МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал) ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

Г.А. ОБУХОВА

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Методическое пособие для студентов экономических направлений всех форм обучения

Рубцовск 2012

УДК 517.8

Обухова Г.А. Введение в теорию игр: Методическое пособие для студентов экономических направлений всех форм обучения /Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2012.- 38 с.

В методическом пособии изложены основные положения и сведения из теории игр, приведены примеры из различных сфер человеческой деятельности, приведено их строгое математическое обоснование. В пособии приводится исследование математических моделей принятия решений в условиях конфликта. В нем содержатся примеры для самостоятельной работы, а также тестовые задания. Методическое пособие предназначено для студентов экономических специальностей.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол № 1 от 27.09.2012г.

Рецензент:
к.пед.н., доцент Н.А. Ларина

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Многие социально-экономические ситуации, в которых рассматривается вопрос о выборе решения, обладают тем свойством, что в них сталкиваются не менее двух сторон с различными (иногда противоположными) интересами, каждая из которых для достижения своей цели имеет возможность действовать различными способами, выбор которых при некоторых условиях может осуществляться в зависимости от действий противоборствующей стороны. Такие ситуации называют конфликтными. Конфликтная ситуация характеризуется следующими чертами:

1) наличие заинтересованных сторон (в качестве которых могут выступать потребители, фирмы, отдельные страны, различные таможенные, торговые, финансовые и экономические союзы, индивидуумы и т.д.);

2) существование возможных действий каждой из сторон (выбор объема потребления, выбор дивидендной политики, различные способы комплектования инвестиционного портфеля, выбор объемов выпуска, недопущение на национальный рынок некоторых товаров по политическим или экономическим соображениям, заключение договоров о предоставлении «режима наибольшего благоприятствования» и т.д.);

3) интересы сторон (удовлетворение различных политических, финансовых, экономических потребностей, монопольные прибыли, вытеснение конкурентов с рынка сбыта, распродажа избыточного товара на внешнем рынке, повышение доходов казны и производителей и т.д.).

Выбор поведения каждой из сторон в реально-жизненных конфликтах — сложная задача. Поэтому для ее анализа прибегают к математическому моделированию, отбрасывая несущественные факторы данной конфликтной ситуации и ограничивая ее протекание определенными правилами.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой. Раздел теории исследования операций, занимающийся математическими моделями принятия оптимальных решений в условиях конфликта, называется **теорией игр**.

Математико-игровые модели находят свое применение не только в конфликтных ситуациях социально-экономической области, но и во взаимодействии человека с природой, в политике, в биологии, в военной области и др.

Заинтересованные стороны (в частности, лица) в игре называются **игроками**. Часто, хотя и не всегда, считают всех игроков равноправными. В некоторых играх по различным причинам создаются объединения. Так, если целью объединения являются совместные действия, то эти объединения называются коалициями действия. Если же объединение образовано по признаку идентичности предпочтений исходов игры, то они называются коалициями интересов. Указанные коалиции не всегда совпадают. В случае совпадения их называют просто коалициями. С точки зрения временного фактора коалиции могут быть временные или постоянные на протяжении игры. Если в игре участвуют два противника, то она называется парной. Если число противников более двух, то игра называется множественной. Множественная игра с двумя постоянными коалициями есть не что иное, как парная игра.

С целью математической формализации игра должна проходить по определенным правилам, представляющим собой систему условий, описывающих:

1) возможные действия каждого из игроков;

2) объем информации, которую может получить каждая сторона о действиях другой;

3) исход игры в результате каждой совокупности ходов противников.

Любое возможное в игре действие игрока называется его стратегией или, точнее — **чистой стратегией**.

Игра называется **конечной**, если множество стратегий каждого игрока конечно. В противном случае (т.е. когда множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно) игра называется бесконечной. Будем рассматривать только конечные игры.

Предполагая, что игрок A обладает $m \geq 1$ (чистыми) стратегиями, обозначим их через $A_1, ..., A_m$, а множество этих стратегий через S_A^C[1]. Таким образом, $S_A^C = \left\{A_1, ..., A_m\right\}$. В условиях конфликта каждый игрок делает свой ход, т.е. выбирает некоторую свою стратегию, в результате чего образуется набор x стратегий всех игроков, который называется *исходом* или *ситуацией* конфликта. Так, например, если в парной игре участвуют игроки A и B с множествами стратегий соответственно $S_A^C = \left\{A_1, ..., A_m\right\}$ и $S_B^C = \left\{B_1, ..., B_n\right\}$ и в результате очередного хода игроки выбрали стратегии соответственно A_i и B_j, то упорядоченная пара $x = \left(A_i, B_j\right)$ и является ситуацией после этого хода.

Декартовым произведением $D \times E$ двух множеств D и E (существен порядок сомножителей) называется множество $D \times E = \left\{\left(d, e\right) : d \in D, e \in E\right\}$ всех упорядоченных пар (d, e), первая координата которых d принадлежит первому сомножителю — множеству D, а вторая e — второму сомножителю E.

Принимая во внимание это определение, мы видим, что множество всех ситуаций в чистых стратегиях представляет собой декартово произведение $S_A^C \times S_B^C$ множества чистых стратегий S_A^C игрока A на множество чистых стратегий S_B^C игрока B, т.е. $S_A^C \times S_B^C = \left\{A_i, \mathrm{B_j}\right): i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\right\}$. Аналогичная интерпретация имеет место и для случая игр с конечным числом игроков более двух.

Иногда правила игры таковы, что не всякая ситуация допустима. Недопустимые ситуации называются **запрещенными**. При выборе игроками стратегий, приведших к запрещенной ситуации, игра считается несостоявшейся, поскольку проведена не по правилам.

[1] Буква «С» в верхнем индексе – первая буква английского *clean* [kli:n] – чистый.

Сравнение степеней удовлетворения интересов игрока в различных- ситуациях осуществляется в общем случае с помощью отношения предпочтения данного игрока, которое для любых двух ситуаций либо определяет более предпочтительное из них, либо указывает на их равнопредпочтительность, либо устанавливает их несравнимость по предпочтению. Отношение предпочтения описывается с помощью отношения частичной упорядоченности на множестве X всех ситуаций, которое определяется следующим образом: подмножество τ декартова квадрата $X^2 = X \times X$ множества всех ситуаций $X\left(\tau \subset X^2\right)$ называется отношением частичной упорядоченности на множестве X, если оно рефлексивно, т.е. $\left(x,\, x\right) \in \tau$ для любой ситуации $x \in X$ (принадлежность $\left(x,\, x\right) \in \tau$ можно эквивалентным образом записать и так: $x\tau\, x$), и транзитивно, т.е. если для любых трех ситуаций $x,\, y,\, z \in X$ имеют место принадлежности $\left(x,\, x\right) \in \tau$ и $\left(y,\, z\right) \in \tau$, то $\left(x,\, z\right) \in \tau$ (в другой записи: если $x\tau y$ и $y\tau z$, то $x\tau z$).

Говорят, что ситуация x предпочтительнее (для данного игрока) ситуации y, и пишут $x \succ y$, если $x\tau y$, но не $y\tau x$. Ситуации x и y равнопредпочтительны: $x \sim y$, если $x\tau y$ и $y\tau x$; и, наконец, ситуации несравнимы по предпочтению, если не выполняется ни одно из соотношений $x\tau y$ и $y\tau x$.

Чаще, однако, степень удовлетворения интересов игрока A характеризуется его **функцией выигрыша** $F_A : X \to R$, определенной на множестве $X = S_A^C \times S_B^C$, всех ситуаций и ставящей в соответствие каждой ситуации $x \in X$ некоторое число $F_A\left(x\right) \in R$, называемое **выигрышем игрока *A в ситуации x***. В этом случае несравнимых ситуаций уже не будет.

Аналогично, для игрока B функция выигрыша $F_B : Y \to R$ определена на множестве $Y = S_A^C \times S_B^C = \left\{\left(B_j,\, A_i\right) : j = 1,\, \ldots,\, n,\; i = 1,\, \ldots,\, m\right\}$ ситуаций $y = \left(B_j,\, A_i\right)$ и каждой из них ставит в соответствие число $F_B\left(y\right) \in R$, называемое выигрышем игрока B в ситуации y.

