Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Л.А. Попова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Методические рекомендации по выполнению расчетной работы
для студентов всех форм обучения направления 09.03.01
«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2021

УДК 681.3.06

Попова Л.А. Математическая логика: методические рекомендации по выполнению расчетной работы для студентов направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 43 с.

Содержат краткий теоретический материал. Приведены примеры решения задач по изложенному материалу. Прилагаются задания для выполнения расчетной работы по дисциплине «Математическая логика и теория алгоритмов».

Методические рекомендации предназначены для организации самостоятельной работы студентов 3-го курса очной и заочной форм обучения направления 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника».

Рассмотрены и одобрены на заседании кафедры прикладной математики Рубцовского индустриального института.
Протокол № 5 от 20.12.2021 г.

Рецензент: зав. кафедрой «Электроэнергетика» РИИ С.А. Гончаров

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Методические рекомендации написаны в соответствии с программой дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов» для студентов третьего курса очной и заочной форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника», предназначены для самостоятельной работы по данному курсу.

Рекомендации содержат краткий теоретический материал по темам лекционных занятий, примеры решения задач, задания для выполнения расчетной работы по данной дисциплине.

Изложенный материал должен способствовать закреплению знаний и практических умений, полученных на аудиторных занятиях.

1. ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Высказывание – это повествовательное предложение, о котором можно сказать истинно оно или ложно (однозначно определить его *истинностное* значение применительно к конкретной ситуации).

Все высказывания рассматриваются с точки зрения их логического (или истинностного) значения. Считается, что каждое высказывание либо истинно (1), либо ложно (0). Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным, а также НЕ истинным и НЕ ложным.

Существуют два способа установления истинности высказываний: *эмпирический* и *логический*. Первый способ основан на опыте и осуществляется с помощью проверяющих действий, документов, свидетелей. Логический способ основан на истинности других высказываний, он реализуется без обращения к фактам, к содержанию этих высказываний, а чисто формально.

Высказывания могут быть *простыми* и *составными*.

Простые высказывания будем обозначать латинскими буквами A, B, C, … или этими же буквами с нижними индексами A_1, A_2, …. Они называются логические переменные или пропозициональные буквы («*пропозиция*» (от латинского слова propositio) – предложение).

Высказывания, включающие в себя другие высказывания, соединенные различными логическими операциями (связками), называются составными (или сложными). Основные операции, которые изучаются в математической логике (с учетом их приоритета):

- ✓ отрицание ($\neg$),
- ✓ конъюнкция (&),
- ✓ дизъюнкция ($\vee$),
- ✓ импликация ($\rightarrow$),
- ✓ эквивалентность ($\leftrightarrow$).

Тавтологией (тождественно истинной или общезначимой формулой) называется формула логики высказываний, которая принимает значение ИСТИНА (1) при любом наборе истинностных значений логических переменных, входящих в нее.

Таблица истинности тавтологии имеет результирующий столбец, состоящий только из 1. Примером тавтологии является формула ($A \vee \bar{A}$).

Противоречием (тождественно ложной формулой) называется формула логики высказываний, принимающая значение ЛОЖЬ (0) при любом наборе истинностных значений логических переменных, входящих в нее.

Таблица истинности противоречия имеет результирующий столбец, состоящий только из 0. Примером противоречия является формула ($A \& \bar{A}$).

Выполнимой называется формула, которая не является противоречием.

2. ЗАКОНЫ ЛОГИКИ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

1) Закон тождества: $A \equiv A$
2) Законы повторения: $A \& A \equiv A$;
$$A \vee A \equiv A$$
3) Закон противоречия: $A \& \overline{A} \equiv 0$
4) Закон исключения третьего: $A \vee \overline{A} \equiv 1$
5) Коммутативный закон: $A \& B \equiv B \& A$;
$$A \vee B \equiv B \vee A$$
6) Ассоциативный закон: $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$;
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$
7) Дистрибутивный закон: $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ (первый);
$$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C) \text{ (второй)}$$
8) Закон двойного отрицания: $\overline{\overline{A}} \equiv A$
9) Закон контрапозиции: $A \to B \equiv \overline{B} \to \overline{A}$
10) Закон исключения эквивалентности: $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \& (B \to A)$
11) Закон исключения импликации: $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$
12) Закон отрицания импликации: $\overline{A \to B} \equiv A \& \overline{B}$
13) Законы де Моргана: $\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \& \overline{B}$;
$$\overline{A \& B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$$
14) Законы поглощения: $A \vee (A \& B) \equiv A$; $A \& (A \vee B) \equiv A$
15) Законы исключения констант: $A \vee 1 \equiv 1$; $A \vee 0 \equiv A$;
$$A \& 1 \equiv A; \; A \& 0 \equiv 0$$
16) Законы склеивания: $(A \& B) \vee (\overline{A} \& B) \equiv B$;
$$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee B) \equiv B$$

Первые три закона (тождества, противоречия и исключения третьего) являются наиболее общими законами формальной логики.

В математических доказательствах часто приходится опровергать некоторые положения, рассуждать "от противного". Поэтому важными являются законы, связанные с логическим отрицанием: двойного отрицания, законы де Моргана, закон контрапозиции и отрицания импликации.

3. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Логические операции (связки) & и $\vee$ называются двойственными.

Формулу логики высказываний называют ***регулярной***, если она содержит только & и $\vee$, а отрицания (если есть) относятся только к логическим переменным.

Элементарной суммой (***элементарным произведением***) называют дизъюнкцию (конъюнкцию) переменных либо их отрицаний.

Одна логическая переменная является как элементарной суммой, так и элементарным произведением. Элементарную сумму часто называют ***дизъюнктом***, а слагаемые этой суммы называются ***литерами*** (литералами).

Примеры элементарных сумм: A, $A\vee B$, $A\vee B\vee\neg A\vee C$.

Примеры элементарных произведений: $\neg A$, $A\&B$, $\neg A\&C\&A\&B$.

Теорема 3.1. Чтобы элементарная сумма была тавтологией (общезначимой формулой), необходимо и достаточно, чтобы в ней содержалась хотя бы одна пара слагаемых, из которых одно есть некоторая логическая переменная, а другое – отрицание этой переменной.

Теорема 3.2. Для того чтобы элементарное произведение было противоречием, необходимо и достаточно, чтобы в нем содержалась хотя бы одна пара множителей (логических переменных), из которых один множитель является отрицанием другого.

Формула называется ***конъюнктивной нормальной формой*** (КНФ), если она представляет собой конъюнкцию элементарных сумм.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция элементарных произведений.

Одно элементарное произведение является КНФ, и оно же будет являться ДНФ. Примеры КНФ: $A\&\neg B$, $A\&(B\vee C)$, $\neg A\&(A\vee C)\&(A\vee B\vee C)$;

ДНФ: $A\vee\neg B$, $A\vee B\&C$, $\neg A\vee A\&C\vee A\&B\&C$.

Теорема 3.3. Для каждой формулы существует равносильная ей КНФ (не единственная).

Теорема 3.4. Для каждой формулы существует равносильная ей ДНФ (не единственная).

Правила нахождения КНФ и ДНФ, равносильных заданной формуле. Пусть задана формула А:

1) исключить из А все связки, кроме $\neg$, &, $\vee$;

2) добиться, чтобы отрицание относилось только к отдельным переменным (с помощью законов де Моргана);

3) если раскрыть скобки по второму дистрибутивному закону, то получится КНФ;

если раскрыть скобки по первому дистрибутивному закону, то получится ДНФ.

Пример 3.1. Пусть задана формула $\neg(A \leftrightarrow B) \& C$. Исключим эквивалентность ($\leftrightarrow$), затем импликацию ($\rightarrow$):

$$\neg(A \leftrightarrow B)\&C \equiv \neg((A \rightarrow B)\&(B \rightarrow A))\&C \equiv \neg((\neg A \vee B)\&(\neg B \vee A))\&C.$$

Теперь добьемся, чтобы отрицание относилось только к отдельным переменным: $(A\&\neg B \vee B\&\neg A)\&C$.

Раскрыв скобки, получим $(A\&\neg B\&C) \vee (B\&\neg A\&C)$. Последняя формула и есть ДНФ, которая, очевидно, что равносильна следующей ДНФ: $(A\&\neg B\&C) \vee (\neg A\&B\&C) \vee (A\&\neg A)$. Из примера видно, что ДНФ, равносильная заданной формуле, определяется не единственным образом.

4. СОВЕРШЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Совершенной ***конъюнктивной*** нормальной формой (СКНФ) формулы $A(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ называется ее КНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

– нет одинаковых множителей;

– в каждый множитель входят все логические переменные из формулы A один и только один раз (и только они) с отрицанием, либо без отрицания.

СКНФ для формулы можно построить по ее таблице истинности. Для этого выбираем строки, где A=0. Для каждой строки, где A=0, строим элементарную сумму (*конституенту нуля*) K^0 следующим образом. Если в выбранной строке логическая переменная A_j принимает значение 1, то в K^0 она входит с отрицанием, если A_j=0, то A_j входит в K^0 без отрицания. Конъюнкция построенных конституент нуля и будет СКНФ.

Совершенной ***дизъюнктивной*** нормальной формой (СДНФ) формулы $A(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ называется ее ДНФ, удовлетворяющая следующим условиям:

– нет одинаковых слагаемых;

– в каждое слагаемое входят все логические переменные $A_1, A_2, \ldots, A_n$ один и только один раз (и только они) с отрицанием либо без отрицания.

Как правило, в каждой элементарной сумме или в элементарном произведении все логические переменные должны быть записаны в лексикографическом порядке.

СДНФ для A можно построить по таблице истинности этой формулы. Для этого выбираем строки, где A=1; пусть это будут строки $K_1, K_2, \ldots, K_m$.

Для каждой выбранной строки K_i ($1 \le i \le m$) строим элементарное произведение (*конституенту единицы*) K^1 следующим образом. Если в выбранной строке K_i логическая переменная A_j принимает значение 1, то в K_i она входит без отрицания, если же A_j =0, то в K_i она входит с отрицанием.

Дизъюнкция построенных произведений и будет СДНФ

Пример 4.1. Пусть формула X(A,B,C) принимает значение ложь тогда и только тогда, когда один и только один из аргументов принимает значение ЛОЖЬ (0). Найти СДНФ и СКНФ для X(A,B,C).

Решение. Составим таблицу истинности.

A	B	C	X(A,B,C)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Рассмотрим пример на построение СКНФ для пропозициональной формы, рассмотренной выше. Выберем строки, где А принимает значение 0, т.е. строки с номерами: 4, 6 и 7. Для четвертой строки элементарная сумма (конституента нуля) представляется в виде $A\vee\neg B\vee\neg C$; для шестой строки в виде: $\neg A\vee B\vee\neg C$, а для седьмой – $\neg A\vee\neg B\vee C$. В результате получим СКНФ:

$(A\vee\neg B\vee\neg C)\&(\neg A\vee B\vee\neg C)\&(\neg A\vee\neg B\vee C)$.

