МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический
университет им. И.И. Ползунова»

Г.А. Обухова

Математика (часть 1)

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Рубцовск 2022

УДК [519.2; 512.1; 514.11; 517.1]

Обухова Г.А. Математика (часть 1): Методическое пособие и варианты заданий для студентов специальности «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» /Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022. – 44 с.

В пособии рассмотрены различные методы решения задач по математике, поясняющие основные теоретические положения, приведены тестовые задачи, используемые при собеседовании. Задачи подобраны в соответствии с программой по математике для СПО.

Пособие предполагает использование для самостоятельной подготовки к экзаменам и для планомерного повторения нужного материала.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры ПМ РИИ.
Протокол № 7 от 22.02.2022 г.

Рецензент: к.экон.н. Д.В. Ремизов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Формулы для справок

Формулы сокращенного умножения и деления

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$; $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Действия со степенями

1.$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2.$a^n / a^m = a^{n-m}$; 3. $(a^n)^m = a^{nm;}$ 4. $a^0 = 1$;

5.$a^{-m} = 1/a^m$; 6.$(a/b)^m = (b/a)^{-m}$; 7. $a^n b^n = (ab)^n$; 8. $a^n / b^n = (a/b)^n$;

9.$a^{n/m} = \sqrt[m]{a^n}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

1. $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$, *где* x_1 *и* x_2 *корни уравнения* $x^2 + px + q = 0$;

2. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, *где* x_1 *и* x_2 *корни уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$.

2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Формулы для справок

1. Линейное уравнение: $ax = b.$

$a)$ *если* $a \neq 0,$ *то* $x = b/a;$ *б) если* $a = 0$ *и* $b = 0,$ *то* $x \in (-\infty, +\infty);$

$c)$ *если* $a = 0$ *и* $b \neq 0,$ *то решений нет.*

2. Полное квадратное уравнение: $ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq c.$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac.$

$a)$ *если* $D > 0,$ *то* $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{D}}{2a};$

б) если $D = 0,$ *то* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a};$

$c)$ *если* $D < 0,$ *то действительно корней нет.*

3. Приведенное квадратное уравнение: $x^2 + px + q = 0.$

Теорема Виета: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}.$

4. Неполные квадратные уравнения:

1. $ax^2 + bx = 0. \quad x(xa + b) = 0, \quad x = 0$ *или* $ax + b = 0.$

2. $ax^2 + c = 0.$ Имеем два случая:

а) если *a-c>0*, т.е. *a* и *c* одного знака, то уравнение действительных корней не имеет;

б) если *a-c<0*, т.е. *a* и *c* разных знаков, то равнение имеет два действительных различных корня.

Замечание: все виды квадратных уравнений можно решать по правилу решения полного квадратного уравнения.

3. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

3.1. Задачи на пропорциональное деление

1. Объемы трех помещений равны 2410, 1790 и 1050 м^3. Распределить 2625 ден.ед., затраченных на отопление этих помещений, пропорционально их кубатуре.

Решение. Общая кубатура помещений равна 2410+1790+1050=5250 м^3. Стоимость отопления 1 м^3 помещения равна 2625:5250=0,5 ден.ед. Найдем стоимость отопления каждого помещения:

0,5·2410=1205 ден.ед. – стоимость отопления первого помещения;

0,5·1790=895 ден.ед. – стоимость отопления второго помещения;

0,5·1050=525 ден.ед. – стоимость отопления третьего помещения.

Ответ: 1205, 895, 525 ден.ед.

2. Длина Дуная относится к длине Днепра как 19/3:5, а длина Дона относится к длине Дуная как 6,5:9,5. Найти протяженность каждой из рек, если Днепр длиннее Дона на 300 км.

Решение. Пусть x км – длина Дона, тогда (x+300) км – длина Днепра, а y км – длина Дуная. Составим пропорции, используя условия задачи.

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{y}{x+300}=\dfrac{19/3}{5}}{\dfrac{x}{y}=\dfrac{6,5}{9,9}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{19}{15}(x+300) \\ y=\dfrac{19}{13}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13(x+300)=15x \\ y=\dfrac{19}{13}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1950 \\ y=2850. \end{cases}$$

Ответ: 1950, 2250, 2850 км.

3.2. Задачи на проценты

Формулы для справок

1. Процент – сотая часть числа.

2. Нахождение процента от числа, т.е. А% от В: $\dfrac{A\%\cdot B}{100\%}$.

3. Нахождение числа по его процентам, т.е. A% составляет число B: $\frac{B \cdot 100\%}{A\%}$.

4. Нахождение процентного отношения двух чисел, например, числа A к числу B: $\frac{A}{B} \cdot 100\%$.

1. Заработная плата служащего после двух последовательных повышений на одно и то же число процентов поднялась со 120 денежных единиц до 145,2 денежных единиц. На сколько процентов повышалась зарплата каждый раз?

Решение. Пусть на x% повышалась зарплата каждый раз, тогда на 1,2x ден.ед. повысилась зарплата после первого повышения и стала составлять (120+1,2x) ден.ед., (120+1,2x)·x/100 ден.ед. – на столько повысилась зарплата во второй раз. Составим уравнение:

$$(120+1{,}2x) \cdot x/100=25{,}2,\ 1{,}2x^2+240x-2520=0,\ x^2+200x-2100=0.$$

Решая квадратное уравнение, получим $x_1=-210$ – посторонний корень, $x_2=10$.

Ответ: 10%.

2. Найти размер вклада, 40% которого составляет 150 денежных единиц.

Решение. Весь вклад составляет $\frac{150}{40} \cdot 100 = 375$ денежных единиц.

Ответ: 375 ден.ед.

3. Каково процентное содержание меди в руде, если на 225 кг руды приходится 34,2 кг меди?

Решение. Содержание меди в руде составляет $\frac{34{,}2}{225} \cdot 100\% = 15{,}2\%$.

Ответ: 15,2%.

3.3. Задачи на движение

Необходимо знать, что пройденный путь S связан со скоростью v и временем движения t соотношением: $S=vt \Rightarrow v=S/t$; $t=S/v$.

1. Из пункта А в пункт В, находящийся на расстоянии 240 км, отправился автобус. После того, как было пройдено 2/3 пути, автобус был задержан на 30 мин. Оставшуюся часть пути автобус ехал со скоростью на 10 км/ч больше, но в пункт В прибыл на 6 минут позднее. Сколько времени автобус был в пути?

Решение. Пусть x км/ч – начальная скорость автобуса, тогда 240/x (час) – предполагаемое время на весь путь. $2/3\cdot 240$ (км) – путь, пройденный автобусом до задержания. 160/x (час) – время, затраченное на прохождение 2/3 пути. 80/(x+10) (час) – время, затраченное на оставшийся путь. Составим уравнение, учитывая задержку и опоздание: $\frac{240}{x}=\frac{160}{x}+\frac{1}{2}+\frac{80}{x+10}-\frac{1}{10}$. После преобразований получим уравнение $x^2+10x-2000=0$, решив которое, найдем корни: $x_1=-50$ (посторонний корень), $x_2=40$. Найдем время, которое автобус был в пути: 160/40+1/2+80/50=6,1.

Ответ: 6 час. 6 мин.

2. Велосипедист проехал 25 км. При этом один час он ехал по ровной дороге, а один час – в гору. Какова скорость (в км/час) велосипедиста по ровной дороге, если каждый километр по ровной дороге он проезжал на 2 минуты быстрее, чем в гору?