Итак, протекание конфликтной игры состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и получении в сложившейся ситуации выигрыша. Поэтому всякая конфликтная игра полностью описывается совокупностью, состоящей из множества игроков, множеств их возможных стратегий и множества их функций выигрыша.

Основной целью теории игр является выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте, т.е. выявление для каждого из них «оптимальной стратегии».

Понятие оптимальной стратегии — одно из важнейших понятий теории игр. Оптимальной называется стратегия, которая при многократно повторяющейся игре гарантирует игроку максимально возможный средний выигрыш (или, эквивалентно, минимально возможный средний проигрыш). Выбор оптимальной стратегии базируется на принципе, предполагающем, что оба игрока разумны в одинаковой степени и поведение каждого из них направлено на противодействие противнику в достижении его цели. Таким образом, теория игр абстрагируется от ошибок, просчетов, азарта и риска, присущих игрокам, в реальных конфликтах.

Оптимальность стратегии может пониматься в различных смыслах в зависимости от показателя оптимальности (эффективности). Стратегия, оптимальная по одному показателю, совсем не обязана быть оптимальной по другому. Поэтому чаще всего оптимальная стратегия, определенная в результате применения теории игр к реальным конфликтным ситуациям, является теоретически оптимальной и в большинстве случаев реально удовлетворительной.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение конфликтной ситуации и перечислите ее основные черты.
2. Как называется математическая модель конфликтной ситуации?
3. В чем состоит различие между реальным конфликтом и игрой?
4. В каких областях находят применение математико-игровые модели?
5. Как называются заинтересованные стороны в теории игр?
6. В чем состоит отличие коалиций интересов от коалиций действия?
7. Дайте определение понятия «стратегия».
8. Что понимается под исходом, или ситуацией конфликта?
9. Как называются недопустимые ситуации?
10. Чем измеряется степень удовлетворения интересов в теории игр?
11. Что представляет собой отношение предпочтения и какими свойствами оно обладает?
12. Дайте определение функции выигрыша.
13. Что понимается под оптимальной стратегией?

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР

Игры классифицируют по различным признакам в соответствии с конкретизацией видов и свойств составляющих характеристик игры.

Если в игре образование коалиций недопустимо или нецелесообразно, то такие игры называются **бескоалиционными**, однако бескоалиционными можно считать и игры, в которых совокупности коалиций действия и коалиций интересов совпадают. В этом случае каждую коалицию можно считать игроком (поскольку это есть заинтересованная сторона).

Таким образом, бескоалиционная игра, которую называют также просто игрой, представляет собой совокупность множества игроков, множеств их стратегий и наборов их функций выигрыша.

В бескоалиционных играх цель каждого игрока— получение максимально возможного **индивидуального выигрыша**. Даже если игроки и объединяются в коалиции, то такие коалиции преследуют только интересы отдельных игроков, вошедших в коалицию, и основная задача бескоалиционной игры состоит в **дележе общего выигрыша** между игроками.

В играх, по существу коалиционных, совокупности коалиций действия и коалиций интересов различны. В коалиционных играх игроки стремятся максимизировать выигрыши коалиций без последующего их распределения между игроками.

Будем рассматривать только бескоалиционные игры.

Игры можно классифицировать по числу игроков: **парные** игры, в которых два игрока, и **множественные** игры, в которых число игроков больше двух. Если в парной игре игроки преследуют **противоположные цели**, то игра называется **антагонистической**. В такой игре один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой. Поэтому функции выигрышей $F_A : S_A^C \times S_B^C \to R$ и $F_B : S_B^C \times S_A^C \times S_A^C \to R$ соответственно игроков *A* и *B* связаны между собой соотношением

$$F_B\left(B_j,\, A_i\right) = -F_A\left(A_i,\, B_j\right),\ i = 1,\ldots,\ m,\ j = 1,\ldots,\ n. \qquad (2.1)$$

Из равенства (2.1) следует, что $F_B\left(B_j,\, A_i\right) + F_A\left(A_i,\, B_j\right),\ i = 1,\ldots,\ m,\ j = 1,\ldots,\ n$. Потому антагонистические игры называют также **играми двух сторон с нулевой суммой выигрыша**.

В силу равенства (2.1), функция выигрыша игрока *B* полностью определяется функцией выигрыша игрока *A* и, следовательно, антагонистическая игра с игроками *A* и *B* вполне определяется совокупностью $\{S_A{}^C,\ S_B{}^C,\ F_A\}$, состоящей из множества $S_A{}^C$ стратегий игрока *A*, множества $S_B{}^C$ стратегий игрока *B* и функции F_A выигрыша игрока *A*.

Антагонистические игры с точки зрения математического моделирования являются достаточно простыми и потому наиболее хорошо изученными.

Можно разделить игры на классы по мощности множеств стратегий игроков. Если множество стратегий каждого игрока конечно, то игра называется **конечной**. В противном случае она называется **бесконечной**.

В конечной антагонистической игре с игроками *A* и *B* можно строки некоторой матрицы (таблицы) поставить в соответствие стратегиям A_i игрока *A*, а столбцы — в соответствие стратегиям B_j игрока *B*. Если на пересечениях строк и столбцов расставить значения $F_A\left(A_i,\, B_j\right) = a_{ij}$ функции выигрыша F_A игрока *A*, соответствующие ситуациям $\left(A_i,\, B_j\right)$, то получим матрицу *A*, которая называется **матрицей выигрышей игрока *A***.

Аналогичным образом, из значений $F_B\left(B_j,\, A_i\right) = ba_{ji}$ функции выигрыша F_B игрока *B*можно составить ***матрицу B выигрышей игрока B***.

В силу равенства (3.1), $B = -A^T$ (т.е. матрица *B* противоположна транспонированной матрице *A*). Таким образом, матрица *B* определяется матрицей *A*, и потому конечная антагонистическая игра характеризуется фактически только одной матрицей выигрышей и в силу этого называется **матричной**.

Матричная игра полностью определяется совокупностью $\{S_A{}^C,\ S_B{}^C,\ A\}$, состоящей из множества S_A^C стратегий игрока *A*, множества $S_B{}^C$ стратегий игрока *B* и матрицы *A* выигрышей игрока *A*.

В качестве **примера** антагонистической игры можно привести модель социально-экономического конфликта во внешней торговле XVII-XVIII вв., определяемой теорией меркантилизма (преобладание экспорта над импортом и, как следствие, накопление в стране золота и серебра). В этом случае увеличение золотого запаса одного государства осуществляется за счет другого.

Другими **примерами** антагонистических конфликтов могут служить отношения налоговых служб и недобросовестных налогоплательщиков, конкурирующих фирм в антагонистических условиях и т. д.

Несмотря на всю привлекательность антагонистической модели, она во многих случаях является достаточно грубым отражением реальных конфликтов, в которых интересы сторон хотя и разные, но тем не менее могут быть не противоположными, число игроков может быть больше двух и сумма их выигрышей может быть не равной нулю.

Если в конечной бескоалиционной игре участвуют два игрока A и B с различными, но не противоположными интересами, то матрицы их выигрышей A к B уже не будут удовлетворять равенству $B = -A^T$, и потому такую игру называют **биматричной**. Таким образом, биматричная игра вполне задается совокупностью $\{S_A\ , S_B{}^C, A, B\}$, состоящей из множества $S_A{}^C$ стратегий игрока A, множества $S_B{}^C$ стратегий игрока B, и уже двух матриц A и B выигрышей игроков A и B.

Дальнейшее рассмотрение бескоалиционных игр из перечисленных выше классов будет проводиться с позиций:

1) выработки принципов оптимальности (т.е. разумности или целесообразности поведения игроков);

2) реализуемости этих принципов (существования оптимальных ситуаций);

3) поиска этих реализаций.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие игры называются бескоалиционными и какую цель преследует каждый игрок в бескоалиционной игре?
2. Какие игры называются коалиционными?
3. На какие классы делятся игры в зависимости от числа игроков?
4. На какие классы делятся игры в зависимости от мощности множества возможных стратегий?
5. Дайте определение антагонистической игре и опишите совокупность характеристик, полностью ее определяющих.
6. Почему конечные антагонистические игры получили название «матричные игры»?
7. Приведите примеры социально-экономических конфликтов, которые можно моделировать антагонистическими играми.
8. Чем отличается совокупность характеристик биматричной игры от совокупности характеристик матричной игры?

3. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Исход игры — это значение некоторой функции, называемой функцией «выигрыша», которая может задаваться аналитически либо таблично (матрицей). Игра, в которой выигрыши и проигрыши игроков задаются матрицей, называется матричной.

Игра, в которой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, называется **игрой с нулевой суммой**.

Пример 1. В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 записать 2) и A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3.

Задача первого игрока — **максимизировать свой выигрыш**, задача второго игрока — **минимизировать свой проигрыш**.

Матрица игры, или платежная матрица, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок выбрал стратегию A_1, то в худшем случае он получит выигрыш $\alpha_1 = \min(0;\ -1;\ -2) = -2$. Соответственно, при выборе стратегии A_2 — $\alpha_2 = \min(1;\ 0;\ -1) = -1$, $A_3 - \alpha_3 = \min(2;\ 1;\ 0) = 0$. Предвидя такую возможность, первый игрок должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2;\ -1;\ 0) = 0.$$

Величина α — **гарантированный выигрыш игрока — называется нижней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение выигрыша α, называется **максиминной**.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Второй игрок при выборе стратегии B_1 в худшем случае получит проигрыш $\beta_1 = \max(0;\ 1;\ 2) = 2$. При выборе стратегий B_2 и B_3 проигрыш составит, соответственно, $\beta_2 = \max(-1;\ 0;\ 1) = 1$; $\beta_3 = \max(-2;\ -1;\ 0)$. Он выбирает стратегию, при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(2;\ 1;\ 0) = 0.$$

Величина β — **гарантированный проигрыш игрока — называется верхней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение проигрыша β, называется **минимаксной**. Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta = \nu$, то такая игра называется игрой с **седловой точкой**. Элемент матрицы, соответствующий паре оптимальных стратегий, называется седловым элементом матрицы. Этот элемент является **ценой игры**.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется **смешанной**.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\overline{x}\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m\right)$, с которым игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для которых выполняются условия $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0\ \ i = \overline{1,m}$. Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\overline{y}\left(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n\right)$,

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_i \ge 0\ \ j = \overline{1,n}.$$

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стратегий определяется как математическое ожидание выигрыша, т.е. равен

$$M\left(A,\ X,\ Y\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j\ .$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и недоминирующих стратегий.

Пример 2. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\alpha = \max(3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1){=}3$; $\beta = \min\left(8,\ 7,\ 7,\ 4,\ 5\right) = 4$; $\alpha \ne \beta$; $3 \le \nu \le 4$. Элементы стратегий A_2 и A_4 одинаковы, одну из них можно исключить. Все элементы стратегий A_2 меньше элементов стратегий A_1, следовательно, A_2 можно исключить. Все элементы A_5 меньше A_3, исключаем A_5.

$$A=\begin{pmatrix}8 & 6 & 4 & 4 & 3\\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

Для второго игрока, сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_5, исключаем B_2.

В результате преобразований получим матрицу

$$A=\begin{pmatrix}4 & 4 & 3\\ 7 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

$\alpha=\max(3,3)=3$; $\beta=\min(7,\ 4,\ 5)=4$; $\alpha\neq\beta$; $3\le\nu\le 4$.

4. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР СВЕДЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданной платежной матрицей

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn}\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_{i\ \text{опт}}\ge\nu,\ j=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока *А*, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{m1}x_m\ge\nu,\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{m2}x_m\ge\nu,\\ \qquad\qquad\ldots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\ldots+a_{mn}x_m\ge\nu.\end{cases}$$

Величина ν неизвестна, однако можно считать, что цена игры $\nu>0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого можно достигнуть, прибавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число. Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенства на ν.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq 1, \\ \ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq 1. \end{cases}$$

где

$$p_i = \frac{x_i}{\nu} \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$$

По условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1$. Разделим обе части этого равенства на ν.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = \frac{1}{\nu}.$$

Оптимальная стратегия игрока *А* должна максимизировать величину ν, следовательно, функция

$$F(\overline{p}) = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

должна принимать минимальное значение.

Таким образом, получена задача линейного программирования. Решая ее, находим значения $p_i,\ i = \overline{1,m}$ и величину $1/\nu$, затем отыскиваются значения $x_i = \nu p_i$.

Аналогично, для второго игрока оптимальная стратегия должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \leq \nu,\ \ i = \overline{1,m}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока *В*, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq \nu, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq \nu, \\ \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \leq \nu. \end{cases}$$

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенств на ν.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \leq 1, \\ \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq 1, \end{cases}$$

где

$$q_j = \frac{y_j}{\nu},\ \ j = \overline{1,n}.$$

По условию $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Разделим обе части этого равенства на ν.

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \frac{1}{\nu}.$$

Оптимальная стратегия игрока *B* должна минимизировать величину ν, следовательно, функция

$$Z(\overline{q}) = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

должна принимать максимальное значение.

Получена задача линейного программирования. Таким образом, для нахождения решения игры имеем симметричную пару двойственных задач линейного программирования. Можно найти решение одной из них, а решение второй находится с использованием теории двойственности.

Пример 3. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

Решение.

$\alpha = \max(1,\ 2,\ 1) = 2$; $\beta = \min(4,\ 9,\ 3,\ 6,\ 7) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $2 \le \nu \le 4$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока *A* имеем следующую задачу линейного программирования.

$$F(\overline{p}) = p_1 + p_2 + p_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 4p_2 + 2p_3 \ge 1; \\ 7p_1 + 9p_2 + 3p_3 \ge 1; \\ p_1 + 3p_2 + p_3 \ge 1; \\ p_1 + 6p_2 + 4p_3 \ge 1; \\ 5p_1 + 2p_2 + 7p_3 \ge 1; \end{cases}$$

$$p_i \ge 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Для оптимальной стратегии *B* имеет следующую задачу линейного программирования:

$$Z(\overline{q}) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 7q_2 + q_3 + q_4 + 5q_5 \le 1; \\ 4q_1 + 9q_2 + 3q_3 + 6q_4 + 2q_5 \le 1; \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 + 7q_5 \le 1; \end{cases}$$

$$q_i \ge 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

Оптимальные решения пары двойственных задач имеют вид

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{7}{19};\ \overline{p}_{опт}\left(0; \frac{6}{19}; \frac{1}{19}\right);\ \overline{q}_{опт}\left(0; 0; \frac{5}{19}; 0; \frac{2}{19}\right).$$

Учитывая соотношения между x_i и p_i; y_j и q_j, а также равенство $F_{\min} = Z_{\max} = \dfrac{1}{\nu}$, находим оптимальные стратегии игроков и цену игры

$$\bar{x}\left(0;\frac{6}{7};\frac{1}{7}\right);\ \bar{y}\left(0;0;\frac{5}{7};0;\frac{2}{7}\right);\ \nu = \frac{19}{7}.$$

5. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

В некоторых задачах, приводящихся к играм, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии.

1. **Критерий Вальда**. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия

$$\max_i\left(\min_j a_{ij}\right)$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. **Критерий максимума**. Он выбирается из условия

$$\max_i\left(\max_j a_{ij}\right).$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. **Критерий Гурвица**. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max_i\left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha)\max_j a_{ij}\right),$$

где α — степень оптимизма, изменяется в диапазоне [0,1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При α = 1 критерий превращается в критерий Вальда, при α = 0 — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. **Критерий Сэвиджа**. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ & & \dots & \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{\min} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Элементы матрицы рисков находятся по формуле

$r_{ij}=\max\limits_i a_{ij}-a_{ij}$,

где $\max\limits_i a_{ij}$ - максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия определяется выражением

$\min\limits_i\left(\max\limits_j r_{ij}\right)$.