Выберем строки, где А принимает значение 1, т.е. строки с номерами: 1, 2, 3, 5 и 8. Для первой строки элементарное произведение представляется в виде конъюнкции $\neg A\&\neg B\&\neg C$, для второй – $\neg A\&\neg B\&C$. Построив таким образом элементарные произведения для всех остальных строк, соединим их знаками дизъюнкции и получим СДНФ:

$(\neg A\&\neg B\&\neg C)\vee(\neg A\&\neg B\&C)\vee(\neg A\&B\&\neg C)\vee(A\&\neg B\&\neg C)\vee(A\&B\&C)$.

Второй метод нахождения СКНФ или СДНФ – метод равносильных преобразований, который состоит в следующем.

Правила построения СКНФ.

Для заданной формулы А находим КНФ, которая имеет вид $K_1\&K_2\&\ldots\&K_m$ ($m\geq1$), где K_i ($1\leq i\leq m$) – элементарная сумма.

Построенная КНФ может удовлетворять требуемым условиям, тогда это СКНФ.

Иначе выполняют следующие преобразования.

Если в K_i входит логическая переменная вместе с ее отрицанием, то K_i – тавтология и из КНФ множитель K_i можно исключить. Если при такой процедуре нужно отбросить все множители из КНФ, то А – тавтология и СКНФ не существует.

Если некоторый множитель КНФ, например, K_i, не содержит переменную A_j, то вводят ее согласно равносильности: $(K_i\vee A_j)\&(K_i\vee\neg A_j)$.

Таким образом, добиваются, чтобы каждый множитель КНФ содержал все логические переменные исходной формулы А.

Если в некотором множителе окажутся одинаковые слагаемые, то оставляем только одно из них. Если в полученной форме окажутся одинаковые множители, то оставляем только один из них. В результате получим СКНФ.

Правила построения СДНФ.

Для заданной формулы A находим ДНФ (которая всегда существует) Пусть ДНФ равна: $D_1 \vee D_2 \vee \ldots \vee D_m$ (m≥1), где D_i ($1 \le i \le m$) – элементарное произведение.

Построенная ДНФ может удовлетворять требуемым условиям, тогда это СДНФ.

Если в D_i входит некоторая логическая переменная вместе с ее отрицанием, то D_i – противоречие и из ДНФ D_i можно исключить. Если при такой процедуре нужно отбросить все слагаемые из ДНФ, то A – противоречие и СДНФ не существует.

Если в некоторое D_i не входит одна из логических переменных A_j исходной формулы A, то заменяем D_i на равносильную: $(D_i \& A_j) \vee (D_i \& \neg A_j)$.

Таким образом, добиваемся, чтобы каждое слагаемое содержало все логические переменные формулы A.

Если в полученной форме окажутся одинаковые слагаемые, то оставляем только одно из них. В результате получим СДНФ.

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДИКАТА

Логика предикатов представляет собой развитие логики высказываний. Но в логике предикатов производится более детальный анализ предложений.

Предикатом называется предложение, имеющее грамматическую форму высказывания, но содержащее переменные, заданные на некоторых множествах.

Например, предложение "8 – четное число" является высказыванием. Заменим "8" на "x", тогда предложение "x – четное число", где x принадлежит множеству натуральных чисел, не является высказыванием, так как нельзя определить истинно оно или ложно. Подставляя вместо x конкретные значения, будем получать высказывания. Предложение "x – четное число" является примером предиката.

Введем обозначения: предикат A(x)="x – четное число" задан на множестве натуральных чисел N; $a_1 \in N$, $a_2 \in N$. Тогда $A(a_1)$ и $A(a_2)$ – высказывания, которые имеют значения истина (1) или ложь (0). Например, если $a_1=3$, $a_2=8$, тогда $A(a_1)$ будет обозначать "3 – четное число", $A(a_2)$=A(8)="8 – четное число". Истинностные значения: A(3)=0 и A(8)=1.

Пример 5.1. Предикат B(x)="x – простое число" задан на множестве M={1,2,3,4,5,6}. Составить для него таблицу истинности.

x	B(x)	
	высказывание	значение
1	"1 – простое число"	0
2	"2 – простое число"	1
3	"3 – простое число"	1
4	"4 – простое число"	0
5	"5 – простое число"	1
6	"6 – простое число"	0

В отличие от логики высказываний, значения 0 и 1 ставятся в соответствие определенным элементам или группам элементов.

При подстановке значений переменных в предикат получаем высказывания, которые истинны (1), либо ложны (0). Следовательно, A(x) порождает функцию, область определения которой есть множество M, а область значений – множество {0, 1}.

Областью определения предиката называется множество всех тех объектов, которые можно подставить вместо переменных, чтобы получить высказывание. Область определения может быть задана явно либо неявно. В тех случаях, когда специально не оговаривается, что является областью определения, то имеется в виду наиболее широкое множество объектов, которые можно подставлять вместо переменных.

Выражение $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, содержащее переменные $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, …, $x_n \in M_n$, называется n-местным предикатом, определенным на множествах M_1, M_2, …, M_n.

При замене переменных константами из соответствующих множеств предикат $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ превращается в высказывание, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Предикатные символы с указанием местности предикатов обозначаются: $P^{(2)}$, $Q^{(3)}$ и т.д.

Предикаты можно обозначать двумя способами:

1) $P^{(1)}$, $Q^{(2)}$, $R^{(3)}$ (если не важно как обозначены переменные, входящие в предикат);
2) P(x), Q(x,y), R(x,y,z).

Высказывание тоже является предикатом размерности 0 (нульместным предикатом $P^{(0)}$).

Множество истинности предиката $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – это подмножество его области определения $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$, на котором этот предикат принимает значение 1: $M_x(A^{(n)}) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1\}$.

Примечания:

M_x – условное обозначение множества истинности (не зависит от количества и обозначения переменных, входящих в предикат, и от обозначения области определения предиката);

"=1" в определении множества истинности можно опускать;

для одноместного предиката $^{(1)}$ можно опускать.

Для рассмотренного в примере 1 предиката множество истинности $M_x(A) = \{x \mid A(x)\} = \{2,3,5\}$.

Пример 5.2. Найти множество истинности предиката B(x,y) = "x>y", заданного на M={1,2,3,4}.

$M_{(x)}(B^{(2)}) = \{(x,y) \mid x>y\} = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$.

Каждому n-местному предикату $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенному на множествах M_1, M_2, …, M_n соответствует n-отношение R, являющееся подмножеством декартова произведения $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ и равное множеству истинности этого предиката

$R = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$.

Пусть предикат P(x) задан на множестве M.

P(x) называется тождественно истинным, если он принимает значение 1 при всех $x \in M$.

P(x) называется тождественно ложным, если он принимает значение 0 при всех $x \in M$.

P(x) называется выполнимым, если найдется хотя бы одно значение $x_0 \in M$, такое что $P(x_0)=1$.

6. КВАНТОРЫ

Пусть на множестве натуральных числе (N) задан одноместный предикат, зависящий от x, например, P(x)="x – простое число". Рассмотрим предложения "Всякое натуральное число является простым" и "Существуют натуральные числа, которые являются простыми". О них можно сказать истинные они или ложные, т.е. полученные на основе квантора P(x) предложения являются *высказываниями*. Первое из них ложное, а второе истинное.

Пусть A(x) – одноместный предикат, определенный на множестве M. Если предикат A(x) тождественно истинный на множестве M, то получаем *универсальное высказывание* "для каждого элемента $x \in M$ предикат A(x) принимает значение истина (1)". Это высказывание обозначают $\forall x\ A(x)$.

Символ $\forall$ называется *квантором всеобщности* (общности).

$\forall x$ читают: "для всех x" или "для каждого x" или "для любого x". Множество, на котором задан x, можно называть или опускать (в этом случает область определения предиката представляет собой наиболее широкое множество объектов, которые можно подставлять вместо переменной x).

Например, на множестве действительных чисел (R) $\forall x(x=x)$ – истинное высказывание, а $\forall x(x>2)$ – ложное высказывание.

Если A(x) – одноместный предикат, определенный на конечном множестве $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, то $\forall x A(x) \equiv A(a_1)\ \&\ A(a_2)\ \&\ ...\ \&\ A(a_m)$.

Таким образом, квантор всеобщности заменяет конъюнкцию по квантифицируемой переменной.

Экзистенциальным высказыванием (от лат. existentia – существование), соответствующим предикату A(x), называется высказывание "существует элемент $x \in M$, при котором предикат A(x) принимает значение истина (1)". Это высказывание обозначают $\exists x\ A(x)$, и считается истинным, если предикат A(x) выполнимый, и ложным – в противном случае (если предикат A(x) – тождественно ложный).

Символ $\exists$ называют квантором *существования*, а выражение $\exists x$, в котором этот квантор предшествует переменной x, читают: "существует x такой, что ..." или "для некоторого x, ...".

Например, $\exists x(x>2)$ – истинное высказывание, а $\exists x(x=x+1)$ – ложное высказывание.

Для предиката A(x), заданного на конечном множестве:

$\exists xA(x) \equiv A(a_1) \vee A(a_2) \vee ... \vee A(a_m)$.

Таким образом, квантор существования можно понимать как применение дизъюнкции по квантифицируемой переменной.

Пусть предикат P(x) задан на множестве M, тогда:

$\forall xP(x)=1$, если P(x) – тождественно истинный (множество истинности совпадает с областью определения);

$\forall xP(x)=0$, если P(x) – не тождественно истинный (множество истинности не совпадает с областью определения);

$\exists xP(x)=1$, если P(x) – выполнимый (множество истинности не пустое);

$\exists xP(x)=0$, если P(x) – тождественно ложный (множество истинности пустое).

Таким образом,

1) если $\forall xP(x)=1$, то $\exists xP(x)=1$;

2) если $\exists xP(x)=0$, то $\forall xP(x)=0$;

3) если $\exists xP(x)=1$, то нельзя утверждать, что $\forall xP(x)=1$ или $\forall xP(x)=0$;

4) если $\forall xP(x)=0$, то нельзя утверждать, что $\exists xP(x)=0$ или $\exists xP(x)=1$.

Поэтому $\forall xP(x) \Rightarrow \exists xP(x)$

7. ФОРМУЛЫ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Логика предикатов изучает свойства некоторых конструкций, называемых формулами.

Элементарные формулы имеют вид: $P^{(2)}(x, y)$, $Q^{(3)}(x, y, z)$, где число переменных соответствует местности предикатного символа (верхний индекс можно опускать). Из элементарных получаются сложные формулы с помощью логических операций и кванторов.

Индуктивное определение формулы:

1° всякая элементарная формула есть формула;

2° если $P(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, где $1 \le i \le n$, – формула, x_i – свободная переменная, то $\forall x_i P(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ и $\exists x_i P(x_1, ..., x_i, ..., x_n)$ – формулы;

3° если A и B – формулы, причем при их соединении не происходит коллизии переменных, то каждое из выражений $(\neg A)$, $(A \& B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$ – есть формула;

4° других формул нет.

На практике некоторые скобки подразумеваются, но не пишутся, например, можно опускать внешние скобки.

8. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Интерпретацией формулы логики предикатов называется конкретизация множеств, из которых переменные принимают значения, конкретизация отношений и соответствующих множеств истинности для каждого предикатного символа.

В дальнейшем будем считать, что все используемые в данный момент предикатные символы, могут быть собраны вместе и образуют некоторую совокупность $\sigma=\langle P_1^{(m1)}, P_2^{(m2)}, \ldots, P_k^{(mk)}\rangle$, называемую *сигнатурой*. При этом формулы, построенные с помощью предикатных символов только данной сигнатуры, называются *формулами сигнатуры* σ.

На некотором множестве M предикатным символам данной сигнатуры можно придать определенный смысл, рассматривая их как конкретные отношения соответствующей местности на данном множестве.

При этом говорят, что для предикатных символов сигнатуры σ задана интерпретация на множестве M.

Рассмотрим смысл сказанного на примере.

Пример 8.1. Пусть дана сигнатура $\sigma=\langle P_1^{(2)}, P_2^{(1)}, P_3^{(2)}, P_4^{(3)}\rangle$. Формулами этой сигнатуры, в частности, будут:

$P_1(x, y)$ (1); $P_2(x)$ (2); $P_3(u, v)$ (3); $P_4(x, y, z)$ (4);
$\forall x P_2(x) \& \exists z P_1(z, t) \vee P_3(u, t)$ (5);
$\exists y \forall x(P_4(x, y, z) \to P_2(x) \& P_2(y))$ (6).

На множестве $\boldsymbol{N}$ придадим предикатным символам сигнатуры σ следующий смысл: $P_1^{(2)} \mapsto$ "меньше", $P_2^{(1)} \mapsto$ "быть простым числом", $P_3^{(2)} \mapsto$ "делиться нацело", $P_4^{(3)} \mapsto$ "сумма двух чисел равна третьему числу".

Совокупность всех заданных отношений можно обозначить буквой ∑: ∑={"меньше", "быть простым числом", "делиться нацело", "сумма двух чисел равна третьему числу"}.

Для того чтобы придать предикатным символам конкретный смысл, должны быть заданы:

I. *Алгебраическая система*, которая записывается в виде $\langle \boldsymbol{N}, \sum\rangle$.

II. *Интерпретирующее соответствие* (обозначим его λ), сопоставляющее каждому предикатному символу сигнатуры σ определенное отношение той же местности из алгебраической системы.

Алгебраическая система $\langle \boldsymbol{N}, \sum\rangle$ вместе с соответствием λ составляет интерпретацию символов сигнатуры σ, которая обозначается $J=\{\langle \boldsymbol{N}, \sum\rangle, \lambda\}$.

В предыдущем примере для предикатных символов сигнатуры σ была задана интерпретация J={⟨***N***, {"меньше", "быть простым числом", "делиться нацело", "сумма двух чисел равна третьему числу"}⟩, λ}, где λ: $P_1^{(2)} \mapsto$ "меньше", $P_2^{(1)} \mapsto$ "быть простым числом", $P_3^{(2)} \mapsto$ "делиться нацело", $P_4^{(3)} \mapsto$ "сумма двух чисел равна третьему числу".

В этой интерпретации формулы из примера 8.1 принимают вид (соответственно): "$x<y$" (1), "x – простое число" (2), "u делится нацело на v" (3), "$x+y=z$" (4);

∀x(x – простое число) & ∃z(z<t) ∨ (u делится нацело на t) (5):

∃y∀x((x+y=z) → (x – простое число) & (y – простое число)) (6).

Ясно, что одна и та же сигнатура имеет более одной интерпретации. В первую очередь, интерпретация зависит от выбранного множества и заданных на нем отношений (от алгебраической системы). Вместе с тем, при задании интерпретации важную роль играет и соответствие λ, которое придает абстрактным предикатным символам конкретный смысл, соотнося их с определенными отношениями, заданными на определенном (конкретном!) множестве.

Интерпретацией символов сигнатуры $\sigma=\langle P_1^{(m1)}, P_2^{(m2)}, \ldots, P_k^{(mk)}\rangle$ называется совокупность $J=\{\langle M, \sum\rangle, \lambda\}$, где $\langle M, \sum\rangle$ – алгебраическая система; λ – соответствие, сопоставляющее каждому предикатному символу сигнатуры σ отношение той же местности из алгебраической системы, причем различным предикатным символам соответствуют различные отношения.

9. ОСНОВНЫЕ ВИДЫ ФОРМУЛ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

Известно, что предложения, содержащие свободные (то есть не связанные кванторами) переменные, и предложения, не содержащие свободных переменных, имеют различный характер. Всякое предложение первого типа представляет собой предикат, зависящий от свободных переменных; предложение второго типа – это определенное высказывание, истинность которого не зависит ни от каких переменных. В связи с этим, выделяют два типа формул логики предикатов.

I. *Формулы со свободными переменными*.

Формулу, имеющую свободные переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ и не имеющую других свободных переменных, обозначают $A(x_1, x_2, ..., x_n)$. Во всякой интерпретации $J=\{\langle M, \sum\rangle, \lambda\}$ такая формула представляет собой n-местный предикат, принимающий значения 0 или 1 в зависимости от набора значений свободных переменных.

II. *Формулы без свободных переменных*.

Формулы, не содержащие свободных переменных, называются *замкнутыми* (т.е. в формуле либо все ее переменные связанные, либо переменных нет совсем). Замкнутые формулы обозначаются буквами A, B, C. В любой интерпретации замкнутая формула является высказыванием, которое имеет определенное значение (0 или 1).

Например, формула $\forall x(\forall y A_1(x,y)\rightarrow A_2(x))$ – замкнутая, а формула $\forall x A_1(x,y)$ – незамкнутая, так как содержит свободную переменную *y*.

Формула $\exists t(\forall y P(x,u,y)\vee Q(t,z))\rightarrow\exists t R(t)$ содержит связанную переменную t и свободные переменные x, z, u. Сокращенно эту формулу можно обозначить A(x,u,z). Формула $\forall x(\exists y Q(x,y)\rightarrow(\exists z P(x,z)\&\forall y R(y)))$ является замкнутой и, следовательно, интерпретируется как высказывание.

Как известно, истинностное значение формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ в некоторой интерпретации $J=\{\langle M, \sum\rangle, \lambda\}$ зависит от набора значений свободных переменных.

Виды незамкнутых формул:

✓ Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *тождественно истинной в интерпретации* $J=\{\langle M, \sum\rangle, \lambda\}$, если эта формула принимает значение 1 при любых наборах значений свободных переменных из множества M.

- ✓ Формула называется *выполнимой* в интерпретации J=<⟨M, Σ⟩, λ}, если эта формула принимает значение 1 хотя бы при одном наборе значений свободных переменных из M.

Ясно, что некоторая формула, будучи тождественно истинной (выполнимой) в одной интерпретации, может не быть таковой в другой интерпретации. Этим обусловлено введение следующих определений:

- ✓ Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *общезначимой*, если она тождественно истинна в любой интерпретации.
- ✓ Формула $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *выполнимой*, если она выполнима хотя бы в одной интерпретации.

Так как всякая замкнутая формула в любой интерпретации представляет собой определенное высказывание, то нет смысла вводить для таких формул понятия, аналогичные понятиям тождественной истинности и выполнимости формулы в данной интерпретации. Изменение истинностного значения замкнутой формулы возможно только при изменении интерпретации. В связи с этим даются следующие определения:

Виды замкнутых формул:

- ✓ Замкнутая формула A называется *общезначимой*, если она истинна в любой интерпретации.
- ✓ Замкнутая формула A называется *выполнимой*, если она истинна хотя бы в одной интерпретации.

Пример 9.1. Доказать, что формула $\forall xP(x) \to P(y)$ общезначима.

Данная формула содержит *свободную* переменную y. Требуется доказать, что эта формула тождественно истинна в любой интерпретации, то есть принимает значение 1 в *любой интерпретации* при *любом значении* переменной y.

Рассмотрим *произвольную* интерпретацию J={⟨M, Σ⟩, λ}. Пусть y_0 – *произвольный* элемент из множества M. Тогда $\forall xP(x)\to P(y_0)$ – высказывание, для которого возможны два случая:

а) $[\forall xP(x)]_J=1 \Rightarrow [P(x)]_J=1$ для всех $x\in M \Rightarrow [P(y_0)]_J=1 \Rightarrow [\forall xP(x)\to P(y_0)]_J=1$ (по определению импликации, так как $1\to 1=1$);

б) $[\forall xP(x)]_J=0 \Rightarrow [\forall xP(x)\to P(y_0)]_J=1$ (по определению импликации, так как значение посылки равно 0).

Следовательно, во всех возможных случаях $[\forall xP(x)\to P(y_0)]_J=1$. Таким образом, формула $\forall xP(x)\to P(y)$ истинна в *интерпретации J* при *произвольном значении* $y\in M$. В силу произвольности y можно утверждать, что формула истинна в интерпретации J *при всех* $y\in M$; то есть данная формула *тождественно истинна* в этой интерпретации.

В силу произвольности интерпретации J делаем вывод, что формула тождественно истинна в *любой* интерпретации, то есть является *общезначимой*.

Пример 9.2. Доказать, что формула $\exists xP(x)\to\forall yP(y)$ не общезначима.

Данная формула является *замкнутой*. Чтобы доказать, что она не общезначима, достаточно найти *хотя бы одну* интерпретацию, в которой формула была бы ложным высказыванием. Такой интерпретацией, например, является следующая: $J=\{\langle M$, "быть простым числом"$\rangle, \lambda\}$, где λ: $P^{(1)} \mapsto$ "быть простым числом".

При x=3 имеем: $[\exists x P(x)]_J=1$ и $[\forall y P(y)]_J=0$. Так как в данной импликации посылка истинна, а заключение ложно, то по определению импликации $[\exists x P(x) \to \forall y P(y)]_J=0$. Это показывает, что данная формула истинна *НЕ во всех* интерпретациях. Поэтому она *не общезначима*.

В данных примерах приведен основной способ решения задач такого типа. Выполнимость формулы доказывается аналогично примеру 9.2 (с учетом разницы между замкнутыми и незамкнутыми формулами) с тем отличием, что в найденной *конкретной* интерпретации формула должна быть истинной (для незамкнутых формул – при найденных *конкретных* значениях свободных переменных). Невыполнимость формулы доказывается аналогично примеру 9.1, при этом формула, должна быть *ложной в произвольной* интерпретации (для незамкнутых формул – при *произвольных* значениях свободных переменных).

Замыканием всеобщности формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется формула, полученная из A приписыванием перед нею кванторов всеобщности по всем ее свободным переменным ($A_\forall = \forall x_1 \forall x_2 ... \forall x_n A(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Замыканием существования формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется формула, полученная из A приписыванием перед нею кванторов существования по всем ее свободным переменным ($A_\exists = x_1 \exists x_2 ... \exists x_n A(x_1, x_2, ..., x_n)$).

