МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Г.А. Обухова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Методическое пособие
для студентов всех форм обучения направления
«Электроэнергетика и электротехника»

Рубцовск 2021

УДК 517.8

Обухова Г.А. Теория вероятностей в электротехнике. Методическое пособие для студентов всех форм обучения направления «Электроэнергетика и электротехника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 43 с.

В методическом пособии представлен основной теоретический материал по теории вероятностей и математической статистике. Рассматриваются различные способы применения этого материала для решения задач электротехники. Предлагаются задачи для самостоятельного решения. Методическое пособие ориентировано на семестровый курс обучения.

Рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры ПМ
Протокол № 8 от 26.02.2021.

Рецензент:
к.т.н, доцент С.А. Гончаров

СОДЕРЖАНИЕ

1.МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Теория вероятностей - это раздел математики, где изучаются закономерности массовых случайных явлений.

Тема 1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей

ИСПЫТАНИЕ - это изначальное понятие, разъясняется как наблюдение, явление, действие, опыт и прочее.

СОБЫТИЕ - это результат (исход) испытания.

Пусть в результате испытания могут появиться несколько событий (исходов), эти исходы называются:

- несовместимыми - если появление одного из них исключает появление других;

- единственно возможными - если в результате испытания появится хотя бы одно из них (других нет);

- равновозможными - если нет преимуществ у каждого исхода перед другими при испытании.

Например: испытание - бросание монеты;

событие $Г$ - выпал герб;

событие $Ч$ - выпало число.

События $Г$ и $Ч$ несовместимые, единственно-возможные, равно-возможные.

События, которые могут появиться в результате испытания, образуют полную систему элементарных исходов, если они:

1) несовместимы;

2) единственно возможны;

3) по каждому из этих исходов можно судить о появлении или непоявлении любого события, которое может произойти в результате данного испытания.

Рассмотрим пример с игральной костью.

Игральная кость - это однородный кубик, на гранях которого изображено количество очков от 1 до 6, так как всего граней 6.

Испытание - бросание игральной кости.

Событие - выпадение определенного количества очков на верхней грани.

Полную систему элементарных исходов образуют шесть событий: E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, которые заключаются в том, что количество выпавших очков составит соответственно 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков.

Действительно, эти шесть исходов удовлетворяют трем перечисленным выше условиям полной системы элементарных исходов.

Пусть событие A - «выпало четное число очков». Это означает, что появились события E_2, или E_4, или E_6. По этим трем элементарным исходам можно судить о появлении события A. Они называются благоприятствующими событию A.

Пусть событие B - «количество выпавших очков больше четырех». Это означает, что появились события E_5 или E_6, то есть эти два элементарных исхода благоприятствуют событию B.

Отметим также, что так как кубик однородный, то все шесть элементарных исходов являются равновозможными.

Классическое определение вероятности

Вероятностью события A называется число $P(A)$, равное отношению количества благоприятствующих событию A элементарных исходов M общему количеству элементарных равновозможных исходов N:

$$P(A) = \frac{M}{N}.$$

В примере с игральной костью всего элементарных равновозможных исходов $N = 6$, поэтому

$$P(A) = \frac{M_A}{N} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5;$$

$$P(B) = \frac{M_B}{N} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что $P(E_1) = P(E_2) = \ldots = P(E_6) = 1/6$, так как любому элементарному событию благоприятствует один исход (одна грань из шести).

В примере с бросанием монеты $P(Г) = ½$ и $P(Ч) = ½$, так как каждому из событий «выпал герб» и «выпало число», благоприятствует один элементарный исход из двух равновозможных элементарных исходов *Г* и *Ч*.

Рассмотрим ещё пример с урновой схемой.

Урна - это ёмкость с шарами. Пусть всего в урне 20 одинаковых на ощупь шаров (по размеру, температуре, гладкости), которые отличаются только цветом, например, 12 из них красные, а остальные - белые.

Испытание - извлечение наугад одного шара.

Событие K - появление красного шара.

Очевидно, что всего элементарных исходов $N = 20$ (по количеству шаров), причём все эти исходы равновозможны. Событию K благоприятствуют 12 исходов (по количеству красных шаров), поэтому

$$P(K) = \frac{M_K}{N} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

Внимание! Вероятность любого события может принимать значения только от 0 до 1:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Вероятность можно задать в процентах, например, $P(A)=0,8$ или $P(A)=0,8 \cdot 100\% = 80\%$.

Достоверное событие - обязательно произойдет в результате испытания, так как все исходы благоприятные, то есть $M = N$:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1.$$

Невозможное событие - не может произойти в результате испытания, так как благоприятных исходов нет, то есть $M = 0$:

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0.$$

Случайное событие - может произойти или не произойти в результате испытания: $0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность является числовой мерой объективной возможности наступления события.

Статистическое понятие вероятности

На практике чаще пользуются статистическим понятием вероятности.

Вероятность события A - это число, около которого колеблются устойчивые значения относительных частот W при многократном повторении испытаний:

$$P(A) \approx W(A) = \frac{M}{N},$$

где N - количество испытаний,

M - количество появлений события A.

Устойчивость означает, что относительные частоты незначительно изменяются в различных сериях испытаний.

Например, если подбрасывать монету много раз, то, как показывают опыты, примерно в половине случаев выпадет герб, то есть $P(Г) = \frac{1}{2}$, что соответствует результату, полученному по классическому определению вероятности.

Аналогично можно подбрасывать много раз игральную кость или много раз извлекать шар из урны, возвращая его каждый раз обратно и по результатам этих опытов получить значения вероятностей для конкретных событий.

Статистическое понятие вероятности применимо лишь в тех случаях, когда испытания можно воспроизводить многократно.

Например, результаты статистических наблюдений за рождением детей показывают, что на каждую 1000 детей мальчиков приходится около 515. Поэтому принято считать, что вероятность рождения мальчика $P(M)$ = 0,515(51, 5%), а для девочки $P(Д)$ = 0,485 (48,5%).

Аналогично по результатам статистических наблюдений можно установить: вероятность попадания в цель каждым стрелком; вероятность выпуска бракованных изделий каждым изготовителем; вероятность поступления заявки на товар определенного вида и т. п.

Основные теоремы теории вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместимых событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A)+P(B).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P(B).$$

События называются независимыми, если вероятность одного из них не зависит от того, произошло или нет другое событие.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \cdot P_A(B),$$

где $P_A(B)$ - условная вероятность, то есть вероятность события B при условии, что событие A уже произошло.

Эти теоремы остаются справедливыми для трех и более событий.

Теорема сложения вероятностей совместимых событий:

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ и } B).$$

Эта теорема позволяет находить вероятность появления хотя бы одного из двух событий, A или B.

Полная группа событий

События $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу, если они:

а) несовместимы попарно;

б) единственно возможны.

Для таких событий справедливо равенство:

$$P(H_1) + P(H_2) + \ldots + P(H_n) = 1.$$

Если в полной группе лишь два события: A и $\overline{A}$ (не A), то они называются противоположными, очевидно, при этом

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1, \text{ то есть } P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Формула полной вероятности

Пусть событие A наступает с одним из событий (гипотез) H_i, тогда полная вероятность события A находится по формуле

$$P(A) = P(H_1) \bullet P_{H1}(A) + P(H_2) \bullet P_{H2}(A) + ... + P(H_n) \bullet P_{Hn}(A),$$

где события $H_1, H_2, ..., H_n$ образуют полную группу.

Формула Байеса

Эта формула служит для переоценки вероятности гипотезы H_k при условии, что событие A произошло:

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}.$$

Здесь в знаменателе стоит полная вероятность события A, а в числителе - одно из ее слагаемых.

Тема 2. Повторение независимых испытаний

Пусть известна вероятность появления события A в одном испытании: $P(A) = p$, причем $p \neq 0$ и $p \neq 1$, тогда

$P(\overline{A}) = 1 - p = q$ - вероятность непоявления события A.

Испытание повторяется n раз: Требуется найти вероятность того, что событие A наступит при этом ровно k раз:

$P_n(k)$ - вероятность, что в n испытаниях событие наступит k раз.

Эта вероятность находится по формуле Бернулли

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

! - знак факториала, математической операции такой, что

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$, например, $1! = 1$

$2!=1 \cdot 2=2$

Внимание: $0!=1$ $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$

$4!=1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4=24$

$5!=1\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5=120$ и т. д.

Формулу Бернулли удобно применять, если число повторных испытаний невелико ($n \le 10$).

Формулы Лапласа

Если число испытаний велико ($n > 10$), то вместо формулы Бернулли используется так называемая локальная формула Лапласа, которая является приближенной:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x_0), \text{ где } x_0 = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Значение функции $\varphi(x_0)$ берется по таблице (см. приложение 1).

Если число испытаний велико ($n > 10$) и нужно найти вероятность того, что при n испытаниях событие A наступит от k_1 до k_2 раза, то применяют интегральную формулу Лапласа, которая также является приближенной:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_2), \quad \text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения функции Лапласа $\Phi(x)$ берутся по таблице (приложение 2). Приближенные формулы Лапласа тем точнее, чем больше количество повторных испытаний n.

Наивероятнейшее число появлений события

Пусть в n повторных испытаниях событие A появляется k раз, где k может принимать значения: 0; 1; 2; 3; ...; n (то есть $0 \le k \le n$). Для каждого из этих значений k можно найти соответствующую ему вероятность по формулам Бернулли или Лапласа.

То значение k, которому соответствует самая большая вероятность, называется НАИВЕРОЯТНЕЙШИМ числом появления события A.

Наивероятнейшее число k_0 находится как целое число из промежутка:

$$np - q \le k_0 \le np + p.$$

k_0 может принимать либо одно значение, либо два соседних целых значения, когда вероятности их одинаковы.

Вероятность $P_n(k_0)$, соответствующую значению $k = k_0$, находим либо по формуле Бернулли, при $n \le 10$, либо по локальной формуле Лапласа, при $n > 10$.

Появление события хотя бы один раз

Вероятность появления события «хотя бы один раз» в n испытаниях находится с помощью противоположного ему события «ни одного раза»:

P_n (событие наступит хотя бы один раз) = 1 – P_n (ни разу) = 1 – $P_n(0)$ = $=1-\frac{n!}{0!\cdot n!}\cdot p^0\cdot q^{n-0} = 1-q^n$, при этом учтено, что 0! = 1 и $p^0 = 1$.

Событие наступит «хотя бы один раз» означает, что оно наступит один или более раз, поэтому можно записать

$$P_n(k \geq 1) = 1 - q^n.$$

Тема 3. Дискретная случайная величина

Случайной величиной называется переменная, принимающая свои возможные числовые значения с определенной вероятностью.