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

Пример 4. В приближении посевного сезона фермер Иванов имеет четыре альтернативы: A_1 - выращивать кукурузу, A_2 - выращивать пшеницу, A_3 - выращивать овощи, A_4 - использовать землю под пастбища. Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории: B_1 - сильные осадки, B_2 - умеренные осадки, B_3 - незначительные осадки, B_4 - засушливый сезон.

Платежная матрица в тысячах рублей оценивается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -10 & -20 & 40 & -20 \\ 50 & 90 & 35 & 40 \\ -40 & 150 & 55 & -15 \\ 20 & 25 & 35 & 15 \end{pmatrix}.$$

Что должен посеять Иванов?

Решение.

1. Согласно критерию Вальда рекомендуется применять максимальную стратегию.

$\max\limits_i\left(\min\limits_j a_{ij}\right)=\max\left(-20;35;-40;15\right)=35$.

Следует сеять пшеницу.

2. Воспользуемся критерием Сэвиджа. Составим матрицу рисков, элементы которой находим по формуле

$r_{ij}=\max\limits_i a_{ij}-a_{ij}$;

$$R = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 15 & 60 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 55 \\ 30 & 125 & 20 & 25 \end{pmatrix}.$$

Оптимальная стратегия определяется выражением

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

Найдем $\min(70;60;90;125) = 60$.

В соответствии с этим критерием следует сеять пшеницу.

3. Воспользуемся критерием Гурвица. Оптимальная стратегия определяется по формуле

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right),$$

где α - степень оптимума и изменяется в диапазоне [0;1], предположим $\alpha = \frac{1}{2}$,

$\max_i \left(\frac{1}{2} \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right) = \max(10;62;5;55;25) = 62{,}5$, т.е. следует принять решение о посеве пшеницы.

4. Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятными $\left(p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4} \right)$, то для принятия решения следует найти математическое ожидание выигрыша

$$M_1 = (-10) \cdot \frac{1}{4} + 80 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} + (-20) \cdot \frac{1}{4} = \frac{90}{4},$$

$$M_2 = 50 \cdot \frac{1}{4} + 90 \cdot \frac{1}{4} + 35 \cdot \frac{1}{4} + 40 \cdot \frac{1}{4} = \frac{215}{4},$$

$$M_3 = (-40) \cdot \frac{1}{4} + 150 \cdot \frac{1}{4} + 55 \cdot \frac{1}{4} + (-15) \cdot \frac{1}{4} = \frac{150}{4},$$

$$M_4 = 20 \cdot \frac{1}{4} + 25 \cdot \frac{1}{4} + 35 \cdot \frac{1}{4} + 15 \cdot \frac{1}{4} = \frac{95}{4}.$$

Так как максимальное значение имеет M_2, то следует сеять пшеницу.

6. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН»

Пример 5.

Предприятию поручено выпускать два вида скоропортящихся продуктов $П_1$ и $П_2$. Ежедневные расходы на производство и реализацию продукции не должны превышать 4000 руб. Перед руководством предприятия поставлена задача: определить ежедневный объем производства каждого вида продукции с целью получения наибольшей прибыли. Для этого были проведены исследования, которые показали следующее:

- себестоимость единицы продукции $П_1$ равна 0,8 руб., отпускная цена — 1,2 руб; себестоимость единицы продукции $П_2$ равна 0,5 руб., отпускная цена — 0,8 руб;
- если продукция не реализуется в день выпуска, то ее качества значительно снижаются и она продается на следующий день по цене в 4 раза меньше отпускной;
- реализация продукции зависит от состояния погоды — в хорошую погоду реализуется 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц $П_2$; в плохую погоду реализуется 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц $П_2$; на реализацию всей произведенной за день продукции расходуется 200 руб.

Для предприятия важно знать состояние погоды и тогда производить продукцию в таком объеме и ассортименте, чтобы она реализовалась максимально в тот же день. Если бы можно было наперед предсказать состояние погоды, то оптимальным планом производства был бы план, полностью ориентированный на известное состояние погоды. Однако в настоящее время еще нет надежных способов прогноза погоды, и предприятие должно составлять план с учетом появления наиболее неблагоприятных для него состояний погоды. Можно трактовать ситуацию следующим образом: с одной стороны, предприятие заинтересовано производить продукцию с наибольшей пользой для себя, с другой стороны, имеется противник — природа, которая может максимально повредить предприятию. Поэтому данную ситуацию можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков: первый игрок — предприятие, второй — природа.

Можно считать, что природа неразумный противник и она не будет изучать поведение предприятия с целью максимально повредить ему, и поэтому не следует считать такую ситуацию как антагонистическую игру. Такие доводы имеют основания, тогда можно изучить статистические данные о поведении погоды и строить план производства продукции с учетом состояний погоды в среднем.

Однако и игровой подход имеет свои преимущества. Действительно, рассматривая природу как противника, предприятие может строить свои оптимальные планы с учетом наиболее неблагоприятных действий природы, а если природа отступит от этих своих самых неблагоприятных для предприятия действий, то этот оптимальный план поведения предприятия даст возможность ему увеличить свою прибыль.

Итак, в этой ситуации имеется два игрока: человек и природа. Какие же их стратегии? Очевидно, у природы имеется две стратегии: 1-я — создать хорошую погоду, 2-я — создать плохую погоду. У предприятия имеется также две стратегий: 1-я — производить продукцию в расчете на хорошую погоду, 2-я — производить продукцию в расчете на плохую погоду.

Таким образом, у обоих игроков имеется по две стратегии (конечное число стратегий), поэтому мы приходим к конечной игре двух игроков с нулевой суммой, т. е. к матричной игре, с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} $(i$ — 1, 2; j = 1, 2) в матрице A выражает прибыль предприятия при условии, что предприятие применяет свою i-ю стратегию, а природа свою j-ю стратегию.

Произведем расчеты элементов a_{ij} $(i = 1,2;\ j = 1,2)$. Прибыль P равна

$$P = Z - C,$$

где Z — сумма выручки за реализованную продукцию, C — затраты на производство и реализацию продукции. Расчеты будут производиться для периода в один день. Для получения элемента a_{11} необходимо учесть, что предприятие применяет свою первую стратегию, т. е. берет расчет на хорошую погоду и производит 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц продукции $П_2$, поэтому затраты C_1 составят

$$C_1 = 1000 \times 0{,}8 + 6000 \times 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Поскольку природа также применяет свою первую стратегию, т. е. погода будет хорошей, то предприятие в тот же день реализует всю продукцию по отпускной цене и получит сумму

$$Z_1 = 1000 \times 1{,}2 + 6000 \times 0{,}8 = 6000 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{11} = Z_1 - C_1 = 6000 - 4000 = 2000 \text{ руб.}$$

Для получения a_{12} следует учесть, что предприятие берет расчет на хорошую погоду, т. е. применяет свою первую стратегию, а природа применяет свою вторую стратегию, т. е. погода будет плохой. В этом случае затраты C будут те же, т. е. C_1 = 4000 руб., а сумма выручки Z будет другая. При этом следует учесть, что при плохой погоде в тот же день реализуется 4000 единиц продукции $П_1$, а произведено только 1000 единиц, т. е. вся произведенная продукция $П_1$ будет реализована по цене 1,2 руб. Для продукции $П_2$ будет следующее: при плохой погоде ее реализуется в тот же день 1200 единиц по цене 0,8 руб, а остальные 6000 — 1200 = 4800 единиц реализуются на следующий день по цене 0,8 : 4 = 0,2 руб. за единицу. Таким образом, сумма выручки Z в этом случае будет

$$Z_2 = 1000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 + 4800 \times 0{,}2 = 3120 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{12} = 3120 - 4000 = -880 \text{ руб.},$$

т. е. в этом случае предприятие понесет убыток 880 руб.