Формула A тождественно истинна в интерпретации J тогда и только тогда, когда $[A_\forall]_J = 1$, и выполнима в интерпретации J тогда и только тогда, когда $[A_\exists]_J = 0$. Поэтому вопрос об *общезначимости* или *выполнимости* незамкнутой формулы может быть сведен к аналогичному вопросу относительно соответствующего замыкания. Это позволяет в ряде случаев рассматривать только замкнутые формулы, переходя при необходимости к подходящим замыканиям незамкнутых формул.

10. РАВНОСИЛЬНОСТЬ ФОРМУЛ

Формулы $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ и $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ называются *равносильными* ($A(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv B(x_1, x_2, ..., x_n)$), если *в любой* интерпретации эти формулы принимают *одинаковые* истинностные значения *при любых* наборах значений *свободных* переменных из множества, на котором задана интерпретация.

Из данного определения следует, что $A(x) \equiv B(x)$ тогда и только тогда, когда в любой интерпретации совпадают множества истинности этих формул, то есть $M_x(A)=M_x(B)$.

Для замкнутых формул дается несколько другое определение равносильности:

Замкнутые формулы A и B называются *равносильными*, если их истинностные значения совпадают в любой интерпретации.

Можно рассматривать также равносильность формул на каком-либо множестве, а для незамкнутых формул – и в одной интерпретации.

В логике предикатов имеют место все законы логики высказываний.

Покажем, например, что $P(x) \to Q(x) \equiv \overline{P(x)} \vee Q(x)$. В самом деле, в произвольной интерпретации J={⟨M, ∑⟩, λ} при любом значении $x_0 \in M$ эти формулы становятся высказываниями: $P(x_0) \to Q(x_0)$ и $\overline{P(x_0)} \vee Q(x_0)$, соответственно, поэтому принимают одинаковые истинностные значения (доказать можно с помощью таблиц истинности, аналогичных тем, которые рассматривались для составных высказываний). В силу произвольности интерпретации J, равносильность этих формул доказана.

Приведем пример равносильности, специфической для логики предикатов:

$\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$;

Доказательство. Будем считать данные формулы замкнутыми, так как здесь несущественно, имеются ли в них другие переменные или нет. Покажем, что эти формулы принимают одинаковые истинностные значения в любой интерпретации.

Рассмотрим *произвольную* интерпретацию J={⟨M, ∑⟩, λ}. В этой интерпретации $\overline{\forall x A(x)}$ либо истинна, либо ложна (замкнутая формула в интерпретации – высказывание). Рассмотрим оба случая.

а) Пусть $[\overline{\forall x A(x)}]_J=1$, тогда $[\forall x A(x)]_J=0$; это означает, что $[A(x)]_J=1$ *не при всех* значениях x из множества M. Поэтому найдется элемент $x_0 \in M$ такой, что $[A(x_0)]_J=0$. Отсюда следует, что $[\overline{A(x_0)}]_J=1$, то есть существует такой $x \in M$, что $\overline{A(x)}$ истинна. Следовательно, $[\exists x \overline{A(x)}]_J=1$.

б) Пусть $[\overline{\forall x A(x)}]_J=0$, тогда $[\forall x A(x)]_J=1$. Значит $[A(x)]_J=1$ при всех x из множества M, отсюда при всех $x \in M$ формула $\overline{A(x)}$ ложна. Поэтому не существует такого элемента из множества M, при котором было бы $[\overline{A(x)}]_J=1$. Следовательно, $[\exists x \overline{A(x)}]_J=0$.

Получено, что в интерпретации J истинностные значения данных формул совпадают. В силу *произвольности* этой интерпретации, равносильность данных формул справедлива в любой интерпретации, значит, равносильность доказана.

Основные равносильности логики предикатов:

1) $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$;
2) $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$;
3) $\overline{\forall x (A(x) \to B(x))} \equiv \exists x (A(x) \,\&\, \overline{B(x)})$;
4) $\forall x \forall y A(x, y) \equiv \forall y \forall x A(x, y)$;

5) $\exists x\exists yA(x,y)\equiv\exists y\exists xA(x,y)$;

6) $\forall xA(x)\,\&\,\forall xB(x)\equiv\forall x(A(x)\,\&\,B(x))$;

7) $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)\equiv\exists x(A(x)\vee B(x))$;

Если в формулу B не входит переменная *x*, то

8) $\forall xA(x)\,\&\,B\equiv\forall x(A(x)\,\&\,B)$;

9) $\forall xA(x)\vee B\equiv\forall x(A(x)\vee B)$;

10) $\exists xA(x)\,\&\,B\equiv\exists x(A(x)\,\&\,B)$;

11) $\exists xA(x)\vee B\equiv\exists x(A(x)\vee B)$;

Если переменная z не входит в формулу A, то

12) $\forall xA(x)\equiv\forall zA(z)$;

13) $\exists xA(x)\equiv\exists zA(z)$.

Равносильности (6) и (7) дают возможность выносить и вносить в скобки кванторы $\forall$ в конъюнкции и $\exists$ – в дизъюнкции, но не наоборот (!).

Для доказательства неравносильности формул $\forall xA(x)\vee\forall xB(x)$ и $\forall x(A(x)\vee B(x))$ рассмотрим интерпретацию J={⟨M, {"быть простым числом", "быть четным числом"}⟩, λ}, где M={3, 5, 7, 16, 24}; λ: A(x) |→ "x – простое число", B(x) |→ "x – четное число".

$[\forall xA(x)\vee\forall xB(x)]_J=0$, а $[\forall x(A(x)\vee B(x))]_J=1$. С помощью этой же интерпретации можно доказать неравносильность формул $\exists xA(x)\&\exists xB(x)$ и $\exists x(A(x)\&B(x))$.

Однако эти ограничения могут быть сняты с помощью равносильностей (12) и (13), которые позволяют заменять связанные переменные другими переменными в области действия соответствующего квантора, затем применять кванторы (8)-(11).

Разноименные кванторы менять местами нельзя. Например, $\forall x\exists y(x<y)$ – истинное высказывание на множестве натуральных чисел (множество натуральных чисел не ограничено сверху), а $\exists y\forall x(x<y)$ – ложное высказывание (наибольшего натурального числа не существует.

Однако $\exists x\forall yA(x,y)\Rightarrow\forall y\exists xA(x,y)$.

11. ПРЕДВАРЕННАЯ И СКОЛЕМОВСКАЯ НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Формула логики предикатов имеет нормальную форму, если она содержит только кванторы и операции отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, причем отрицание относится только к элементарным формулам.

Общий вид *предварённой нормальной формы* (ПНФ): $Q_1x_1\ Q_2x_1\ ...\ Q_nx_n\ B(x_1, x_2, \ldots, X_m)$, где $n\le m$, $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ – кванторы ($\forall$, $\exists$). Совокупность $Q_1x_1\ Q_2x_1\ ...\ Q_nx_n$ называется префиксом формулы, а предикат $B(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ не содержит кванторов и называется матрицей формулы.

Так как совокупность кванторов называется префиксом формы, поэтому предваренная нормальная форма иначе называется *префиксной нормальной формой*.

Теорема 11.1. Любую формулу А логики предикатов можно привести к ПНФ.

Доказательство (порядок выполнения преобразований).

Операции импликации и эквивалентности в данной предикатной формуле А можно выразить через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание.

Если после этого некоторые отрицания будут относиться к частям формулы, содержащим кванторы, то отрицания можно “снять” с кванторов согласно равносильностям (1) или (2), а “снять” отрицания с конъюнкций и дизъюнкций можно, следуя законам де Моргана.

Затем с помощью равносильных преобразований (6) и (7) вынести кванторы всеобщности (в том случае, если предикаты соединены конъюнкцией) и существования (если предикаты соединены дизъюнкцией) вперед.

Если после этого остались кванторы внутри формулы, то выполнить замену по равносильностям (12) или (13) и применить (8) – (11).

Пример11.1 . Привести к ПНФ формулу $\exists x \forall y A(x,y) \vee \overline{\forall x \exists y B(x,y)}$.

Решение.

$$\exists x \forall y A(x,y) \vee \overline{\forall x \exists y B(x,y)} \equiv \exists x \forall y A(x,y) \vee \exists x \forall y \overline{B}(x,y) \equiv$$

$$\equiv \exists x (\forall y A(x,y) \vee \forall y \overline{B}(x,y)).$$

Заменим в $\forall y \overline{B}(x,y)$ переменную y новой переменной z, получим $\forall z \overline{B}(x,z)$, не содержащую y. Поэтому, можно вынести квантор всеобщности за дизъюнкцию $\exists x (\forall y A(x,y) \vee \forall z \overline{B}(x,z)) \equiv \exists x \forall y (A(x,y) \vee \forall z \overline{B}(x,z)) \equiv$

$$\equiv \exists x \forall y \forall z (A(x,y) \vee \overline{B}(x,z)).$$

Преобразование к *сколемовской нормальной форме* предназначено для исключения из предикатных формул кванторов существования при сохранении семантики.

Рассмотрим правильно построенную формулу $\forall y \exists x P(x,y)$, которую можно проинтерпретировать следующим образом: «Для всех *y* существует *x*, такой что Р(*x*,*y*)». Поскольку квантор существования находится внутри области действия квантора всеобщности, допускается, что *x*, который «существует», может зависеть от значения *y*. Пусть эта зависимость определяется явно с помощью некоторой функции *f*(*y*), отображающей каждое значение *y* в *x* (который существует). Такая функция называется *функцией Сколема*. С её помощью данную формулу можно записать иначе: $\forall y P(f(y), y)$.

Общее правило исключения из предикатной формулы квантора существования состоит в замене всюду в ней переменной, относящейся к квантору существования, функцией Сколема, аргументами которой служат переменные, относящиеся к тем кванторам всеобщности, области действия которых охватывают область действия исключаемого квантора существования.

Функции Сколема не должны совпадать с теми буквами, которые уже имеются в формуле.

Приоритетность действий кванторов, имеющихся в префиксной форме, определяются слева направо. Например, $\forall x \exists y \forall z F(x,y,z)$ имеет такой смысл, что «для всех *x* существует некоторый *y*, такой что *F*(*x,y,z*) истинна при всех *z*».

Переменная x (связанная квантором всеобщности) влияет на выбор значения y (связанной квантором существования), а переменная z не влияет на y. Следовательно, можно формулу можно записать: $\forall x \forall z F(x, f(x), z)$.

Если $\forall x \forall z \exists y F(x,y,z)$, то $\forall x \forall z F(x, f(x,z), z)$.

Из этого рассмотрения следуют очень важные правила:

Если переменная, связанная квантором существования, является крайней слева, то такую формулу можно заменить функцией без аргументов, то есть константой: $\exists x \forall y\ F(x,y) \equiv \forall y\ F(a,y)$.

Для выражений, приведенных к предваренной нормальной форме, имеем:

$\forall x\ \forall y \forall z \exists t\ (F(x,z) \lor G(y,z) \lor H(x,y,t)) \equiv \forall x \forall y \forall z\ (F(x,z) \lor G(y,z) \lor H(x,y, f(x,y,z))$.

$\forall x \exists y \forall z \exists t\ (F(x,y,z,t) \equiv \forall x \forall z\ F(x, f(x), z, h(x,z))$.