Например: X- балл, полученный на экзамене;

Y - число студентов, явившихся на лекцию;

Z - величина выигрыша в лотерее;

U- рост человека и т.п.

Основные виды случайных величин: 1) непрерывная;

2) дискретная.

Непрерывная случайная величина может принимать все значения из некоторого промежутка.

Дискретная случайная величина X принимает отдельные числовые значения. Закон распределения дискретной случайной величины записывается в виде таблицы, где перечислены все значения случайной величины X и соответствующие им вероятности:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Следует иметь в виду, что всегда $\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$

Основные числовые характеристики закона распределения дискретной случайной величины:

1) Математическое ожидание (ожидаемое среднее значение случайной величины):

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n = a.$$

2) Дисперсия (мера рассеяния значений случайной величины X от среднего значения а):

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 p_i = (x_1 - a)^2 p_1 + (x_2 - a)^2 p_2 + \ldots + (x_n - a)^2 p_n.$$

Второй способ вычисления дисперсии:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X),$$

где

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum x_ip_i,$$

$$M(X^2) = x_1^2p_1 + x_2^2p_2 + \ldots + x_n^2p_n = \sum x_i^2p_i.$$

3) Среднее квадратичное отклонение (характеристика рассеяния в единицах признака *X*):

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Тема 4. Нормальный закон распределения непрерывной случайной величины

Непрерывная случайная величина *X* может принимать любые значения из некоторого промежутка. Распределение вероятностей ее значений на этом промежутке задается дифференциальной функцией распределения *f(x)*. Эта функция называется также функцией плотности распределения вероятностей.

Исследования показали, что в большом числе встречающихся на практике случаев с достаточным основанием можно считать, что случайные величины подчиняются нормальному закону распределения. Дифференциальная функция нормального распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-a)^2}{2 \cdot \sigma^2}},$$

где a – математическое ожидание;

σ – среднее квадратическое отклонение случайной величины *X*.

Графиком этой функции является кривая Гаусса, которая наглядно показывает, как распределена вероятность между возможными значениями *x* (рис.1).

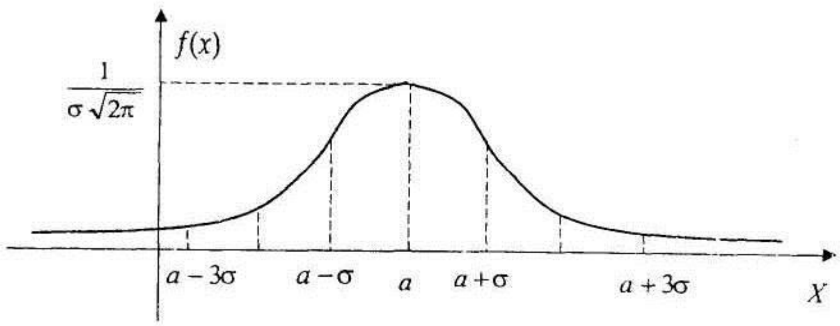

Рис. 1

Особенности нормального распределения

а) Наиболее вероятны значения *x*, близкие к ожидаемому среднему значению *a*.

б) Отклонения от среднего значения *a* в обе стороны равновероятны.

в) Большие отклонения *x* от среднего значения *a* маловероятны.

Площадь под кривой Гаусса всегда равна единице, что соответствует полной вероятности. Поэтому при уменьшении σ увеличивается вероятность значений, близких к a, рассеяние уменьшается, кривая Гаусса сжимается. При увеличении σ график кривой Гаусса становится более расплывчатым, что говорит об увеличении рассеяния.

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (α ; β) находят по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \alpha}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения «X-a» меньше δ, составляет:

$$P(|X - a| < \delta) = 2 \cdot \Phi\left(\delta / \sigma\right).$$

В частности, если $\delta = 3\sigma$, получим:

$$P\left(|X - a| < 3\sigma\right) = 2 \cdot \Phi\left(3\sigma / \sigma\right) = 2 \cdot 0,49865 \approx 0,9973(99,7\%).$$

Этот результат называют правилом «трех сигм»: почти достоверно (на 99,7%), что значения нормально распределенной случайной величины отличаются от своего среднего значения a менее, чем на 3σ, то есть практически все значения нормально распределенной случайной величины X попадают в интервал: (a - 3σ; a+3σ), см. рис. 1.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Математическая статистика базируется на теории вероятностей и является теоретической основой всей статистики. Ее задачей является создание способов сбора и методов обработки статистической информации.

Тема 5. Статистическое распределение выборки и его основные числовые характеристики

Выборочный метод - один из основных методов математической статистики. Его сущность заключается в том, что изучение большой совокупности объектов относительно некоторого количественного признака X производится по сравнительно небольшому числу случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называется множество всех изучаемых объектов, из которых производится выборка.

Выборочной совокупностью (выборкой) называется множество объектов, отобранных для изучения из генеральной совокупности.

Выборка должна быть организована случайным образом, чтобы правильно представлять генеральную совокупность.

Объемом совокупности называется количество объектов в совокупности. Объем выборки n, как правило, значительно меньше объема N генеральной совокупности: $n << N$.

Данные выборки записываются в виде таблицы, называемой статистическим распределением выборки:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

В первой строке перечислены все наблюдаемые значения признака X в порядке их возрастания (или убывания). Они называются вариантами x_i(i = 1, 2, 3, ..., k). Во второй строке указаны частоты n_i, соответствующих вариант x_i. Они показывают, сколько раз наблюдалось каждое значение признака X.

Очевидно, что сумма всех частот n_i равна объему выборки n:

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

Основные числовые характеристики выборки

1. Средняя выборочная (среднее взвешенное значение признака в выборке):

$$\overline{x}_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{n} = \frac{1}{n} \cdot (x_1 \cdot n_1 + x_2 n_2 + \ldots + x_k n_k).$$

2. Дисперсия выборочная. Характеризует разброс (рассеяние) значений вариант x_i от выборочного среднего значения $\overline{x}_в$ и измеряется в квадратных единицах признака X:

$$D_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} \left(xi - \overline{x}_в\right)^2 \cdot n_i = \frac{1}{n}\left[\left(x_1 - \overline{x}_в\right)^2 n_1 + \left(x_2 - \overline{x}_в\right)^2 \cdot n_2 + \ldots + \left(x_k - \overline{x}_в\right)^2 n_k\right].$$

Для вычисления дисперсии используется также другая, часто более удобная формула

$$D_в = \overline{x_в^2} - \left(\overline{x}_в\right)^2,$$

где

$$\overline{x}_в = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i n_i; \qquad \overline{x_в^2} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i.$$

3. Среднее квадратическое отклонение выборки - характеристика рассеяния значений признака в выборке от среднего выборочного в единицах признака X:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в}.$$

С помощью найденных выборочных характеристик $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$ оцениваются соответствующие генеральные характеристики

$\overline{x}$ - генеральная средняя;

D - генеральная дисперсия;

σ - генеральное среднее квадратическое отклонение.

Оценки имеют следующий вид:

$$\bar{x} \approx \bar{x}_в; \qquad D \approx \frac{n}{n-1} \cdot D_в = S_в^2; \qquad \sigma \approx S_в = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_в},$$

где $S_в^2$ - так называемая исправленная выборочная дисперсия.

Приведенные оценки носят случайный характер, так как зависят от выборки. Они называются точечными и удовлетворяют следующим требованиям:

• несмещенность (отсутствие систематических ошибок);

• состоятельность (увеличение объема выборки повышает вероятность правильности оценки);

• эффективность (имеют самый незначительный разброс по сравнению с другими возможными оценками).

Основные характеристики выборки $\bar{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, лишь приближенно характеризуют генеральную совокупность и могут оказаться далекими от соответствующих характеристик генеральной совокупности: $\bar{x} = a$, D, σ. Поэтому для последних используют интервальные оценки, когда неизвестная характеристика заключена в некотором интервале с заданной надежностью (вероятностью) γ. Такой интервал называется доверительным. Значения надежности берутся, как правило, высокими: 0,9; 0,95; 0,99 или 0,999, что соответствует 90; 95; 99 или 99,9%.

Если количественный признак X в генеральной совокупности распределен по нормальному закону, причем среднее квадратическое отклонение σ этого распределения известно, то с вероятностью γ доверительный интервал, заданный выражением:

$$\left(\bar{x}_в - t \cdot \sigma / \sqrt{n}; \quad \bar{x}_в + t \cdot \sigma / \sqrt{n}\right),$$

покрывает неизвестное математическое ожидание a. Здесь параметр t находится из соотношения $2 \cdot \Phi(t) = \gamma$ с помощью таблицы значений для интегральной функции Лапласа (приложение 2).

Часто статистическое распределение выборки носит интервальный характер. В этом случае указывают числовые частичные интервалы, куда попадают значения признака X, и n_i, - количество значений, попавших в интервал с номером i. В качестве значений x_i,- выбирают середины частичных интервалов.

Значения n_i называются абсолютными частотами, их сумма равна объему выборки: $\sum n_i = n$. Относительные частоты $w_i = \dfrac{n_i}{n}$ показывают долю значений x_i в общем объеме выборки. Очевидно, что сумма всех относительных частот (долей) равна 1: $\sum w_i = 1$.

Графически дискретное статистическое распределение изображается в виде полигона частот, обычно относительных. **Полигон** представляет собой ломаную линию, соединяющую соседние точки с координатами $(x_i; w_i)$.

Интервальное статистическое распределение изображается на графике в виде гистограммы относительных частот. **Гистограмма** - это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников. В основании каждого прямоугольника лежит частичный интервал, а высота прямоугольника определяется относительной частотой w_i, а чаще величиной $\frac{w_i}{h_i}$, где h_i - длина частичного интервала. При таком построении площадь каждого частичного прямоугольника равна относительной частоте w_i, а сумма всех площадей, то есть площадь ступенчатой фигуры, равна единице: $\sum w_i = 1$.

Тема 6. Элементы теории корреляции

Пусть каждый из выбранных объектов характеризуется двумя количественными признаками, X и Y. Между значениями этих признаков может существовать некоторая зависимость.

Функциональная зависимость - это такая зависимость, когда каждому значению x признака X соответствует единственное значение y признака Y. Эта зависимость является вполне определенной, однозначной и называется строгой (детерминированной). Она задается в виде функции $y = f(x)$.

Статистическая зависимость - это такая зависимость, когда каждому значению x признака X соответствует статистическое распределение значений признака Y. Эта зависимость не является строгой и носит вероятностный (стохастический) характер, поскольку на величину признака Y влияют не только значения признака X, но и другие случайные факторы.

