте машину Тьюринга, которая удаляла бы пары взаимных скобок. Например, дано: «) (( ) (( ) », надо получить: «)…((».

10) Дана строка из букв a и b. Разработайте машину Тьюринга, которая переместит все буквы a в левую, а буквы b в правую часть строки. Каретка находится над крайним левым символом строки.

11) Даны два целых положительных числа в десятичной системе счисления. Сконструируйте машину Тьюринга, которая будет находить разность этих чисел, если известно, что первое число больше второго, а между ними стоит знак «минус». Каретка находится над левой крайней цифрой левого числа.

12) Даны два целых положительных числа в различных системах счисления, одно – в троичной системе, другое – в десятичной. Разработайте машину Тьюринга, которая будет находить сумму этих чисел в десятичной системе счисления.

13) Сконструируйте машину Тьюринга, которая выступит в качестве двоично-восьмеричного дешифратора.

14) Дана конечная последовательность меток, записанных в клетки ленты подряд, без пропусков. Необходимо разработать машину Тьюринга, которая будет записывать в десятичной системе счисления число этих меток.

15) На информационной ленте машины Тьюринга в трех секциях в произвольном порядке записаны три различные буквы: A, B и C. Каретка в начальном состоянии обозревает букву, расположенную справа. Необходимо составить функциональную схему машины Тьюринга, которая сумеет поменять местами крайние буквы.

16) Даны два натуральных числа m и n представленных в унарной системе счисления. Соответствующие наборы символов « | » разделены « - », вслед за последним символом набора n стоит знак «=». Разработайте машину Тьюринга, которая будет находить разность чисел m и n. При этом

результат должен быть записан следующим образом: если m n, то справа от «=» должны стоять знак «+» и набор символов « | » в количестве m - n; если m = n, то справа от знака «=» должна стоять пустая клетка; если m n, то справа от «=» должны стоять знак « - » и набор символов « | » в количестве n - m.

17) Даны два натуральных числа п и т, заданных в унарной системе счисления. Числа n и m представлены наборами символов « | », разделенных « \ ». В конце набора стоит «=». Разработайте машину Тьюринга, которая будет производить деление нацело двух натуральных чисел n и m и находить остаток от деления. При этом результат должен быть записан следующим образом: после «=» должен находиться набор символов « | » частного (он может быть и пустым), после чего ставится знак «(», за которым следует набор символов « | » остатка от деления n на m.

18) На ленте машины Тьюринга находится число, записанное в десятичной системе счисления. Умножьте это число на 2, если каретка находится над крайней левой цифрой числа.

19) На ленте машины Тьюринга находится целое положительное число, записанное в десятичной системе счисления. Найдите произведение этого числа на число 11. Каретка обозревает крайнюю правую цифру числа.

20) На ленте машины Тьюринга находится слово, состоящее из букв латинского алфавита {a, b, c, d}. Подсчитайте число букв «a» в данном слове и полученное значение запишите на ленту левее исходного слова через пробел. Каретка обозревает крайнюю левую букву.

21) На ленте машины Тьюринга находится десятичное число. Определите, делится ли это число на 5 без остатка. Если делится, то запишите справа от числа слово «да», если нет — «нет». Каретка находится где-то над числом.

22) На ленте машины Тьюринга записано число в десятичной системе счисления. Каретка находится над крайней правой цифрой. Запишите цифры этого числа в обратном порядке.

23) На информационной ленте машины Тьюринга находится десятичное число. Найдите результат целочисленного деления этого числа на 2.

24) На информационной ленте машины Тьюринга находится массив, состоящий только из символов A и B. Сожмите массив, удалив из него все элементы B.

25) Налейте машины Тьюринга находится массив 2N меток. Уменьшите этот массив в 2 раза.

26) Даны два натуральных числа n и m, представленные в унарной системе счисления. Между этими числами стоит знак «? ». Выясните отношение m и n, т. е. знак «? » замените на один из подходящих знаков « », « », «=».