Если подобным образом исключить связанные квантором существования переменные, то любые другие переменные, которые встречаются в формуле, будут связаны только квантором всеобщности и поэтому уже не понадобится пояснять это обстоятельство связыванием переменных кванторами. Иначе говоря, так как порядок расположения кванторов всеобщности несущественен, то можно эти кванторы явным образом не указывать (то есть их опустить).

Исходя из этого, для данных примеров получим:

$F(x,z) \lor G(y,z) \lor H(x,y, f(x,y,z))$;

$F(x, f(x), z, h(x,z))$.

Такое формальное представление предикатных формул называют сколемовской нормальной формой или *Сколемовской стандартной формой* (ССФ).

Правила преобразования формул логики предикатов к сколемовской стандартной форме:

1) исключить знаки импликации, выразив их через отрицание и дизъюнкцию;

2) используя правила перенесения отрицания через кванторы и законы де Моргана, записать формулы так, чтобы отрицание относилось только к элементарным формулам;

3) провести стандартизацию (переименование) переменных для вынесения кванторов за скобки;

4) вынести кванторы за скобки, т.е. получить предваренную нормальную форму;

5) исключить кванторы существования, введением сколемовских функций (Skolem T).

Пример 11.2. Пусть имеем формулу $\forall x \exists y \exists z(\overline{P}(x,y) \& R(x,z) \lor S(x,y,z))$. Приведём матрицу формулы к КНФ.

$\forall x \exists y \exists z(\overline{P}(x,y) \vee S(x,y,z))\&(R(x,z) \vee S(x,y,z))$.

Затем введём функции $f(x)$, $g(x)$:

$\forall x(\overline{P}(x,f(x)) \vee S(x,f(x),g(x))\&(R(x,g(x)) \vee S(x,f(x),g(x)))$.

Полученная формула является сколемовской стандартной формой исходной формулы.

Пусть формула A приведена к предваренной нормальной форме, а ее матрица представлена в КНФ, т.е. $A=(Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n)D_1\&D_2\&\ldots\&D_m$, где $(Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n)$ префикс формулы A, $B=D_1\&D_2\&\ldots\&D_m$ – матрица, а D_1, D_2, …, D_m – дизъюнкты. Положим, что сколемовская стандартная форма для A равна $A_s=(Q_1x_1\ Q_2x_2 \ldots Q_nx_n)\ C_1\&C_2\&\ldots\&C_m$, где в префиксе опущены кванторы существования, а C_i получены из D_i введением сколемовских функций вместо переменных в кванторах существования.

Отметим, что стандартная форма A_s формулы A определяется не единственным образом, так как сколемовские функции можно вводить неоднозначно.

Замечание. Наличие разрешающего алгоритма для некоторого вида формул позволяет решать вопрос о выполнимости формул. Очевидно, что формула A невыполнима тогда и только тогда, когда $\overline{A}$ общезначима. Поэтому для проверки выполнимости формулы A достаточно с помощью разрешающего алгоритма проверить общезначимость формулы $\overline{A}$.

Пример 11.3. Проверить общезначимость формулы $\exists xP(x) \to \forall yP(y)$.

Приведем формулу к ПНФ:

$\exists xP(x) \to \forall yP(y) \equiv \forall x\overline{P}(x) \vee \forall yP(y) \equiv \forall x\forall y(\overline{P}(x) \vee P(y))$.

Проверим истинность этой формулы на любом множестве, содержащем не более двух элементов. Рассмотрим интерпретацию $J=\{\langle M, \Sigma\rangle, \lambda\}$ на множестве из двух элементов $M=\{a; b\}$. В силу того, что данная формула содержит только кванторы всеобщности, преобразуем ее к виду:

$(\overline{P}(a) \vee P(a))\,\&\,(\overline{P}(a) \vee P(b))\,\&\,(\overline{P}(b) \vee P(a))\,\&\,(\overline{P}(b) \vee P(b))$. В логике высказываний эта формула не является тождественно истинной. Поэтому в логике предикатов данная формула не является общезначимой.

12. ДЕДУКТИВНЫЕ ТЕОРИИ

Дедукция (от латинского deductic – выведение) – форма мышления, когда заключение выводится чисто логическим путем (т.е. по правилам логики) из некоторых данных посылок.

Примеры дедуктивных рассуждений.

- ✓ Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен.
- ✓ $a>b$, $b>c \Rightarrow a>c$. Так как $5>3$, $3>1$, следовательно, $5>1$.

Индукция (от латинского inductio – наведение) – форма мышления, посредством которой от некоторых фактов или истинных высказываний переходят к некоторой гипотезе (общему утверждению).

Примеры индуктивных рассуждений.

- ✓ График функции $y=2x+3$ – прямая, график функции $y=3x–1$ – прямая, следовательно, функции вида $y=kx+b$ имеют графиком прямую. Полученная здесь гипотеза оказывается истинной.
- ✓ Большая теорема Ферма: уравнение $x^n+y^n=z^n$ не разрешимо в целых числах при $n>2$, была доказана при $n=3, 4, 5, \ldots$, а также при очень больших значениях n. Следовательно, это утверждение верно при любом $n>2$. Однако такое рассуждение, с точки зрения математики, не является доказательством.
- ✓ В формуле Эйлера $N=x^2+x+41$ при каждом $x=1,2,3,...,30$ число N является простым. Напрашивается вывод, что все числа N указанного вида, являются простыми. Сформулированная здесь гипотеза неверна, например, при $x=40$ число $N=41^2$, следовательно, оно не является простым.

Таким образом, заключение, полученное дедуктивным способом, уже не нуждается в доказательстве. Заключение, полученное индуктивным способом, требует доказательства его истинности. Поэтому в матлогике исследуются дедуктивные методы. Введем понятие дедуктивной теории.

Дедуктивная теория считается заданной, если:

1) Задан алфавит и правила образования выражений (слов) в этом алфавите.

2) Заданы правила образования формул (правильно построенных выражений) языка.

3) Из множества всех формул языка выделено некоторым дедуктивным способом (который описан ниже) подмножество T, элементы которого называются *теоремами*.

Подмножество T может задаваться одним из следующих способов.

I. Задаются аксиомы и конечное число правил вывода, то есть:

а) из множества формул (правильно построенных выражений) выделяется подмножество A, элементы которого называются *аксиомами* (аксиом может быть как конечное число, так и бесконечное),

б) задается конечное число *правил вывода*, используя которые, и только их, из аксиом можно некоторым образом получать теоремы.

Такая дедуктивная теория называется *формальной аксиоматической теорией* или формальным (логическим) исчислением.

Отметим, что аксиомы лишь задаются, поэтому их часто называют *скрытыми определениями*. *Аксиомы* не доказываются не потому, что могут не доказываться, а потому, что *не могут быть доказаны*.

II. Задаются только аксиомы, а правила вывода считаются известными, то есть:

а) из множества формул (правильно построенных выражений) выделяется подмножество А, элементы которого называются аксиомами (аксиом может быть как конечное число, так и бесконечное),

б) правила вывода (методы доказательства) теорем считаются известными из опыта изучения математики.

Определенная таким способом дедуктивная теория называется *полуформальной аксиоматической теорией*.

III. Аксиом нет, а задается только конечное число правил вывода, с помощью которых получают теоремы. Такую дедуктивную теорию называют *теорией естественного вывода*.

Случай, когда нет аксиом и нет правил вывода, в логике не рассматривается.

13. ДЕДУКТИВНЫЕ СРЕДСТВА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

При анализе доказательств видно, что, доказывая некоторые утверждения, приходится опираться на факты, которые к данному моменту считаются известными. Те, в свою очередь, также получены из каких-то посылок и т.д. Однако этот процесс не может быть бесконечным; поэтому необходимы некоторые "отправные", первоначальные положения – аксиомы. В них формулируются исходные свойства изучаемых объектов; из этих свойств выводятся все теоремы данной теории. Сами *аксиомы* считаются без доказательства *первоначальными истинными предложениями* рассматриваемой теории.

Аксиомы делятся на два вида.

1) Аксиомы, описывающие исходные свойства объектов изучаемой теории, называются *специальными*. Естественно, в различных теориях специальные аксиомы различны. Так, например, в элементарной геометрии специальными аксиомами являются аксиомы принадлежности, порядка и др. Специальные аксиомы могут записываться и на формальном языке, то есть в виде правильно построенных формул (ППФ) некоторой сигнатуры σ.

2) *Логические* аксиомы описывают исходные свойства логических символов, которые, используются при точной записи теорем и их доказательств в любой теории. Логические символы, как известно, всюду сохраняют постоянный смысл. Поэтому логические аксиомы можно выписать "раз и навсегда". Чтобы обеспечить универсальность записи делают на формальном языке.

Пусть в языке I порядка некоторой сигнатуры σ:

$A, B, C, A_1(x_i)$ – ППФσ, где x_i – свободная переменная для предиката A_1; θ – некоторый терм.

Логическими аксиомами будут следующие:

I. Аксиомы импликации:

1) $A\to(B\to A)$

2) $(A\to(B\to C)) \to ((A\to B) \to (A\to C))$

II. Аксиомы конъюнкции:

1) $A\&B \to A$

2) $A\&B \to B$

3) $(A \to B) \to ((A \to C) \to (A \to B\&C))$

III. Аксиомы дизъюнкции:

1) $A \to A \lor B$

2) $B \to A \lor B$

3) $(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \lor B \to C))$

IV. Аксиомы отрицания:

1) $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

2) $A \to \overline{\overline{A}}$

3) $\overline{\overline{A}} \to A$

V. Аксиомы кванторов:

1) $\forall x_i A_1(x_i) \to A_1(\theta)$

2) $A_1(\theta) \to \exists x_i A_1(x_i)$

VI. Аксиомы равенства:

1) $\forall x(x=x)$

2) $\forall x\ \forall y((x=y) \to (A_1(x)=A_1(y)))$

Группа аксиом I–IV образует исчисление высказываний (ИВ);
аксиомы I–V образуют исчисление предикатов (ИП);
аксиомы I–VI образуют исчисление предикатов с равенством (ИПР).

Замечание. Каждая формула из совокупности аксиом является не одной аксиомой, а *схемой аксиом* данного вида. Это означает, что вместо A, B, C можно подставить любую ППФ, например, в ИВ A можно заменить любой пропозициональной формой, в ИП – любым предикатом (со связанными или свободными переменными).

Нетрудно заметить, что логические аксиомы описывают "обычные" хорошо известные свойства логических операций, кванторов и равенства. Например, аксиомы II.1 и II.2 фактически утверждают, что из истинности конъюнкции следует истинность каждого ее элемента; аксиомы III.1 и III.2 показывают, что истинности одной из двух формул достаточно для истинности их дизъюнкции; содержательный смысл аксиомы V.1 в том, что истинность некоторого свойства *для всех X* влечет истинность данного свойства и для конкретного объекта и т.д. Таким образом, логические аксиомы верно отражают общепринятый смысл логических символов.

При доказательстве теорем на "обычном" уровне строгости, как правило, бывает заметно применение только специальных аксиом. Явное использование логических аксиом наблюдается уже на полностью формализованном уровне, по существу, лишь тогда, когда само *доказательство* является *объектом изучения*, а не средством получения новых математических фактов.