Если случайные величины X и Y не являются взаимно независимыми, то в той или иной степени им свойственна стохастическая зависимость.

Корреляционная зависимость - это статистическая зависимость, обладающая тем свойством, что изменение значений x признака X приводит к изменению среднего значения признака Y, обозначаемого $\overline{y_x}$. Связь между x и условной средней $\overline{y_x}$ задаётся с помощью функции $f(x)$ и записывается в виде уравнения $\overline{y_x} = f(\text{x})$, которое называется уравнением регрессии Y по X.

Аналогично, связь между значениями y признака Y и соответствующими условными средними значениями $\overline{x_y}$ записывается в виде уравнения $\overline{x_y} = \varphi(x)$, которое называется уравнением регрессии X по Y.

Практически наличие корреляционной связи между признаками X и Y прослеживается как изменение средних значений одного признака при изменении значений другого, причем эта связь может проявляться с различной степенью силы. Например, имеется корреляционная зависимость между ростом людей X и их весом Y; между количеством внесенных удобрений X и урожайностью Y; между успеваемостью студентов по математике в школе и в вузе и т. п.

Основные задачи теории корреляции состоят в том, чтобы по данным выборки:

1) оценить силу (тесноту) связи между признаками X и Y;

2) найти вид (форму) этой связи в виде уравнения регрессии.

Уравнение регрессии выбирают по возможности простым, и оно, как правило, лишь приближенно описывает зависимость между значениями x одного признака и соответствующими средними значениями другого признака $\overline{y_x}$.

Наиболее простой и употребляемый вид зависимости - линейная зависимость. Она определяется уравнением линейной регрессии $\overline{y_x} = ax + b$ и изображается на графике в виде прямой регрессии. Уравнение регрессии называется выборочным, поскольку его параметры a и b находятся по результатам выборки (x_i, y_i), $i = 1,2,...n$, причем наилучшим образом в смысле метода наименьших квадратов. Сущность метода заключается в том, чтобы была наименьшей сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений y_i от соответствующих значений $\overline{y_{x_i}}$, вычисленных по уравнению регрессии $\overline{y_{x_i}} = ax_i + b$, то есть $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \to \min$.

Проблема статистического исследования зависимостей является главной в решении многих типовых задач практики, таких как планирование, прогнозирование, нормирование, оценка эффективности функционирования или качества объекта, анализ систем и прочее.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ.

Задача 1. Система передачи электроэнергии потребителю состоит из элементов: (рис. 2)

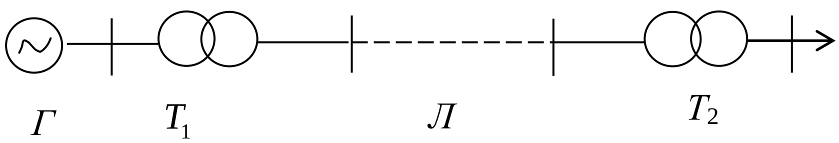

Рис. 2

генератора *Г*, повышающего трансформатора T_1, лини электропередач *Л*, понижающего трансформатора T_2.

Вероятности повреждения элементов передачи:

$q_Г = 2\cdot10^{-3}$, $q_{T1} = 5\cdot10^{-5}$, $q_Л = 2\cdot10^{-3}$, $q_{T2} = 4\cdot10^{-5}$.

Задача 1. Определить вероятность того, что потребитель не получит электроэнергию из-за повреждения системы, считая события повреждения элементов независимыми друг от друга.

Решение. Пусть A – безотказная работа системы, тогда $\overline{A}$ - отказ в работе.

$P\left(\overline{A}\right)=1-r_Г\cdot r_{T1}\cdot r_Л\cdot r_{T2}$, где $r_i=1-q_i$.

$P\left(\overline{A}\right)=1-0,998\cdot 0,99995\cdot 0,998\cdot 0,9996=0,00408546$.

Второй способ решения по теории сложения совместимых событий, т.к. отказ в работе системы наступает при повреждении хотя бы одного элемента.

$$P\left(\overline{A}\right)=q_Г+q_{T1}+q_Л+q_{T2}-q_Г\cdot q_{T1}-q_Л\cdot q_Г-q_Г\cdot q_{T2}-q_{T1}\cdot q_Л-q_{T1}\cdot q_{T2}-$$
$$-q_Л\cdot q_{T2}+q_Г\cdot q_{T1}\cdot q_Л+q_Г\cdot q_Л\cdot q_{T2}+q_{T1}\cdot q_Л\cdot q_{T2}+q_Г\cdot q_{T1}\cdot q_{T2}-$$
$$-q_Г\cdot q_{T1}\cdot q_Л\cdot q_{T2}=0,00408546.$$

В приближенных расчетах вычисление можно вести как для несовместимых событий.

$P\left(\overline{A}\right)\approx q_Г+q_{T1}+q_Л+q_{T2}=4,09\cdot 10^{-3}$, т.о., погрешность при этом составляет 0,09%.

$$P\left(\overline{A}\right)\approx\sum_{i=1}^{n}q_i.$$

Это приближенная формула для вычисления вероятности отказа системы при условии последовательных соединений ее элементов.

Задача 2. Потребитель получает электроэнергию по двум параллельным цепям линии электропередачи. Вероятность повреждения каждой цепи $q_Л=4\cdot 10^{-3}$. Каждая цепь может пропустить 100% мощности. События повреждения цепи независимые. Определить вероятность повреждения обеих цепей и вероятность сохранения электроснабжения потребителя.

Решение. Пусть A – сохранение электроснабжения. Вероятность повреждения обеих цепей определяется по теореме умножения для независимых событий.

$$P\left(\overline{A}\right)=q_Л\cdot q_Л=q_Л^2=4\cdot 10^{-3}\cdot 4\cdot 10^{-3}=1,6\cdot 10^{-5}.$$

$$P(A)=1-q_Л^2=1-1,6\cdot 10^{-5}=0,999984.$$

Другой способ решения задачи о надежности электроснабжения по двум цепям линии с учетом алгебры событий имеет вид

$r_Л\cdot r_Л=(1-q_Л)(1-q_Л)=(1-q_Л)^2$ -работают обе цепи.

$2r_Л\cdot q_Л=2(1-q_Л)\cdot q_Л$ - работает одна цепь.

Тогда надежность электроснабжения

$$P(A)=(1-q_Л)^2+2(1-q_Л)\cdot q_Л=1-q_Л^2=0,999984.$$

Задача 3. Завод получает электроэнергию по четырем цепям линии электропередачи от двух электростанций. Повышающие трансформаторы T_1 и T_2, и понижающий – T_3, и каждая цепь линии может пропустить половину требуемой мощности (рис. 3). События повреждения T_1 элементов системы независимые. Определить вероятности получения заводом всей мощности, если вероятности отказа элементов равны:

$$q_{T_1},\ q_{T_2},\ q_{T_3},\ q_{T_4},\ q_{Л_1},\ q_{Л_2}.$$

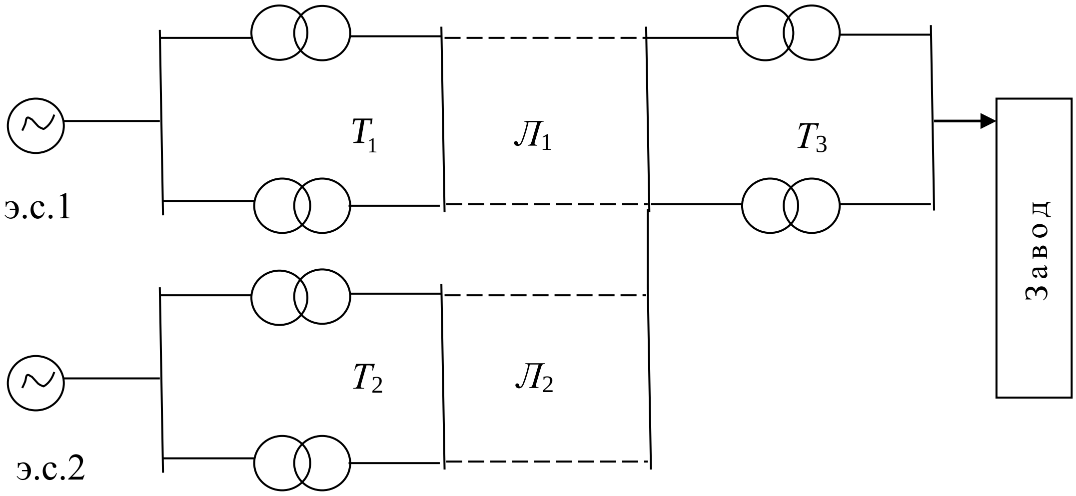

Рис. 3

Решение. Получение всей мощности заводом возможно, если любые две параллельные цепи будут работать. Вероятность работы системы проще найти через отказ элементов системы.

Вероятности отказов каждой из четырех цепей, с учетом алгебры событий, имеют вид:

$$q_I = q_{T_1} + q_{Л_1} + q_{T_3} - q_{T_1}\cdot q_{Л_1} - q_{Л_1}q_{T_3} + q_{T_1}\cdot q_{Л_1}\cdot q_{T_3};$$

$$q_{II} = q_I \approx q_{T_1} + q_{Л_1} + q_{T_3};$$

$$q_{III} = q_{IV} \approx q_{T_2} + q_{Л_3} + q_{T4};$$

$$P = 1 - \left[q_I^2\cdot q_{III}^2 + q_I^2\cdot 2q_{III}^2\cdot\left(1-q_{III}\right) + q_{III}^2\cdot 2q_I\left(1-q_I\right)\right].$$

Задача 4. Система состоит из одного повышающего трансформатора T_1, двух цепей линии электропередачи и двух понижающих – T_2. По любой цепи потребитель может получить необходимую мощность, но понижающий трансформатор может пропустить только 50% мощности. Вероятность повреждения трансформатора $T_1: q_{T_1} = 0{,}05$; для одной цепи линии - $q_Л = 0{,}03$; для одного трансформатора $T_2 - q_{T_2} = 0{,}006$. Повреждения всех элементов независимы. Определить вероятность подачи 100%, 50% и 0% требуемой мощности.

