

Министерство науки и высшего образования

Рубцовский индустриальный институт

(филиал) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Кафедра Электроэнергетики

Г.В. Плеханов

Электротехника

Методические указания для самостоятельной работы студентов для студентов
технических вузов, обучающихся по всем направлениям, всех форм обучения

Рубцовск 2021

УДК 621

В методических указаниях обобщены единой областью знания о электротехнике, электронике, электронных устройствах, трансформаторах. Дано общее представление об элементарной базе электронных приборов и устройств.

Рубцовск 2021.

СОДЕРЖАНИЕ

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1. Предмет и задачи дисциплины. Построение курса. Методика работы над учебным материалом.

2. Общие понятия и определения линейных электрических цепей (ЛЭЦ).

3. Источники электрической энергии.

4. Приемники электрической энергии

5. Основные понятия и определения

6. Законы Ома и Кирхгофа

1.2 СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК. ФОРМЫ ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.

1. Основные параметры синусоидального тока

2. Представление синусоидального тока (напряжения) радиус - вектором.

3. Комплексное изображение синусоидального тока.

1.3. КОМПЛЕКСНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПРОВОДИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1. Комплексное сопротивление

2. Комплексная проводимость

1.4 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Мгновенная мощность цепи с RL и C элементами

2. Активная, реактивная, полная мощность

3. Выражение мощности в комплексной форме

1.5 РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Резонанс токов

1.6 ТРАНСФОРМАТОРЫ

1. Общие сведения о трансформаторах

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

ПРИЛОЖЕНИЕ А

1.1. ЭЛЕМЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1. Предмет и задачи дисциплины. Построение курса. Методика работы над учебным материалом.

Электротехника - область науки и техники, использующей электрическое и магнитное явления для практических целей. История развития этой науки занимает два столетия. Она началась после изобретения первого электрохимического источника электрической энергии в 1799 г. Именно тогда началось изучение свойств электрического тока, были установлены основные законы электрических цепей, электрические и магнитные явления стали использоваться для практических целей, были разработаны первые конструкции электрических машин и приборов. Жизнь современного человека без использования электрической энергии немыслима.

Большой вклад в развитие электротехники внесли русские ученые. Так еще в 1802 г. Выдающийся русский ученый В.В. Петров впервые указал на возможность использования электрической дуги для освещения. Было разработано большое число конструкций дуговых ламп освещения. Но наиболее экономичной оказалась электрическая свеча П.Н. Яблочкова (1876г). В предложенной Яблочковым конструкции был впервые применен для практических целей трансформатор. Но главная заслуга изобретения в том, что оно повысило спрос на генераторы переменного тока.

Все возрастающая потребность в использовании электрической энергии привело к проблеме ее централизованного производства, передачи на дальние расстояния, распределения и экономичного использования. Решение проблемы привело к разработке и созданию трехфазных электрических цепей. Огромная заслуга в создании элементов таких цепей принадлежит выдающемуся русскому ученому М.О. Доливо-Добровольскому. Он создал трехфазный асинхронный двигатель, трансформатор, разработал четырехпроводную и трехпроводную цепи (1891г.).

Сегодня электрическая энергия используется в технике связи, автоматике, измерительной технике, навигации. Она применяется для выполнения механической работы, нагрева, освещения, используется в технологических процессах (электролиз), в медицине, биологии, астрономии, геологии и др. Столь обширное проникновение электротехники в жизнь человека привело к необходимости включить ее в состав общетехнических дисциплин при подготовке специалистов и бакалавров всех технических специальностей и направлений. При этом перед студентами стоят две главные задачи. Первая задача - ознакомиться и усвоить физическую сущность электрических и магнитных явлений. Это позволит понять принципы работы электромагнитных устройств, правильно их эксплуатировать.

Однако, современному специалисту недостаточно знаний одних физических явлений. Поэтому студенты неэлектрических специальностей должны получить навыки в методах расчетов элементарных цепей и устройств, необходимых для успешного изучения последующих прикладных курсов.

Весь теоретический материал имеет строгое математическое обоснование. Он востребует знания студентов по математике (разделы векторной алгебры, дифференциального, интегрального, комплексного исчисления, рядов), а также по физике (разделы электричества, магнетизма, молекулярной физики).

2. Общие понятия и определения линейных электрических цепей (ЛЭЦ).

Электротехническое устройство и происходящие в нем физические процессы в теории электротехники заменяют расчетным эквивалентом - электрической цепью.

Электрическая цепь - это совокупность соединенных друг с другом проводниками источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток. Электромагнитные процессы в электрической цепи можно описать с помощью понятий ток, напряжение, ЭДС, сопротивление, проводимость, индуктивность, емкость.

Электрический ток может быть постоянным и переменным. Постоянным называют ток, неизменный во времени. Он представляет направленное

упорядоченное движение носителей электрического заряда. Как известно из курса физики, носителями зарядов в металлах являются электроны, в полупроводниках электроны и дырки (ионы), в жидкостях - ионы.

Упорядоченное движение носителей зарядов в проводниках вызывается электрическим полем. Поле создается источниками электрической энергии. Источник преобразует химическую, механическую, кинематическую, световую или другую энергию в электрическую. Он характеризуется ЭДС и внутренним сопротивлением. ЭДС источника может быть постоянной или переменной во времени. Переменная ЭДС может изменяться во времени по любому физически реализуемому закону. Ток, протекающий по цепи под воздействием переменной ЭДС также переменный.

Постоянный ток принято обозначать буквой I , переменный $i(t)$; постоянную ЭДС - E , переменную $e(t)$, сопротивление - R , проводимость - g . В международной системе единиц (СИ) ток измеряют в амперах (А), ЭДС - в вольтах (В), сопротивление в омах (Ом), проводимость - в сименсах (См).

При анализе электрических цепей, как правило, оценивают значение токов, напряжений и мощностей. В этом случае нет необходимости учитывать конкретное устройство различных нагрузок. Важно знать лишь их сопротивление - R , индуктивность - L , или емкость - C . Такие элементы цепи называют приемниками электрической энергии.

Для включения и отключения элементов электрических цепей применяют коммутационную аппаратуру (рубильники, выключатели, тумблеры см. рис. 1.1.). Кроме этих элементов в электрическую цепь могут включаться электрические приборы для измерения тока, напряжения, мощности.

Изображение электрической цепи с помощью условных графических обозначений называют электрической схемой (рис. 1.2).

Зависимость тока, протекающего по сопротивлению, от напряжения на этом сопротивлении принято называть вольтамперной характеристикой.

Приемники электрической энергии, вольтамперные характеристики которых являются прямыми линиями (рис. 1.3), называются линейными, а электрические цепи только с линейными элементами - линейными электрическими цепями.

Электрические цепи с нелинейными элементами называются нелинейными электрическими цепями.

3. Источники электрической энергии.

Одной из основных характеристик источников электрической энергии является ЭДС. Количественно ЭДС характеризуется работой A , которая совершается при перемещении заряда в 1 Кл в пределах источника

$$E = \frac{A}{Q} [B] \quad (1.1)$$

Графически ЭДС изображают стрелкой в кружке. Направление стрелки совпадает с направлением ЭДС.

Перемещение заряда определяет ток источника. Прохождение тока сопровождается потерями на нагрев источника. Количественно потери удобно определять внутренним сопротивлением $R_{вн}$. Поэтому условное графическое обозначение источника ЭДС представляет последовательное включение ЭДС E и внутреннего сопротивления $R_{вн}$ (рис. 1.4).