Решение. Примем за x км/час – скорость велосипедиста по ровной дороге, а за y км/час – скорость велосипедиста в гору. Тогда $x\cdot 1+y\cdot 1=25$. Определим время, затраченное на прохождение 1 км по ровной дороге и в гору. По ровной дорогу – 1/x час, а в гору – 1/y час. Учитывая, что велосипедист по ровной дороге каждый километр проезжал на 2 минуты быстрее, составим систему:

$$\begin{cases} x+y=25 \\ \frac{1}{y}-\frac{1}{x}=\frac{1}{30} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=25-x \\ x^2+35x-750=0. \end{cases}$$

Решая квадратное уравнение, получим: x_1=-50 (посторонний корень), x_2=15.

Ответ: 15 км/час.

3.4. Задачи на работу

При решении задач на работу необходимо знать, что производительность труда – это работа, выполненная в единицу времени. Если объем работы неизвестен, то принимают его за единицу.

1. Двое рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние два дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если за первые 7 дней они выполнили 80% всей работы?

Решение. Примем за 1 весь объем работы, за x – производительность первого рабочего в день, а за y – второго, тогда (x+y) – их общая производительность. Так как первый рабочий работал только 8 дней, то он выполнил объем работы, равный 8x, а второй рабочий, работая все 10 дней, выполнил объем работы, равный 10y. Учитывая все данные, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} 8x+10y=1 \\ (x+y)\cdot 7=0,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+10y=1 \\ 7x+7y=0,8 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot(-7) \\ 8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -56x-70y=-7 \\ 56x+56y=6,4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -14y=-0,6 \\ 8x+10y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3/70 \\ x=1/14. \end{cases}$$

Зная производительность первого рабочего и весь объем работы, найдем количество дней, за которое он выполнит всю работу. Для этого: 1:1/14=14.

Ответ: 14 дней.

2. Оператор ЭВМ, работая вместе с учеником, обрабатывает задачу за 2 ч. 24 мин. Если оператор проработает 2 часа, а ученик – 1 час, то будет выполнено 2/3 всей работы. Сколько времени потребуется оператору и ученику в отдельности на обработку задачи?

Решение. Пусть x час. потребуется оператору на обработку задачи, а y час. – ученику, тогда 1/x – производительность оператора в час, а 1/y – производительность ученика в час. (1/x+1/y) – общая их производительность. Учитывая данные задачи, составим систему уравнений: $\begin{cases}(1/x+1/y)\cdot 2,4=1\\(1/x)\cdot 2+1/y=2/3.\end{cases}$ Обозначим 1/x=t, 1/y=z. Получим систему: $\begin{cases}t+z=5/12\\2t+z=2/3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=1/4\\z=1/6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=6.\end{cases}$

Ответ: 4 часа, 6 часов.

3.5. Задачи на сплавы и смеси

1. Кусок сплава меди и цинка в 36 кг содержит 45% меди. Какую массу меди нужно добавить к этому куску, чтобы полученный новый сплав содержал 60% меди?

Решение. Определим количество меди в 36 кг сплава: 45·36/100=16,2 кг. На долю цинка остается 36-16,2=19,8 кг. Количество цинка в новом сплаве не меняется, значит, 19,8 кг цинка составляет 40% всей массы нового сплава. Определим массу нового сплава: $\frac{19,8\cdot 100}{40}=49,5$ кг. Найдем количество меди в новом сплаве: 49,5-19,8=29,7 кг. Определим, какую массу меди добавили: 29,7-16,2=13,5.

Ответ: 13,5 кг.

2. Один раствор содержит 20% по объему азотной кислоты, а второй – 70% азотной кислоты. Сколько нужно взять первого и второго растворов, чтобы получить 100 л 50% раствора азотной кислоты?

Решение. Пусть нужно взять x л первого раствора, тогда второго (100-x) л. Тогда в x л первого раствора содержится 0,2x л азотной кислоты, а в (100-x) л второго раствора содержится 0,7(100-x) л азотной кислоты. Составим уравнение задачи: 0,2x+0,7(100-x)=100·0,5; 0,5x=20; x=40.

Ответ: 40 л, 60 л.

4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение, в котором переменная содержится под знаком корня или под знаком возведения в дробную степень, называется иррациональным.

В элементарной математике решения иррациональных уравнений находят во множестве действительных чисел. Корни четной степени в иррациональном уравнении предполагаются арифметическими.

Основным методом решения иррационального уравнения является метод последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень.

Следует иметь в виду, что при возведении частей уравнения в четную степень могут появиться посторонние корни. Действительно, если обе части уравнения $f(x)=q(x)$ возвести в квадрат, то получится уравнение $(f(x))^2-(q(x))^2=0$, т.е. $(f(x)-q(x))(f(x)+q(x))=0$, которое имеет решения данного уравнения $f(x)=q(x)$ и решения уравнения $f(x)=-q(x)$.

Поэтому обязательна проверка найденных значений неизвестного.

Приступая к решению иррационального уравнения, иногда целесообразно предварительно определить область допустимых значений неизвестного, т.к. может оказаться, что уравнение не определено в в области действительных чисел.

Пример 1. Решить уравнение $\sqrt{x-7}+\sqrt{1-x}=5$.

Решение. $D(f)=\begin{cases} x-7\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 7 \\ x\leq 1 \end{cases}$.

Полученная система неравенств решения не имеет, следовательно, не имеет решений и данное уравнение.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+4}$.

Решение:

$$D(f):\quad \begin{cases} x-5\ge 0 \\ x+3\ge 0 \\ 2x+4\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 5 \\ x\ge -3 \\ x\ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 5.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим:

$$x-5+2\sqrt{x-5}\sqrt{x+3}+x+3=2x+4,\ \sqrt{x-5}\sqrt{x+3}=3.$$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат еще раз, найдем:

$$(x\text{-}5)(x+3)=9;$$

$$x^2\text{-}2x\text{-}24=0;$$

$$x_1=\text{-}4,\ x_2=6.$$

Корень $x=-4$ – посторонний, т.к. –4 не принадлежит $D(f)$. Проверкой убеждаемся, что $x=6$ – корень уравнения.

Ответ: $\{6\}$.

Если уравнение содержит кубические радикалы

$$\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{q(x)}=C,$$

то его удобно решать путем возведения в куб обеих частей уравнения по формуле

$$(a\pm b)^3=a^3\pm b^3\pm 3ab(a\pm b)$$

с последующей заменой выражения $\sqrt[3]{f(x)}\pm\sqrt[3]{q(x)}$ на С, при этом возможно появление посторонних корней. Поэтому в данном случае проверка обязательна.

Пример 3. Решить уравнение $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1$.

Решение:

D(f)=R. Возведем обе части уравнения в куб, заменяя сумму корней единицей: $2x-1+x-1+3\sqrt[3]{2x-1}\sqrt[3]{x-1}=1$.

$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=-(x-1);$

$(2x-1)(x-1)=-(x-1)^3;$

$(x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0;$

$x_1=1,\qquad x_2=0.$

Проверкой убеждаемся, что $x=0$ – посторонний корень.

Ответ: $\{1\}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}+\sqrt[5]{\frac{z-1}{16z}}=\frac{5}{2}.$

Решение:

$D(f): z\neq 1,\ z\neq 0.$ Обозначим $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=t,$ где $t\neq 0.$ Относительно t уравнение примет вид $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ или $2t^2-5t+2=0.$ Найдем $t_1=\frac{1}{2},\ t_2=2.$ Тогда:

а) $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=\frac{1}{2};\ z_1=-\frac{1}{511};$ *б)* $\sqrt[5]{\frac{16z}{z-1}}=2;\ z_2=2.$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{511};2\right\}.$

Пример 5. Решить уравнение $x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6.$

Решение: $D(f): x^2+5x+2\geq 0.$ Имеем $x\in\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{17}}{2};+\infty\right).$

Обозначим $\sqrt{x^2+5x+2}=t,$ тогда $t\geq 0$ и исходное уравнение примет вид: $t^2-3t-4=0$. Его корни $t_1=4;\ t_2=-1$. Корень $t_2=-1$ – посторонний, т.к. $t\geq 0$.