27) Найдите произведение двух натуральных чисел m и n, заданных в унарной системе счисления. Соответствующие наборы символов « | » разделены

знаком « * », а справа от последнего символа правого члена стоит знак «=». Поместите результат умножения этих чисел вслед за знаком «=».

28) На информационной ленте машины Тьюринга в трех секциях в произвольном порядке записаны три цифры: 1, 2, 3. Каретка обозревает крайнюю левую цифру. Необходимо составить функциональную схему машины Тьюринга, которая расположит эти цифры в порядке возрастания.

29) Построить машины Тьюринга для стандартных машин:

<u>Машина **A** (увеличивает число на 1)</u>

Воспринимая любое число в начальной конфигурации, увеличивает его на 1, если справа от числа интервал больше одной пустой ячейки, и останавливается, воспринимая полученное число:

Пример: $|||\overset{\bullet}{|}a_0a_0||| \equiv\rangle ||||\underset{\bullet}{|}a_0|||$

Если справа от числа ровно одна пустая ячейка, то оно остается без изменения:

$||||\overset{\bullet}{|}a_0||| \equiv\rangle ||||\underset{\bullet}{|}a_0|||$

<u>Машина **B** (уменьшает число на 1)</u>

Воспринимая число, отличное от 0 (то есть содержащее более одной |), стирает | и останавливается, воспринимая полученное число (иначе число остается без изменения).

Пример: $||||\overset{\bullet}{|}a_0a_0||| \equiv\rangle |||\underset{\bullet}{|}a_0a_0a_0|||$

<u>Машина **C** (приписывает справа 0)</u>

Воспринимая некоторую последовательность натуральных чисел, приписывает справа через одну пустую ячейку одну | (код числа 0) и останавливается, воспринимая записанную букву | .

Пример: $||||a_0a_0||\overset{\bullet}{|} \equiv\rangle ||||a_0a_0|||a_0\underset{\bullet}{|}$

<u>Машина **D** (заполняющая)</u>

Воспринимая не самое последнее число x_i в последовательности, приписывает к x_i букву | до тех пор, пока до x_{i+1} не останется интервал в одну пустую ячейку. После этого останавливается, воспринимая число x_i.

Пример: $||||a_0a_0||\overset{\bullet}{|}a_0a_0a_0|| \equiv\rangle ||||a_0a_0||||\underset{\bullet}{|}a_0||$

<u>Машина **L** (передвигающая влево)</u>

Воспринимая некоторое число, передвигает управляющее устройство влево и останавливается, воспринимая соседнее слева число.

Пример: $||||a_0a_0||\overset{\bullet}{|} \equiv\rangle |||\underset{\bullet}{|}a_0a_0|||$

Обобщением машины L является машина L^k, сдвигающая управляющее устройство на k чисел влево.

<u>Машина **R** (передвигающая вправо)</u>

Воспринимая некоторое число, передвигает управляющее устройство вправо и останавливается, воспринимая соседнее справа число.

Пример: $|||\dot{|}a_0a_0||| \equiv\rangle ||||a_0a_0||\underset{\bullet}{|}$

Обобщение машины R – машина R^k, сдвигающая управляющее устройство на k чисел вправо.

Машина **P** (проверяющая)

Воспринимая любую ячейку, передвигает управляющее устройство на одну ячейку влево и останавливается.

Пример: $|||a_0a_0\dot{|} \equiv\rangle |||a_0\underset{\bullet}{a}_0|$

Машина **V** (восстанавливающая)

Воспринимая любую ячейку, передвигает управляющее устройство на одну ячейку вправо и останавливается.

Пример: $|||a_0\dot{a}_0| \equiv\rangle |||a_0a_0\underset{\bullet}{|}$

Машина **U** (уничтожающая)

Воспринимая любое число на ленте уничтожает все числа, расположенные слева до ближайшего неодиночного интервала и останавливается, воспринимая первоначальное число.

Пример: $|||a_0a_0|||a_0||a_0||\dot{|} \equiv\rangle |||a_0a_0a_0a_0a_0a_0a_0a_0a_0||\underset{\bullet}{|}$

Машина **S** (сдвигающая)

Воспринимая не самое левое число, сдвигает его влево к соседнему числу, оставляя между ними одиночный интервал, и останавливается, воспринимая сдвинутое число.