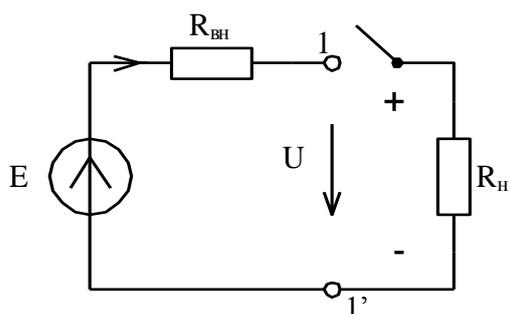


Рис.1.4

Символами 1 - 1' обозначены зажимы источника. Разность потенциалов на зажимах источника называется напряжением $U[B]$. Стрелками показаны положительные направления тока и напряжения.

Когда ключ K разомкнут, ток в цепи равен нулю и напряжение на зажимах источника равно ЭДС. Замкнем ключ K . В цепи возникнет ток

$$I = \frac{E}{R_{вн} + R_{н}} \quad (1.2)$$

При этом напряжение на зажимах источника будет равно

$$U = E - IR_{вн} \quad (1.3)$$

Зависимость напряжения U на зажимах источника от тока I изображена на рис. 1.5а.

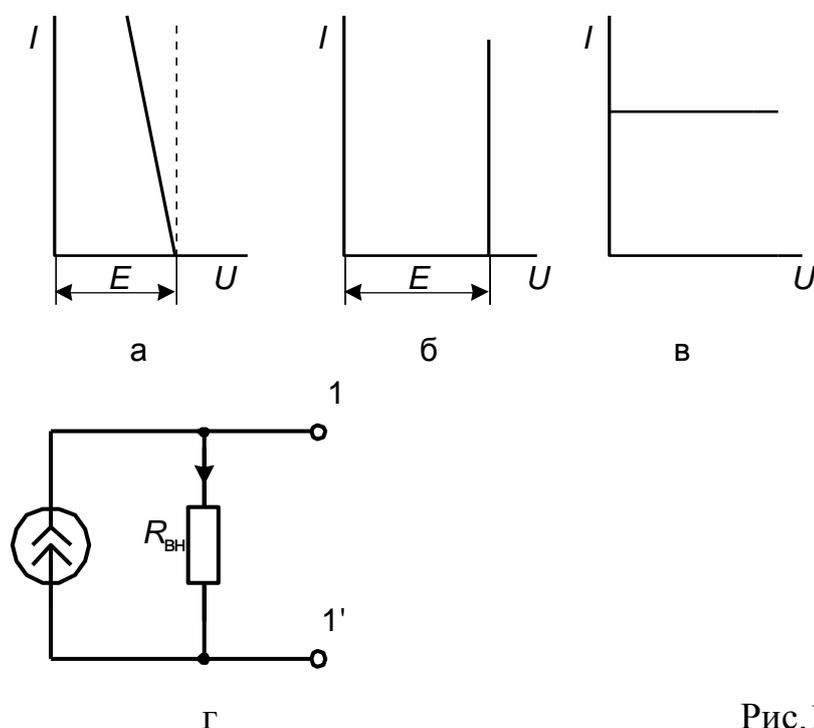


Рис.1.5

Если у источника ЭДС $R_{вн} = 0$, то вольтамперная характеристика его будет в виде прямой рис. 1.5б. Такой источник называют идеальным. Напряжение на зажимах такого источника не зависит от тока.

Если у некоторого источника увеличивать E и $R_{вн}$ до бесконечности, то его вольтамперная характеристика примет вид рис. 1.5в. Такой источник питания называют источником тока. Ток источника

$$I_T = \frac{E}{R_{вн}} \quad (1.4)$$

е зависит от сопротивления нагрузки. Реальный источник тока имеет конечные значения E и $R_{вн}$, а его условное графическое обозначение приведено на рис. 1.5г.

При расчете электрических цепей реальный источник электрической энергии с конечными E и $R_{вн}$ заменяют источником ЭДС или источником тока (рис. 1.6 а,б).

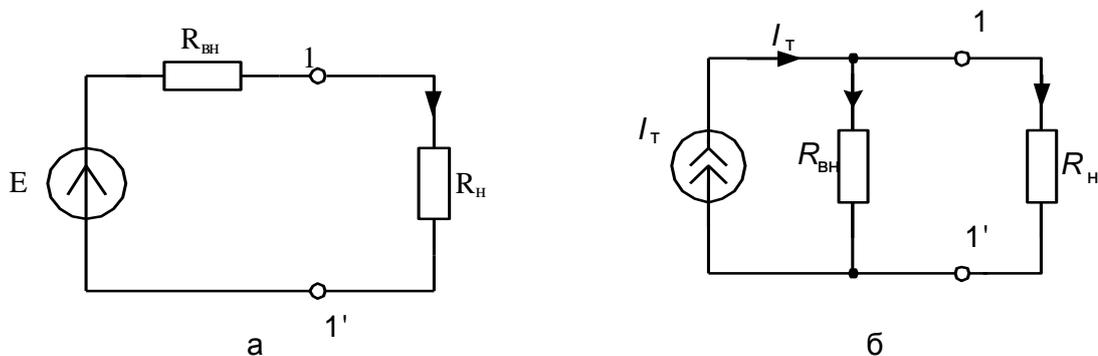


Рис.1.6

Ток в нагрузке R_n одинаков и равен

$$I = \frac{E}{R_{вн} + R_n}$$

Для схемы рис. 1.6а это очевидно и следует из того, что $R_{вн}$ и R_n включены последовательно. Для схемы рис. 1.6 б известно, что ток $I_T = E/R_{вн}$, распределяется обратно пропорционально параллельно включенным $R_{вн}$ и R_n , т.е.

$$I = I_T \cdot \frac{R_{вн}}{R_{вн} + R_n} = \frac{E}{R_{вн}} \cdot \frac{R_{вн}}{(R_{вн} + R_n)} = \frac{E}{R_{вн} + R_n}$$

Каким из двух источников воспользоваться выбирает инженер.

Пример: В схеме рис.1.6а источник ЭДС имеет параметры $E = 100\text{В}$, $R_{вн} = 26$ Ом. Определить параметры эквивалентного источника тока в схеме рис. 1.6 б.

Решение:

$$I_T = \bar{E} / R_{вн} = 50\text{А}$$

Следовательно параметры эквивалентной схемы рис. 1.6б имеют значение:

$$I_T = 50\text{А}; R_{вн} = 20 \text{ Ом.}$$

Источники питания могут иметь постоянную ЭДС - E или переменную $e(t)$, изменяющуюся во времени по заданному закону. В первом случае в цепи протекает постоянный ток и она называется цепью постоянного тока. Во втором случае ток $i(t)$ и напряжение $u(t)$ переменные, поэтому цепь называется цепью переменного тока. В электротехнике чаще других применяется синусоидальные ток и напряжение.

4. Приемники электрической энергии

Приемники электрической энергии делятся на пассивные и активные.

Пассивными называют приемники в которых не возникает ЭДС. Вольтамперные характеристики пассивных приемников проходят через начало координат. При отсутствии напряжения ток этих элементов равен нулю. Основной характеристикой пассивных элементов является сопротивление. Пассивные элементы, сопротивление которых не зависит от приложенного напряжения называются линейными. Реально таких элементов не существует. Но весьма близки к ним резисторы, реостаты, лампы накаливания и др. Зависимость напряжения от тока в таких элементах определяется законом Ома, т.е. $U = IR$, где R - сопротивление элемента. Эта зависимость не меняется, если напряжение и ток - переменные.

К приемникам электрической энергии относятся емкостные и индуктивные элементы. Основной параметр емкостного элемента - емкость C . Единица измерения - Фарада [Ф]. При постоянном напряжении, приложенном к емкости, на ее обкладках накапливается заряд

$$Q = C \cdot U \quad (1.5)$$

Ток через емкость не протекает. Это означает, что сопротивление емкости в цепи постоянного тока равно бесконечности.