Возвращаемся к переменной x, получаем: $\sqrt{x^2+5x+2}=4,$ что равносильно $x^2+5x+2=16.$ Находим $x_1=-7;\ x_2=2$. Проверка показывает, что $x_1=-7$ и $x_2=2$ корни заданного уравнения.

Ответ: {-7; 2}.

Пример 5. Решить уравнение $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6.$

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}15-x\geq 0\\3-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 15\\x\leq 3\end{cases}\Rightarrow x\leq 3.$

Преобразуем уравнение и возведем обе части в квадрат:

$\left(\sqrt{15-x}\right)^2=\left(6-\sqrt{3-x}\right)^2;\ 15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x;\ 12\sqrt{3-x}=39-x-15+x;$

$12\sqrt{3-x}=24;\ \sqrt{3-x}=2.$

Возведем еще раз обе части в квадрат и получим $3-x=4$, отсюда $x=-1$.

Проверка: $\sqrt{15+1}+\sqrt{3+1}=6,\ 4+2=6,\ 6=6.$

Ответ: $x=-1$.

Пример 6. Решить уравнение $\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}.$

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} 3x+4\geq 0 \\ x-4\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -4/3 \\ x\geq 4 \\ x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 4.$

$(\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4})^2=(2\sqrt{x})^2;\ 3x+4+2\sqrt{3x+4}\sqrt{x-4}+x-4=4x;$

$\sqrt{3x^2-8x-16}=0;\ 3x^2-8x-16=0.$ Решаем квадратное уравнение:

$D=64+4\cdot 3\cdot 16=256;\ \sqrt{256}=16;\ x_1=\dfrac{8-16}{6}=-\dfrac{4}{3}$ (посторонний корень, т.к. $x_1\notin ОДЗ);\ x_2=\dfrac{8+16}{6}=4.$

Проверка: $x=4;\ \sqrt{12+4}+\sqrt{4-4}=2\sqrt{4}\Rightarrow 4=4.$

Ответ: $\{4\}$.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{x-7}=\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}=1.$

Решение: ОДЗ: $x-7>0\Rightarrow x>7.$

Возведем обе части в квадрат: $\left(\sqrt{x-7}=\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}\right)^2=1^2;$

$x-7-2\sqrt{x-7}\cdot\dfrac{6}{\sqrt{x-7}}+\dfrac{36}{\sqrt{x-7}}=1;\ x+\dfrac{37}{x-7}-20=0;\ x^2-27x+176=0;$
$D=25;\ x_1=11;\ x_2=12.$

Оба корня входят в ОДЗ.

Проверка: $x=11;\ \sqrt{11-7}-\dfrac{6}{\sqrt{11-7}}=1;\ 2-3\neq 1.$

$x=16;\ \sqrt{16-7}-\dfrac{6}{\sqrt{16-7}}=1;\ 3-2=1;\ 1=1.$

Ответ: $\{16\}$.

5. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

5.1. Показательные уравнения

Показательными принято называть уравнения, в которых неизвестное входит только в показатели степеней с постоянными основаниями.

Решение показательных уравнений основано на свойстве степени: две степени с одним и тем же положительным основанием $a\neq 1$ равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Используя это свойство, уравнение $a^x=b$ $(a>0, a\neq 1, b>0)$ решают так:

$$a^x = b \Leftrightarrow a^x = a^{\log_a b} \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Многие показательные уравнения решаются методом приведения всех частей уравнения к общему основанию.

Пример 1. Решить уравнение $(0,4)^{x-1} = (6,25)^{6x-5}$.

Решение. Поскольку

$$(0,4)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}, \ (6,25)^{6x-5} = \left(\frac{25}{4}\right)^{6x-5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{12x-10} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x},$$

то $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{10-12x} \Leftrightarrow x-1=10-12x \Leftrightarrow x=\frac{11}{13}$.

Ответ: $\frac{11}{13}$.

При решении простейших показательных уравнений используется преобразование, состоящее в вынесении общего множителя за скобки.

Пример 2. Решить уравнение $5^{2x+1}-3\cdot 5^{2x-1}=550$.

Решение. Вынося в левой части уравнения выражение 5^{2x-1} за скобки, получаем $5^{2x-1}(5^2-3)=550 \Leftrightarrow 5^{2x-1}\cdot 22=550 \Leftrightarrow 5^{2x-1}=5^2 \Leftrightarrow 2x-1=2 \Leftrightarrow x=3/2$.

Ответ: 3/2.

Пример 3. Решить уравнение $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Решение. Сгруппируем члены, содержащие степени с основанием 4 и с основанием 3: $4^x+2^{2x}\cdot 2^{-1}=3^{x+\frac{1}{2}}+3^{x-\frac{1}{2}}$. Вынесем общие множители за скобки:

$$4^x\left(1+\frac{1}{2}\right)=3^{x-\frac{1}{2}}(3+1).$$

Разделим обе части уравнения на $3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 4$:

$$\frac{4^x\cdot\frac{3}{2}}{3^{x-\frac{1}{2}}\cdot 4}=1\Leftrightarrow\left(\frac{4}{3}\right)^{x-\frac{3}{2}}=1\Leftrightarrow x-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Уравнение вида $f(a^x)=0$ при помощи замены переменной $a^x=t$ сводится к решению равносильной ему совокупности простейших показательных уравнений

$$a^x=t_1,\ a^x=t_2,\ \ldots,\ a^x=t_k,$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$, - все корни уравнения $f(t)=0$.

Пример 4. Решить уравнение $5^{2x}-2\cdot 5^x-15=0$.

Решение. Пусть $5^x=t$, тогда $t^2-2t-15=0$. Отсюда получаем $t_1=5$, $t_2=-3$. Таким образом, данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}5^x=5\\5^x=-3.\end{array}\right.$$

$5^x=5\Leftrightarrow x=1$.

Уравнение $5^x=-3$ не имеет корне, т.к. $5^x>-3$ при любом x из R.

Ответ: 1.

Уравнение вида $a^{f(x)}=b$, где $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$ может быть решено при помощи логарифмирования обеих частей уравнения.

Логарифмирование возможно, т.к. обе части уравнения положительны. Получаем $f(x)=\log_a b$ - уравнение, равносильное исходному.

Пример 5. Решить уравнение $5^{2x-1}=7^{3-x}$.

Решение. Обе части уравнения положительны, логарифмируя их по основанию 5, получим уравнение $2x-1=(3-x)\log_5 7,$ равносильное исходному. Таким образом, $2x+x\cdot\log_5 7=3\log_5 7+1,$ т.е. $\dfrac{3\log_5 7+1}{2+\log_5 7}.$

Ответ: $\dfrac{3\log_5 7+1}{2+\log_5 7}.$

Рассмотрим показательные уравнения, в которых имеются три степени с различными основаниями, являющимися последовательными членами геометрической прогрессии, причем эти основания возводятся в одну и ту же зависящую от x степень.

Такие уравнения имеют вид

$$\alpha\cdot a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+\gamma\cdot c^{f(x)}=0,$$

где α, β, γ - действительные числа, $f(x)$ – некоторая функция, а основания a, b, c удовлетворяют условию $b^2=ac$.

Уравнения такого вида решаются приведением к квадратному уравнению $\alpha t^2+\beta t+c=0$ и рассмотрением совокупности показательных уравнений

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_1; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}=t_2,$$

где t_1, t_2 – корни квадратного уравнения.