Пример: $|||a_0a_0a_0||\dot{|}a_0|| \equiv\rangle |||a_0||\underset{\bullet}{|}a_0a_0a_0||$

С помощью стандартных машин строятся другие МТ. Считается, что количество машин каждого типа можно использовать неограниченное количество раз.

Машина $\mathbf{T}_m$ (выбирающая), которая, воспринимая последовательность чисел и записанный после нее m-набор ($x_1\_x_2\_...\_x_n\_y_1, y_2, \ldots, y_m$) в начальной конфигурации (то есть воспринимает крайнее слева число – y_m), выбирает первое число из m-набора (y_1), копирует его через одну пустую ячейку справа от y_m и останавливается, воспринимая эти числа ($x_1\_x_2\_...\_x_n\_y_1, y_2, \ldots, y_m, y_1$).

$$T_m = C \circ \dot{L}^m \circ P \begin{cases} |V \circ B \circ R^m \circ \dot{A} \\ a_0 V \circ D \circ R^m \end{cases}$$

Машина $\mathbf{K}_m$ (копирующая), которая, воспринимая m-набор $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в начальной конфигурации, копирует его через две пустые ячейки справа от y_m и останавливается, воспринимая этот набор ($y_1, y_2, \ldots, y_m\ a_0\, a_0\, y_1, y_2, \ldots, y_m$).

$R_m = A \circ T_m{}^m \circ B \circ L^m \circ B \circ R^m$.

Комплект заданий для расчетного задания (для студентов очной формы обучения) или контрольной работы (для студентов заочной формы обучения)

ВАРИАНТ 1

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А достаточно для В, а не В необходимо для С или А, но А не эквивалентно С.

   Известно, что значение А=1. Найти значения В и С, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $\overline{X \& Y \vee Z} \to \overline{X \vee Y} \& Z \vee X \& Y$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A} \vee \overline{C} \to A \& B \& \overline{C}$.
4. На множестве M={0,1,2,3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "x делится на y"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 - y^2 > 4$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y) \& P_2(x,y)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать выполнимость формулы: $\forall x \exists y Q(x,y) \to \exists y \forall x Q(x,y)$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x P(x) \vee (\forall x (P(x) \to Q(x)) \to \forall x Q(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $A \to B, C \to D \mid\!-\; A \vee C \to B \vee D$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула. Затем использовать аксиомы III.1, III.2 и правила ПС, ПЗ.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\mid\!-\; (\overline{C} \to (B \to \overline{A})) \to (B \& \overline{C} \to \overline{A})$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \to A \& B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 2

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А необходимо для В, а В достаточно для С и А, но А не эквивалентно С или В.

   Известно, что значение В=1. Найти значения А и С, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(X \vee Y \to X \& \overline{Z}) \to X \vee (Y \to \overline{Z})$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $(A \leftrightarrow C) \vee A \& B \& \overline{C}$.

4. На множестве M={2,3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "x делится на y"; $P_2(x,y)$ = "x + y делится на 6". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y)\&P_2(x,y)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать выполнимость формулы: $\exists xP(x)\&\exists xQ(x)\leftrightarrow\exists x(P(x)\&Q(x))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x(P(x)\vee Q(x))\to\forall xP(x)\vee\forall xQ(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash A\&B\to B\&A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash ((Y\to\overline{X})\to\overline{\overline{Z}})\to(\overline{X}\&Y\to Z)$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A\to\overline{B})\to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 3

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А при условии, что В или С, а В необходимо для А или не С, но из С следует А и В.