Если к емкости приложено переменное напряжение $u(t)$, то и заряд на ее обкладках становится переменным

$$Q(t) = C \cdot u(t) \quad (1.6)$$

В этом случае в цепи возникает ток

$$i_c(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt} \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) позволяет определить падение напряжения на емкости, если в цепи протекает переменный ток

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt \quad (1.8)$$

Очевидно, что сопротивление емкостного элемента переменному току определяется законом Ома, но зависит не только от величины, но и от формы тока и напряжения.

Основным параметром индуктивного элемента является индуктивность - L . Единица измерения - генри [Г]. Если через индуктивность L протекает постоянный ток I , то в ней возникает постоянное во времени потокосцепление самоиндукции

$$\psi = L \cdot I \quad (1.9)$$

Будем полагать, что элемент L идеальный, т.е. сопротивление витков r отсутствует. Очевидно, что при этом падение напряжения на элементе равно нулю.

Предположим, что индуктивный элемент подключен к источнику переменного тока $i(t)$. Потокосцепление также будет переменным $\psi(t) = L \cdot i(t)$. Изменяющееся потокосцепление наводит в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L(t) = -\frac{d\psi(t)}{dt} = -L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.10)$$

Так как $r=0$, то ЭДС $e_L(t)$ уравнивает напряжение, приложенное к индуктивности

$$u(t) = -e_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (1.11)$$

Выражение (1.11) позволяет определить ток индуктивности, если известно приложенное к ней напряжение $u(t)$.

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_0^t u(t) dt \quad (1.12)$$

Кроме пассивных, в электротехнике применяются активные приемники. К ним относятся электродвигатели, аккумуляторы в процессе их заряда и др. В цепи переменного тока при определенных условиях роль активных элементов выполняют индуктивность и емкость. В активных элементах возникает противо-ЭДС E . Приложенное к приемнику напряжение уравнивается противо-ЭДС и падением напряжения на сопротивлении элемента, т.е.

$$U = E + I \cdot R_{\text{вн}} \quad (1.13)$$

5. Основные понятия и определения

Основными топологическими понятиями теории электрических цепей являются ветвь, узел, контур, двухполюсник, четырехполюсник, граф схемы электрических цепей, дерево и связь графа схемы. Рассмотрим некоторые из них.

Ветвью называют участок электрической цепи с одним и тем же током. Она может состоять из одного или нескольких последовательно включенных элементов. Так схема цепи на рис.1.7 состоит из пяти ветвей.

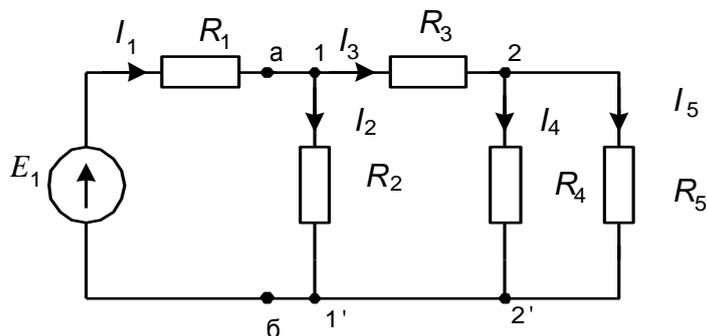


Рис.1.7.

Узлом называют место соединения трех и более ветвей. Узел обозначается на схеме точкой. Узлы, имеющие равные потенциалы, объединяются в один потенциальный узел. На схеме рис.1.7 узлы 1' и 2' могут быть объединены в один потенциальный узел. Поэтому схема имеет три потенциальных узла.

Контуром называют замкнутый путь, проходящий через несколько ветвей и узлов электрической цепи. Для схемы рис. 1.7 один из контуров включает позиции 2; R₅; 2'; R₄. Независимым называется контур, в состав которого входит хотя бы одна ветвь, не принадлежащая соседним контурам. Так схема рис.1.7 содержит три независимых контура.

Двухполюсником называют часть электрической цепи с двумя выделенными зажимами - полюсами. Двухполюсник обозначают прямоугольником с индексами А или П. А - активный двухполюсник, в составе которого есть источники ЭДС. П - пассивный двухполюсник. Например, часть схемы рис.1.7 с зажимами а и б может быть представлена двухполюсником (рис.1.8)

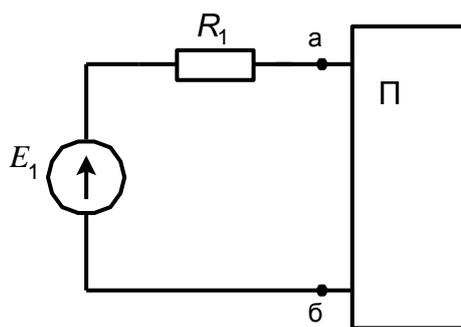


Рис.1.8

6. Законы Ома и Кирхгофа

Все электрические цепи подчиняются законам Ома и Кирхгофа. Краткая информация об этих законах заключается в следующем.

Закон Ома для участка цепи без ЭДС устанавливает связь между током и напряжением на этом участке

$$I = \frac{U}{R} \text{ или } U = I \cdot R \quad (1.14)$$

Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС позволяет найти ток этого участка

$$I = \frac{U_{ab} \pm E}{R} \quad (1.15)$$

здесь а, б - крайние точки участка; E - значение ЭДС.

В (1.15) знак «плюс» ставится при совпадении тока, протекающего по участку, с направлением ЭДС.

Первый закон Кирхгофа имеет две формулировки.

1. Сумма токов протекающих через любой узел равна нулю.
2. Сумма токов втекающих в узел равна сумме токов вытекающих из него.

Второй закон Кирхгофа:

Алгебраическая сумма падений напряжения в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме ЭДС вдоль этого контура, т.е.

$$\sum IR = \sum E.$$

В каждую из сумм слагаемые входят со знаком «плюс», если они совпадают с направлением обхода.

1.2 СИНУСОИДАЛЬНЫЙ ТОК. ФОРМЫ ЕГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ.

В практике электротехники в качестве переменного тока широкое применение нашел ток синусоидальной формы. Это обусловлено рядом преимуществ:

-генераторы синусоидального тока значительно дешевле в производстве, чем генераторы постоянного тока;

- переменный ток легко преобразуется в постоянный;
- трансформация и передача электрической энергии переменным током экономичнее чем постоянным;
- двигатели переменного тока имеют простую конструкцию, высокую надежность и невысокую стоимость.

В настоящее время переменный ток применяется в промышленном приводе и в электроосвещении, в сельском хозяйстве и на транспорте, в технике связи и в быту. Производство электрической энергии также осуществляется на переменном токе. Огромную роль в деле внедрения переменного тока сыграли русские ученые П.Н.Яблочков и М.О.Доливо-Добровольский.

1.Основные параметры синусоидального тока

Переменным называют ток (напряжение, ЭДС), изменяющийся во времени по величине и направлению. Синусоидальный ток может быть представлен посредством действительной функции времени - синусной и косинусной, например

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (2.1)$$

где I_m - максимальная амплитуда тока (амплитудное значение);

ω - угловая частота, причем

f - частота колебаний [Гц];

T - период [С];

φ_i - начальная фаза, определяет значение тока в момент времени $t=0$, т.е. $i(t=0) = I_m \cdot \sin \varphi_i$.

На рис. 2.1 приведен график двух колебаний с разными начальными фазами φ_1 и φ_2 , причем $\varphi_1 > \varphi_2$. Амплитудное значение гармоник имеет место, когда $\omega t + \varphi = 2\pi n$ ($n = 0.1.2...$), т.е. в моменты

$$t = \frac{2\pi n - \varphi}{\omega}$$

Так как $\varphi_1 > \varphi_2$, то t_1 имеет место раньше t_2 .