Пример 6. Решить равнение $3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x.$

Решение. В этом уравнении числа 16, 36, 81 образуют три последовательных члена геометрической прогрессии со знаменателем $q=\dfrac{9}{4}$. Разделим обе части уравнения на 81^x:

$$3\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{2x}+37\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^{x}-26=0.$$

Пусть $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{x}=t,$ тогда уравнение примет вид $3t^2+37t-26=0$. Отсюда следует: $t_1=\dfrac{2}{3},\ t_2=-13.$ Получаем совокупность двух показательных уравнений:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^{2x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\ x=\frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x=-13\ \Rightarrow\ \textit{нет решений.}$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Уравнение вида

$$\alpha\cdot a^{f(x)}+\beta\cdot b^{f(x)}+\gamma=0,$$

где α,β,γ - действительные числа, а основания a и b удовлетворяют условию $ab=1$, можно решать заменой переменной

$$a^{f(x)}=t.$$

Тогда $b^{f(x)}=\frac{1}{t}$ и уравнение примет вид $\alpha t^2+\gamma t+\beta=0,$ которое приведет к совокупности двух показательных уравнений $a^{f(x)}=t_1$ и $a^{f(x)}=t_2$., равносильной исходному уравнению.

Пример 7. Решить уравнение $5\cdot2^{3x-3}-3\cdot2^{5-3x}+7=0.$

Решение. Преобразуем это уравнение так: $5\cdot2^{3x-3}-3\cdot\frac{2^2}{2^{3x-3}}+7=0.$

Обозначим $2^{3x-3}=t,$ что приводит к квадратному уравнению $5t^2+7t-12=0$. Его корни: $t_1=1;\ t_2=-\frac{24}{10}.$ Решаем два показательных уравнения:

$$2^{3x-3}=1\Leftrightarrow3x-3=1\Leftrightarrow x=1;$$

$$2^{3x-3}=-\frac{12}{5}\ \Rightarrow\ \text{нет решения.}$$

Ответ: 1.

5.2. Показательные неравенства

Показательными принято называть неравенства, в которых неизвестное входит только в показатели степеней с постоянными основаниями.

Решение простейших показательных неравенств основано на свойствах монотонности показательной функции:

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ a > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ a > 1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ 0 < a < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}.$$

Учитывая эти свойства, многие простейшие показательные неравенства решают методом приведения обеих частей неравенства к одному основанию.

Пример 8. Решить неравенство $25^x > 125^{3x-2}$.

Решение. Поскольку $25^x = 5^{2x}$, $125^{3x-2} = 5^{9x-6}$, то

$$25^x > 125^{3x-2} \Leftrightarrow 5^x > 5^{9x-6} \Leftrightarrow 2x > 9x-6 \Leftrightarrow -7x > 6 \Leftrightarrow x < \frac{6}{7}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{6}{7}\right)$.

Множество решений нестрогого неравенства $a^x \geq b$ $(a^x \leq b)$ находится как объединение множества решений соответствующего строгого неравенства и множества корней уравнения $a^x = b$.

Пример 9. Решить неравенство $(0{,}1)^{4x^2-2x-2} \leq (0{,}1)^{2x-3}$.

Решение. Так как основание а удовлетворяет условию 0<a<1, то данное неравенство равносильно неравенству $4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3$. Имеем:

$$4x^2 - 2x - 2 \geq 2x - 3 \Leftrightarrow (2x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in R.$$

Ответ: $(-\infty; +\infty)$.

6. ЛОГАРИФМЫ

Логарифмическая функция $y = \log_a b$ определена при $x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$ Она является возрастающей при a>1 и убывающей при a<1.

Основные формулы:

$$1)\ a^{\log_a b} = b;$$
$$\log_a a = 1;$$
$$\log_a 1 = 0;$$
$$2)\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$$
$$3)\ \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$
$$4)\ \log_a(x^k) = k\log_a x;$$
$$5)\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a};$$
$$6)\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a};$$
$$7)\ \log_a b = \log_{a^k} b^k;$$
$$8)\ a^{\log_c b} = b^{\log_c a}.$$

6.1. Логарифмические выражения

Пример 1. Вычислить $\left((\log_a b + \log_b a + 2)\log_a b\right)^{\frac{1}{2}} : \log_a(ab)$ при условии $\log_a b > -1.$

Решение. Обозначив $\log_a b = t$, получим:

$$\sqrt{\left(t + \frac{1}{t} + 2\right)t} : (1+t) = \sqrt{(t+1)^2} : (1+t) = \frac{|t+1|}{t+1}.$$

В силу условия $\log_a b > -1$ имеем $|t+1| = t+1$ и получаем качестве ответа число 1.

Пример 2. Вычислить $6\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \log_5 4 \cdot \log_6 5 \cdot \log_7 6 \cdot \log_8 7.$

Решение. Из формулы 5) вытекает $\log_a b\cdot\log_c a=\log_c b.$ Следовательно $\log_3 2\cdot\log_4 3=\log_4 2;\ \log_4 2\cdot\log_5 4=\log_5 2$ и так далее. Поэтому

$$6\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4\cdot\log_6 5\cdot\log_7 6\cdot\log_8 7=6\log_8 2=6\cdot\frac{1}{3}=2.$$

Ответ: 2.

6.2. Логарифмические уравнения

Пример 3. Решить уравнение $\log_x\log_2(4^x-12)=1.$

Решение. Так как равенство $\log_a b=c$ равносильно равенству $a^c=b$ *(b>0, a>0, a≠1)* , то данное уравнение можно записать в виде $x=\log_2(4^x-12).$ Отсюда следует, что $2^x=4^x-12$.

Полученное уравнение приводится к квадратному уравнению $t^2-t-12=0$, где $t=2^x>0$. Положительный корень этого уравнения t=4, откуда следует, что x=2.

Пример 4. Решить уравнение $4^{\lg x+1}-6^{\lg x}=2\cdot 3^{\lg x^2+2}.$

Решение. Разделим обе части этого уравнения на $4^{\lg x}$. Получим

$$4-\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x}=18\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2\lg x}\ \text{или}\ 18y^2+y-4=0,\ \text{где}\ y=\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x}>0.$$

Положительный корень этого уравнения $y=\frac{4}{9}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}.$

Итак, $\left(\frac{3}{2}\right)^{\lg x}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$, откуда следует, что $\lg x=-2$, и окончательно $x=\frac{1}{100}.$

Ответ: $\frac{1}{100}.$

Пример 5. Решить уравнение $\log_2(3-x)+\log_2(1-x)=3.$

Решение. Потенцируя, получим уравнение, равносильному в области его допустимых значений:

$$(3-x)(1-x)=8\ \text{или}\ x^2-4x-5=0.$$

Корни квадратного уравнения: $x_1=-1,\ x_2=5$. Легко видеть, что ОДЗ принадлежит лишь значение $x=-1$.

Ответ: $x=-1$.

Пример 6. Решить уравнение $\log_2(9-2^x)=10^{\lg(3-x)}$.

Решение. В силу основного логарифмического тождества $a^{\log_a b}=b$ имеем $\log_2(9-2^x)=3-x$. Используя определение логарифма, находим:

$$2^{3-x}=9-2^x \Rightarrow \frac{8}{2^x}=9-2^x \Rightarrow 2^{2x}-9\cdot 2^x+8=0.$$

Обозначив $2^x=t$, получим квадратное уравнение $t^2-9t+8=0$, откуда $t_1=1$, $t_2=8$. Следовательно, $x_1=0$, $x_2=3$.

Значение $x_1=0$ удовлетворяет данному уравнению, в чем легко убедиться. Значение $x_2=3$ не принадлежит ОДЗ данного уравнения.

Ответ: x=0.

Пример 7. Решить уравнение $(x+1)^{\lg(x+1)}=100(x+1)$.

Решение. Область допустимых значений данного уравнения x>-1. Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10:

$$\lg(x+1)\cdot\lg(x+1)=2\lg(x+1).$$

Обозначая $\lg(x+1)=t$, получим квадратное уравнение: $t^2-t-2=0\Rightarrow t_1=-1,\ t_2=2$.