Как уже отмечалось, логические рассуждения в доказательствах обязаны быть такими, чтобы не возникало сомнений в их правильности. Иными словами, мы должны быть уверены, что из истинных условий всегда можно получить истинные выводы. Этого можно добиться, если потребовать, чтобы логические выводы делались по специальным правилам, которые в этом смысле считались бы "надежными". Поэтому выделяется еще один вид логических средств – *правила вывода*.

Основными правилами вывода считаются следующие:

Правило заключения (ПЗ): Из формул А и А→В можно получить формулу В.

Символически записывается так:

$$\frac{A; A \to B}{B}$$

Здесь формула, стоящая под чертой, считается следствием формул, стоящих над чертой.

Правила связывания кванторами (ПСК):

ПСК-1 $\dfrac{B \to A(x_i)}{B \to \forall x_i A(x_i)}$; ПСК-2 $\dfrac{A(x_i) \to B}{\exists x_i A(x_i) \to B}$,

где формула *B* не содержит x_i.

Действие ПСК-1 проявляется в рассуждениях типа: "Пусть из условия В следует выполнение свойства А для произвольного элемента x_i. В силу произвольности x_i, свойство А выполняется для любого x_i.

Из основных правил вывода и логических аксиом можно получить *производные правила вывода*. Важнейшими из них являются:

Правило силлогизма (ПС) $\dfrac{A \to B; B \to C}{A \to C}$

Привило перестановки посылок (ППП) $\dfrac{A \to (B \to C)}{B \to (A \to C)}$

Правило соединения посылок (ПСП) $\dfrac{A \to (B \to C)}{A \& B \to C}$

Правило разъединения посылок (ПРП) $\dfrac{A \& B \to C}{A \to (B \to C)}$

Введение конъюнкции (ВК) $\dfrac{A; B}{A \& B}$

Удаление конъюнкции (УК) $\dfrac{A \& B}{A}$; $\dfrac{A \& B}{B}$

Введение дизъюнкции (ВД) $\dfrac{A}{A \vee B}$; $\dfrac{B}{A \vee B}$

Итак, к дедуктивным сходствам доказательства относятся аксиомы (логические и специальные) и правила вывода. Выявление дедуктивных средств позволяет восстановить логические пробелы в доказательствах и обосновать логические рассуждения, с помощью которых из известных фактов получаются следствия.

Полные доказательства отличаются от обычных тем, что в них:

1) приводятся все исходные утверждения;

2) применяются правила вывода и логические аксиомы.

В повседневной математической практике такие полные доказательства не используются, так как вполне хватает обычного уровня строгости. Вместе с тем, зная неполное доказательство, при необходимости можно восстановить все дедуктивные средства, которые в нем участвовали.

14. ФОРМАЛЬНЫЙ ЛОГИЧЕСКИЙ ВЫВОД

Сформулируем теперь точное определение доказательства как вывода предложения из совокупности некоторых исходных предложений..

Выводом формулы A из совокупности формул G называется конечная последовательность формул B_1, B_2, …B_n ,где:

1) $B_1 \in C$;

2) B_i ($1<i<=n$) либо принадлежит G, либо получена из предыдущих формул по основному правилу вывода.

Число формул в выводе называется *длиной вывода*.

Формула A называется *выводимой из совокупности формул* G в некоторой системе аксиом D, если для формулы A существует вывод из G в данной системе аксиом.

Выводимость формулы A из G в системе аксиом D обозначается: $G \vdash_D A$.

Чтобы избежать путаницы, если используется не одна, а несколько теорий, употребляют запись $G_1 \vdash_{\boldsymbol{B}} A$ и $G_2 \vdash_{\boldsymbol{D}} A$. Если система аксиом известна или несущественна, можно записывать: $G \vdash A$.

Пример 14.1. Пусть A – произвольная формула в ИВ. Покажем, что:

ИВ $\vdash A\rightarrow A$ (или $\vdash_{ИВ} A\rightarrow A$), используя только ПЗ. Выводом будет последовательность формул:

B_1:	$(A\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)) \rightarrow ((A\rightarrow(B\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A))$	a.I.2
B_2:	$A\rightarrow((B\rightarrow A)\rightarrow A)$	a.I.1
B_3:	$(A\rightarrow(B\rightarrow A))\rightarrow(A\rightarrow A)$	B_1, B_2, ПЗ
B_4:	$A\rightarrow(B\rightarrow A)$	a.I.1
B_5:	$A\rightarrow A$	B_4, B_3, ПЗ

По определению, полученная последовательность формул $\{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5\}$ является выводом формулы $A\rightarrow A$ из ИВ.

Формулу, выводимую из аксиом некоторой системы D, назовем доказуемой (истинной) в данной, системе аксиом (обозначается $\vdash_D A$; если система аксиом известна или несущественна, то пишут $\vdash A$).

Можно также считать, что всякая аксиома имеет доказательство длины 1, состоящее из нее самой. Последнее не противоречит общепринятому представлению о том, что аксиомы принимаются без доказательства. В этом случае аксиомы не выводятся из других посылок, а как бы "доказывают сами себя".

Формулу A назовем *ложной* в данной системе аксиом, если $\vdash \bar{A}$.

Замечание. Длину многих выводов можно сократить, разрешив использовать в них, кроме аксиом и гипотез, ранее доказанные истинные формулы и, кроме основных, производные правила вывода. Это не противоречит определению выводимости, так как всегда можно "развернуть" истинную формулу или производные правилами вывода, записав их доказательства, то есть свести к аксиомам.

Например, доказательство ИВ $\vdash A \to A$ станет значительно проще, если использовать ПС.

B_1:	$A \to \overline{\overline{A}}$	a.IV.2
B_2:	$\overline{\overline{A}} \to A$	a.IV.3
B_3:	$A \to A$	B_1, B_2, ПС

Анализируя математические доказательства, можно заметить, что в качестве исходных утверждений, берутся аксиомы и условия теоремы.

В совокупность G могут входить формулы трех видов:

аксиомы (если не оговорено дополнительно, то считается, что G содержит все аксиомы рассматриваемой теории – как специальные, так и логические);

гипотезы – некоторые "дополнительные" формулы, то есть своего рода условия ("то, что дано"), из которых выводится итоговая формула. Считается, что гипотезы, которые используются в выводе, принимают значение истина (случай, когда гипотезы принимают значение ложь, с точки зрения логики, не имеет значения);

теоремы (тождественно истинные формулы).

Как правило, аксиомы и теоремы явно не прописываются в G.

Выводимая формула будет истинной при условии истинности посылок. Так как гипотезы могут быть произвольными формулами, то выводимая из них формула не обязательно истинна! Вместе с тем, истинность всех гипотез влечет, истинность выводимой из них формулы.

Пусть D – некоторая система аксиом; ψ – совокупность гипотез; тогда $G=D\cup\psi$. Если $G \vdash_D A$,то говорят, что A выводима из гипотез ψ и обозначают $\psi \vdash_D A$ (или просто $\psi \vdash A$). Причем в ψ может быть записано гипотез больше, чем их будет использовано в выводе.

В частности, если гипотез конечное число, и $\psi=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, то записывают:

$A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash_D A$ (либо $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash A$).

Пример 14.2. Доказать: $A\to B$, $B\to C$, $A \vdash C$.

B_1:	$A\to B$	гипотеза
B_2:	A	гипотеза
B_3:	B	B_1, B_2, ПЗ
B_4:	$B\to C$	гипотеза
B_5:	C	B_3, B_4, ПЗ

Не трудно заметить, если G есть пустое множество, т. е. $G =\varnothing$, то $\varnothing \vdash A$ имеет место тогда и только тогда, когда A является теоремой. Вместо $\varnothing \vdash A$ принято писать просто $\vdash A$, что читается: «формула A является теоремой».

15. ТЕОРЕМА ДЕДУКЦИИ ДЛЯ ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

Важное свойство исчисления высказываний формулируется в утверждении, называемом теоремой дедукции.

Теорема 15.1. Если $G, A \vdash C$, то $G \vdash A \to C$ (G – множество формул).

Доказательство. Пусть $G, A \vdash C$. Тогда существует вывод формулы C из $G \cup \{A\}$, то есть некоторая совокупность формул $B_1, B_2, \ldots, B_m$, где $B_m = C$ является этим выводом.

Покажем, что $G \vdash A \to B_i$, где B_i ($i=1, \ldots, m$) – произвольная формула вывода. Доказательство выполняется *методом индукции по i*.

1) $i=1$. Возможен один из двух случаев: $B_1 \in G$, либо $B_1 = A$.

а) Пусть $B_1 \in G$, покажем, что $G \vdash A \to B_1$.

B_1: B_1	гипотеза
B_2: $B_1 \to (A \to B_1)$	а.I.1
B_3: $A \to B_1$	B_1, B_2, ПЗ

б) Пусть $B_1 = A$, тогда формула $A \to B_1$ равносильна $A \to A$, которая является тождественно истинной (было показано ранее, что она выводится из аксиом ИВ).

Отсюда следует, что $G \vdash A \to B_i$ при $i=1$.

2) Пусть для всех формул B_i, где $1 \le i < k$, верно, что $G \vdash A \to B_i$.

Покажем, $G \vdash A \to B_k$.

Также возможны два случая:

а) $B_k \in G \cup \{A\}$. Доказательство аналогично п.1.

б) B_k получена по ПЗ из формул B_j и $B_j \to B_k$, находящихся в выводе раньше, чем B_k.

По предположению индукции: $G \vdash A \to B_j$ и $G \vdash A \to (B_j \to B_k)$.

По свойству 1: $G \vdash (A \to (B_j \to B_k)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_k))$, так как эта формула является аксиомой I.2.

Тогда по свойству 3: $G \vdash (A \to B_j) \to (A \to B_k)$, а затем $G \vdash A \to B_k$.

Индукция завершена.

Показано, что $G \vdash A \to B_i$ при любом i. Тогда при $i=m$ получим: $G \vdash A \to B_m$. А так как $B_m = C$, то $G \vdash A \to C$.

Теорема доказана.

Доказанное утверждение названо теоремой, однако для формальной аксиоматической теории это формальное предложение (формула) этой теории, выведенное из ее аксиом с помощью внутренних дедуктивных средств – правил вывода. Таким образом, теорема в элементарной теории – это доказуемая формула.

Теорема дедукции – это неформальное утверждение, сформулированное на «естественном» языке (внешнем по отношению к формальному языку теории) и доказанное не путем формального вывода, а с помощью рассуждений. Предложения такого типа называются *метатеоремами*. Другими примерами метатеорем являются свойства выводимости (1-4).

Совокупность всех метатеорем составляет *метатеорию* данной теории.

Следствие 1. Если $A \vdash C$, то $\vdash A \to C$.

Доказательство. Пусть $A \vdash C$, тогда по свойству 4: ИВ, $A \vdash C$.

По теореме дедукции: ИВ $\vdash A \to C$, иначе $\vdash A \to C$.