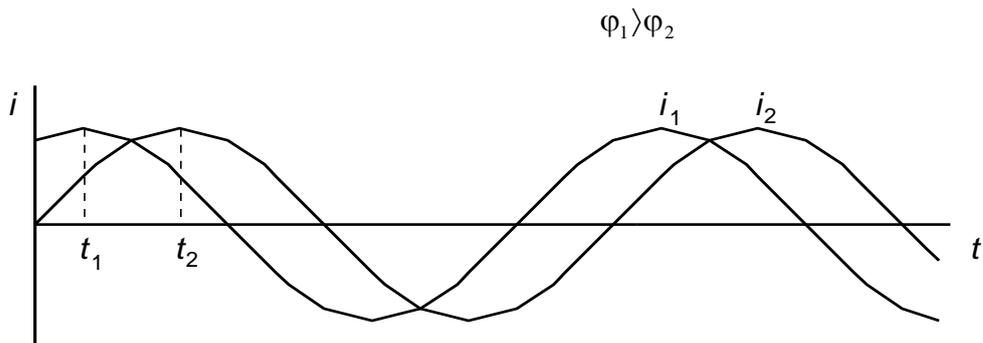


Рис.2.1

Начальная фаза часто задается в градусах. Поэтому при определении мгновенного значения тока аргумент синуса (слагаемые ωt и φ) нужно привести к одной единице измерения (рад. или градус).

Иногда гармоническое колебание представляется в косинусной форме. Легко видеть, что для перехода к такой форме в (2.1) достаточно изменить лишь начальную фазу, т.е.

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) = I_m \cdot \cos\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)$$

Промышленная частота переменного тока в России и всех странах Европы равна 50 Гц, в США и Японии - 60 Гц, в авиации - 400 Гц. Снижение частоты ниже 50 Гц ухудшает качество освещения. Увеличение частоты ухудшает условия передачи электроэнергии на большие расстояния.

Выражение для синусоидального напряжения аналогично (2.1), т.е.

$$u(t) = U_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad (2.2)$$

Аналогично (2.1) определяются и основные параметры напряжения.

Кроме уже названных параметров, в практике электротехники часто пользуются понятиями среднего и действующего значений тока и напряжения. Рассмотрим их.

Под средним значением синусоидального тока понимают его среднее значение для полупериода:

$$\begin{aligned}
I_{cp} = I_0 &= \frac{2}{T} \int_0^{T/2} I_m \cdot \sin \omega t \cdot dt = \\
&= \frac{2}{T} I_m \left(-\frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega \cdot \frac{T}{2} + \frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega \cdot 0 \right) = \frac{2 \cdot I_m}{\omega \cdot T} (\cos 0 - \cos \pi) = \\
&= \frac{2 \cdot I_m \cdot 2 \cdot T}{2\pi T} = \frac{2I_m}{\pi}
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Видим, что среднее значение синусоидального тока составляет $2/\pi \approx 0,64$ от амплитудного. Аналогично определяется среднее значение синусоидального напряжения

$$U_{cp} = U_0 = \frac{2U_m}{\pi}$$

Действующим называют среднее квадратичное значение синусоидального тока (напряжения) за период

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt}$$

Так как

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cdot \sin^2 \omega t \cdot dt &= \frac{I_m^2}{T} \int_0^T \left[\frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \right] dt = \\
&= \frac{I_m^2}{2T} \left(\int_0^T dt - \int_0^T \cos 2\omega t \cdot dt \right) = \frac{I_m^2}{2},
\end{aligned}$$

то
$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$

Видим, что действующее значение синусоидального тока составляет от амплитудного. Аналогично определяется действующее значение синусоидального напряжения

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}.$$

Если говорят о значениях переменного тока или напряжения то, как, правило, подразумевают их действующее значения. Например, напряжение в однофазной сети переменного тока 220 В - действующее. При этом амплитудное значение $U_m \cong 310$ В.

2. Представление синусоидального тока (напряжения) радиус - вектором.

При анализе состояния электрических цепей переменного тока возникает необходимость вычисления суммы или разности колебаний одинаковых частот, но с разными амплитудами и начальными фазами. Решать такую задачу с помощью рассмотренной формы представления (т.е. с помощью тригонометрических функций) достаточно трудно.

Пусть нужно найти ток $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, причем

$$i_1(t) = I_{m1} \cdot \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$i_2(t) = I_{m2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Так как частоты колебаний одинаковы, то задача сводится к нахождению суммарных амплитудного значения I_m и начальной фазы φ . Если применить для решения известные тригонометрические преобразования, то получим

$$I_m = I_{m_1}^2 + I_{m_2}^2 + 2I_{m_1} \cdot I_{m_2} \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{I_{m_1} \cdot \sin \varphi_1 + I_{m_2} \cdot \sin \varphi_2}{I_{m_1} \cdot \cos \varphi_1 + I_{m_2} \cdot \cos \varphi_2}.$$

Видим, что даже окончательный результат имеет громоздкий и ненаглядный вид.

Значительное упрощение достигается применением графического метода. Векторное представление синусоидальных величин известно из тригонометрии. Синусоидальный ток (напряжение) изображается в виде радиус-вектора, вращающегося против часовой стрелки с частотой ω . Длина вектора равна амплитудному значению - I_m . Один оборот вектор совершает, за время периода (рис.2.2).

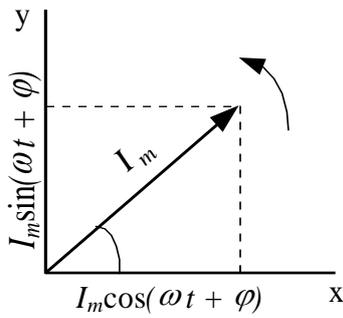


Рис. 2.2

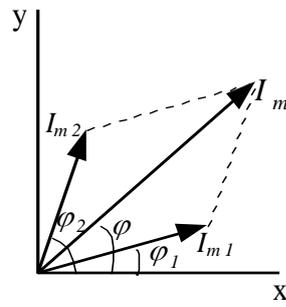


Рис. 2.3

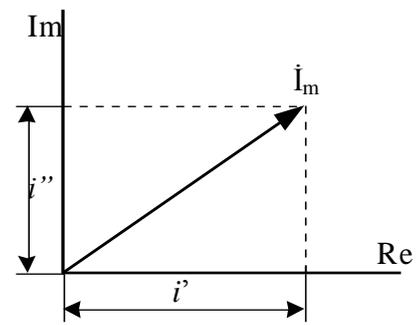


Рис. 2.4

Положение радиус-вектора относительно оси X в момент начала отсчета $t=0$ определяется углом φ_1 . Проекция вектора на ось Y определяется выражением (2.1).

На одной векторной диаграмме могут быть изображены векторы нескольких колебаний, например $i_1(t)$ и $i_2(t)$ (рис. 2.3). Для упрощения анализа все векторы изображаются в момент времени $t=0$. Тогда сумма двух векторов определится по правилу параллелограмма. Результирующий радиус-вектор также вращается относительно начала координат с частотой ω , а его проекция на ось Y определяется выражением

$$i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi),$$

где φ - положение суммарного вектора относительно оси X в момент времени $t=0$.

Простота решения очевидна. Однако графический метод обладает существенным недостатком - низкой точностью. Поэтому его применяют чаще всего для качественного анализа электрических цепей с помощью топографических векторных диаграмм напряжений.

Для построения топографической векторной диаграммы в анализируемой электрической цепи выделяют несколько участков по направлению обхода. Падение напряжения на каждом участке может быть определено вектором. Устанавливая каждый последующий вектор (по направлению обхода) в точку конца предыдущего вектора получим топографическую векторную диаграмму напряжений. Вектор между любым двумя точками этой диаграммы характеризует напряжение между соответствующими точками электрической цепи.