Следовательно:

$$t_1=-1;\ \lg(x+1)=-1 \Rightarrow 10^{-1}=x+1 \Rightarrow x=-0{,}9;$$
$$t_2=2;\ \lg(x+1)=2 \Rightarrow 10^2=x+1 \Rightarrow x=99.$$

Оба значения входят в ОДЗ.

Ответ: -0,9; 99.

Пример 8. Решить уравнение $1+\log_2(x-1)=\log_{(x-1)}4$.

Решение. Перейдя к основанию 2, получим $\log_{(x-1)}4=\dfrac{\log_2 4}{\log_2(x-1)}$. Обозначив $\log_2(x-1)=y$, имеем: $1+y=\dfrac{2}{y}\Rightarrow y^2+y-2=0\Rightarrow y_1=-2;\ y_2=1$.

При $y_1=-2$ имеем: $\log_2(x-1)=-2 \Rightarrow 2^{-2}=x-1 \Rightarrow x=5/4$.

При $y_2=1$ имеем: $\log_2(x-1)=1 \Rightarrow 2=x-1 \Rightarrow x=3.$

ОДЗ данного уравнения $x>1,\ x\neq 2$. Оба полученных значения x принадлежит ОДЗ.

Ответ: 5/4; 3.

Пример 9. Решить уравнение

$$\log_{(3x+7)}(9+12x+4x^2)+\log_{(2x+3)}(6x^2+23x+21)=4.$$

Решение. Данное уравнение можно переписать в виде:

$$\log_{(3x+7)}(2x+3)^2+\log_{(2x+3)}[(2x+3)(3x+7)]=4.$$

ОДЗ этого уравнения находим из условий:

$2x+3>0,\ \ 2x+3\neq 1;$

$3x+7>0,\ 3x+7\neq 1.$

Таким образом, ОДЗ уравнения состоит из двух промежутков: $\left(-\dfrac{3}{2};-1\right)\cup(-1;\infty)$. С учетом ОДЗ данное уравнение равносильно уравнению:

$$2\log_{(3x+7)}(2x+3)+\log_{(2x+3)}(3x+7)+1=4.$$

Обозначив $\log_{(3x+7)}(2x+3)=t,$ получим $2t+\dfrac{1}{t}-3=0 \Rightarrow 2t^2-3t+1=0.$

Имеем $t_1=\dfrac{1}{2},\ t_2=1.$

Полагая $t_1=\dfrac{1}{2},$ получаем $\sqrt{3x+7}=2x+3.$ Это иррациональное уравнение имеет единственный корень x=-1/4. Это значение входит в ОДЗ.

Полагая $t_2=1,$ имеем 3x+7=2x+3, откуда x=-4. Это значение не входит в ОДЗ.

Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень x=-1/4.

6.3. Логарифмические неравенства

Пример 10. Решить неравенство $\log_{x+7}25>2.$

Решение. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x+7>1 \\ 25>(x+7)^2 \end{cases} \quad и \quad \begin{cases} 0<x+7<1 \\ 25<(x+7)^2 \end{cases}.$$

Решая первую систему, получаем:

$$\begin{cases} x>-6 \\ x^2+14x+24<0 \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} x>-6 \\ -12<x<-2 \end{cases},$$

откуда следует, что –6<x<-2.

Решая вторую систему, получаем:

$$\begin{cases} -7<x<-6 \\ x^2+14x+24>0 \end{cases} \quad или \quad \begin{cases} -7<x<-6 \\ x\in(-\infty;-12)\cup(-2;\infty) \end{cases}.$$

Эта система не имеет решений.

Ответ: (-6; -2).

Пример 11. Решить неравенство $\log_4(x+1)>\log_{1/4}(5-x)+\log_9 27$.

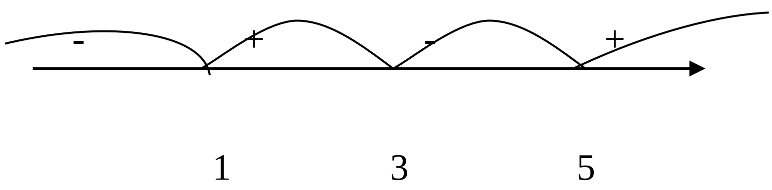
Решение. Приведем логарифмы к основанию 4. Используя формулу 7) $\log_a b=\log_{a^k} b^k$ при к=-1 и соотношение $\log_9 27=\log_4 8=\dfrac{3}{2}$, получим:

$$\log_4(x+1)>\log_4\frac{1}{5-x}+\log_4 8 \quad или \quad \log_4(x+1)>\log_4\frac{8}{5-x}.$$

Так как основание логарифмов больше единицы, имеем:

$$x+1>\frac{8}{5-x} \Leftrightarrow \frac{(x+1)(5-x)-8}{5-x}>0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)}{x-5}>0.$$

Решим последнее неравенство методом интервалов:



Таким образом, функция $\frac{(x-1)(x-3)}{x-5}$ положительна на интервале (1;3) и (5; $+\infty$). Однако в силу ОДЗ исходного неравенства имеем –1<x<5. Поэтому интервал (5; $+\infty$) не входит во множество решений, в то время как интервал (1;3) является множеством решений исходного неравенства.

Ответ: (1;3).

Пример 12. Решить неравенство $\log_{(2x+3)} x^2 < 1$.

Решение. Имеем $\log_{(2x+3)} x^2 < \log_{(2x+3)}(2x+3)$. Данное неравенство эквивалентно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 0 < 2x+3 < 1 \\ x^2 > 2x+3 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+3 > 1 \\ 0 < x^2 < 2x+3 \end{cases}.$$

Решая первую систему, получим:

$$\begin{cases} -3/2 < x < -1 \\ (x-3)(x+1) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3/2 < x < -1 \\ x < -1 \cup x > 3 \end{cases} \Rightarrow \; -3/2 < x < -1.$$

Решая вторую систему, получим:

$$\begin{cases} x > -1 \\ (x-3)(x+1) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -1 \\ -1 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 3.$$

Ответ: $\left(-\frac{3}{2};-1\right) \cup (-1;3).$

6.4. Системы логарифмических уравнений

Пример 13. Решить систему $\begin{cases} \log_2 x - \log_4 y = 0 \\ \log_4 x + \log_2 y = 5 \end{cases}.$

Решение. Записав данную систему в виде

$$\begin{cases} \log_4 x^2 - \log_4 y = \log_4 1 \\ \log_4 x + \log_4 y^2 = \log_4 4^5 \end{cases}; \; (x > 0; y > 0),$$ получим:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} = 1 \\ xy^2 = 4^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^5 = 4^5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 16 \end{cases}.$$

Ответ: {(4; 16)}.

Пример 14. Решить систему $\begin{cases} x^y = 10x \\ y + \lg x = 3 \end{cases}$.

Решение. Из второго уравнения находим: lgx=3-y, откуда $x=10^{3-y}$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $10^{(3-y)y} = 10 \cdot 10^{3-y}$ *или* $10^{3y-y^2} = 10^{4-y}$. Следовательно,

$$3y - y^2 = 4 - y \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0 \Rightarrow y = 2.$$

Наконец, имеем: $x = 10^{3-y} = 10^{3-2} = 10.$

Ответ: {(10; 2)}.

7. ПРОГРЕССИИ

7.1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией (÷)называется числовая последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называемым разностью прогрессии:

$$a_{n+1} = a_n + d, \;\; n \in N.$$

Формула общего члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d(n-1).$$

Формула суммы n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n; \;\; S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Свойство арифметической прогрессии: любой член арифметической прогрессии равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_n = \frac{a_{n-m} + a_{n+m}}{2}, \quad m < n.$$

При m=1 получаем: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$

Арифметическая прогрессия полностью задана, если известны a_1 и d. Поэтому для нахождения арифметической прогрессии необходимо иметь два условия (уравнения).