Решение. Для передачи 100% мощности должны работать элементы T_1, оба T_2 и хотя бы одна цепь линии.

$$P(100\%) = r_{T_1}\cdot\left(1-q_Л^2\right)\cdot r_{T_2}^2 = 0{,}995\cdot\left(1-0{,}03^2\right)\cdot 0{,}994^2 = 0{,}982.$$

Для передачи 50% мощности достаточно работы T_1, *Л,* T_2 (одного).

$$P(50\%) = r_{T_1}\cdot\left(1-q_Л^2\right)\cdot 2r_{T_2}\cdot q_{T_2} = 0{,}01185.$$

Полная потеря электроснабжения равна сумме вероятностей отказов всех элементов

$$P(0\%) = q_{T_1} + q_Л^2 + q_{T_1} \cdot q_Л^2 - q_{T_1} \cdot q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2 + q_{T_1} \cdot q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2 \approx$$
$$\approx q_{T_1} + q_Л^2 + q_{T_2}^2 = 0{,}005 + 0{,}03^2 + 0{,}006^2 = 0{,}005936.$$

Задача 5. По каждой линии и каждому повышающему трансформатору можно передать 100% мощности. Пропускная способность понижающего – 50%. Каждый генератор дает 50% мощности. Считая повреждения элементов независимыми, определить вероятности подачи 100%, 50% и 0% мощности (рис. 4).

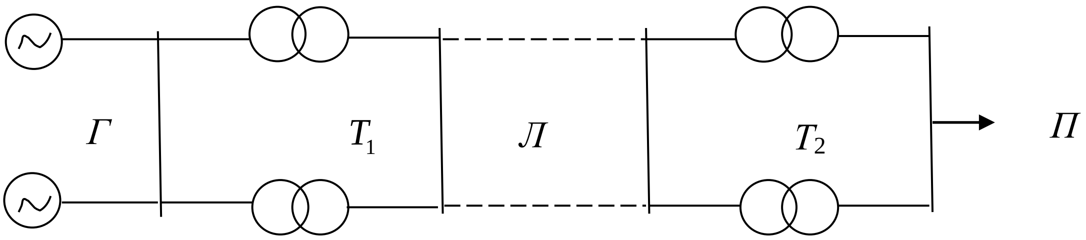

Рис. 4

Решение.

$$P(100\%) = \left(1 - q_Г\right)\left(1 - q_{T_1}^2\right)\left(1 - q_Л^2\right)\left(1 - q_{T_2}\right)^2.$$
$$P(50\%) = 2r_Г \cdot q_Г \left(1 - q_{T_1}^2\right)\left(1 - q_Л^2\right)\left(1 - q_{T_2}^2\right) +$$
$$+ r_Г^2 \cdot \left(1 - q_{T_1}^2\right)\left(1 - q_Л^2\right) \cdot 2r_{T_2} \cdot q_{T_2}.$$
$$P(0\%) = q_Г^2 + q_{T_1}^2 + q_Л^2 + q_{T_2}^2 - q_Г^2 \cdot q_{T_1}^2 - q_Г^2 \cdot q_Л^2 - q_Г^2 \cdot q_{T_2}^2 - q_{T_1}^2 \cdot q_Л^2 -$$
$$- q_{T_1}^2 \cdot q_{T_2}^2 - q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2 + q_Г^2 \cdot q_{T_1}^2 \cdot q_Л^2 + q_Г^2 \cdot q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2 + q_{T_1}^2 \cdot q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2 + q_Г^2 \cdot q_{T_1}^2 \cdot q_{T_2}^2 - q_Г^2 \cdot q_{T_1}^2 \cdot q_Л^2 \cdot q_{T_2}^2.$$

Задача 6. Схема состоит из двух повышающих трансформаторов T_1 (рис. 5) на подстанции 1, трех линий электропередачи *A, B, C* и трех понижающих T_2, T_3 на подстанциях 2 и 3. Пропускные способности линий и трансформаторов указаны в таблице 1 вместе с вероятностями их повреждения - q.

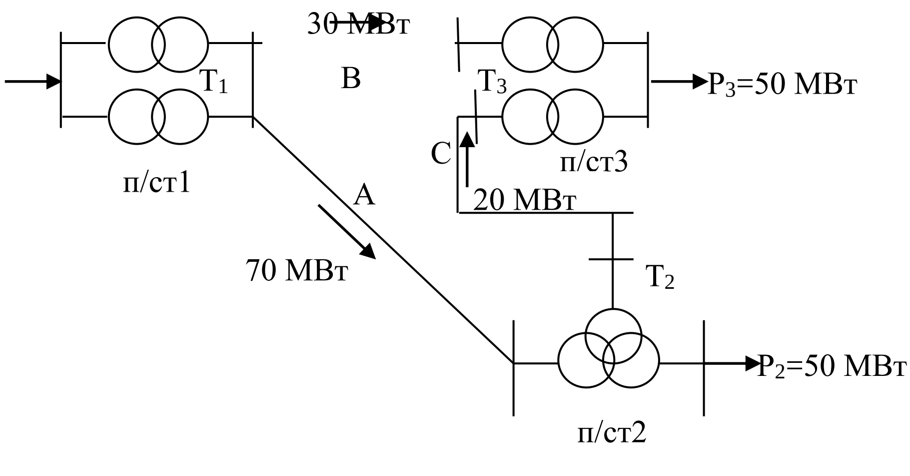

Рис. 5

Определить вероятности потери потребителями 50МВт и 70МВт мощности.

Таблица 1

Пропускная способность	Элемент сети					
	A	***B***	***C***	T_1	T_2	T_3
МВт	70	30	20	100/100	70/20/50	30/20
q	0,08	0,05	0,01	0,003/0,003	0,004	0,002/0,002

Решение. Суммарная мощность потребителя 100 МВт. Что бы потребитель не получил 50МВт, необходимо:

1) на подстанции 1 не работает один трансформатор;
2) не повреждены линии A и T_2 на подстанции 2.

$$P(50)=\left(1-q_{T_1}^2\right)\left(1-q_A\right)\left(1-q_{T_2}\right)\cdot\left[\left(q_B+q_{T_3}-q_B\cdot q_{T_3}\right)\left(q_C+q_{T_3}-q_C\cdot q_{T_3}\right)\right]=0,00057.$$

В квадратных скобках указана вероятность повреждения двух цепей линий B и C и трансформаторов T_3**,** состоящих из последовательно соединенных элементов.

$$P(70)=\left(1-q_{T_1}^2\right)\left(1-q_B\right)\left(1-q_{T_3}\right)\left(q_A+q_{T_2}-q_A\cdot q_{T_2}\right)=0,079337.$$

Задача ***7.*** От магистральной кабельной линии в цехе промышленного предприятия получают электроэнергию три группы электродвигателей (М) с потребляемой мощностью (рис. 6):

1) $p_1=3$; 3×10 кВ$\cdot$А.
2) $p_2=2$; 2×20 кВ$\cdot$А.
3) $p_3=3$; 3×30 кВ$\cdot$А и одинаковым $\cos\varphi$.

Вероятности включения в работу каждого двигателя соответствующей группы равны:

$p_1=0,6$; $p_2=0,7$; $p_3=0,5$.

События включения и отключения двигателей независимые между собой. Определить вероятность загрузки головного участка линии:

$S_1=0$ кВ$\cdot$А, $S_2=60$ кВ$\cdot$А, $S_3=100$ кВ$\cdot$А, $S_4=160$ кВ$\cdot$А.

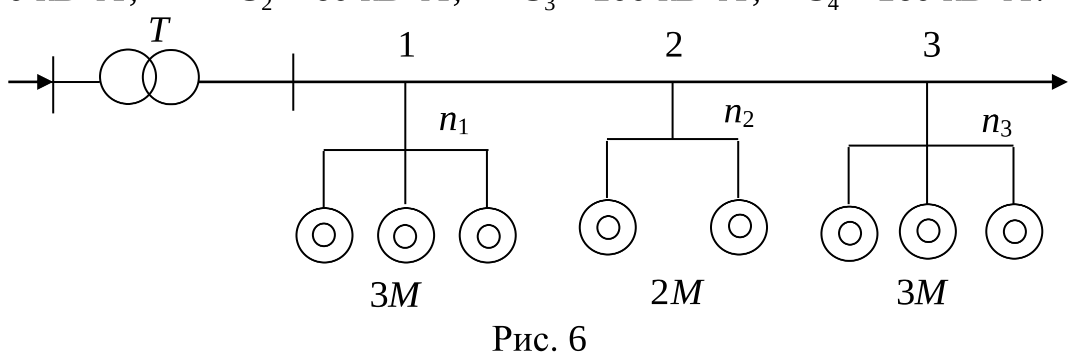

Рис. 6

Решение. Используется биноминальный закон распределения нагрузок, т.к. выполняется схема Бернулли.

1) $P(0)=C_3^0p_1^0q_1^3\cdot C_2^0p_2^0q_2^2\cdot C_3^0p_3^0q_3^3=\left(1-p_1\right)^3\cdot\left(1-p_2\right)^2\cdot\left(1-p_3\right)^3=0,00072.$

2) $P(60)=P(3\cdot 10+1\cdot 30)+P(2\cdot 10+2\cdot 20)+P(10+20+30)+P(2\cdot 30)=$

$$=C_3^3p_1^2q_1^0\cdot C_2^0p_2^0q_2^2\cdot C_3^1p_3^1q_3^2+C_3^2p_1^2q_1^1\cdot C_2^2p_2^2q_2^0\cdot C_3^0p_3^0q_3^3+$$
$$+C_3^1p_1^1q_1^2\cdot C_2^1p_2^1q_2^1\cdot C_3^1p_3^1q_3^2+C_3^0p_1^0q_1^3\cdot C_2^0p_2^2q_2^2\cdot C_3^2p_3^2q_3^1=0{,}08143.$$

3) $P(100)=P(3\cdot 10+2\cdot 20+1\cdot 30)+P(2\cdot 10+1\cdot 20+2\cdot 30)+P(1\cdot 10+3\cdot 30)+$

$+P(2\cdot 20+2\cdot 30)=0{,}11685$.

4) $P(160)=C_3^3p_1^3q_1^0\cdot C_2^2p_2^2q_2^0\cdot C_3^3p_3^3q_3^0=0{,}0132$.

4. ЗАКОНЫ РСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ.

Задача 1. Случайная величина отклонений напряжения v у потребителей электроэнергии подчиняется нормальному закону с параметрами $M(v)=0{,}5\%$; $\varphi(v)=2\%$. Определить вероятность попадания случайной величины в интервалы $1\%\le v\le 1{,}5\%$ и $5\%\le v\le 6\%$.

Решение.

$$P_1(1\le v\le 1{,}5)=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_1^{1,5}e-\frac{\left[v-M(v)\right]^2}{2\delta^2}\cdot dv=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{35-0{,}5}{2}\right)-\phi\left(\frac{1-0{,}5}{2}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[0{,}3829-0{,}1974\right]=0{,}09275.$$

(Вычисление по таблице).

Задача 2. Случайная величина нагрузки J магистральной кабельной линии подчиняется нормальному закону $M(J)=200$ А и $\delta(J)=50$ А.