   Известно, что значение С=1. Найти значения А и В, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(X\to Y)\&\overline{X\&Z\to Y\&Z}$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A}\&C\vee\overline{A\to B}\vee C$.
4. На множестве M={-6,-4,-2,2,4,6,8} заданы предикаты A(x) = "x –число, кратное 4"; B(x) = "x - 4 < 0". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x)\vee\overline{B}(x)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать выполнимость формулы: $\forall x\forall y\forall z(Q(x,y)\vee Q(y,z))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x(P(x)\vee Q(x))\leftrightarrow\exists xP(x)\vee\exists xQ(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash A\to A\&A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать правило перестановки посылок (ППП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A\vee\overline{B}\to A\&\overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 4

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   > Если А то не В, а В достаточно для С или А, но А не эквивалентно не С.

   Известно, что значение А=0. Найти значения В и С, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(A\&C \to \overline{B}\&C) \to (A \to \overline{B})$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A} \vee C \to (B \to C)$.
4. На множестве M={1,3,5,7,9} заданы предикаты A(x) = "x > 5"; B(x) = "x – положительное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $\overline{A}(x) \to B(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать выполнимость формулы: $\exists x \forall y (Q(x,y) \to \forall z R(x,y,z))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x (P(x) \& Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\overline{X} \to Y, \overline{Y} \mid\!- X$.
8. Доказать правило силлогизма (ПС) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $B \to \overline{A} \& B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 5

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   > А тогда, когда В, а В только тогда, когда А или С, но А не достаточно для С или не В.

   Известно, что значение В=0. Найти значения А и С, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(\overline{A}\&C \to A \vee B) \to \overline{B}\&C$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $A\&C \vee (A \to B)\&\overline{C}$.
4. На множестве M={5,6,12,13,14,16,17} заданы предикаты A(x) = "x – составное число"; B(x) = "x делится на 5". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \to \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать общезначимость формулы: $\exists x R(x,x) \to \exists x \exists y R(x,y)$.

6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x(P(x) \to Q(x)) \to (\exists xP(x) \to \exists xQ(x))$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash \overline{A} \to \overline{B \& A}$.
   Указания: сначала следует записать аксиому IV.1 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать правило соединения посылок (ПСП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \to (A \to \overline{B})$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 6

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А при условии, что В, а В влечет С и не А, но А не эквивалентно С или В.

   Известно, что значение С=0. Найти значения А и В, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(X \& Y \& Z \to X \& Z) \to \overline{X \to Y} \vee Z$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A \to C} \vee A \& \overline{C} \& B$.
4. На множестве М={10,11,12,13,14,15} заданы предикаты А(х) = "х – простое число"; В(х) = "х – делитель числа 60". Найти множества истинности предикатов А(х), В(х) и $A(x) \leftrightarrow \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать выполнимость формулы: $\forall x \exists y(Q(x,y) \& \overline{Q}(x,x))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x(A(x) \to B(x)) \to \exists xA(x) \& \exists xB(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\overline{A} \to \overline{B}, B \vdash A$.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash (X \to Y) \to (X \& Z \to \overline{\overline{Z}} \& Y)$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to (A \to B)$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 7

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А необходимо для В, а В тогда, когда не С и А, но А не эквивалентно С и В.

   Известно, что значение А=1 и В=1. Найти значения С, при которых полученная форма примет значение 1.

2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $\overline{Q \to R} \to (P \vee Q \to P \& R)$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A} \vee (C \vee A \& B \to C)$.
4. На множестве M={1,2,3,4,5,6,7} заданы предикаты A(x) = "x – нечетное число "; B(x) = "x – простое число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \vee \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать общезначимость формулы: $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\forall x \overline{P}(x) \vee \forall y Q(y))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x (A(x) \to B(x)) \to \exists x C(x) \vee \forall x B(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \to A \& B$.
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash (\overline{C} \to (A \to B)) \to (A \& C \to \overline{B})$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $\overline{A} \to B \& C$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 8

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   А тогда, когда В и С, а В при условии, что С, но из С не следует А и В.

   Известно, что значение А=1 и С=1. Найти значения В, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(A \to B \& C) \& \overline{B \vee C \to A}$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $A \vee \overline{B} \to B \& C$.
4. На множестве M={-5,-4,-3,-2,-1 } заданы предикаты A(x) = "x – отрицательное число"; B(x) = "x – четное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \to \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать общезначимость формулы: $(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\exists x \overline{P}(x) \vee \forall y Q(y))$.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x A(x) \vee \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\overline{X} \vdash X \to Y$.
8. Доказать правило введения конъюнкции (ВК) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).

Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась формула $A \to A \& B$.

9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 9

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

> А необходимо для не В, а В достаточно для С, но А не эквивалентно С или В.

Известно, что значение А=1 и В=0. Найти значения С, при которых полученная форма примет значение 1.

2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(A \to (\overline{B} \to C)) \to (\overline{A \& C} \to \overline{A} \vee B)$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $(A \leftrightarrow C) \vee (A \to B)$.
4. На множестве M={0,1,2,3,4,5,6} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "$x > y + 3$"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 + y^2 > 35$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y) \vee P_2(x,y)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \leftrightarrow (\exists x (P(x) \to Q(x)))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x B(x) \vee \exists x C(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash A \to A \& (B \vee A)$.

   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash (A \& B \to \overline{C}) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to A) \to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 10

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

> А необходимо для В, а В только тогда, когда С или не А, но А не достаточно для С.

Известно, что значение А=1 и С=0. Найти значения В, при которых полученная форма примет значение 1.

2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $\overline{A \& (B \vee C)} \to \overline{A} \& B \vee \overline{C}$.

3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $A \vee C \vee \overline{A \to B} \& C$.
4. На множестве M={-2,-3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "$x + y \le 0$"; $P_2(x,y)$ = "$x + y > 10$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y)\&P_2(x,y)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \to Q(x)))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \to \forall x A(x) \& \forall x C(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $A \to B, C \to D \vdash A \& C \to B \& D$.
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула. Затем использовать аксиомы II.1, II.2 и правила ПС, ПЗ.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash (A \& C \to B \& C) \to (A \to (\overline{C} \to B))$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 11

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

А необходимо для В, а В достаточно для не С и А, но А не эквивалентно С и В.

   Известно, что значение A=0 и B=1. Найти значения C, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(A \to B) \to (B \& \overline{C} \vee (A \to C))$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $A \& C \vee (A \vee B \to \overline{C})$.
4. На множестве M={0,1,2,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "$4x = y$"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 + y^2 < 5$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to C(x))$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash B \vee B \to B$.

Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.

8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash (A \& D \to B) \to (D \& \overline{A} \to B \vee C)$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(\overline{A} \to B) \to B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 12

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   > А необходимо для В, а В не достаточно для С и А, но А не эквивалентно С.

   Известно, что значение А=0 и С=1. Найти значения В, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(\overline{A \to B} \vee (C \to \overline{A})) \to \overline{\overline{B} \& C}$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A} \& (B \leftrightarrow C)$.
4. На множестве М={1,2,3,4,5,6,7,8} заданы предикаты А(x) = "x – положительное число"; В(x) = "x – число, кратное 4". Найти множества истинности предикатов А(x), В(x) и В(x)→А(x).
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $\exists x \forall y (R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee \forall x R(x) \to \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $A \to B, \overline{C} \to \overline{B}, A \vdash \overline{A} \vee C$.
8. Доказать правило разъединения посылок (ПРП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась формула $A \to A \& B$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $\overline{B \vee C}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 13

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   > А достаточно для В или С, а В необходимо для А и С, но из С следует А или не В.

   Известно, что значение А=0 и В=0. Найти значения С, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $\overline{A \& B \to C} \vee (A \to (B \to C))$.

3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $\overline{A} \to C \vee A \& B \& \overline{C}$.
4. На множестве M={2,4,6,8} заданы предикаты A(x) = "x – нечетное число"; B(x) = "x – простое число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)→B(x).
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $\forall x \exists y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)) \vee \exists x R(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash A \vee B \to B \vee A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $B \to \overline{C} \vdash ((A \to \overline{C}) \to C) \to ((A \to B) \to C)$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(\overline{A} \to \overline{A}) \to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 14

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   Если A, то B или C, а не B достаточно для C, но A не эквивалентно C.