3. Комплексное изображение синусоидального тока.

Комплексное представление синусоидальных токов и напряжений позволяет совместить простоту и наглядность векторного представления с точностью представления действительными функциями времени. Для перехода от графического к комплексному представлению заменим оси декартовой системы координат (рис.2.2) следующим образом:

-ось X на ось действующих чисел R_e ;

-ось Y на ось мнимых чисел J_m (рис.2.4).

При этом длина вектора тока (напряжения) по-прежнему определяется амплитудным значением, но обозначается как комплексная величина, т.е. $I_m(U_m)$.

Угол наклона вектора к оси реальных чисел R_e в момент времени $t=0$ остается прежним, т.е. φ .

Обозначим проекцию вектора I_m на ось реальных чисел $i' = I_m \cdot \cos \varphi$, а проекцию I_m на ось мнимых чисел $i'' = I_m \cdot \sin \varphi$. Тогда очевидно, что

$$I_m = i' + ji'', \quad (2.5)$$

где j - мнимая единица, причем $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

Выражение (2.5) определяет комплексную алгебраическую форму представления синусоидального тока. Она удобна для выполнения действий сложения и вычитания токов (напряжений).

Действительно, для сложения двух комплексных чисел достаточно отдельно сложить действительные и мнимые числа.

Подставим в (2.5) вместо i' и i'' их значения. Тогда получим

$$\dot{I}_m = I_m (\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (2.6)$$

где I_m - модуль комплексного представления тока, численно равный амплитудному значению.

Выражение (2.6) определяет комплексную тригонометрическую форму представления синусоидального тока. Из рис. 2.4 очевидно, что

$$I_m = \sqrt{(i')^2 + (i'')^2}, \quad \text{а } \varphi = \arctg \frac{i''}{i'}. \quad (2.7)$$

Видим, что выражения (2.5) и (2.6) характеризуют параметры синусоидального тока, не зависящие от времени - действительную амплитуду I_m и начальную фазу φ .

Введем зависимость от времени. Тогда

$$\dot{I}_m(t) = i'(t) + j \cdot i''(t), \quad (2.8)$$

где $i'(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $i''(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

Теперь очевидно, что реальная часть (2.8) характеризует, реально существующее колебание, описываемое действительной косинусной функцией, мнимая часть - это же колебание в синусной форме.

С помощью формулы Эйлера от (2.6) переходят к показательной форме комплексного представления тока

$$\dot{I}_m = I_m \cdot e^{j\varphi}, \quad (2.9)$$

а с учетом зависимости от времени

$$\dot{I}_m(t) = I_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = I_m \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t} \quad (2.10)$$

Комплексная показательная форма удобна для выполнения действий умножения, деления, возведения в степень или извлечения корня. Действительно, для умножения двух комплексных чисел в показательной форме (2.9) достаточно перемножить их модули, а аргументы (показатели степени) сложить.

Представим токи и напряжения на пассивных элементах, обладающих активным сопротивлением, емкостью и индуктивностью в комплексной форме.

Пусть имеем

$$\dot{I}_m(t) = \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}; \quad \dot{U}_m = \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t}.$$

Для элемента с активным сопротивлением справедливо равенство

$$\dot{U}_m(t) = R \cdot \dot{I}_m(t)$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_m \cdot e^{j\omega t} &= R \cdot \dot{I}_m \cdot e^{j\omega t}; \\ U_m \cdot e^{j\varphi_U} &= R \cdot I_m \cdot e^{j\varphi_I} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Но равенство (2.11) возможно только в том случае, когда $\varphi_i = \varphi_u$. Таким образом, мы пришли к важному выводу о том, что на элементе с активным сопротивлением ток и напряжение совпадают по фазе, т.е. максимумы тока и напряжения имеют место в один и то же момент времени, Векторы тока и напряжения будут совпадать (рис. 2.5).

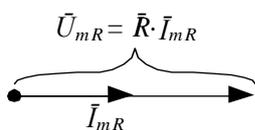


Рис. 2.5

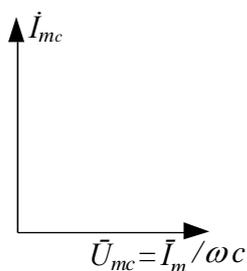


Рис. 2.6

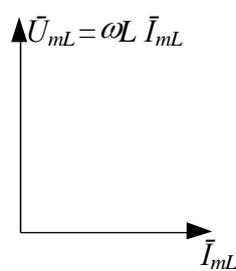


Рис. 2.7

Для элемента обладающего емкостью известно выражение

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i_c(t) dt.$$

Применяя к нему комплексную форму представления тока и напряжения получим

$$\dot{U}_{m_c}(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \dot{I}_{m_c} \cdot e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_{m_c} \cdot e^{j\omega t}.$$

Учитывая, что $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$; $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$ приходим к выражению

$$\dot{U}_{m_c}(t) = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_{m_c} e^{j\omega t}$$

или

$$\dot{U}_{m_c} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_m \cdot e^{j\left(\varphi_i - \frac{\pi}{2}\right)},$$

Таким образом видим, что напряжение на емкости отстает от тока на 90° (см. рис.2,6)

Для элемента, обладающего индуктивностью воспользуемся выражением (1.11).

Тогда

$$\dot{U}_{m_L} = L \frac{d(I_{m_L} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I_{m_L} e^{j\omega t}$$

или

$$\dot{U}_{m_L} = j\omega L \cdot I_m \cdot e^{j\varphi_i} = \omega L \cdot I_m \cdot e^{j\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right)} \quad (2.13)$$

Видим, что напряжение на индуктивности опережает ток на 90° (см.рис. 2.7).

В заключение лекции отметим что выражения (2.11), (2.12) и (2.13) не имеют временных зависимостей. Это упрощает расчеты электрических цепей, сводя их к алгебраическим операциям с комплексными числами. Именно поэтому комплексное представление широко используется при анализе электрических цепей переменного тока.

1.3. КОМПЛЕКСНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ПРОВОДИМОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.Комплексное сопротивление

Введение комплексного представления токов и напряжений требует определить и сопротивление элементов электрических цепей в комплексной форме - Z .

Хорошо известно, что сопротивление резистора определяется как отношение напряжения на резисторе к току, протекающему через него. Если напряжение и ток представлены в комплексной форме, то

$$Z_R = \frac{\dot{U}_{m_R}(t)}{\dot{I}_{m_R}(t)} = \frac{\dot{U}_{m_R} \cdot e^{j\omega t}}{\dot{I}_{m_R} \cdot e^{j\omega t}} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_u}}{I_m \cdot e^{j\varphi_i}}$$

Но на предыдущей лекции было установлено, что $\varphi_u = \varphi_i$. Поэтому

$$Z_R = \frac{U_m}{I_m} = R. \quad (3.1)$$

Таким образом видим, что комплексное сопротивление резистора выражается только действительным числом. Оно не вносит фазовых искажений между токами и напряжением. Чтобы подчеркнуть этот факт такое сопротивление часто называют активным.

Комплексное сопротивление емкости определяется отношением

$$Z_C = \frac{\dot{U}_{m_c}(t)}{\dot{I}_{m_c}(t)} = \frac{\frac{1}{j\omega C} \dot{I}_{m_c} e^{j\omega t}}{\dot{I}_{m_c} \cdot e^{j\omega t}} = -j \frac{1}{\omega C}. \quad (3.2)$$

Видим, что комплексное сопротивление емкости переменному току выражается мнимым числом. Мнимая единица $-j$ физически определяет сдвиг фаз между током и напряжением на 90° . Это хорошо согласуется с ее максимальным значением

$$-j = e^{-\frac{\pi}{2}}.$$

Поэтому на емкости напряжение отстает от тока на 90° . Это означает, что сначала растет ток, протекающий через конденсатор, затем, с некоторым отставанием увеличивается заряд и напряжение.