Найти вероятность того, что нагрузка линии превысит $J_1=350$ А, $J_2=300$ А, $J_3=250$ А.

Решение.

$$P(-\infty\le J<0)=\frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{0-M}{\delta}\right)-\phi\left(\frac{-\infty-M}{\delta}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\phi(-4)-\phi(-\infty)\right]=0{,}000005.$$

$$P(J>J_1)=\left[1-F(J_1)\right]=1-\frac{1}{2}\left[1-\phi\left(\frac{J_1-M}{\delta}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\phi\left(\frac{350-200}{50}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\phi(3)=0{,}00135.$$

Задача 3. Отклонение напряжения изменяется в пределах от 1% до 5% от номинального. Плотность вероятности случайной величины отклонений напряжения от номинального подчиняется закону распределения:

$$\varphi(v)=\begin{cases} kv \text{ при } 1\% \le V \le 5\%, \\ 0 \quad \text{при } v \overline{\in} [1;\ 5]. \end{cases}$$

Определить коэффициент *k*, м.о.* квадрата отклонения напряжения, среднее квадратичное отклонение.

Решение.

$$\int_1^5 kvdv = 1,\ k=\frac{1}{12}=0{,}0839,\ M(v)=\int_1^5 v\cdot kvdv = 3{,}45(\%);$$

$$M\left(v^2\right)=\int_1^5 v^2\cdot kvdv = 0.0333\cdot\left.\frac{v^2}{4}\right|_1^5 = 13{,}1(\%)^2;$$

$$D(v)=M\left(v^2\right)-\left[M(v)\right]^2 = 13{,}1-3{,}45^2 = 1{,}2(\%)^2;$$

$$\delta=\sqrt{1{,}2}\approx 1{,}1(\%).$$

Задача 4. Сетевой трансформатор в горсети работает в течение времени *T*, где:

$$\varphi(t)=\begin{cases} \lambda\cdot e^{-\lambda t} \text{ при } t\ge 0, \\ 0 \qquad \text{при } t<0. \end{cases}$$

Вследствие роста нагрузки (по истечении времени *T*) заменяют трансформатор новым. Найти вероятность того, что за время *t*:

1) трансформатор не меняется;
2) заменяется два раза;
3) заменяется не менее двух раз.

Решение.

1) $P(0)=\dfrac{e^{-\lambda t}}{0!}\cdot(\lambda t)^0 = e^{-\lambda t};$

2) $P(2)=\dfrac{(\lambda t)^2}{2!}\cdot e^{-\lambda t} = \lambda^2 t^2\cdot\dfrac{e^{-\lambda t}}{2};$

3) $P(m\ge 2)=1-\left[P(0)+P(1)\right]=1-e^{-\lambda t}\cdot(1-\lambda t).$

5. СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, ИХ РЕГРЕССИЯ. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Задача 1. Электросеть состоит из двух последовательных элементов – линии и трансформатора. Вероятности надежной работы линии и трансформатора:

$r_1(t)=e^{-\lambda_1 t}$ и $r_2(t)=e^{-\lambda_2 t}$ при $t>0$,

---

* м.о. – математическое ожидание.

где λ_1 и λ_2 - интенсивность отказов.

Определить вероятность безотказной работы и функцию распределения $F(t)$ системы.

Решение. $\varphi(t)=\lambda\cdot e^{-\lambda t}$ - закон распределения случайной величины (время между двумя соседними событиями в потоке).

$\lambda(t)=\dfrac{\varphi(t)}{r(t)}$ - интенсивность отказов - это плотность распределения безотказной работы, деленная на вероятность надежной работы элемента $r(t)$.

$r(t)=r_1(t)\cdot r_2(t)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$ при $t>0$.

$$F(t)=\int_0^t -r'(t)dt=-\int_0^t\left[e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\right]'dt=1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

Если будет «*n*» последовательно соединенных и независимо работающих элементов, то

$$\varphi(t)=F'(t)=\left[1-r(t)\right]',\qquad \lambda(t)=\frac{-r'(t)}{r(t)};$$

$$\lambda(t)=-\left[\ln r(t)\right]'=-\frac{d\left[\ln r(t)\right]}{dt};$$

$$\ln r(t)=-\int_0^t\lambda(t)dt,\qquad r(t)=e^{-\int_0^t\lambda(t)dt};$$

$$r_1(t)=e^{-\int_0^t\lambda_1(t)dt},\qquad r_2(t)=e^{-\int_0^t\lambda_2(t)dt},\qquad r_n(t)=e^{-\int_0^t\lambda_n(t)dt};$$

$$\lambda(t)=\sum_{i=1}^n\lambda_i(t),\qquad r(t)=e^{-\int_0^t\sum_{i=1}^n\lambda_i(t)dt}.$$

Задача 2. Независимые случайные величины токов J_1 и J_2 потребителей n_1 и n_2 подчиняются нормальному закону. Для нагрузки n_1 $M(J_1)=300\text{ А}$, $\delta_1=50\text{ А}$, а для $n_2-\delta_2=100\text{ А}$, при этом $P(J_2>600\text{ А})=0,02275$. Найти расчетную нагрузку головного участка линии, вероятность превышения которой составляет 0,00135.

Решение. Нагрузка на головном участке линии равна сумме нагрузок случайных величин потребителей.

$$P(J_2>600)=1-F(600)=1-0,5-0,5\cdot\phi\left[\frac{600-M(J_2)}{100}\right]=0,02275.$$

$\phi\left[\dfrac{600-M(J_2)}{100}\right]=0,9545$, то $\phi^{-1}(0,9545)=2$, $M(J_2)=400\text{ А}$;

$M(J)=M(J_1)+M(J_2)=300+400=700(\text{А})$;

$$D(J)=D(J_1)+D(J_2)=2500+10000=12500;$$

$\delta(J)=112\text{А}$, т.к. $D=\delta^2$.

$$P(J>J_p)=1-F(J_p)=0{,}5-0{,}5\phi\left[\frac{J_p-M(J)}{\delta(J)}\right]=0{,}00135;$$

$\phi^{-1}(0{,}9973)=\dfrac{H_p-700}{112}=3$ (по табл.), $J_p=1036$ А.

Задача 3. От подстанции на промпредприятии получают энергию четыре цеха, так $M(S_1)=1000$ кВ·А, $\delta_1=300$ кВ·А; $M(S_2)=800$ кВ·А, $\delta_2=200$ кВ·А; $M(S_3)=900$ кВ·А, $\delta_3=300$ кВ·А; $M(S_4)=1200$ кВ·А, $\delta_4=400$ кВ·А.

Коэффициент мощности всех нагрузок одинаков. Взаимные корреляционные связи между случайными величинами (нагрузками цехов) характеризуются коэффициентом корреляции

$$r_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0{,}3 & 0{,}6 & -0{,}4\\ & 1 & 0{,}2 & 0{,}1\\ & & 1 & 0{,}6\\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

Найти расчетную нагрузку, вероятность превышения которой равна 0,0062.

Решение.

$$M(S_\Sigma)=\sum_{i=1}^{4}M(S_i)=3900 \text{ кВ}\cdot\text{А}.$$

$$D(S_\Sigma)=\sum_{i=1}^{4}D(S_i)+2\sum_{i<j}K(S_i,\,S_j)=\sum_{i=1}^{4}D(S_i)+2\sum_{i<j}\delta(S_i)\cdot\delta(S_j)\cdot r_{ij}.$$

$$D(S_\Sigma)=90000+40000+90000+160000+$$

$$+2(300\cdot200\cdot0{,}3+300\cdot300\cdot0{,}6-300\cdot400\cdot0{,}4+200\cdot300\cdot0{,}2+200\cdot400\cdot0{,}1+300\cdot400\cdot0{,}6)=$$

$=612000$, $\delta=782$ кВ·А.

$$P(S>S_p)=0{,}5-0{,}5\phi\left(\frac{S_p-3900}{782}\right)=0{,}0062; \qquad \frac{S_p-3900}{782}=2{,}5;$$

$S_p=5855$ кВ·А.

Задача 4. По наблюдениям за выработкой продукции и потребляемой электроэнергией в течение 10 лет получим зависимость $\Pi=f(A)$ (см. табл. 2).

Таблица 2

К-во продукции усл. ед. в год	20	20	35	50	40	70	65	85	90	85
10^6кВт·ч/год	4	7	8	10	12	13	16	18	20	15

Через два года намечается увеличение выработки продукции до 110 усл. единиц в год. Определить потребное количество энергии за расчетный год. Для прогноза использовать линейное уравнение регрессии.

Решение. Зависимость между выпуском продукции и потреблением электроэнергии не функциональная, а вероятностная.

Линейное уравнение имеет вид:

$$A = r_{ПА} \cdot \frac{\delta_A}{\delta_П} \cdot \left[П - M(П)\right] + M(A),$$

где $r_{ПА}$ - коэффициент корреляции между количеством выпускаемой продукции *П* и потребляемой электроэнергией *А*.

$$M(A) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A_i = \frac{10^6}{10}(4+7+8+10+12+13+16+18+20+15) = 12{,}3 \cdot 10^6;$$

$$M(П) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} П_i = 56 \text{ (усл.ед.)}; \qquad \delta(П) = \sqrt{\frac{\Sigma\left[П - M(П)\right]^2}{n-1}} = 26{,}8;$$

$$r_{ПА} = \frac{\Sigma\left[A_i - M(A_i)\right]\left[П_i - M(П)\right]}{(n-1)\cdot\delta(A)\cdot\delta(П)} = 0{,}96;$$

$$A = \left[0{,}96 \cdot \frac{5{,}02}{26{,}8} \cdot (П - 56) + 12{,}3\right] \cdot 10^6 = 10^6 \cdot (0{,}18П - 2{,}2);$$

$$A = (0{,}18 \cdot 110 + 2{,}2) \cdot 10^6 = 22 \cdot 10^6 \text{ кВт} \cdot \text{ч}.$$

Задача 5. Выключатель *n* раз отключает линию. Вероятность его выхода из строя равна 0,01. Вероятность его отказа, хоты бы один раз, равна 0,45. Определить число отключений линии за промежуток *t*.

Решение.

$$P(m) = \frac{a^m}{m!} \cdot e^{-a}, \text{ где } a = n \cdot q,\ m = 1;$$

$$P(1) = 1 - e^{-a} = 0{,}45; \qquad 1 - e^{-nq} = 0{,}45; \qquad e^{-0{,}01n} = 0{,}55.$$

Ответ: $n = -\dfrac{\ln 0{,}55}{0{,}01} \approx 60$ (раз).

Задача 6. Определить алгоритм получения случайной величины времени безотказной работы элемента, имеющей экспоненциальное распределение $\varphi(t) = \lambda \cdot e^{-\lambda t}$, $t > 0$, располагая датчиком случайных значений величины X, равномерно распределенной в интервале (0; 1).