7.2. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией (∺) называется числовая последовательность, у которой задан первый член b_1, а каждый следующий, начиная со второго, равен произведению предыдущего на одно и тоже число q, называемой знаменателем прогрессии:

$$b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N.$$

Формула общего члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}.$$

Формула суммы n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Свойство геометрической прогрессии: квадрат любого члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-m} \cdot b_{n+m}, \quad m < n.$$

При m=1 получаем:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Если $|q|<1, n \to \infty,$ то геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей.

Предел ее суммы n членов

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

называется суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Геометрическая прогрессия полностью задана, если известны b_1 и q.

7.3. Примеры решения задач

Пример 1. Шестой, девятый, двенадцатый и пятнадцатый члены арифметической прогрессии образуют сумму, равную 20. Найти сумму первых двадцати членов этой прогрессии.

Решение:

$\div\ a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20; \quad a_{20} = ?$

$S_{20} = \dfrac{a_1 + a_{20}}{2} \cdot 20.$

Используем свойство: $\div$: $a_1 + a_{20} = a_6 + a_{15} = a_9 + a_{12}$. Тогда

$(a_6 + a_{15}) + (a_9 + a_{12}) = 20 \Leftrightarrow 2(a_1 + a_{20}) = 20 \Leftrightarrow a_1 + a_{20} = 10.$

$S_{20} = \frac{10}{2} \cdot 20 = 100.$

Ответ: 100.

Пример 2. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 24, а произведение второго и третьего ее членов равно 60. Найти десятый член прогрессии.

Решение:

$\div\ a_1 + a_3 = 24;\ \ a_2 \cdot a_3 = 60;\ a_{10} = ?$

$a_{10} = a_1 + 9d;\ a_2 = a_1 + d;\ a_3 = a_1 + 2d;\ \ a_5 = a_1 + 4d.$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + 4d = 24 \\ (a_1 + d)(a_1 + 2d) = 60 \end{cases}.$$

Решаем ее:

$$\begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ (a_1 + d) \cdot 12 = 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 12 \\ a_1 + d = 5 \end{cases}.$$

$a_1 = -2;\ d = 7;\ a_{10} = -2 + 7 \cdot 9 = 61.$

Ответ: 61.

Пример 3. Найти сумму всех четных двузначных чисел.

Решение. Все четные двузначные числа образуют $\div$: 10, 12, … , 98. Сумма ее членов: $S_n = \frac{10+98}{2} \cdot n$. Число n находим, используя формулу общего члена $\div: 98 = 10 + 2(n-1) \ \Rightarrow\ n = 1 + \frac{98-10}{2} = 45.$ Следовательно, $S_n = \frac{10+98}{2} \cdot 45 = 2430.$

Ответ: 2430.

Пример 4. Сумма второго и шестого членов геометрической прогрессии равна 34, а сумма третьего и седьмого членов равна 68. Найти сумму первых десяти членов прогрессии.

Решение:

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q};$$

$$b_2 = b_1 q;\; b_6 = b_1 q^5;\; b_3 = b_1 q^2;\; b_7 = b_1 q^6.$$

Получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1 q + b_1 q^5 = 34 \\ b_1 q^2 + b_1 q^6 = 68 \end{cases}.$$

Применим метод почленного деления:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2};\; q = 2;\; b_1 q(1+q^4) = 34;\; b_1 = 1;\; S_{10} = \frac{1\cdot(1-2^{10})}{1-2} = 1023.$$

Ответ: 1023.

Пример 5. Даны числа 3^{2x^2+1}, $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4x-1}$, $(\sqrt{3})^{2x^2+6x-2}$, образующие геометрическую прогрессию. Найти x.

Решение. Используем свойство ∺ : $b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1};\; n > 1.$

$$3^{2x^2+1}\cdot(\sqrt{3})^{2x^2+6x-2} = \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-4x-1}\right)^2 \Leftrightarrow 3^{3x^2+3} = 3^{8x+2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3 = 8x + 2 \Rightarrow x_1 = 2,\; x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3},\; 2.$

Пример 6. Три числа образуют арифметическую прогрессию. Их сумма равна 21. Если первое число оставить без изменения, из второго вычесть 1, а к третьему прибавить 1, то новые три числа образуют геометрическую прогрессию. Найти числа, образующие арифметическую прогрессию.

Решение:

$\div\; a_1 + a_2 + a_3 = 21;$ ∺ $a_1,\, a_2 - 1,\, a_3 + 1;\; a_1,\, a_2,\, a_3$?

Используя условия задачи и свойства ∺, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d = 21 \\ a_1 \cdot (a_1 + 2d + 1) = (a_1 + d - 1)^2. \end{cases}$$

Решим ее:

$$\begin{cases} a_1 + d = 7 \\ a_1 \cdot (8 + d) = 6^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7 - d \\ (7 - d)(8 + d) = 36 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 12,\ d = -5 \quad и \quad a_1 = 3,\ \ d = 4.$$

Ответ: 1) 12, 7, 2; 2) 3, 7, 11.

Пример 7. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 9. Найти второй член прогрессии, если ее первый член равен 6.

Решение:

∺ $b_1, b_2, b_3, \ldots;\ |q| < 1;\ S = 9;\ b_1 = 6.\ b_2 = ?$

$b_2 = b_1 \cdot q = 6q$. Знаменатель ∺ q определим, используя формулу $S = \dfrac{b_1}{1-q}$:

$$9 = \frac{6}{1-q} \Rightarrow q = \frac{1}{3},\ b_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2.$$

Ответ: 2.

7.4 Примеры тестовых задач

1.

Решите уравнение $\frac{6}{13}x^2 = 19\frac{1}{2}.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Ответ: -6,5

2.

Найдите корень уравнения: $\frac{1}{4x+3} = \frac{1}{3}.$

Ответ: 0

3

Найдите значение выражения $\frac{\log_5 81}{\log_5 9}.$

Ответ: 2

4

Найдите значение выражения $\dfrac{(25b)^{1,5} \cdot b^{0,7}}{b^{2,2}}$ при $b = 5$.

Ответ: 125

5.

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно в A со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 16

6.

Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40% меди, второй — 25% меди. Масса первого сплава больше массы второго на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 30

7

На изготовление 391 детали первый рабочий затрачивает на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 460 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

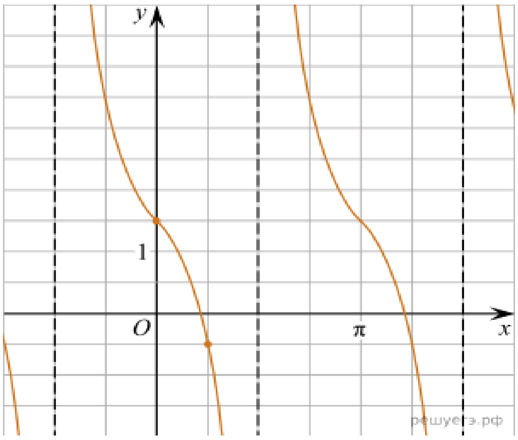
Ответ: 23

8

От пристани A к пристани B, расстояние между которыми равно 192 км, отправился с постоянной скоростью первый теплоход, а через 4 часа после этого следом за ним со скоростью на 4 км/ч большей, отправился второй. Найдите скорость первого теплохода, если в пункт B оба теплохода прибыли одновременно. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 12

9.



На рисунке изображён график функции $f(x) = a\operatorname{tg} x + b$. Найдите b.

Ответ: 1,5

10

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$, где числа a, b и c — целые. Найдите c.