Следствие 2. Если $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n \vdash C$,

то $\vdash A_1 \to (A_2 \to (\dots (A_{n-1} \to (A_n \to C)) \dots))$.

Доказательство состоит в применении (n-1) раз теоремы дедукции и один раз – следствия 1.

Применение теоремы дедукции и следствий из нее облегчает решение задач на выводимость формул.

Пример 15.1. Доказать $\vdash (B \to C) \to (A \to ((A \to B) \to C))$.

1) Покажем, что $B \to C, A, A \to B \vdash C$.

B_1: A	гипотеза
B_2: $A \to B$	гипотеза
B_3: B	B_1, B_2, ПЗ
B_4: $B \to C$	гипотеза
B_5: C	B_3, B_4, ПЗ

2) Показано, что $B \to C, A, A \to B \vdash C$. По следствию 2 из теоремы дедукции получим $\vdash (B \to C) \to (A \to ((A \to B) \to C))$.

Фактически, следствие 1 применяется везде, где теоремы сформулированы в терминологии «если …, то …» (то есть в виде импликации), при доказательстве заключение следует из условия.

Имеет место теорема, обратная к теореме дедукции.

Теорема 15.2. Если $G \vdash A \to C$, то $G, A \vdash C$.

Доказательство. Так как $G \vdash A \to C$, то по свойству 4: $G, A \vdash A \to C$.

По свойству 2: $G, A \vdash A$.

По свойству 3: $G, A \vdash C$.

Следствие 3. $A_1, A_2, \dots, A_n \vdash C$ тогда и только тогда, когда

$\vdash A_1 \& A_2 \& \dots \& A_n \to C$

Доказывается на основании следствия 2, теоремы, обратной к теореме дедукции, и правил вывода ПСП и ПРП.

Следствие 4. Если $\vdash B_1$, $\vdash B_2$, …, $\vdash B_n$ и $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash B$, то $\vdash B$.

Теорема дедукции и обратная к ней теорема, а также все следствия из них остаются справедливыми (иногда с некоторыми уточнениями) в любой элементарной теории с системой аксиом, включающей ИВ, и правилом вывода ПЗ.

Следствие 4 для некоторой элементарной теории $[A]_\sigma$ доказывает замкнутость этой теории относительно вывода (если $B_1, B_2, \dots, B_n \in [A]_\sigma$ и $B_1, B_2, \dots, B_n \vdash B$, то $B \in [A]_\sigma$.).

16. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФОРМУЛ ИВ

Формулы A и B эквивалентны в исчислении высказываний, если существует вывод: $\vdash (A \to B) \& (B \to A)$.

Формулу $(A \to B) \& (B \to A)$ можно записать в виде $A \leftrightarrow B$ (также как и в логике высказываний).

Пример 16.1. Доказать $\vdash A \leftrightarrow \overline{\overline{A}}$.

B_1: $\overline{\overline{A}} \to A$ — а IV.3

B_2: $A \to \overline{\overline{A}}$ — а IV.2

B_3: $(\overline{\overline{A}} \to A) \& (A \to \overline{\overline{A}})$ — B_1, B_2, ВК

$(\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A)$

Отношение *эквивалентности* является

1) *рефлексивным* $\vdash A \leftrightarrow A$;
2) *симметричным* $A \leftrightarrow B \vdash B \leftrightarrow A$;
3) *транзитивным* $A \leftrightarrow B,\ B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$.

Свойство транзитивности доказывается с помощью правил введения и удаления конъюнкции.

B_1:	$(A \to B) \& (B \to A)$	гипотеза
B_2:	$A \to B$	B_1, УК
B_3:	$(B \to C) \& (C \to B)$	гипотеза
B_4:	$B \to C$	B_3, УК
B_5:	$A \to C$	B_2, B_4, ПС
B_6:	$C \to B$	B_3, УК
B_7:	$B \to A$	B_1, УК
B_8:	$C \to A$	B_6, B_7, ПС
B_9:	$A \leftrightarrow C$	B_5, B_8, ПС

Правило эквивалентности (ПЭ): $\dfrac{B_1 \leftrightarrow B_2;\ A(B_1)}{A(B_2)}$.

Рассмотрим примеры применения правила эквивалентности.

Пример 16.2. Доказать $\vdash (A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$.

B_1:	$(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$	а IV.1
B_2:	$(\overline{B} \to \overline{A}) \to (\overline{\overline{A}} \to \overline{\overline{B}})$	а IV.1
B_3:	$\overline{\overline{A}} \leftrightarrow A$	истинная формула
B_4:	$(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to \overline{\overline{B}})$	B_3, B_2, ПЭ
B_5:	$\overline{\overline{B}} \leftrightarrow B$	истинная формула
B_6:	$(\overline{B} \to \overline{A}) \to (A \to B)$	B_5, B_4, ПЭ
B_7:	$(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \to \overline{A})$	B_1, B_6, ВК

Пример 16.3. Доказать $\vdash B \& \overline{B} \leftrightarrow F$, где F – противоречие (тождественно ложная формула), T – тождественно истинная формула.

B_1:	$B \to (T \to B)$	а I.1
B_2:	$(T \to B) \to (\overline{B} \to F)$	а IV.1
B_3:	$B \to (\overline{B} \to F)$	B_1, B_2, ПС
B_4:	$B \& \overline{B} \to F$	B_3, ПСП
B_5:	$F \to B \& \overline{B}$	истинная формула
B_6:	$B \& \overline{B} \leftrightarrow F$	B_4, B_5, ВК

В этих примерах формально описаны: закон двойного отрицания, закон контрапозиции, закон противоречия. Аналогичным способом можно вывести другие законы логики высказываний. Связь между логикой высказываний и исчислением высказываний будет показана дальше.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТНОЙ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ВАРИАНТ 1

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $\overline{X \& Y \vee Z} \to \overline{X \vee Y} \& Z \vee X \& Y$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $\overline{A} \vee \overline{C} \to A \& B \& \overline{C}$.
3. На множестве M={-5,-4,-3,-2,-1 } заданы предикаты A(x) = "x – отрицательное число"; B(x) = "x – четное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \to \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \to \exists x (P(x) \& Q(x))$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x A(x) \vee \forall x B(x) \leftrightarrow \forall x (A(x) \vee B(x))$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $A \to B, C \to D \vdash A \& C \to B \& D$.

   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула. Затем использовать аксиомы II.1, II.2 и правила ПС, ПЗ.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $\vdash (A \& C \to B \& C) \to (A \to (\overline{\overline{C}} \to B))$.

8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \to A \& B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 2

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(X \vee Y \to X \& \overline{Z}) \to X \vee (Y \to \overline{Z})$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$(A \leftrightarrow C) \vee A \& B \& \overline{C}$.
3. На множестве M={0,1,2,3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "x делится на y"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 - y^2 > 4$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y)\&P_2(x,y)$.
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $\forall x \exists y R(x,y) \to \exists x \forall y R(x,y)$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x P(x) \vee (\forall x (P(x) \to Q(x)) \to \forall x Q(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$\overline{A} \to \overline{B}, B \vdash A.$
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
$\vdash (X \to Y) \to (X \& Z \to \overline{\overline{Z}} \& Y)$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to \overline{B}) \to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 3

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(X \to Y) \& \overline{X \& Z \to Y \& Z}$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$\overline{A} \& C \vee \overline{A \to B} \vee C$.
3. На множестве M={0,1,2,3,4,5,6} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "$x > y + 3$"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 + y^2 > 35$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y) \vee P_2(x,y)$.
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $\forall x \exists y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$ не общезначимая.

5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \to \exists x B(x) \vee \exists x C(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$A \to B, C \to D \vdash A \vee C \to B \vee D$.
Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула. Затем использовать аксиомы III.1, III.2 и правила ПС, ПЗ.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
$\vdash (\overline{C} \to (B \to \overline{A})) \to (B \,\&\, \overline{C} \to \overline{A})$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee \overline{B} \to A \,\&\, \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 4

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(A \,\&\, C \to \overline{B} \,\&\, C) \to (A \to \overline{B})$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$\overline{A} \vee C \to (B \to C)$.
3. На множестве M={2,3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "x делится на y"; $P_2(x,y)$ = "x + y делится на 6". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y)\&P_2(x,y)$.
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $\exists x \forall y (R(x,y) \leftrightarrow R(y,x))$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \to \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$\vdash B \vee B \to B$.
Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
$\vdash (A \,\&\, D \to B) \to (D \,\&\, \overline{\overline{A}} \to B \vee C)$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $B \to \overline{A} \,\&\, B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 5

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):

$(\overline{A} \& C \to A \vee B) \to \overline{B} \& C$.

2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$A \& C \vee (A \to B) \& \overline{C}$.
3. На множестве M={-2,-3,4,6,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "x + y ≤ 0"; $P_2(x,y)$ = "x + y > 10". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y)\&P_2(x,y)$.
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \vee Q(x)))$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x A(x) \vee \exists x B(x) \to \forall x A(x) \& \forall x C(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$\vdash \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \to A \& B$.
Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
$\vdash (\overline{\overline{C}} \to (A \to B)) \to (A \& C \to \overline{\overline{B}})$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \to (A \to \overline{B})$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 6

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(X \& Y \& Z \to X \& Z) \to \overline{X \to Y} \vee Z$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$\overline{A \to C} \vee A \& \overline{C} \& B$.
3. На множестве M={-6,-4,-2,2,4,6,8} заданы предикаты A(x) = "x –число, кратное 4"; B(x) = "x - 4 < 0". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \vee \overline{B}(x)$.
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $(\forall x P(x) \to \forall x Q(x)) \leftrightarrow (\forall x (P(x) \to Q(x)))$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$.

6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $\vdash A \& B \to B \& A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $\vdash ((Y \to \overline{X}) \to \overline{\overline{Z}}) \to (\overline{X} \,\&\, Y \to Z)$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to (A \to B)$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 7

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $\overline{Q \to R} \to (P \vee Q \to P \,\&\, R)$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $\overline{A} \vee (C \vee A \& B \to C)$.
3. На множестве M={0,1,2,8} заданы предикаты $P_1(x,y)$ = "4x = y"; $P_2(x,y)$ = "$x^2 + y^2 < 5$". Найти множества истинности предикатов $P_1(x,y)$, $P_2(x,y)$ и $P_1(x,y) \leftrightarrow P_2(x,y)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности (по всем переменным) и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать, что формула $(\exists x P(x) \to \exists x Q(x)) \leftrightarrow (\exists x (P(x) \to Q(x)))$ не общезначимая.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\forall x A(x) \to \forall x B(x)) \to \forall x (A(x) \to C(x))$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $A \to B, \overline{C} \to \overline{B}, A \vdash \overline{A} \vee C$.
7. Доказать правило разъединения посылок (ПРП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась формула $A \to A \& B$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $\overline{A} \to B \& C$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 8

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $(A \to B \& C) \& \overline{B \vee C \to A}$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:

$A \vee \overline{B} \to B \& C$.