Пусть теперь предприятие применит свою 2-ю стратегию, т. е. возьмет расчет на плохую погоду, тогда будет произведено 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц продукции $П_2$ и его затраты составят

$$C_2 = 4000 \times 0{,}8 + 1200 \times 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Если погода окажется плохой, т. е. природа применит свою 2-ю стратегию, то вся произведенная продукция будет реализована в тот же день, и предприятие будет иметь сумму выручки

$$Z_3 = 4000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 = 5760 \text{ руб.}$$

и его прибыль составит

$$a_{22} = Z_3 — C_2 = 5760 — 4000 = 1760 \text{ руб.}$$

Если же предприятие применит свою вторую стратегию, а природа свою 1-ю стратегию, т. е. будет произведено 4000 единиц $П_1$ и 1200 единиц $П_2$, а в тот же день будет реализовано 1000 единиц $П_1$ по 1,2 руб., 1200 единиц $П_2$ по цене 0,8 руб., на другой день 4000 — 1000 = 3000 единиц $П_1$ по цене 0,3 руб., и сумма выручки составит

$$Z_4 = 1000 \times 1{,}2 + 1200 \times 0{,}8 + 3000 \times 0{,}3 = 3060 \text{ руб.},$$

а прибыль $P = Z_4 — C_2$, т. е.

$$a_{21} = 3060 — 4000 = — 940 \text{ руб.}$$

Итак, матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & -880 \\ -940 & 1760 \end{pmatrix}.$$

Решим данную матричную игру:

очевидно, эта игра не имеет седловой точки, поэтому найдем ее решение в смешанных стратегиях, где x_1 x_2 — соответственно вероятности применения первым игроком своих 1-й и 2-й стратегий, y_1, y_2 —вероятности применения вторым игроком своих 1-й и 2-й стратегий.

$$x_1 = 0{,}483, \quad x_2 = 0{,}517, \; y_1 = 0{,}473, \; y_2 = 0{,}527, \; v = 482,$$

или приближенно

$$x_1 = x_2 = 0{,}5, \qquad y_1 = y_2 = 0{,}5.$$

Полученное решение рекомендует первому игроку (предприятию) примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, применить свои чистые стратегии, а природа максимально навредит предприятию, если будет также примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, менять погоду. При этом предприятие в среднем будет иметь ежедневно прибыль в размере v — 482 рубля.

Применить свою 1-ю стратегию для предприятия — это значит брать расчет на хорошую погоду и произвести 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц продукции $П_2$. Для применения своей 2-й стратегии предприятию следует произвести 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц продукции $П_2$, т.е., меняя случайно стратегии, как это рекомендует оптимальное решение, следует случайно менять технологию производства, что для предприятия невозможно. Поэтому оптимальные стратегии лучше использовать так: в среднем ежедневно можно производить продукцию $П_1$ в количестве

$$1000x_1 + 4000x_2 = 1000 \cdot 0{,}483 + 4000 \cdot 0{,}517 = 2551 \text{ единиц},$$

продукции $П_2$ в количестве

$$6000x_1 + 1200x_2 = 6000 \cdot 0{,}483 + 1200 \cdot 0{,}517 = 3518 \text{ единиц},$$

и независимо от поведения природы ежедневная прибыль предприятия будет составлять 482 руб. Действительно, предприятие затратит на изготовление и реализацию этой продукции

$$2551 \cdot 0{,}8 + 3518 \cdot 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

При хорошей погоде предприятие реализует 1000 единиц $П_1$ по цене 1,2 руб., остальные 2551 —1000 = 1551 единиц $П_1$ по цене в четыре раза меньше — 0,3 руб., 3518 единиц по цене 0,8 руб., т. е. получит

$$1000 \cdot 1{,}2 + 1551 \cdot 0{,}3 + 3518 \cdot 0{,}8 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит 4482 — 4000 = 482 руб.

Если погода плохая, то предприятие реализует 2551 единицу продукции $П_х$ по цене 1,2 руб., 1200 единиц продукции $П_2$ по цене 0,8 руб., остальные 3518 — 1200 = 2318 единиц продукции $П_2$ по цене в четыре раза меньше — 0,2 руб., т. е. получит

$$2551 \cdot 1{,}2 + 1200 \cdot 0{,}8 + 2318 - 0{,}2 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит 4482 — 4000 = 482 руб.

Существенное отличие этой игры от предыдущих заключается в том, что элементы матрицы *А* не являются точными: они взяты приближенно, в среднем (ведь нельзя наперед быть уверенным в продаже, скажем, точно 1000 единиц продукции; ее может быть продано в один день 980 единиц, — в другой 1030 и т. д.). Выводы, сделанные относительно этой игры, будут справедливы только в случае незначительного изменения количества проданных изделий (в данном случае, скажем, в пределах 30—50 единиц ежедневно). В противном случае анализ игры усложняется.

Предположим, наконец, что в городе имеется бюро прогнозов погоды, предсказания которого оправдываются с вероятностью 0,75 и не оправдываются с вероятностью 0,25. Предприятие поступает в точности по прогнозам. Тогда описанная выше ситуация по существу теряет игровой смысл и может решаться чисто вероятностными методами.

Действительно, пусть в данной местности за летний сезон бывает примерно одинаковое число дней с хорошей и плохой погодой, т. е. погода является случайным событием, появляющимся с вероятностью $\frac{1}{2}$. Согласно выводам, сделанным из матрицы *А,* это наихудший вариант для завода. Следовательно, прибыль завода является случайной величиной, принимающей свои значения:

$$2000 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8},$$

$$— 880 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$— 940 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$1760 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8}.$$

(Например, для получения прибыли 2000 руб. требуется совмещение независимых событий: 1-е —хорошая погода, 2-е —оправдался прогноз. Вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей (0,75 · 0,5). Для остальных величин прибылей рассуждения аналогичны). При этих условиях математическое ожидание прибыли завода

$$M = 2000 \cdot \frac{3}{8} — 880 \cdot \frac{1}{8} — 940 \cdot \frac{1}{8} + 1760 \cdot \frac{3}{8} = 1183 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежедневная прибыль завода в среднем будет значительно больше, чем в предыдущем случае, на 1183 — 482 = 701 руб.

7. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Для следующих платежных матриц определить нижнюю и верхнюю цены игры, минимаксные стратегии и наличие седловых точек:

1.1. $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 1.2. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$; 1.3. $\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$;

1.4. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$; 1.5. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$; 1.6. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

1.7. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \\ -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; 1.8. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; 1.9. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

1.10. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Графическим методом найти решение игры, заданной матрицей:

2.1. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$; 2.2. $\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$; 2.3. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 \end{pmatrix}$;

2.4. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$; 2.5. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$; 2.6. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

2.7. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; 2.8. $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2.9. $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

2.10. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Симплексным методом найти решение игры, заданной матрицей:

3.1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3.2. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; 3.3. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3.4. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 3.5. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3.6. Фирма производит пользующиеся спросом платья и костюмы, реализация которых зависит от состояния погоды. Затраты фирмы на 1 платье — 7 ден. ед., 1 костюм - 28 ден. ед. Цены их реализации составляют 15 и 50 ден. ед. соответственно. По данным наблюдений за несколько предыдущих лет, фирма может реализовать в условиях теплой погоды 1950 платьев и 610 костюмов, а при прохладной погоде —630 платьев и 1050 костюмов.

В связи с возможными изменениями погоды определить стратегию фирмы, обеспечивающую ей максимальный доход от реализации продукции.

3.7. Предприятие может выпускать три вида продукции (*а, б, в*), получая при этом прибыль, зависящую от спроса. Спрос, в свою очередь, может принимать одно из четырех состояний (1, 2, 3, 4). В следующей матрице элементы a_{ik} характеризуют прибыль, которую получит предприятие при выпуске i-й продукции и k-м состоянии спроса:

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определить оптимальные пропорции в выпускаемой продукции, считая состояние спроса полностью неопределенным, гарантируя при этом среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

3.8. Предприятие выпускает скоропортящуюся продукцию, которую оно может сразу отправить потребителю (стратегия *а*), отправить на склад для хранения (стратегия *б*) или подвергнуть дополнительной обработке (стратегия *в*) для длительного хранения.

В свою очередь, потребитель может немедленно приобрести эту продукцию (стратегия 1), приобрести ее в течение небольшого отрезка времени (стратегия 2) или затребовать ее после длительного периода времени (стратегия 3).

Если предприятие выберет стратегию *а,* то дополнительные затраты на хранение и обработку продукции не потребуются.