Решение.

$$F(t) = \int_0^t \lambda \cdot e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}, \qquad F(x) = \int_0^x 1 \cdot dx = x.$$

$$F(t) = F(x), \qquad 1 - e^{-\lambda t} = x,\ t = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - x).$$

6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Задача 1. Определить наименьшее число n средних за 15 минут значений нагрузки элемента сети, при котором разность статистической вероятности r_* и вероятность события r, состоящего в том, что значение нагрузки окажется в диапазоне $\left[J_1;\ J_2\right]$, не превышает $\varepsilon = 0{,}01$ с доверительной вероятностью $\beta = 0{,}9$, причем $r_* = 0{,}7$.

Решение. Если случайная величина r_* распределена по нормальному закону, то

$$n = \frac{\left[\phi^{-1}(\beta)\right]^2 \cdot r_*(1-r_*)}{\varepsilon^2} = \frac{1{,}645^2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}01^2} = 5760.$$

Время регистрации 15-минутных значений нагрузок $T = \dfrac{n \cdot 15}{24 \cdot 60} = 60$ суток.

Задача 2. В горсети 500 сетевых трансформаторов с одинаковой номинальной мощностью. Сколько лет надо наблюдать, что бы с 95%-ной вероятностью утверждать, что 5 лет будет не более 30 аварийных повреждений. Среднее время аварийного простоя 8 часов.

Решение.

$$r_2 = \frac{30 \cdot 8}{5 \cdot 8760 \cdot 500} = 1{,}1 \cdot 10^{-5},$$

где 8760 – число часов в одном году.

$$T = \frac{n \cdot \Theta}{8760 m},$$

где n – число отказов,

Θ - длительность простоя,

m – число трансформаторов в сети.

$$n = -\frac{\ln(1-\beta)}{r_2}; \qquad T = \frac{-\ln(1-\beta) \cdot \Theta}{8760 \cdot r_2 \cdot m} = \frac{-\ln 0{,}05 \cdot 8}{1{,}1 \cdot 10^{-5} \cdot 8760 \cdot 500} = 0{,}124 \text{ года}.$$

Задача 3. Нагрузка распределена по нормальному закону и замерено всего 960 значений, при этом числовые характеристики: $M_*(J) = 150$ А, $\delta_*(J) = 90$ А, $\beta = 0{,}95$. Определить доверительные интервалы для $M(J)$ и $\delta(J)$.

Решение.

$$\varepsilon_M = \sqrt{\frac{D_*(J)}{n}} \cdot \phi^{-1}(\beta) = \sqrt{\frac{90^2}{960}} \cdot 1{,}96 = 5{,}7 \ (\text{А});$$

$$M(J_1) = M_*(J) + \varepsilon_M = 155{,}7 \text{ А}; \qquad M(J_2) = M_*(J) - \varepsilon_M = 144{,}3 \text{ А};$$

$$144{,}3 \le M(J) \le 155{,}7.$$

$$\varepsilon_\delta = D_*(J) \cdot \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \phi^{-1}(\beta) = 90^2 \cdot \sqrt{\frac{2}{960-1}} \cdot 1{,}96 = 725 \ (\text{А}^2);$$

$\sqrt{7375} \le \delta \le \sqrt{8825}$.

Задача 4. По данным нагрузок двух потребителей вычислен коэффициент корреляции $r_* = 0,283$ и $n = 240$. Проверить реальность корреляционных связей между случайными величинами при $\beta = 0,95$.

Решение. Критическая область $|r| > \phi^{-1}(\beta) \cdot \dfrac{1 - r_*^2}{\sqrt{n}}$.

$\phi^{-1}(\beta) \cdot \dfrac{1 - r_*^2}{\sqrt{n}} = \phi^{-1}(0,95) \cdot \dfrac{1 - 0,283^2}{\sqrt{240}} = 1,96 \cdot \dfrac{0,92}{15,5} = 0,127$, т.е. $|r| > 0,127$ с вероятностью 0,95 можно считать, что корреляционная связь между случайными величинами нагрузок потребителей имеет место.

Задача 5. Значения максимальной мощности за сутки межсистемной связи распределены равномерно (см. табл. 3).

Таблица 3

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_{max}	350	300	320	380	400	330	370	310	390	350

Построить доверительные интервалы для $M(P_{\max})$ и $\delta(P_{\max})$, если доверительная вероятность $\beta = 0,9$.

Решение.

$$M_*(P_{\max}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} P_{i\max} = \frac{3500}{10} = 350 \text{ МВт}^1.$$

$$D_*(P_{\max}) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{10} P_{i\max}^2 - \left[M_*(PL\max)\right]^2\right\}\frac{n}{n-1} = 1,22 \cdot 10^{-3} \text{ МВт}^2.$$

$r = n - 1 = 9$, $\beta = 0,9$, то $t_\beta = 1,833$ (по таблице 3).

$$\varepsilon_M = t_\beta \cdot \sqrt{\frac{D_*(P_{\max})}{n}} = 1,833 \cdot \sqrt{\frac{1,22 \cdot 10^{-3}}{10}} = 20,2 \text{ МВт};$$

$329,8 < M(P_{\max}) < 370,2$.

$r_1 = \dfrac{1-\beta}{2} = \dfrac{1-0,9}{2} = 0,05$; $\qquad \chi_1^2 = 16,92$;

$r_2 = 1 - r_1 = 0,95$; $\qquad \chi_2^2 = 3,32$.

Распределение χ^2 с $(n-1)$ степенями свободы.

$$\frac{D_*(P_{\max}) \cdot (n-1)}{\chi_1^2} < D(P_{\max}) < \frac{D_*(P_{\max}) \cdot (n-1)}{\chi_2^2};$$

$D(P_{\max}) \in (0,648;\ 3,31) \cdot 10^3$; $\quad \delta(P_{\max}) \in (25,45;\ 57,55)$.

7. ЗАДАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи 1-10

Для сигнализации на складе установлены три независимо работающих устройства. Вероятность того, что при необходимости первое устройство сработает, составляет p_1, для второго и третьего устройства эти вероятности равны соответственно p_2 и p_3. Найти вероятность того, что в случае необходимости сработают:

а) все устройства;

б) только одно устройство;

в) хотя бы одно устройство.

1. p_1=70%, p_2=85%, p_3=90%;
2. p_1=75%, p_2=90%, p_3=80%;
3. p_1=95%, p_2=90%, p_3=75%;
4. p_1=98%, p_2=85%, p_3=80%;
5. p_1=75%, p_2=80%, p_3=95%;
6. p_1=85%, p_2=95%, p_3=80%;
7. p_1=90%, p_2=85%, p_3=95%;
8. p_1=95%, p_2=75%, p_3=70%;
9. p_1=80%, p_2=85%, p_3=90%;
10. p_1=70%, p_2=90%, p_3=98%.

Задачи 11-20

В партии, состоящей из n одинаково упакованных изделий, смешаны изделия двух сортов, причем k из этих изделий - первого сорта, а остальные изделия - второго сорта. Найти вероятность того, что взятые наугад два изделия окажутся:

а) одного сорта;

б) разных сортов.

11. n=20, k=15;
12. n=25, k=10;
13. n=30, k=20;
14. n=55, k=23;
15. n=40, k=25;
16. n=45, k=15;
17. n=50, k=30;
18. n=55, k=35;
19. n=60, k=40;
20. n=70, k=45.

Задачи 21-30

21. Вероятность того, что новый товар будет пользоваться спросом на рынке, если конкурент не выпустит в продажу аналогичный продукт, равна 0,75, а при наличии конкурирующего товара она равна 0,35. Вероятность выпуска конкурентом товара равна 0,45.

а) Найти вероятность того, что товар будет пользоваться спросом.

б) Товар пользуется спросом на рынке. Какова вероятность, что это произошло в условиях конкуренции?

22. Курс доллара повышается в течение квартала с вероятностью 0,9 и понижается с вероятностью 0,1. При повышении курса доллара фирма рассчитывает получить прибыль с вероятностью 0,85; при понижении - с вероятностью 0,5.

а) Найти вероятность того, что фирма получит прибыль.

б) Фирма в течение квартала получила прибыль. Какова вероятность, что это произошло при повышении курса доллара?

23. На строительство объекта поступают железобетонные плиты от четырех цементных заводов в количестве 50, 10, 40 и 30 штук соответственно. Каждый из заводов допускает при изготовлении плит брак (несоответствие ГОСТу), составляющий соответственно 1%, 5%, 2% и 3%.

а) Какова вероятность того, что наугад взятая плита будет удовлетворять требованиям ГОСТа?

б) Наугад взятая плита удовлетворяет требованиям ГОСТа. Какова вероятность, что она произведена на четвертом заводе?

24. В цехе трудятся три мастера и шесть их учеников. Мастер допускает брак при изготовлении изделия с вероятностью 0,05; а ученик - с вероятностью 0,15.

а) Какова вероятность, что взятое наугад изделие будет бракованным?

б) Поступившее из цеха изделие оказалось бракованным. Какова вероятность, что его изготовил мастер?

25. В данный район изделия поставляются двумя фирмами, их объем находится в соотношении 5:8. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют 90%, у второй фирмы этот показатель 85%.

а) Какова вероятность, что взятое наугад изделие оказалось стандартным?

б) Взятое наугад изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно изготовлено первой фирмой.

26. В магазине имеются телевизоры с импортными и отечественными трубками в соотношении 2:9. Вероятность выхода из строя в течение гарантийного срока телевизора с импортной трубкой равна 0,005; с отечественной трубкой она равна 0,01.

а) Найти вероятность того, что купленный в магазине телевизор выдержит гарантийный срок.

б) Купленный телевизор выдержал гарантийный срок. Какова вероятность, что он с отечественной трубкой?

27. По результатам проверки контрольных работ оказалось, что в первой группе получили положительную оценку 20 студентов из 30, а во второй группе 15 из 25.

а) Какова вероятность того, что взятая наугад работа из наугад выбранной группы оценена положительно?

б) Найти вероятность того, что наугад выбранная работа, имеющая положительную оценку, написана студентом первой группы.

28. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: I класс - малый риск, II класс - средний риск, III класс -большой риск. Среди клиентов компании 50 % - клиенты первого класса риска, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01, второго - 0,03, третьего - 0,08.

а) Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования?

б) Найти вероятность того, что получивший денежное вознаграждение застрахованный относится к группе малого риска.

29. Вся продукция цеха проверяется двумя контролерами, причем первый контролер проверяет 55% изделий, а второй - остальные. Вероятность того, что первый контролер пропустит нестандартное изделие, равна 0,01, а для второго контролера эта вероятность 0,02.