Коэффициент $1/\omega C$ определяет величину сопротивления в Омах. Он обратно пропорционален частоте, называется емкостным сопротивлением и обозначается X_C , т.е.

$$Z_C = -jX_C [\text{Ом}]. \quad (3.3)$$

Комплексное сопротивление индуктивности определяется отношением

$$Z_L = \frac{\dot{U}_{m_L}(t)}{\dot{I}_{m_L}(t)} = \frac{j\omega L \cdot \dot{I}_{m_L} e^{j\omega t}}{\dot{I}_{m_L} e^{j\omega t}} = j\omega L. \quad (3.4)$$

И в этом случае сопротивление выражается мнимым числом. Но так как это число положительное, то это означает, что на индуктивности напряжение опережает ток на 90° .

Коэффициент ωL определяет величину сопротивления в Омах. Он пропорционален частоте, называется индуктивным сопротивлением и обозначается X_L , т.е.

$$Z_L = jX_L [\text{Ом}]. \quad (3.5)$$

Чтобы подчеркнуть тот факт, что сопротивления емкости и индуктивности выражаются мнимыми числами, их называют реактивными сопротивлениями, а конденсатор и индуктивность - реактивными элементами цепи.

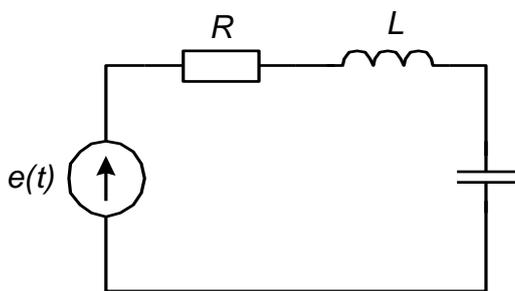


Рис. 3.1

Определим теперь комплексное сопротивление электрической цепи, содержащей активные и реактивные элементы, например последовательно включенные R, L и C элементы (рис.3.1). Такая цепь представляет замкнутый контур, поэтому для нее справедлив второй закон Кирхгофа

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t). \quad (3.6)$$

В последнем выражении проведем замену символов мгновенных напряжений и ЭДС на их комплексные изображения по правилам, определенным в лекции 1.2. Такой прием получил название символического метода. Так как ток протекающий через все элементы последовательной цепи одинаков, то (3.6) приходит к виду

$$\dot{E}(t) = R \cdot \dot{I}_m(t) + j\omega L \cdot \dot{I}_m(t) - j \frac{1}{\omega C} \dot{I}_m(t).$$

Преобразуем это выражение к виду

$$\frac{\dot{E}(t)}{\dot{I}_m(t)} = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

По определению выражение в правой части последнего равенства есть ни что иное, как комплексное сопротивление цепи рис.3.1, т.е.

$$Z = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = R + jX, \quad (3.7)$$

где R - действительная часть или активное сопротивление цепи.

$jX = j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$ - мнимая часть или реактивное сопротивление цепи.

Выражение (3.7) представляет комплексное сопротивление в алгебраической форме. Соотношения между составляющими комплексного сопротивления находятся в полном соответствии с соотношениями для комплексного

представления тока. Но для большей наглядности вводится понятие треугольника сопротивления (рис.3.2).

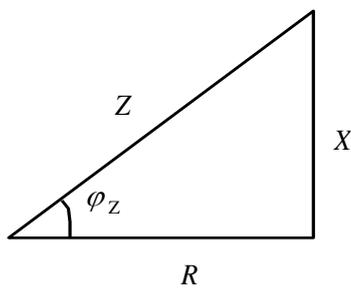


Рис. 3.2

В треугольнике - гипотенуза определяется модулем комплексного сопротивления Z , причем

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (3.8)$$

Противолежащий катет - реактивным сопротивлением X , причем

$$R = Z \cdot \cos \varphi_z. \quad (3.9)$$

Угол φ_z определяет сдвиг фаз между током и напряжением, который вносится комплексным сопротивлением цепи, причем

$$X = Z \cdot \sin \varphi. \quad (3.10)$$

Учитывая выражения (3.8) ÷ (3.11) легко перейти от алгебраической к тригонометрической форме комплексного сопротивления

$$Z = Z(\cos \varphi_z + j \sin \varphi_z), \quad (3.12)$$

а применив формулу Эйлера получить показательную форму

$$Z = Z \cdot e^{j\varphi_z}. \quad (3.13)$$

Теперь можно записать закон Ома для участка цепи без источника ЭДС в комплексном изображении

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{U_m \cdot e^{j\varphi_E}}{Z \cdot e^{j\varphi_z}} = \frac{U_m}{Z} \cdot e^{j(\varphi_E - \varphi_z)} \quad (3.14)$$

Выражение (3.14) показывает, что в цепях переменного тока модуль тока определяется отношением модуля напряжения (его амплитудного значения) к модулю комплексного сопротивления, а фаза тока определяется разностью фаз напряжения и комплексного сопротивления. Отсюда вытекает еще одно полезное для практики выражение

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \frac{U_0}{I_0}. \quad (3.15)$$

2.Комплексная проводимость

В цепях постоянного тока проводимость резистора определяется отношением тока к напряжению:

$$G = \frac{I}{U} = \frac{1}{R}.$$

Эта величина обратно пропорциональна сопротивлению.

В цепях переменного тока следует пользоваться понятием комплексной проводимости, которая обозначается Y и, в общем случае, содержит действительную G и мнимую B части:

$$Y = G + jB.$$

Как и в цепях постоянного тока комплексная проводимость участка цепи обратна комплексному сопротивлению, т.е.

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2}.$$

Отсюда

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}, \quad B = -\frac{X}{R^2 + X^2}, \quad Y = \frac{1}{Z}, \quad (3.16)$$

где Y - модуль комплексной проводимости.

Соотношение между составляющими комплексной проводимости аналогичны соотношениям между составляющими комплексного сопротивления.

Комплексная проводимость резистора

$$Y_R = \frac{1}{Z_R} = \frac{1}{R} = G. \quad (3.17)$$

Комплексная проводимость конденсатора

$$Y_C = \frac{\dot{I}_{mC}}{\dot{U}_{mC}} = j\omega C = jB_C. \quad (3.18)$$

Комплексная проводимость индуктивности

$$Y_L = \frac{\dot{I}_{mL}}{\dot{U}_{mL}} = \frac{1}{j\omega L} = -j \frac{1}{\omega L} = -jB_L. \quad (3.19)$$

В заключение отметим, что комплексное сопротивление удобно применять для анализа участков электрической цепи с последовательным включением элементов,

а комплексную проводимость - для участков с параллельным включением элементов.

1.4 ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

1. Мгновенная мощность цепи с RL и C элементами

В общем случае мгновенная мощность определяется произведением тока на напряжение:

$$p(t) = i(t) \cdot u(t). \quad (4.1)$$

Определим мгновенную мощность для цепи с последовательно включенными RL и C элементами (рис.3.1). Пусть в этой цепи протекает ток

$$i(t) = I_m \cdot \sin \omega t. \quad (4.2)$$

Он одинаков для всех элементов цепи.

Напряжение цепи определяется суммой падений напряжений на отдельных элементах

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t). \quad (4.3)$$

С учетом выражений (1.8) и (1.11) перепишем (4.3):

$$u(t) = R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt. \quad (4.4)$$

Подставляя в (4.4) выражение для $i(t)$ и, решая его, получим

$$\begin{aligned} u(t) &= R \cdot I_m \cdot \sin \omega t + \omega L \cdot I_m \cos \omega t - \frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \\ &= R I_m \sin \omega t + X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теперь, подставляя (4.2) и (4.5) в (4.1) находим выражение для мгновенной мощности цепи рис. 3.1:

$$\begin{aligned} p(t) &= I_m \sin \omega t (R I_m \sin \omega t + X_L I_m \cos \omega t - X_C I_m \cos \omega t) = \\ &= R I_m^2 \sin^2 \omega t + X_L I_m^2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t - X_C I_m^2 \sin \omega t \cdot \cos \omega t. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) показывает, что мгновенная мощность цепи определяется суммой слагаемых мощностей каждого из элементов. Это требует более детального анализа (4.6).