Если потребитель применит стратегию 2 и 3, то предприятие потерпит убытки из-за порчи части продукции. Наоборот, если предприятие выберет стратегию *в,* а потребитель — стратегию 1, то возникнут неоправданные расходы на консервацию продукции. Определить оптимальное соотношение между продукцией, отправляемой потребителю на склад и на дополнительную обработку, руководствуясь минимаксным критерием при следующей матрице затрат:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 7 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

3.9. Магазин может завести в различных пропорциях товары трех типов (*а,* б и *в*). И реализация, а следовательно, и получаемая магазином прибыль зависят от вида товара и состояния спроса. Предполагая, что последний может характеризоваться тремя состояниями (1, 2 и 3), и учитывая, что спрос связан с изменением моды и прогнозирование его невозможно, определить оптимальные пропорции в закупке товаров из условия средней гарантированной прибыли при следующей матрице прибылей:

$$\begin{pmatrix} 20 & 15 & 10 \\ 16 & 12 & 14 \\ 13 & 18 & 15 \end{pmatrix}.$$

3.10. Сельскохозяйственное предприятие имеет возможность выращивать две культуры — *а и б.* Необходимо определить, как сеять эти культуры, если при прочих равных условиях их урожаи зависят от погоды, а план посева должен обеспечить наибольший доход (прибыль от реализации выращенной продукции определяется полученным объемом). В зоне рискованного земледелия (а таковой является большая часть России) планирование посева должно осуществляться с учетом наименее благоприятного состояния погоды.

Таким образом, одной из сторон выступает сельскохозяйственное предприятие, заинтересованное в том, чтобы получить наибольший доход (игрок 1), а другой стороной — природа, способная навредить сельскохозяйственному предприятию в максимальной степени (от нее зависят погодные условия) и преследующая тем самым прямо противоположные цели (игрок 2).

Принятие природы за противника равносильно планированию посева с учетом наиболее неблагоприятных условий; если же погодные условия окажутся благоприятными, то выбранный план даст возможность увеличить доход.

Налицо антагонистический конфликт, в котором у игрока 1 две стратегии *а и б, у* игрока 2 — три: засушливое лето, нормальное лето, дождливое лето.

В качестве выигрыша игрока 1 возьмем прибыль от реализации и будем считать, что расчеты прибыли сельскохозяйственного предприятия (в млрд. руб.) в зависимости от состояния погоды сведены в матрицу

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ТЕОРИИ ИГР

I. Общие сведения из теории игр

1. Математическая модель конфликтной ситуации …
2. Один или группа участников игры, имеющих общие для них интересы, не совпадающие с интересами других групп - …
3. Набор правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры, называется …

II. Классификация игр

4. Антагонистическая игра - это …
   a. Игра с ненулевой суммой
   b. Биматричная игра
   c. Игра с нулевой суммой
   d. Статистическая игра
   e. Игра с природой
5. Конечная игра двух игроков с нулевой суммой называется …
   a. Биматричной игрой
   b. Кооперативной игрой
   c. Дифференциальной игрой
   d. Матричной игрой
   e. Конечномерной игрой
6. Количество игроков в матричной игре равно …

III. Примеры матричных игр:

7. Игрок А может назвать число 1 (стратегия A_1) или 2 (стратегия A_2). Игрок В может назвать число 3 (стратегия B_1) или 4 (стратегия B_2). Если сумма названных чисел четная, то выигрывает игрок А. Если сумма чисел нечетная, то выигрывает игрок В. Выигрыш равен сумме названных чисел. Платежная матрица игры имеет вид:

   1) $P = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$ 3) $P = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

   2) $P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ 4) $P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

8. Игрок А записывает число 0 (стратегия A_1) или число 1 (стратегия A_2) и закрывает его рукой, а игрок В называет число 0 (стратегия B_1) или число 1 (стратегия B_2). Если В угадал записанное число, то он получает от игрока А 1 рубль, а если не угадал, то платит игроку А 1 рубль. Платежная матрица игры имеет вид…

1) $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2) $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

3) $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

4) $P=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

IV. Решение матричных игр в чистых стратегиях

9. Нижняя чистая цена игры, заданной платежной матрицей $P=\begin{pmatrix}2 & 3 & -2\\ 1 & 7 & 8\\ 8 & 0 & 3\end{pmatrix}$,

   равна …

   Верхняя чистая цена игры, заданной платежной матрицей

   $P=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 0 & 5 & 7\\ 8 & -6 & 3\end{pmatrix}$,

   равна …

Чистая цена игры $P=\begin{pmatrix}3 & 5 & 1 & 0\\ 10 & 4 & 3 & 7\\ -2 & 0 & 1 & 8\end{pmatrix}$ равна …

10. Для игры с платежной матрицы $P=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -2 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ выберите общее значение нижней чистой и верхней чистой цены игры
    a. -3
    b. -1
    c. 3
    d. -2
    e. 1
11. Матричная игра имеет решение в чистых стратегиях, если … (отметить все верные условия)
    a. Нижняя чистая цена игры больше верхней чистой цены игры
    b. Игра имеет седловую точку
    c. Нижняя чистая цена игры меньше верхней чистой цены игры
    d. Игра не имеет седловой точки
    e. Нижняя чистая цена игры и верхняя чистая цена игры равны
12. Платежная матрица … имеет седловую точку

1) $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$

2) $P=\begin{pmatrix}-3 & 5\\ 4 & 7\end{pmatrix}$

3) $P=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

4) $P=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 0 & -2\end{pmatrix}$

13. Упорядочить платежные матрицы по величине седлового элемента

1) $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $P=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$

2) $P=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ 4) $P=\begin{pmatrix} -7 & -1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

14. Установить соответствие между платежной матрицей и седловой точкой

A) $P=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ 1) (A1; B1)

B) $P=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ 2) (A2; B1)

C) $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ 3) (A1; B2)

4) (A2; B2)

V. Доминирование стратегий

15. Упрощение платежной матрицы некоторой матричной игры возможно за счет …
    a. Исключения отрицательных стратегий
    b. Построения графической интерпретации игры
    c. Исключения оптимальных чистых стратегий
    d. Сведения матричной игры к задаче линейного программирования
    e. Исключения доминируемых стратегий
16. Укажите номер доминируемой (заведомо невыгодной) стратегии у игрока А, если игра задана матрицей $P=\begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 8 & 3 \\ 6 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$ …
17. Укажите номер доминируемой (заведомо невыгодной) стратегии у игрока В, если игра задана матрицей $P=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ …
18. Для матричной игры $P=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ верно утверждение …
    a. Стратегия B_2 доминирует стратегию B_3
    b. Стратегия B_3 доминирует стратегию B_2
    c. Стратегия B_1 доминирует стратегию B_4
    d. Стратегия B_4 доминирует стратегию B_1
19. Для матричной игры $P=\begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 2 & 7 \\ 1 & 1 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$ верно утверждение …

a. Стратегия A_2 доминирует стратегию A_3
b. Стратегия A_3 доминирует стратегию A_2
c. Стратегия A_1 доминирует стратегию A_2
d. Стратегия A_2 доминирует стратегию A_1

VI. Общие вопросы решения матричных игр в смешанных стратегиях

20. Решение матричной игры в смешанных стратегиях целесообразно, если
    a. Игра повторяется один раз
    b. Игра имеет седловую точку
    c. Игра повторяется большое число раз
    d. Нижняя и верхняя цены игры равны
21. Выберите верное утверждение
    a. Любая матричная игра имеет решение в чистых стратегиях
    b. Любая матричная игра имеет решение, по крайней мере, в смешанных стратегиях
    c. В любой матричной игре есть доминируемые стратегии
    d. В любой матричной игре есть седловая точка

VII. Свойства цены матричной игры

22. Если α – нижняя чистая цена игры, β – верхняя чистая цена игры, то для любой матричной игры верно неравенство:
    a. $\alpha < \beta$
    b. $\alpha \leq \beta$
    c. $\alpha > \beta$
    d. $\alpha \geq \beta$
23. Установите соответствие между значениями нижней и верхней чистыми ценами игры и допустимой ценой игры для некоторой платежной матрицы
    a. $\alpha = -2; \beta = 0$
    b. $\alpha = -5; \beta = -1$
    c. $\alpha = 3; \beta = 7$