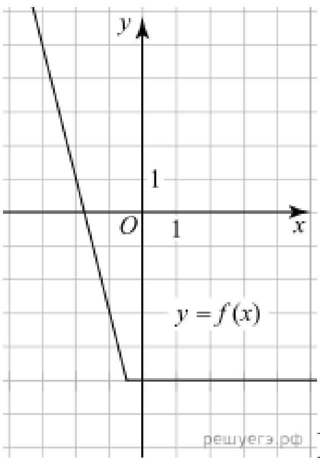
Ответ: -3

11

На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение дискриминанта уравнения $f(x) = 0$.

Ответ: 44

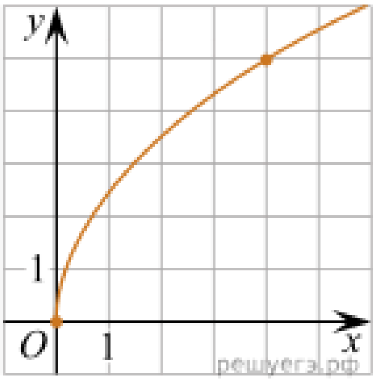
12



На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax + |bx + c| + d$, где числа a, b, c и d — целые. Найдите корень уравнения $bx + c = 0$.

Ответ: -0,5

13



На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(6{,}76)$.

Ответ: 6,5

14.

а) Решите уравнение $(x^2+2x-1)\left(\log_2(x^2-3)+\log_{0,5}(\sqrt{3}-x)\right)=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку [−2,5; −1,5].

Ответ: а) $\{-1-\sqrt{2},\ -1-\sqrt{3}\}$; б) $-1-\sqrt{2}$.

15.

Решите уравнение $\sqrt{x+6\sqrt{x-9}}+\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}=6.$

Ответ: $[9;\ 18]$.

16

а) Решите уравнение $x^2-12+\dfrac{36}{x^2}+2\cdot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2{,}5;\ 2]$.

Ответ: а) $\{-\sqrt{6};\ -3;\ 2;\ \sqrt{6}\}$; б) $-\sqrt{6}$; 2.

17

а) Решите уравнение $\dfrac{(x-1)^2}{8}+\dfrac{8}{(x-1)^2}=7\left(\dfrac{x-1}{4}-\dfrac{2}{x-1}\right)-1.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;\ 3]$.

Ответ: а) $\{-1;\ 5;\ 7-2\sqrt{11};\ 7+2\sqrt{11}\}$ б) $-1;\ 7-2\sqrt{11}$.

18

Решите неравенство $\log_3(2-3^{-x}) < x+1-\log_3 4.$

Ответ: $(-\log_3 2; \log_3 2 - 1) \cup (\log_3 2; +\infty)$

19

Решите неравенство $\log_{x^2+x}\left(x^2-2x+1\right) \leqslant 1.$

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right) \cup \left(0;\ \dfrac{1}{3}\right] \cup \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2};\ 1\right) \cup (1;\ +\infty).$

20

Решите неравенство $\lg^4(x^2-26)^4 - 4\lg^2(x^2-26)^2 \leqslant 240.$

Ответ: $[-6; -\sqrt{26,1}] \cup [-\sqrt{25,9}; -4] \cup [4; \sqrt{25,9}] \cup [\sqrt{26,1}; 6].$

I

21

Вычислить: $\left(\dfrac{92}{85}+\dfrac{104}{17}\right)\cdot\dfrac{5}{18}+\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{7}{6}\right)-\dfrac{5}{2}.$

(Ответ: 1).

22

На сколько процентов уменьшится объем пирамиды, если уменьшить площадь ее основания на 20%?

(Ответ: 20).

23

Определить число членов *n* арифметической прогрессии, если $a_n = 200$, $a_1 = 10$, $d = 5$.

(Ответ: 39).

24

Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y=19, \\ xy=84 \end{cases}$ и в ответе записать наибольшее значение *y*, удовлетворяющее ей.

(Ответ: 12).

25

Решить неравенство $\dfrac{4}{2+x} \le 0$ и указать наибольшее целое значение *x*, удовлетворяющее ему.

(Ответ: 3).

26

Решить уравнение $\sqrt{x^2-5x+8}=x+1$.

(Ответ: 1).

27

Вычислить без таблиц $9^{\log_3 8}$.

(Ответ: 4).

28

Машина выехала со скоростью 50 км/ч. Через полчаса вслед за ней выехала другая машина, которая догнала ее через 2,5 ч. Найти скорость второй машины (в км/ч).

(Ответ: 60).

29

Бак, вмещающий 10 тыс. л, заполняют бензином двумя насосами, второй из которых вливает в минуту на 10 л меньше, чем первый. За 10 мин была заполнена половина бака. Сколько литров бензина влил первый насос?

(Ответ: 2550).

30

Решить неравенство $11^{-x/180} < 11^{-3}$ и в ответе записать наименьшее целое значение *x*, удовлетворяющее ему.

31

На заводе 35% всех работающих – женщины, а остальные – мужчины, которых на 252 человека больше, чем женщин. Определить общее число рабочих.

(Ответ: 840).

32

Решить систему уравнений $\begin{cases} y+x=3, \\ y-x=1 \end{cases}$ и вычислить $y-6x$.

(Ответ: -4).

33

От пристани отправился плот, через 3 ч 30 мин от той же пристани отправилась моторная лодка с собственной скоростью 20 км/ч, которая догнала плот, пройдя 16,8 км. Найти скорость плота (в км/ч).

(Ответ: 4).

34

Сплав, состоящий из меди и серебра, весит 330 г. Масса меди в этом сплаве составляет 5/28 массы серебра. Сколько граммов серебра в сплаве?

(Ответ: 280).

35

Товар до снижения цен стоил 180 руб. а после снижения – 135 руб. На сколько процентов снижена цена товара?

(Ответ: 25).

36

Решить уравнение $(x-2)(2x-1)=2x^2+3$.

(Ответ: -0,2).

37

Скорость вертолета на 70 км/ч больше скорости автомобиля, а отношение их скоростей равно 15:8. Найти скорость вертолета (в км/ч).

(Ответ: 150).

38

Заготовлено 12 т угля на 100 дней. На сколько дней хватит этого запаса, если ежедневно расходовать на 0,02 т меньше?

(Ответ: 120).

39

Вычислить: $\left(0,5+0,125-\frac{1}{6}\right)\left(6,4:\frac{80}{3}\right)+\frac{1}{8}$.

(Ответ: 0,235).

40

Разделить число 650 на две на две части так, чтобы 80% первой части были равны 24% второй части. В ответе записать большую часть.

(Ответ: 500).

41

Найти первый член арифметической прогрессии, у которой, у которой $d=-6$, $a_{81}=500$.

(Ответ: 980).

42

Решить систему уравнений $\begin{cases}4x+3y=11,\\2x-y=13\end{cases}$ и в ответе записать значение *x*, удовлетворяющее ей.

(Ответ: 5).

43

Решить неравенство $(2x+3)(2-2x)>0$ и в ответе записать наименьшее целое значение *x*, удовлетворяющее ему.

(Ответ: -1).

44

Решить уравнение $\sqrt{2x+10}=x+1$.

(Ответ: 3).

45

Зная, что $\lg 2=0,301$ и $\lg 3=0,477$, вычислить без таблиц $\lg 0,6$.

(Ответ: -0,222).

46

Сколько процентов составляет ¾ от 15?

(Ответ: 500).

47

Турист на лодке проплыл против течения 10 км и по течению 18 км, затратив на весь путь 4 ч. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Определить скорость лодки в стоячей воде (в км/ч).

(Ответ: 7).

32 Для обработки поля за 10 дней требуется 6 тракторов. Сколько таких же тракторов потребуется для обработки поля за 6 дней?

(Ответ: 10).

48

Решить неравенство $\frac{2x-1}{x-1}<0$ и записать наименьше целое значении x, удовлетворяющее ему.

(Ответ: 1).

49

Решить уравнение $\sqrt{9x-20}=x$ и в ответе записать больший его корень.

(Ответ: 5).