2. Активная, реактивная, полная мощность

Для анализа (4.6) применим известные из курса тригонометрии формулы преобразования:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t); \quad \sin \omega t \cdot \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin 2\omega t.$$

Применяя их к (4.6) получим:

$$p(t) = RI^2 - RI^2 \cos 2\omega t + X_L I^2 \sin 2\omega t - X_C I^2 \sin 2\omega t, \quad (4.7)$$

где I - действующее значение тока, причем $I^2 = \frac{I_m^2}{2}$.

Первые два слагаемые в (4.7) определяют мгновенную мощность, выделяемую на элементе R . Можно записать, что

$$P_R(t) = RI^2 - RI^2 \cos 2\omega t \quad (4.8)$$

Как видно из (4.8) мгновенная мощность $p_R(t)$ содержит постоянную составляющую $P = RI^2$ и переменную, меняющуюся с удвоенной частотой. График $p_R(t)$ приведен на рис. 4.1. График наглядно показывает, что мощность $p_R(t)$ всегда положительна и изменяется от 0 (в момент $t=0, k \cdot T/2$) до $2RI^2$ (в моменты $(2k-1) \cdot T/4$), $T=2\pi/\omega$ - период тока.

Среднее за период значение мощности обозначают P и называют активной мощностью, причем

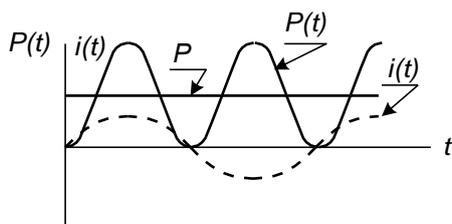


Рис. 4.4

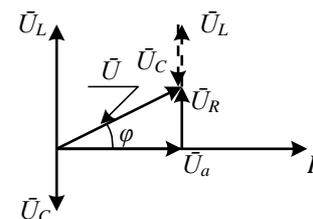


Рис. 4.2

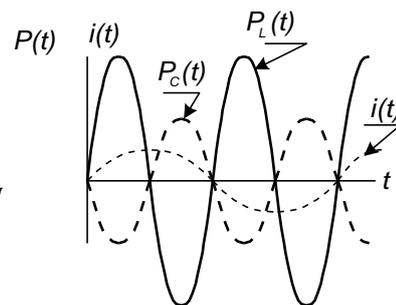


Рис. 4.3

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T P_R(t) dt = R \cdot I^2. \quad (4.9)$$

Для более детального анализа мгновенной мощности $P_R(t)$ обратимся к выражению (4.5)., Этому выражению соответствует векторная диаграмма рис.4.2. В ней в качестве исходного принят вектор тока \bar{I} . Вектор напряжения на

индуктивности \bar{U}_L опережает ток, а на емкости \bar{U}_C отстает от тока на 90° .
Напряжение на резисторе U_a совпадает по фазе с током.

Проведем сложение векторов. Для этого начало вектора \bar{U}_L переместим в точку конца вектора \bar{U}_a , а начало вектора \bar{U}_C - в точку конца вектора \bar{U}_L . Результатом сложения является вектор \bar{U} выходящий из начала вектора \bar{U}_a в конец вектора \bar{U}_C . Угол φ определяет сдвиг фаз между током и результирующим напряжением, т.е. $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Соединим точки концов двух векторов - \bar{U} и \bar{U}_a . Обозначим вновь полученный вектор $\bar{U}_r = \bar{U} - \bar{U}_a$. Образовавшийся треугольник из векторов $\bar{U}; \bar{U}_a; \bar{U}_r$ называют треугольником напряжений. Для него справедливы следующие выражения:

$$U_a = R \cdot I = U \cdot \cos \varphi; \quad \varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (4.10)$$

$$U_r = X_r \cdot I = U \cdot \sin \varphi, \quad X_r = X_L - X_C = \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (4.11)$$

$$U = \sqrt{U_a^2 + U_r^2} = I \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad (4.12)$$

$$\varphi = \arctg \frac{U_r}{U_a} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (4.13)$$

Возвратимся вновь к анализу мгновенной мощности, выделяемой на элементе R - $p_R(t)$. С учетом (4.10) перепишем (4.8) в виде

$$P_R(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\omega t \quad (4.14)$$

Первое слагаемое в правой части полностью соответствует (4.9) т.е. определяет активную мощность

$$P = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi \text{ [Вт]} \quad (4.15)$$

Выражение (4.15) используется в практике намного чаще так как определяет зависимость активной мощности от сдвига фаз между действующими значениями тока и напряжения цепи. В силу этого коэффициент $\cos \varphi$ называют коэффициентом мощности и обозначают λ

$$\lambda = \cos \varphi \quad (4.16)$$

Обратимся к исходному выражению для мгновенной мощности цепи - (4.7). В нем третье и четвертое слагаемое определяют мощность, выделяемую на реактивных элементах - индуктивности

$$P_L(t) = X_L \cdot I^2 \cdot \sin 2\omega t \quad (4.17)$$

и емкости

$$P_C(t) = X_C \cdot I^2 \cdot \sin 2\omega t \quad (4.18)$$

Каждое из этих слагаемых изменяются с удвоенной (относительно тока) частотой, но имеют противоположные фазы (рис.4.3). Так как постоянная составляющая в (4.17) и (4.18) отсутствуют, то среднее значение каждого из них равно нулю. Однако сумма $p_L(t)$ и $p_C(t)$ отлична от нуля и определяет мгновенную мощность реактивных элементов (участков) цепи. Определим ее:

$$p_r(t) = p_L(t) + p_C(t) = (X_L - X_C) \cdot I^2 \sin 2\omega t = X_r \cdot I^2 \cdot \sin 2\omega t \quad (4.19)$$

Применим к (4.19), (4.11), тогда

$$p_r(t) = U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t \quad (4.20)$$

Коэффициент

$$U \cdot I \cdot \sin \varphi = Q \text{ [вар]} \quad (4.21)$$

называется реактивной мощностью, обозначается Q и измеряется в вольт-амперах реактивных [вар].

Теперь общее выражение для мгновенной мощности всей цепи (рис.3.1) можно записать в виде

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \cos 2\omega t + U \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2\omega t \quad (4.22)$$

Второе и третье слагаемые в (4.22) свернем как косинус суммы аргументов - $\cos(2\omega t + \varphi)$. Тогда

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos \varphi - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi) \quad (4.23)$$

Таким образом, мгновенная мощность цепи постоянную и переменную составляющие. Переменная составляющая изменяется относительно постоянной с удвоенной частотой (рис.4.4). Амплитудное значение переменной составляющей обозначают S и называют полной мощностью цепи

$$S = U \cdot I \text{ [ВА]} \quad (4.24)$$

Полная мощность в $\cos \varphi$ раз превышает постоянную составляющую (активную мощность). Поэтому график мгновенной мощности заходит в область отрицательных значений. Величина области отрицательных значений

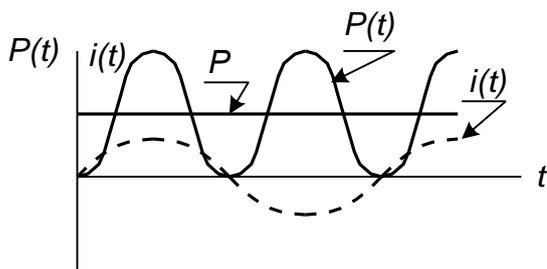


Рис. 4.4

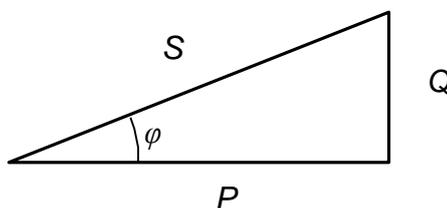


Рис. 4.5

определяется коэффициентом мощности. Физически эта область определяет моменты времени в которые цепь возвращает энергию источника.