а) Какова вероятность, что взятое наугад изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным?

б) Взятое наугад изделие, маркированное как стандартное, оказалось нестандартным. Найти вероятность того, что это изделие проверялось вторым контролером.

30. Вероятность изготовления изделия с браком на данном предприятии равна 0,04. Перед выпуском изделие подвергается упрощенной проверке, которая в случае бездефектного изделия пропускает его с вероятностью 0,98, а в случае изделия с дефектом – с вероятностью 0,05.

а) Определить, какая часть изготовленных изделий выходит с предприятия после упрощенной проверки.

б) Какова вероятность того, что изделие, выдержавшее упрощенную проверку, оказалось дефектным?

Задачи 31-40

Вероятность того, что в результате проверки изделию будет присвоен знак «изделие высшего качества», равна p.

1) На контроль поступило n изделий. Какова вероятность того, что знак высшего качества будет присвоен:

а) ровно m изделиям;

б) более чем k изделиям;

в) хотя бы одному изделию;

г) указать наивероятнейшее количество изделий, получивших знак высшего качества, и найти соответствующую ему вероятность.

2) При тех же условиях найти вероятность того, что в партии из N изделий знак высшего качества получает:

а) ровно половина изделий;

б) не менее чем k_1, но не более чем k_2 изделий.

31. n=8;	p=0,4;	m=5;	k=6;	N=20;	k_1=5;	k_2=10.
32. n=7;	p=0,3;	m=4;	k=5;	N=24;	k_1=5;	k_2=15.
33. n=6;	p=0,2;	m=3;	k=4;	N=28;	k_1=4;	k_2=14.

34. n=5; p=0,3; m=2; k=3; N=30; k_1=8; k_2=20.
35. n=4; p=0,6; m=1; k=2; N=32; k_1=10; k_2=25.
36. n=9; p=0,2; m=6; k=7; N=34; k_1=5; k_2=20.
37. n=7; p=0,5; m=3; k=4; N=36; k_1=15; k_2=30.
38. n=6; p=0,4; m=1; k=3; N=38; k_1=12; k_2=30.
39. n=8; p=0,6; m=4; k=5; N=40; k_1=20; k_2=30.
40. n=5; p=0,5; m=3; k=2; N=26; k_1=10; k_2=20.

Задачи 41-50

В лотерее на каждые 100 билетов приходится m_1 билетов с выигрышем a_1 тыс. рублей, m_2 билетов с выигрышем a_2 тыс. рублей, m_3 билетов с выигрышем a_3 тыс. рублей и т.д. Остальные билеты из сотни не выигрывают.

Составить закон распределения величины выигрыша для владельца одного билета и найти его основные характеристики: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Пояснить смысл указанных характеристик.

41. a_1=20; a_2=10; a_3=5; a_4=3; a_5=1;
m_1=1; m_2=2; m_3=8; m_4=10; m_5=15.

42. a_1=18; a_2=15; a_3=10; a_4=35;
m_1=2; m_2=3; m_3=5; m_4=20.

43. a_1=15; a_2=12; a_3=8; a_4=4;
m_1=3; m_2=10; m_3=15; m_4=20.

44. a_1=16; a_2=10; a_3=6; a_4=3; a_5=2; a_6=1;
m_1=2; m_2=5; m_3=8; m_4=10; m_5=15; m_6=20.

45. a_1=10; a_2=8; a_3=6; a_4=4; a_5=2; a_6=1;
m_1=5; m_2=10; m_3=12; m_4=15; m_5=18; m_6=20.

46. a_1=6; a_2=5; a_3=4; a_4=3; a_5=2; a_6=1;
m_1=2; m_2=4; m_3=6; m_4=10; m_5=15; m_6=20.

47. a_1=14; a_2=12; a_3=8; a_4=5; a_5=1;
m_1=2; m_2=8; m_3=15; m_4=20; m_5=30.

48. a_1=12; a_2=10; a_3=6; a_4=3; a_5=1;
m_1=5; m_2=8; m_3=14; m_4=25; m_5=30.

49. a_1=8; a_2=5; a_3=4; a_4=2;
m_1=4; m_2=6; m_3=12; m_4=20.

50. a_1=5; a_2=4; a_3=3; a_4=2;
m_1=8; m_2=10; m_3=15; m_4=25.

Задачи 51-60

Вес изготовленного серебряного изделия должен составлять a граммов.

При изготовлении возможны случайные погрешности, в результате которых вес изделия случаен, но подчинен нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением σ граммов.

Требуется найти вероятность того, что:

а) вес изделия составит от α до β граммов;

б) величина погрешности в весе не превзойдет δ граммов по абсолютной величине.

51. a=50; σ=2; α=30; β=55; δ=5;
52. a=60; σ=2; α=56; β=62; δ=6;
53. a=70; σ=3; α=64; β=80; δ=7;
54. a=80; σ=3; α=75; β=92; δ=8;
55. a=90; σ=4; α=78; β=95; δ=9;
56. a=100; σ=4; α=80; β=110; δ=10;
57. a=120; σ=5; α=100; β=150; δ=10;
58. a=130; σ=5; α=125; β=140; δ=12;
59. a=140; σ=6; α=130; β=155; δ=14;
60. a=150; σ=6; α=145; β=160; δ=15.

Задачи 61-70

По итогам выборочных обследований для некоторой категории сотрудников величина их дневного заработка X руб. и соответствующее количество сотрудников n_i представлены в виде интервального статистического распределения.

а) Построить гистограмму относительных частот распределения.

б) Найти основные характеристики распределения выборочных данных: среднее выборочное значение, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение.

в) Оценить генеральные характеристики по найденным выборочным характеристикам.

г) Считая, что значения признака X в генеральной совокупности подчинены нормальному закону распределения, найти доверительный интервал для оценки математического ожидания (генерального среднего значения) с надежностью γ, считая, что генеральная дисперсия равна исправленной выборочной дисперсии.

61.

X	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
n_i	5	10	20	15	10

γ =0,95

62.

X	30-34	34-38	38-42	42-46	46-50
n_i	2	5	15	10	8

γ =0,90

63.

X	40-46	46-52	52-58	58-64	64-70
n_i	5	10	20	15	10

$\gamma = 0{,}92$

64.

X	42-44	44-46	46-48	48-50	50-52
n_i	7	12	18	13	5

$\gamma = 0{,}94$

65.

X	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
n_i	5	12	20	15	8

$\gamma = 0{,}91$

66.

X	66-70	70-74	74-78	78-82	82-86	86-90
n_i	7	15	22	18	5	3

$\gamma = 0{,}93$

67.

X	36-42	42-48	48-54	54-60	60-66	66-72
n_i	8	13	15	15	7	2

$\gamma = 0{,}85$

68.

X	52-56	56-60	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80
n_i	5	15	25	18	12	8	2

$\gamma = 0{,}99$

69.

X	42-46	46-50	50-54	54-58	58-62	62-66	66-70
n_i	8	15	19	22	12	5	1

$\gamma = 0{,}98$

70.

X	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90
n_i	3	7	20	15	5

$\gamma = 0{,}88$

Задачи 71-80

С целью анализа взаимного влияния прибыли предприятия и его издержек выборочно были проведены наблюдения за этими показателями в течение ряда месяцев: X - величина месячной прибыли в тыс. руб., Y- месячные издержки в процентах к объему продаж.

Результаты выборки сгруппированы и представлены в виде корреляционной таблицы, где указаны значения признаков X и Y и количество месяцев, за которые наблюдались соответствующие пары значений названных признаков.

а) По данным корреляционной таблицы найти условные средние $\overline{y_x}$ и $\overline{x_y}$.

б) Оценить тесноту линейной связи между признаками X и Y.

в) Составить уравнения линейной регрессии Y по X и X по Y.

г) Сделать чертеж, нанеся на него условные средние и найденные прямые регрессии.

д) Оценить силу связи между признаками с помощью корреляционного отношения.

71.

Y / X	20	30	40	50	60	n_y
5	3					
10	5	4				
15		4	2			
20			5	4	5	
25			3	1	6	
30					3	
n_x						

72.

Y / X	15	25	35	45	55	n_y
10	1					
15	4	5				
20		3	2			
25			5	6	1	
30			2	1	2	
35					3	
n_x						

73.

Y / X	30	40	50	60	70	n_y
5	1					
10	5	5				
15		3	2	4		
20			4	1	4	
25			2	7	6	
30					3	
n_x						

74.

Y / X	25	35	45	55	65	n_y
15	4					
20	2	6				
25		4	6	2		
30			5	8	4	
35			2	6	7	
40					4	
n_x						

75.

Y / *X*	25	35	45	55	65	n_y
12	2					
17	4	6				
22		3		2		
27			5	6	2	
32			4	1	4	
37					3	
n_x						

76.

Y / *X*	110	120	130	140	150	n_y
2	2					
7	4	6				
12		2	3	1		
17			5	4	1	
22			2	3	4	
27					3	
n_x						

77.

Y / *X*	20	30	40	50	60	n_y
5	2					
10	4	3				
15		7	5			
20			2	7	5	
25			3	2	6	
30					3	
n_x						

78.

Y / *X*	35	45	55	65	75	n_y
10	5					
15	1	6				
20		2	5	1		
25			8	10	1	
30			5	2	4	
35					8	
n_x						

79.

Y / X	35	45	55	65	75	n_y
5	4					
10	2	5				
15		3	3			
20			5	1	1	
25			2	4	2	
30					3	
n_x						

80.

Y / X	30	40	50	60	70	n_y
4	3					
9	3	2				
14		4	1			
19			2	4	4	
24			8	2	7	
29					3	
n_x						

8. ГЛОССАРИЙ (СЛОВАРЬ)

Событие называется случайным, если в результате опыта оно может либо произойти, либо не произойти.

Событие называется достоверным, если оно обязательно появляется в результате данного опыта, и невозможным, если оно не может появиться в этом опыте.

События называются **несовместными**, если они вместе не могут наблюдаться в одном и том же опыте.

Суммой событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий:

Классическое определение вероятности связано с понятием благоприятствующего исхода. Исход называется **благоприятствующим** данному событию, если его появление влечет за собой наступление этого события.

Вероятность события *A* равна отношению числа благоприятствующих исходов к общему числу возможных исходов.

Вероятность события *A*, вычисленная при условии, что имело место другое событие *B*, называется **условной вероятностью** события *A* и обозначается $P(A/B)$.

Если при наступлении события *A* вероятность события *B* не меняется, то события *A* и *B* называются **независимыми**.

Два события называются **совместными**, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же опыте.