50

Скорость пассажирского поезда в 2 раза больше скорости товарного, поэтому расстояние в 270 км от проходит на 2 ч 30 мин быстрее, чем товарный. Найти скорость пассажирского поезда (в км/ч).

(Ответ: 108).

51

На заводе в трех цехах работают 590 человек. В первом цехе вдвое больше рабочих, чем во втором, а в третьем цехе – на 105 больше, чем в первом. Сколько рабочих во втором цехе?

(Ответ: 97).

52

Найти больший корень уравнения $9^{x^2+4x-4,5}=3$.

(Ответ: 1).

53

Найти целое значение *x*, удовлетворяющее неравенству $\log_2(x-7,5)<0$.

(Ответ: 8).

7.5 Вариант для самостоятельного решения.

Вариант 1.

1. Решите уравнение $\frac{13x}{2x^2-7}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2. Найдите значение выражения $64^{\log_8\sqrt{3}}$.

3. Найдите значение выражения $35^{7,2}\cdot 7^{-6,2}:5^{4,2}$.

4. Найдите $\frac{p(b)}{p(\frac{1}{b})}$, если $p(b)=\left(b+\frac{3}{b}\right)\left(3b+\frac{1}{b}\right)$ при $b\neq 0$.

5. Найдите значение выражения $\frac{(5x)^3\cdot x^2}{x^4\cdot 2x}$.

6. Найдите значение выражения $x+\sqrt{x^2+44x+484}$ при $x\leqslant -22$.

7. Половину времени, затраченного на дорогу, автомобиль ехал со скоростью 74 км/ч, а вторую половину времени – со скоростью 66 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

8. Митя, Артем, Паша и Женя учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 18% уставного капитала, Артем — 60000 рублей, Паша — 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Женя. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1100000 рублей причитается Жене? Ответ дайте в рублях.

9. На изготовление 780 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 840 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает первый рабочий?

10. Грузовик перевозит партию щебня массой 210 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за девятый день, если вся работа была выполнена за 14 дней.

11. а) Решите уравнение $\log_{-x^2-32x+33}(2x^2+136)=\dfrac{1}{\log_{-33x}((1-x)(x+33))}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\sqrt{333};-\sqrt{33}]$.

12. а) Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2$.

б) Определите, являются ли решениями уравнения числа 1,5 и $2\sqrt{3}-3$

13. Решите неравенство:

$$\left(\frac{\log_2^3 x+1}{\log_2^2 x-\log_2(4x)}+\log_{\frac{x}{4}}\left(256x^7\right)\right):\left(8+\frac{127}{x-16}\right)\geqslant 0.$$

14. Решите неравенство $3^{\log_2 x^2}+2\cdot|x|^{\log_2 9}\leqslant 3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{\log_{0,5}(2x+3)}$

15. Решите неравенство $\log_2\left(\dfrac{1}{x}-1\right)+\log_2\left(\dfrac{1}{x}+1\right)\leqslant\log_2(27x-1)$.

16. Решите неравенство: $20^x-64\cdot5^x-4^x+64\leqslant 0$.

17. Решите неравенство: $|2x-5|^{x+1}+|2x-5|^{-x-1}\leqslant 2$.

18. Решите неравенство $\dfrac{x^2-4x-3}{x^2-4x+3}+\dfrac{x^2-4x+24}{x^2-4x}\geqslant 0$.

19. Решите неравенство $\dfrac{1}{6x^2-5x}\geqslant\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Вариант 2.

1. Решите уравнение $\sqrt{-40+13x}=x.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

2. Найдите корень уравнения $16^{x-9}=0,5.$

3. Решите уравнение $\dfrac{13}{x^2+12}=1.$ Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней

4. Найдите корень уравнения $5^{\log_{25}(2x-1)}=3.$

5. Найдите значение выражения $\dfrac{(b^{\sqrt{3}})^{2\sqrt{3}}}{b^4}$ при $b=5.$

6. Найдите $\log_a(a^2b^3),$ если $\log_a b=-2.$

7. Найдите значение выражения $\log_{0,25}128-\log_{0,25}2.$

8. Найдите значение выражения $(\sqrt{13}-\sqrt{7})(\sqrt{13}+\sqrt{7}).$

9. Из пункта A в пункт B одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого на 13 км/ч, а вторую половину пути – со скоростью 78 км/ч, в результате чего прибыл в пункт B одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 48 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

10. В понедельник акции компании подорожали на некоторое число процентов, а во вторник подешевели на то же самое число процентов. В результате они стали стоить на 49% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

11. Бизнесмен Печенов получил в 2000 году прибыль в размере 1 000 000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 16% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Печенов за 2002 год?

12. Из одной точки кольцевой дороги, длина которой равна 22 км, одновременно в одном направлении выехали два автомобиля. Скорость первого автомобиля равна 113 км/ч, и через 30 минут после старта он опережал второй автомобиль на один круг. Найдите скорость второго автомобиля. Ответ дайте в км/ч.

13. На изготовление 475 деталей первый рабочий тратит на 6 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 550 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 3 детали больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

14. а) Решите уравнение $4^{x-\frac{1}{2}}-5\cdot 2^{x-1}+3=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1,\ \frac{5}{3}\right)$.

15. а) Решите уравнение $\frac{(x-1)^2}{8}+\frac{8}{(x-1)^2}=7\left(\frac{x-1}{4}-\frac{2}{x-1}\right)-1.$

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[-2;\ 3]$.

16. а) Решите уравнение $\sqrt{x^3+4x^2+9}-3=x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{9}{2};\ \frac{7}{5}\right]$.

17. Решите неравенство $\lg\left(7^{2+\log_{70}x}+\frac{2}{10^{\log_{70}x}}\right)\leqslant 2-\log_{70}x.$

18. Решите неравенство $\frac{18-x^2-3x}{x^2+6x}\leqslant 1+\frac{3}{x+2}.$

19. Решите неравенство $\frac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot 5^{x-2}-2)}\geqslant 1{,}5.$

Ключ к варианту 2.

№ п/п	Ответ
1	5
2	8,75
3	-1
4	5
5	25
6	-4
7	-3
8	6
9	52
10	70
11	1345600
12	69
13	25
14	а) $1,\ \log_2 3$; б) $\log_2 3.$
15	а) $\{-1;\ 5;\ 7-2\sqrt{11};\ 7+2\sqrt{11}\}$ б) $-1;\ 7-2\sqrt{11}.$
16	а) $0,\ \frac{-3+\sqrt{33}}{2}$; б) $0,\ \frac{-3+\sqrt{33}}{2}.$
17	$(0;\ 2].$

18	$(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,-3]\cup(-2;\,0)\cup[1;\,\infty)$.
19	$[0;\log_5 2)\cup\left[\log_5\frac{8}{3};1\right)$.

Ключ к варианту 1.

№ п/п	Ответ
1	-0,5
2	3
3	875
4	1
5	62,5
6	-22
7	70
8	374000
9	30
10	18
11	а) $\left\{-8;\,-\frac{17}{2}\right\}$; б) $-8,\,-\frac{17}{2}$.
12	$\left(\frac{1}{8};\ \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};\ 4\right)\cup(16;\ +\infty)$.
13	$[-1;\,0);\ (0;3]$.
14	$\left[\frac{1}{3};1\right)$.
15	$[0;\ 3]$.
16	$\{-1;\ 2;\ 3\}$.
17	$(-\infty;\ 0)\cup(1;\ 3)\cup(4;\ +\infty)$.
18	$\left(0;\ \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{2};\ \frac{5}{6}\right)$.

Обухова Галина Александровна

Математика (часть 1)

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)»

Подписано к печати 28.02.22. Формат 60х84 1/16.
Усл. печ. л. 2,75. Тираж 25 экз. Зак. 221803. Рег. № 4.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.