    1) $\nu = -2{,}4$
    2) $\nu = 1{,}35$
    3) $\nu = -1{,}25$
    4) $\nu = 3$

Упорядочить платежные матрицы по величине цены игры

1) $P = \begin{pmatrix} 12 & 17 & 13 \\ 15 & 14 & 19 \\ 14 & 18 & 13 \end{pmatrix}$

3) $P = \begin{pmatrix} -7 & -2 & -4 \\ -4 & -9 & -2 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$

2) $P = \begin{pmatrix} 52 & 61 & 57 \\ 60 & 58 & 64 \\ 54 & 69 & 53 \end{pmatrix}$

4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

VIII. Свойства смешанных стратегий игроков в матричных играх

24. Сумма компонентов любой смешанной стратегии игрока в произвольной матричной игре равна …

25. Выберите смешанную стратегию, которая может быть решением некоторой игры для игрока А:

a. $X^*(-0{,}3;\ 0{,}5;\ 0{,}8;\ -0{,}2)$
b. $X^*(2;3;\ 4;1)$
c. $X^*(0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3;\ 0{,}1)$
d. $X^*(0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}2)$

IX. Преобразование платежной матрицы

26. Если все элементы платежной матрицы $P=(a_{ij})$ преобразовать по формуле $P'=(\beta a_{ij}+\gamma)$, то …

a. Оптимальные стратегии игроков не изменятся
b. Все компоненты оптимальных стратегий надо умножить на β
c. Ко всем компонентам оптимальных стратегий надо прибавить γ
d. Все компоненты оптимальных стратегий надо умножить на β и прибавить к ним γ

27. Если у матричной игры с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -4 \\ -1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ цена игры равна 1,65, тогда цена игры, заданной матрицей $P=\begin{pmatrix} 101 & 97 & 102 \\ 104 & 105 & 96 \\ 99 & 107 & 108 \end{pmatrix}$, равна …….

28. Цена игры с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 500 & 600 \\ 700 & 400 \end{pmatrix}$ равна 550. Цена игры с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ равна …

a. 450
b. 550
c. 5,5
d. 6,5

29. Установите соответствие между платежными матрицами с одинаковыми ценами игры

1) $P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$

2) $P=\begin{pmatrix} 30 & 10 \\ 20 & 50 \end{pmatrix}$

A) $P=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

B) $P=\begin{pmatrix} 11 & 13 \\ 17 & 12 \end{pmatrix}$

C) $P=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

X. Свойства симметричных игр

30. Если элементы платежной матрицы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ij}$, то соответствующая матричная игра называется …
    a. Кососимметричной
    b. Симметричной
    c. Рефлексивной
    d. Элементарной
31. Цена симметричной матричной игры равна …
32. У симметричных матричных игр смешанные стратегии игроков …
    a. Совпадают
    b. Различны
    c. Симметричны
    d. Асимметричны
33. Выберите платежную матрицу, цена игры которой равна 0:

1) $P = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

3) $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -1 & -6 & 0 \end{pmatrix}$

4) $P = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 6 & 0 & -4 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

34. Оптимальная стратегия игрока А в игре с матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -7 \\ -2 & 0 & 1 \\ 7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ имеет вид $X^*(0{,}1;\ 0{,}7;\ 0{,}2)$. Выберите оптимальную стратегию игрока В.
    a. $Y^*(0{,}2;\ 0{,}7;\ 0{,}1)$
    b. $Y^*(0;\ 0{,}7;\ 0{,}3)$
    c. $Y^*(0{,}1;\ 0{,}7;\ 0{,}2)$
    d. $Y^*(0{,}3;\ 0{,}7;\ 0)$
35. Выберите решение игры с матрицей $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$
    a. $X^*(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1),\ Y^*(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1),\ \nu = 2$
    b. $X^*(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1),\ Y^*(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5),\ \nu = 0$
    c. $X^*(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5),\ Y^*(0{,}1;\ 0{,}4;\ 0{,}5),\ \nu = 0$
    d. $X^*(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1),\ Y^*(0{,}5;\ 0{,}4;\ 0{,}1),\ \nu = 0$

XI. Аналитическое решение матричных игр 2х2

36. Для матричной игры $P = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ выберите решение для игрока А:

a. $X^*\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right),\ \nu=-\frac{1}{20}$

b. $X^*\left(\frac{7}{20};\frac{7}{20}\right),\ \nu=-\frac{1}{20}$

c. $X^*\left(\frac{11}{20};\frac{9}{20}\right),\ \nu=-\frac{1}{20}$

d. $X^*\left(\frac{17}{20};\frac{3}{20}\right),\ \nu=-\frac{1}{20}$

37. Для матричной игры $P=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$ выберите решение для игрока В:

a. $Y^*\left(\frac{5}{7};\frac{2}{7}\right),\ \nu=\frac{2}{7}$

b. $Y^*\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right),\ \nu=\frac{4}{7}$

c. $Y^*\left(\frac{3}{7};\frac{3}{7}\right),\ \nu=\frac{4}{7}$

d. $Y^*\left(\frac{2}{7};\frac{5}{7}\right),\ \nu=\frac{2}{7}$

38. Для матричной игры $P=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$ система уравнений для нахождения оптимальной стратегии $X^*(p_1;\ p_2)$ игрока А и цены игры ν имеет вид …

1) $\begin{cases}4p_1+3p_2=\nu,\\ -2p_1+8p_2=\nu,\\ p_1+p_2=1.\end{cases}$

3) $\begin{cases}4p_1+3p_2=1,\\ -2p_1+8p_2=1,\\ p_1+p_2=1.\end{cases}$

2) $\begin{cases}4p_1+-2p_2=\nu,\\ 3p_1+8p_2=\nu,\\ p_1+p_2=1.\end{cases}$

4) $\begin{cases}4p_1+-2p_2=1,\\ 3p_1+8p_2=1,\\ p_1+p_2=1.\end{cases}$

Для матричной игры $P=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 4 & -5\end{pmatrix}$ система уравнений для нахождения оптимальной стратегии $Y^*(q_1;\ q_2)$ игрока В и цены игры ν имеет вид …

1) $\begin{cases}-3q_1+4q_2=\nu,\\ 2q_1+-5q_2=\nu,\\ q_1+q_2=1.\end{cases}$

3) $\begin{cases}-3q_1+4q_2=1,\\ 2q_1+-5q_2=1,\\ q_1+q_2=1.\end{cases}$

2) $\begin{cases}-3q_1+2q_2=1,\\ 4q_1+-5q_2=1,\\ q_1+q_2=1.\end{cases}$

4) $\begin{cases}-3q_1+2q_2=\nu,\\ 4q_1+-5q_2=\nu,\\ q_1+q_2=1.\end{cases}$

39. В матричной игре $P=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$ оптимальная смешанная стратегия игрока А имеет вид

a. $X^*\left(\frac{1}{16};\frac{1}{16}\right),\nu=\frac{2}{16}$

b. $X^*\left(\frac{23}{16};-\frac{7}{16}\right), \nu=\frac{189}{16}$
c. $X^*\left(\frac{7}{16};\frac{9}{16}\right), \nu=\frac{13}{16}$
d. $X^*\left(\frac{1}{16};\frac{15}{16}\right), \nu=\frac{160}{16}$

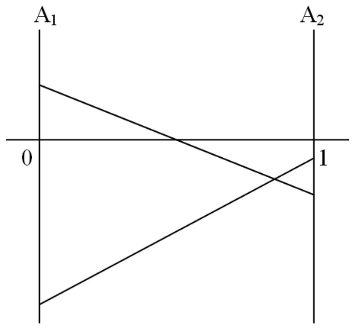
40. Цена игры с платежной матрицей $P=\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ равна … , если оптимальная смешанная стратегия игрока А имеет вид $X^*\left(\frac{1}{5};\frac{4}{5}\right)$.
   a. $\nu=\frac{7}{5}$
   b. $\nu=12$
   c. $\nu=-6$
   d. $\nu=-\frac{9}{5}$

41. Цена матричной игры $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ равна
   a. $\frac{1}{2}$
   b. $\frac{2}{3}$
   c. 0
   d. 2