Величина называется **случайной**, если в результате опыта она может принимать любые заранее неизвестные значения.

Величина называется **дискретной**, если она может принимать определенные, фиксированные значения.

Случайная величина называется **непрерывной**, если она может принимать значения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины *X* называется сумма произведений всех ее значений на соответствующие вероятности:

$$M\left(X\right) = X_1P_1 + X_2P_2 + ... + X_nP_n .$$

Дисперсией случайной величины *A* называется математическое ожидание квадрата отклонения ее от математического ожидания самой величины.

Плотностью распределения вероятностей $f\left(x\right)$ непрерывной случайной величины *A* называется производная от ее функции распределения вероятностей $f\left(x\right) = F'\left(x\right)$.

Для непрерывной двумерной случайной величины **функция распределения** записывается в виде интеграла:

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x, y)\,dxdy,$$

где $f(x, y)$ — плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины.

Функция распределения $F(x, y)$ представляет собой вероятность события $(X < x, Y < y)$, т. е. $F(x,y) = P(X<x, Y<y)$.

Ковариацией, или корреляционным моментом, случайных величин X и $У$ называют математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий, т. е. смешанный центральный момент второго порядка $\mu_{11}=K(X, Y)=\operatorname{cov}(X, Y)=M(XY)-M(X)M(Y)$.

Коэффициентом корреляции случайных величин X к Y называют отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин $r_{xy}=\frac{\operatorname{cov}(x, y)}{\sigma(x)\sigma(y)}$.

Под законом больших чисел в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждой из которых устанавливается факт асимптотического приближения среднего значения большого числа опытных данных к математическому ожиданию случайной величины.

Центральная предельная теорема. Если случайная величина представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Понятие **генеральной совокупности** связано с понятием полного поля элементарных событий. Это поле событий может быть конечным или бесконечным. Полное поле событий может меняться в зависимости от организации опытов.

Повторной называют выборку, при которой объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой избранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Если выборка правильно отражает соотношения в генеральной совокупности, то ее называют **репрезентативной (представительной)**.

Число наблюдений л(. называется **частотой,** а значение его отношения к объему выборки - **относительной частотой**.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки (x_i, n_i). По оси абсцисс откладывают точки x_i - варианты выборки, а по оси ординат - соответствующие значения n_i (частоты).

Гистограммой называется ступенчатая фигура), состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки длиной h, а высоты равны $\frac{n_i}{h}$. Величина $\frac{n_i}{h}$ называется плотностью частоты.

Несмещенной называется статистическая оценка, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки.

Смещенной называется точечная оценка, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Эффективной называется статистическая оценка, которая при одних и тех же объемах выборки имеет наименьшую дисперсию.

Состоятельной называется статистическая оценка, которая при увеличении объема выборки n стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. Рассмотренные выше оценки $\left(x_b,\ d_t\right)$ точечные.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами - концами интервала.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0**.**

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит основной.

Критической областью называется область значений критерия, при которых нулевая гипотеза отвергается.

Областью принятия гипотезы называется совокупность значений критерия, при которых гипотеза принимается.

Критическими точками (границами) $k_{\text{кр}}$ называются точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Критерием согласия называется критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределен

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Венецкий И.Г., Кильдишев Г.С. Основы теории вероятностей и математической статистики. - М.: Статистика, 1988.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. - М.: Высшая школа, 1997.
3. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1999.
4. Ефременкова О.В. Теория вероятностей и математическая статистика/ Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2002. – 37 с.
5. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. - М.: Высшая школа, 1986.
6. Кириллова Г.А. Элементы теории вероятностей и математической статистики/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 1994. – 35 с.
7. Колемаев В.А. Калинина В.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: ИНФРА-М., 1997.
8. Колемаев В.А. Староверов О. В., Турундаевский Б.В. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Высшая школа, 1997.
9. Кудрявцев В.А. Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1986.
10. Теория вероятностей и математическая статистика / Под ред. Н.Ш. Кремера. - М.: ЮНИТИ, 2001.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Таблица значений локальной функции Лапласа $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0.1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0.2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0.3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0.4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0.5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0.6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0.7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0.8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0.9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1.0	0.2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1.1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1.2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1.3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1.4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1.5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1.6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1.7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1.8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669
1.9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2.0	0.0540	0529	2519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2.1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2.2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2.3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2.4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2.5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2.6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2.7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2.8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2.9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3.0	0.0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3.1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3.2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3.3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3.4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3.5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3.6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3.7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3.8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3.9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

$$\varphi(x \geq 4) = 0; \qquad \varphi(-x) = \varphi(x).$$

Приложение 2

Таблица значений интегральной функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\frac{r^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.00	0.0000	0.21	0.0832	0.42	0.1628	0.63	0.2357
0.01	0.0040	0.22	0.0871	0.43	0.1664	0.64	0.2389
0.02	0.0080	0.23	0.0910	0.44	0.1700	0.65	0.2422
0.03	0.0120	0.24	0.0948	0.45	0.1736	0.66	0.2454
0.04	0.0160	0.25	0.0987	0.46	0.1772	0.67	0.2486
0.05	0.0199	0.26	0.1026	0.47	0.1808	0.68	0.2517
0.06	0.0239	0.27	0.1064	0.48	0.1844	0.69	0.2549
0.07	0.0279	0.28	0.1103	0.49	0.1879	0.70	0.2580
0.08	0.0319	0.29	0.1141	0.50	0.1915	0.71	0.2611
0.09	0.0359	0.30	0.1179	0.51	0.1950	0.72	0.2642
0.10	0.0398	0.31	0.1217	0.52	0.1985	0.73	0.2673
0.11	0.0439	0.32	0.1255	0.53	0.2019	0.74	0.2703
0.12	0.0478	0.33	0.1293	0.54	0.2054	0.75	0.2734
0.13	0.0517	0.34	0.1331	0.55	0.2088	0.76	0.2764
0.14	0.0557	0.35	0.1368	0.56	0.2123	0.77	0.2794
0.15	0.0596	0.36	0.1406	0.57	0.2157	0.78	0.2823
0.16	0.0638	0.37	0.1443	0.58	0.2190	0.79	0.2852
0.17	0.0675	0.38	0.1480	0.59	0.2224	0.80	0.2881
0.18	0.0714	0.39	0.1517	0.60	0.2257	0.81	0.2910
0.19	0.0753	0.40	0.1554	0.61	0.2291	0.82	0.2939
0.20	0.0793	0.41	0.1591	0.62	0.2324	0.83	0.2967
0.84	0.2995	1.10	0.3643	1.36	0.4131	1.62	0.4474
0.85	0.3023	1.11	0.3665	1.37	0.4147	1.63	0.4484
0.86	0.3051	1.12	0.3686	1.38	0.4162	1.64	0.4495
0.87	0.3078	1.13	0.3708	1.39	0.4177	1.65	0.4505
0.88	0.3106	1.14	0.3729	1.40	0.4192	1.66	0.4515
0.89	0.3133	1.15	0.3749	1.41	0.4207	1.67	0.4525
0.90	0.3159	1.16	0.3770	1.42	0.4222	1.68	0.4535
0.91	0.3186	1.17	0.3790	1.43	0.4236	1.69	0.4545
0.92	0.3212	1.18	0.3810	1.44	0.4251	1.70	0.4554
0.93	0.3238	1.19	0.3830	1.45	0.4265	1.71	0.4564
0.94	0.3264	1.20	0.3849	1.46	0.4279	1.72	0.4573
0.95	0.3289	1.21	0.3869	1.47	0.4292	1.73	0.4582
0.96	0.3315	1.22	0.3883	1.48	0.4306	1.74	0.4591

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.97	0.3340	1.23	0.3907	1.49	0.4319	1.75	0.4599
0.98	0.3365	1.24	0.3925	1.50	0.4332	1.76	0.4608
0.99	0.3389	1.25	0.3944	1.51	0.4345	1.77	0.4616
1.00	0.3413	1.26	0.3962	1.52	0.4357	1.78	0.4625
1.01	0.3438	1.27	0.3980	1.53	0.4370	1.79	0.4633
1.02	0.3461	1.28	0.3997	1.54	0.4382	1.80	0.4641
1.03	0.3485	1.29	0.4015	1.55	0.4394	1.81	0.4649
1.04	0.3508	1.30	0.4032	1.56	0.4406	1.82	0.4656
1.05	0.3581	1.31	0.4049	1.57	0.4418	1.83	0.4664
1.06	0.3554	1.32	0.4066	1.58	0.4429	1.84	0.4671
1.07	0.3577	1.33	0.4082	1.59	0.4441	1.85	0.4678
1.08	0.3599	1.34	0.4099	1.60	0.4452	1.86	0.4686
1.09	0.3621	1.35	0.4115	1.61	0.4463	1.87	0.4693
1.88	0.4699	2.12	0.4830	2.48	0.4934	2.84	0.4977
1.89	0.4706	2.14	0.4838	2.50	0.4938	2.86	0.4979
1.90	0.4713	2.16	0.4846	2.52	0.4941	2.88	0.4980
1.91	0.4719	2.18	0.4854	2.54	0.4945	2.90	0.4981
1.92	0.4726	2.20	0.4861	2.56	0.4948	2.92	0.4982
1.93	0.4732	2.22	0.4868	2.58	0.4951	2.94	0.4984
1.94	0.4338	2.24	0.4875	2.60	0.4953	2.96	0.4985
1.95	0.4744	2.26	0.4881	2.62	0.4956	2.98	0.4986
1.96	0.4750	2.28	0.4887	2.64	0.4959	3.00	0.49865
1.97	0.4756	2.30	0.4893	2.66	0.4961	3.20	0.49931
1.98	0.4761	2.32	0.4898	2.68	0.4963	3.40	0.49966
1.99	0.4767	2.34	0.4904	2.70	0.4965	3.60	0.49984
2.00	0.4772	2.36	0.4909	2.72	0.4967	3.80	0.49993
2.02	0.4783	2.38	0.4913	2.74	0.4969	4.00	0.49997
2.04	0.4793	2.40	0.4918	2.76	0.4971	4.50	0.49999
2.06	0.0.480	2.42	0.4922	2.78	0.4973	5.00	0.50000
2.08	0.4812	2.44	0.4927	2.80	0.4974		
2.10	0.4821	2.46	0.4931	2.82	0.4976		

$$\Phi(x > 5) = 0,5;$$
$$\Phi(-x) = -\Phi(x).$$

Обухова Галина Александровна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Методическое пособие для студентов всех форм обучения
направления «Электроэнергетика и электротехника»

Подписано к печати 01.03.21. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,69. Тираж 20 экз. Зак. 211771. Рег. № 19.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.