Если умножить все стороны треугольника сопротивлений (рис.3.2) на I^2 , то получим треугольник мощностей (рис.4.5). В этом треугольнике гипотенуза - полная мощность S , прилежащей к острому углу катет - активная мощность P , а противолежащий - реактивная мощность Q . Угол φ определяется сдвигом фаз

между током и напряжением цепи и задает значение коэффициента мощности. Для треугольника очевидны выражения

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (4.25)$$

$$P = R \cdot I^2 = U \cdot I \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi,$$

$$Q = S \cdot \sin \varphi,$$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \lambda. \quad (4.26)$$

Полная мощность S это теоретически достижимая, расчетная мощность, По значению S производятся расчеты сечения проводов, изоляция, параметры приемников электрической энергии. Из-за сдвига фаз φ мощность полностью не реализуется. Поэтому $\cos \varphi$ и получил название коэффициента мощности. Всегда стремятся обеспечить его высоким.

3. Выражение мощности в комплексной форме

Широкое применение комплексного представления тока и напряжения в процессе анализа электрических цепей предполагает найти комплексное представление для активной, реактивной и полной мощности. На первый взгляд эта задача не должна вызывать затруднений. Достаточно в выражение для мощности подставить комплексные ток и напряжение. Посмотрим так ли это?

Пусть заданы комплексные ток $I_m = I_m \cdot e^{j\varphi_i}$ и напряжение $U_m = U_m \cdot e^{j\varphi_u}$.

Тогда их произведение должно представлять полную мощность цепи.

$$\frac{U_m \cdot I_m}{2} = \dot{U} \cdot \dot{I} \cdot e^{j(\varphi_u + \varphi_i)} = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u + \varphi_i) + j \cdot U \cdot I \cdot \sin(\varphi_u + \varphi_i).$$

Правая часть полученного выражения должна определять активную (действительную часть) и реактивную (мнимая часть) мощности. Но слагаемые правой части не соответствуют выражениям (4.16) и (4.21), так как в них сдвиг фаз определяется разностью

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i.$$

Чтобы устранить такое несоответствие пользуются искусственным приемом. Под комплексным изображением полной мощности понимают произведение комплексного напряжения на комплексно-сопряженный ток. Напомним, что два

комплексных числа \dot{I} и \dot{I}^* называются взаимно сопряженными, если их действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком:

$$\dot{I} = i' + ji'' = I \cdot (\cos \varphi + j \sin \varphi) = I \cdot e^{j\varphi};$$

$$\dot{I}^* = i' - ji'' = I(\cos \varphi - j \sin \varphi) = I \cdot e^{-j\varphi}.$$

При таком определении комплексная мощность цепи определится выражением

$$\tilde{S} = \frac{\dot{U}_m \cdot \dot{I}_m^*}{2} = U \cdot I \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}, \text{ т.е.}$$

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = U \cdot I \cdot \cos \varphi + j \cdot U \cdot I \cdot \sin \varphi = S \cdot \cos \varphi + jS \cdot \sin \varphi = P + jQ. \quad (4.27)$$

Знак «тильда» означает комплекс полной мощности, составленный при участии сопряженного комплекса тока. Действительная часть комплексной мощности есть полная мощность, а мнимая часть - реактивная мощность. Модуль комплексного представления - полная мощность.

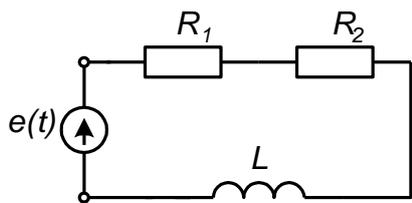


Рис. 4.6

Рассмотрим пример. Пусть в схеме рис. (4.6)

заданы ЭДС $e(t) = 141 \cdot \sin \omega t$ [В] и параметры

элементов: $R_1 = 3$ [Ом]; $R_2 = 2$ [Ом];

$L = 0,0095$ [Г]; $\omega = 314 \left[\frac{\text{Paд}}{\text{с}} \right]$. Определить активную,

реактивную и полную мощности цепи.

Решение

Комплекс действующего значения напряжения на входе всей схемы равен

$$\dot{U} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = 100 [В]$$

Комплексное сопротивление цепи

$$Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 3 + 2 + j314 \cdot 0,0095 = 5 + j2,983.$$

Переходим к показательной форме комплексного сопротивления. Для этого находим модуль

$$Z = \sqrt{5^2 + (2,983)^2} \approx 5,82$$

и фазу

$$\varphi = \arctg \frac{2,983}{5} = 31^\circ.$$

Отсюда

$$Z = 5,82 \cdot e^{j31^\circ}.$$

Комплекс действующего значения тока

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{100}{5,82 \cdot e^{j31^\circ}} = 17,2 \cdot e^{-j31^\circ}.$$

Сопряженный комплекс тока

$$\dot{I}^* = 17,2 \cdot e^{j31^\circ} \quad \dot{I}^* = 17,2 \cdot e^{j31^\circ}.$$

Комплекс мощности

$$\tilde{S} = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = 100 \cdot 17,2 \cdot e^{j31^\circ} = 1720 \cdot \cos 31^\circ + j1720 \sin 31^\circ.$$

Отсюда:

$$P = 1475[\text{Вт}]; \quad Q = 886[\text{вар}]; \quad S = 1720[\text{ВА}].$$

1.5 РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

Мы уже знаем, что алгебраическая форма комплексного сопротивления Z имеет действительную R и мнимую jX части

$$Z = R + jX.$$

Значение действительной и мнимой частей определяются составом и структурой схемы. Для схемы с последовательно включенными R , L , и C элементами реактивное сопротивление

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

Очевидно, что значение слагаемых зависит от частоты ω . При малых частотах емкостная составляющая имеет большое значение, а индуктивная - малое. Поэтому реактивное сопротивление схемы X принимает емкостной характер. При больших частотах X принимает индуктивный характер. Существует такая частота ω_0 при которой

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поливанов К. М., Теоретические основы электротехники, 2 изд., ч. 1, 3, М., 1972-75.
2. Городецкий И. Е., Основы технических измерений в машиностроении, М., 1950.
3. Арутюнов О. Л., Электрические измерительные приборы и измерения, М., 1958.
4. Фремке А. В., Электрические измерения, 4 изд., Л., 1973.
5. Мирский Г. Я., Радиоэлектронные измерения, 3 изд., М., 1975.
6. Червякова В. И., Термоэлектрические приборы, М.- Л., 1963.
7. Мизюк Л. Я., Электромеханические и электронные фазометры, М. – Л., 1962.
8. Чех И., Осциллографы в измерительной технике, пер. с нем. М., 1965.
9. Шкурин Г. П., Справочник по электро- и электронноизмерительным приборам, М., 1972.
10. Илюнин К. К., Справочник по электроизмерительным приборам, Л., 1973.
11. Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А., Энциклопедический словарь, М.
12. Плеханов Г.В., Электроника и информационно-измерительная техника / Учебное пособие, Рубцовск 2014.
13. Плеханов Г.В., Коратаев К.Э. Электроника и ИИТ / Задания и методические указания, Рубцовск 2012.