XII. Графическое решение матричных игр

42. Графическое решение не допускается для матричной игры, платежная матрица которой имеет размерность …
   a. 2x2
   b. 2xn
   c. mxn
   d. mx2

43. Графическая интерпретация для матричной игры 2x2 при нахождении оптимальной стратегии игрока А соответствует платежной матрице



1) $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

2) $P=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

3) $P=\begin{pmatrix}-2 & -7\\ -4 & -2\end{pmatrix}$

4) $P=\begin{pmatrix}3 & -5\\ -3 & -1\end{pmatrix}$

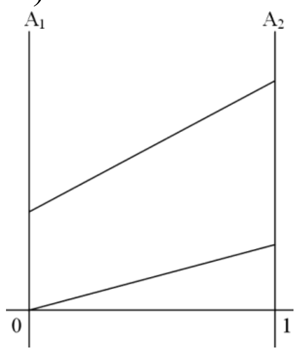
44. Установите соответствие между платежными матрицами и графической интерпретацией игры для игрока А

1) $P=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

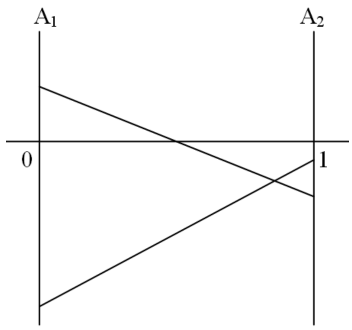
2) $P=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

3) $P=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 7 & 2\end{pmatrix}$

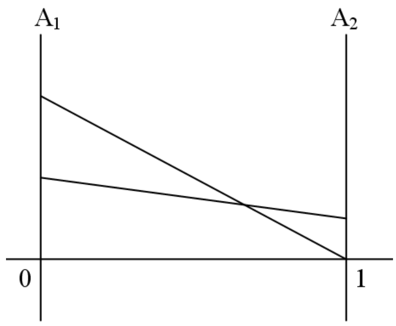
A)



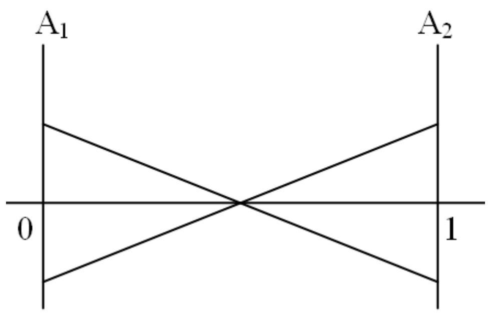
B)



C)



D)



XIII. Решение матричных игр сведением к задаче линейного программирования

45. Для решения матричной игры как задачи линейного программирования необходимо, чтобы …
    a. Цена игры была положительной
    b. Игра имела размерность 2x2
    c. Сумма компонентов смешанных стратегий игроков равнялась 1
    d. Игра не имела решения в чистых стратегиях
46. Для матричной игры $P=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 2\end{pmatrix}$ и смешанной стратегии игрока В: $Y\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ математическое ожидание выигрыша игрока А при использовании им своей чистой стратегии A_2 равно:
    a. 4
    b. 2,5
    c. 2
    d. 4,5
47. Выберите задачу линейного программирования, составленную для нахождения оптимальной стратегии игрока А матричной игры $P=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$
1) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 8x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \to \min$$
2) $$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \ge 1, \\ 2x_1 + 8x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \to \min$$
3) $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \ge 1, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$
4) $$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 8x_2 \le 1, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

XIV. Принятие решений в условиях неопределенности

48. Задача принятия решений в условиях неопределенности, когда игрок взаимодействует с окружающей средой, называется …
    a. Антагонистической игрой
    b. Игрой в нормальной форме
    c. Игрой с природой
    d. Позиционной игрой
49. Установите соответствие между названием критерия принятия решения и формулой, по которой рассчитываются оценки стратегий игрока

1) Критерий максимального математического ожидания	A) $W_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
2) Критерий недостаточного основания Лапласа	B) $W_i = \max_j a_{ij}$

3) Максиминный критерий Вальда

C) $W_i = \min_j a_{ij}$

D) $W_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j$

50. Установите соответствие между названием критерия принятия решения и формулой, по которой рассчитываются оценки стратегий игрока

1) Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица

2) Критерий Ходжа-Лемана

A) $W_i = u \cdot \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} + (1-u)\min_j a_{ij}$

B) $W_i = c\max_j a_{ij} + (1-c)\max_j r_{ij}$

C) $W_i = c\min_j a_{ij} + (1-c)\max_j a_{ij}$

D) $W_i = u\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_j + (1-u)\min_j a_{ij}$

51. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	**S_2**	**S_3**
A_1	3	4	-2
A_2	5	-1	7
A_3	2	1	3
P	**0,2**	**0,3**	**0,5**

установите соответствие между стратегиями игрока и оценками стратегий по критерию максимального математического ожидания

1) A_1 A) 2,2
2) A_2 B) 0,8
3) A_3 C) 4,2
D) 1,6

52. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	**S_2**	**S_3**
A_1	2	3	-1
A_2	5	-3	6
A_3	4	1	3
P	**0,4**	**0,1**	**0,5**

выберите оценку стратегии A_1, сделанную по критерию Ходжа-Лемана, если параметр достоверности информации о вероятностях состояний окружающей среды u = 0,7

1) 0,6
2) 0,12
3) -1
4) -0,52

53. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	**S_2**	**S_3**
A_1	1	3	-2
A_2	2	-4	6
A_3	4	1	7

выберите оценку стратегии A_2, сделанную по критерию пессимизма-оптимизма Гурвица, если коэффициент пессимизма c = 0,4:

1) 2
2) 1
3) 4,2
4) 0

54. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	S_2	S_3
A_1	2	-3	4
A_2	5	-1	7
A_3	-8	1	19

установите соответствие между стратегиями игрока и их оценками, сделанными по максиминному критерию Вальда:

1) A_1 A) -8
2) A_2 B) -3
3) A_3 C) -1
D) -4

55. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	S_2	S_3
A_1	1	8	3
A_2	3	2	4
A_3	12	-9	-3

установите соответствие между стратегиями игрока и их оценками, сделанными по критерию недостаточного основания Лапласа:

1) A_1 A) 0
2) A_2 B) 2
3) A_3 C) 4
D) 3

56. Установите соответствие между матрицей игры с природой и ее матрицей рисков:

a.

	S_1	S_2	S_3
A_1	1	3	-2
A_2	2	-4	6
A_3	4	1	7

b.

	S_1	S_2	S_3
A_1	2	-3	4
A_2	5	-1	7
A_3	-8	1	19

c.

	S_1	S_2	S_3
A_1	1	8	3
A_2	3	2	4
A_3	12	-9	-3

1)

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	4	15
A_2	0	2	12
A_3	13	0	0

2)

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	0	11
A_2	0	6	3
A_3	9	7	0

3)

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	0	9
A_2	2	7	1
A_3	0	2	0

4)

	S_1	S_2	S_3
A_1	11	0	1
A_2	9	6	0
A_3	0	17	7

57. Для матрицы рисков

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	0	11
A_2	0	6	3
A_3	9	7	0

укажите номер стратегии, оптимальной по критерию минимаксного риска Сэвиджа

58. Для игры с природой, заданной матрицей

	S_1	S_2	S_3
A_1	3	0	9
A_2	4	11	3
A_3	-2	7	4

установите соответствие между критериями принятий решений и оптимальными оценками стратегий игрока по этим критериям

1) Критерий крайнего пессимизма — A) 11
2) Максиминный критерий Вальда — B) -2
3) Критерий азартного игрока — C) 9
D) 3

Список литературы

1. Акимов В.П. Основы теории игр: учеб. пособие / В.П. Акимов; Моск. гос. ин-т межд. отношений (ун-т) МИД России, каф. математич. методов и информационных технологий. – М.: МГИМО-Университет, 2008. – 156 с.
2. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. авторов; под ред. С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2008. – 208 с.

Обухова Галина Александровна

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИГР

Методическое пособие
для студентов экономических направлений всех форм обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 25.10.12. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 2,38. Тираж 100 экз. Зак. 121114. Рег. № 199.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.