   Известно, что значение A=0 и C=0. Найти значения B, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $\overline{B \to A \vee C} \to (\overline{A \vee B} \& C \to A \& C)$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $(A \leftrightarrow C) \vee (A \to B)$.
4. На множестве M={2,3,5,10,25} заданы предикаты A(x) = "x – число, кратное 5"; B(x) = "x – четное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)↔B(x).
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(x,y)$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \& \forall x R(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\vdash A \vee A \& \overline{B} \to A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\vdash ((C \to A \vee B) \to D) \to (C \& (B \vee A) \to D)$.

9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to (B \to A)$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 15

1. Записать приведенное высказывание в виде пропозициональной формы.

   А только тогда, когда В, а В необходимо для С или А, но не А не достаточно для С.

   Известно, что значение В=1 и С=1. Найти значения А, при которых полученная форма примет значение 1.
2. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая): $(\overline{A \& \overline{B}} \to C) \to A \& B \vee \overline{\overline{B}} \& C$.
3. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности: $(A \leftrightarrow B) \& (C \to A)$.
4. На множестве M={-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5} заданы предикаты A(x) = "x – положительное число"; B(x) = "x – делится на 6". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)&B(x).

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
5. Доказать, что формула $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \to \exists x (P(x) \& Q(x))$ не общезначимая.
6. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x A(x) \& \forall x B(x) \to \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
7. Доказать с помощью построения формального вывода: $\overline{A} \to \overline{B}, B \mid\!- A$.
8. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода: $\mid\!- (X \to Y) \to (X \& Z \to \overline{\overline{Z}} \& Y)$.
9. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to (A \to B)$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ПРАВИЛА ОФОРМЛЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Отчет должен содержать следующие страницы: титульный лист с указанием варианта, формулировку заданий по вашему варианту, решение задач с пояснениями по ходу выполнения.

Отчет выполняется на листах формата А4 средствами текстового процессора **OpenOffice.org Writer** или любого другого офисного приложения подобного класса**.** Для оформления текста, кроме случаев со специальным форматированием, необходимо использовать следующие параметры форматирования:

- Поля документа: левое – 3 см, правое – 1,5 см, верхнее и нижнее по 2 см.
- Текст: шрифт Times New Roman, размер 14, выравнивание по ширине, отступ первой строки на 1,25 см, межстрочный интервал полуторный.
- Заголовки: шрифт Times New Roman, размер 14, начертание полужирное, буквы все прописные, выравнивание по центру, интервал после – 0.5 см.

Список использованной литературы

1. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / сост. А.Н. Макоха, А.В. Шапошников, В.В. Бережной ; Министерство образования РФ и др. – Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2017. – 418 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467015 (дата обращения: 19.01.2019). – Библиогр. в кн. – Текст : электронный.

2. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 268 с. — ISBN 978-5-8114-3053-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/107935 (дата обращения: 19.01.2019). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

3. Матросов, В.Л. Математическая логика: учебник для бакалавриата : [16+] / В.Л. Матросов, М.С. Мирзоев. – Москва : Прометей, 2020. – 229 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=576107 (дата обращения: 19.01.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-907244-03-0. – Текст : электронный.

4. Перемитина, Т.О. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / Т.О. Перемитина ; Томский Государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР). – Томск : ТУСУР, 2016. – 132 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=480886 (дата обращения: 19.01.2020). – Библиогр.: с. 130. – Текст : электронный.

5. Судоплатов, С.В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник : [16+] / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова. – 3-е изд. – Новосибирск : Новосибирский государственный технический университет, 2012. – 254 с. – (Учебники НГТУ). – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=135676 (дата обращения: 19.01.2019). – ISBN 978-5-7782-1838-3. – Текст : электронный.

6. Лихтарников, Л. М. Математическая логика. Курс лекций. Задачник-практикум и решения : учебное пособие / Л. М. Лихтарников, Т. Г. Сукачева. — 4-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2009. — 288 с. — ISBN 978-5-8114-0082-9. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/231 (дата обращения: 19.01.2020). — Режим доступа: для авториз. пользователей.