3. На множестве M={1,3,5,7,9} заданы предикаты A(x) = "x > 5"; B(x) = "x – положительное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $\overline{A}(x) \to B(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать общезначимость формулы:
   $(\forall x P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\exists x \overline{P}(x) \vee \forall y Q(y))$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x (P(x) \& Q(x)) \leftrightarrow \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $\vdash A \to A \& (B \vee A)$.

   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $\vdash (A \& B \to \overline{\overline{C}}) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 9

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $(A \to (\overline{B} \to C)) \to (\overline{A \& C} \to \overline{A} \vee B)$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $(A \leftrightarrow C) \vee (A \to B)$.
3. На множестве M={1,2,3,4,5,6,7,8} заданы предикаты A(x) = "x – положительное число"; B(x) = "x – число, кратное 4". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и B(x)→A(x).

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать общезначимость формулы:
   $(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \leftrightarrow (\forall x \overline{P}(x) \vee \forall y Q(y))$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме:
   $\exists x P(x) \vee \exists x Q(x) \vee \forall x R(x) \to \forall x P(x) \& \forall x Q(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $\vdash A \to A \& A$.

Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.

7. Доказать правило перестановки посылок (ППП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to A) \to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 10

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $\overline{A \,\&\, (B \vee C)} \to \overline{A} \,\&\, B \vee \overline{C}$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $A \vee C \vee \overline{A \to B} \,\&\, C$.
3. На множестве M={5,6,12,13,14,16,17} заданы предикаты A(x) = "x – составное число"; B(x) = "x делится на 5". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \to \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\forall x \exists y (Q(x, y) \,\&\, \overline{Q}(x, x))$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x (P(x) \to Q(x)) \to (\exists x P(x) \to \exists x Q(x))$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $\vdash A \vee B \to B \vee A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $B \to \overline{C} \vdash ((A \to \overline{C}) \to C) \to ((A \to B) \to C)$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 11

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $(A \to B) \to (B \,\&\, \overline{C} \vee (A \to C))$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $A \,\&\, C \vee (A \vee B \to \overline{C})$.

3. На множестве M={2,4,6,8} заданы предикаты A(x) = "x – нечетное число"; B(x) = "x – простое число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)→B(x).

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать общезначимость формулы: $\exists x R(x,x) \to \exists x \exists y R(x,y)$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\forall x P(x) \leftrightarrow \forall x Q(x)) \vee \exists x R(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:

   $\overline{X} \ \vdash \ X \to Y$.
7. Доказать правило введения конъюнкции (ВК) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).

   Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась формула $A \to A \& B$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(\overline{A} \to B) \to B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 12

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):

   $(\overline{A \to B} \vee (C \to \overline{A})) \to \overline{\overline{B} \& C}$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:

   $\overline{A} \& (B \leftrightarrow C)$.
3. На множестве M={10,11,12,13,14,15} заданы предикаты A(x) = "x – простое число"; B(x) = "x – делитель числа 60". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \leftrightarrow \overline{B}(x)$.

   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\exists x \forall y (Q(x,y) \to \forall z R(x,y,z))$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x (A(x) \to B(x)) \to \exists x A(x) \& \exists x B(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:

   $\overline{X} \to Y, \overline{Y} \vdash X.$
7. Доказать правило силлогизма (ПС) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода)/
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $\overline{B \vee C}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 13

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $\overline{A \& B \to C} \vee (A \to (B \to C))$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $\overline{A} \to C \vee A \& B \& \overline{C}$.
3. На множестве M={-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5} заданы предикаты A(x) = "x – положительное число"; B(x) = "x – делится на 6". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)&B(x).
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\forall x \forall y \forall z (Q(x,y) \vee Q(y,z))$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\exists x A(x) \& \forall x B(x) \to \forall x A(x) \to \forall x B(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $\vdash A \vee A \& \overline{B} \to A$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $\vdash ((C \to A \vee B) \to D) \to (C \& (B \vee A) \to D)$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(\overline{A} \to \overline{A}) \to A$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 14

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
   $\overline{B \to A} \vee C \to (\overline{A \vee B} \& C \to A \& C)$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
   $(A \leftrightarrow C) \vee (A \to B)$.
3. На множестве M={1,2,3,4,5,6,7} заданы предикаты A(x) = "x – нечетное число "; B(x) = "x – простое число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и $A(x) \vee \overline{B}(x)$.
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\exists x P(x) \& \exists x Q(x) \leftrightarrow \exists x (P(x) \& Q(x))$.

5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $\forall x(A(x) \to B(x)) \to \exists x C(x) \vee \forall x B(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$\vdash A \to A \& (B \vee A)$.
Указания: сначала следует записать аксиому II.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
$\vdash (A \& B \to \overline{\overline{C}}) \to ((A \to B) \to (A \to C))$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to (B \to A)$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 15

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(\overline{A \& B} \to C) \to A \& B \vee \overline{B} \& C$.
2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности:
$(A \leftrightarrow B) \& (C \to A)$.
3. На множестве M={2,3,5,10,25} заданы предикаты A(x) = "x – число, кратное 5"; B(x) = "x – четное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)$\leftrightarrow$B(x).
Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\forall x \exists y Q(x, y) \to \exists y \forall x Q(x, y)$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\exists x P(x) \leftrightarrow \exists x Q(x)) \& \forall x R(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
$\vdash \overline{A} \to \overline{B \& A}$.
Указания: сначала следует записать аксиому IV.1 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула.
7. Доказать правило соединения посылок (ПСП) при помощи теоремы дедукции и правила заключения (основного правила вывода).
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $A \vee B \to \overline{A} \& B$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ВАРИАНТ 16

1. Составить таблицу истинности и определить вид данной формы (тавтология, противоречие или выполнимая):
$(\overline{A \& C} \to \overline{\overline{C} \vee B}) \& A \& \overline{B \vee C}$

2. Составить СКНФ и СДНФ с помощью равносильных преобразований и с помощью таблицы истинности.
   $(A \to C) \& B \vee \overline{A \to B}$
3. На множестве M={1,2,3,4,5,6,7,8} заданы предикаты A(x) = "x – простое число"; B(x) = "x – четное число". Найти множества истинности предикатов A(x), B(x) и A(x)∨B(x).
   Получить высказывания из данных предикатов, добавив к ним кванторы всеобщности и кванторы существования, и определить их истинностные значения.
4. Доказать выполнимость формулы: $\forall y \exists x Q(x, y) \to \forall x \exists y Q(x, y)$.
5. Преобразовать формулу к предварённой нормальной форме, затем к сколемовской стандартной форме: $(\forall x P(x) \to \exists x Q(x)) \vee \forall x R(x) \& \exists x \overline{Q}(x)$.
6. Доказать с помощью построения формального вывода:
   $A \to B, C \to D \vdash A \vee C \to B \vee D$.
   Указания: сначала следует записать аксиому III.3 так, чтобы в качестве последнего заключения в ней использовалась данная формула. Затем использовать аксиомы III.1, III.2 и правила ПС, ПЗ.
7. Доказать при помощи теоремы дедукции, следствий из нее и всех известных правил вывода:
   $\vdash (A \& B \to B \& C) \to (\overline{\overline{A}} \to (B \to C))$.
8. Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(\overline{A} \to (B \to A)) \to \overline{B}$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ 8

Доказать, что присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to (\overline{A} \to \overline{B})$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

Доказательство:

Введем обозначения:

$E = (A \to B) \to (\overline{A} \to \overline{B})$ – аксиома,

$D = ИВ \cup \{E\}$ – система аксиом некоторой сигнатуры σ.

Тогда $[D]_\sigma$ – элементарная теория системы аксиом *D* (формальная аксиоматическая теория).

Для доказательства противоречивости данной теории покажем, что D $\vdash B \& \overline{B}$ (то есть из аксиом теории выводится формула вида $B \& \overline{B}$).

Если некоторая формула выводится из аксиом теории, то эта формула является теоремой (тождественно истинной формулой в заданной теории).

B_1:	$(A \to (B \to A)) \to (\overline{A} \to \overline{B \to A})$	аксиома
B_2:	$A \to (B \to A)$	a I.1
B_3:	$\overline{A} \to \overline{B \to A}$	B_1, B_2, ПЗ
B_4:	$(\overline{A} \to \overline{B \to A}) \to (\overline{\overline{B \to A}} \to \overline{\overline{A}})$	a IV.1

B_5:	$\overline{\overline{B \to A}} \to \overline{\overline{A}}$	B_4, B_3, ПЗ
B_6:	$(B \to A) \to \overline{\overline{B \to A}}$	а IV.2
B_7:	$(B \to A) \to \overline{\overline{A}}$	B_6, B_5, ПС
B_8:	$\overline{\overline{A}} \to A$	а IV.3
B_9:	$(B \to A) \to A$	B_7, B_8, ПС

Так как $D \vdash (B \to A) \to A$, то $B_9 = (B \to A) \to A$ является теоремой.

Основное свойство элементарной теории – замкнутость относительно вывода. Поэтому $B_9 \in [D]_\sigma$.

B_{10}:	$(B \to (A \to B)) \to (A \to B)$	теорема (B_9)
B_{11}:	$B \to (A \to B)$	а I.1
B_{12}:	$A \to B$	B_{10}, B_{11}, ПЗ

Таким образом, $B_{12} = A \to B$ является теоремой, $B_{12} \in [D]_\sigma$.

B_{13}:	$(A \to (B \to A)) \to B$	теорема (B_{12})
B_{14}:	B	B_{13}, B_2, ПЗ
B_{15}:	$(A \to (B \to A)) \to \overline{B}$	теорема (B_{12})
B_{16}:	$\overline{B}$	B_{13}, B_2, ПЗ
B_{17}:	$B \,\&\, \overline{B}$	B_{14}, B_{16}, ВК

Показано, что $D \vdash B \,\&\, \overline{B}$, то есть присоединение к ИВ формулы $(A \to B) \to (\overline{A} \to \overline{B})$ в качестве новой «схемы аксиом» приводит к образования противоречивой теории.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Математическая логика и теория алгоритмов : учебное пособие / сост. А.Н. Макоха, А.В. Шапошников, В.В. Бережной ; Министерство образования РФ и др. – Ставрополь : Северо-Кавказский Федеральный университет (СКФУ), 2017. – 418 с. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=467015 (дата обращения: 19.01.2019). – Библиогр. в кн. – Текст : электронный.
2. Зюзьков, В. М. Введение в математическую логику : учебное пособие / В. М. Зюзьков. – 2-е изд., испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 268 с. – ISBN 978-5-8114-3053-6. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/107935 (дата обращения: 19.01.2019). – Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Матросов, В.Л. Математическая логика: учебник для бакалавриата : [16+] / В.Л. Матросов, М.С. Мирзоев. – Москва : Прометей, 2020. – 229 с. : ил. – Режим доступа: по подписке. – URL: https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=576107 (дата обращения: 19.01.2020). – Библиогр. в кн. – ISBN 978-5-907244-03-0. – Текст : электронный.

Попова Людмила Анатольевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Методические рекомендации по выполнению расчетной работы
для студентов всех форм обучения направления 09.03.01«Информатика
и вычислительная техника»

Подписано к печати 23.12.21. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,68. Тираж 25 экз. Зак. 2117113. Рег. № 62.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.