МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»**

Г.А. ОБУХОВА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Методическое пособие

для студентов заочной формы обучения направления «Экономика»

Рубцовск 2012

УДК 517.8

Обухова Г.А. Математическое моделирование в экономике: Методическое пособие для студентов заочной формы обучения направления «Экономика»/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2012.- 38 с.

В пособии представлены задачи, примеры решений и краткие теоретические справки по основным разделам теории экономико-математических методов: линейное программирование, теория игр, сетевое планирование, а также основные модели потребления и производства.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол № 5 от 27.12.2012г.

Рецензент:
к.пед.н., доцент Н.А. Ларина

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОНЯТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Под моделированием будем понимать исследование процессов и объектов путем построения и изучения их моделей. Под моделью понимается такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе познания замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты. Модель должна отражать важнейшие черты явления, т. е. ней должны быть учтены все существенные факторы, от которых в наибольшей степени зависит успех исследования. Вместе с тем модель должна быть по возможности простой, без мелких второстепенных факторов, так как их учет усложняет математический анализ и делает трудно обозримым результат изысканий. Процесс построения модели называется ***моделированием***. Существует несколько приемов моделирования, которые можно условно объединить в две большие группы: материальное (предметное) и идеальное моделирование. К материальным относятся такие способы моделирования, при которых исследование ведется на основе модели, воспроизводящей основные геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики изучаемого объекта. Основными разновидностям материального моделирования являются физические и аналоговые моделирования.

Физическим принято называть моделирование, при котором реальному объекту противопоставляется его увеличенная или уменьшенная копия, допускающая исследование с помощью последующего перенесения свойств изучаемых процессов и явлений с модели на объект на основе теории подобия.

Аналоговое моделирование основано на аналогии процессов и явлений, имеющих различную физическую природу, но одинаково описываемых формально (одними и теми же математическими уравнениями, логическими схемами и т. п.).

Заметим, что в обоих типах материального моделирования модели являлись материальным отражением исходного объекта и были связаны с ним своими геометрическими, физическими и другими характеристиками, причем процесс исследования был тесно связан с материальным воздействием на модель, т. е. состоял в натурном эксперименте с ней. Таким образом, предметное моделирование по своей природе является экспериментальным методом. От предметного моделирования принципиально отличается идеальное моделирование, которое основано не на материальной аналогии объекта и модели, а на аналогии идеальной, мыслимой. Различают два типа идеального моделирования: интуитивное и знаковое.

Под **интуитивным** понимаем моделирование, основанное на интуитивном представлении об объекте исследования, не поддающемся формализации либо не нуждающемся в ней. В этом смысле, например, жизненный опыт каждого человека может считаться его интуитивной моделью окружающего мира. Знаковым называется моделирование, использующее в качестве моделей знаковые преобразования какого-либо вида: схемы, графики, чертежи, формулы, наборы символов и т. д., а также включающее совокупность законов, по которым можно оперировать с выбранными знаковыми образованиями и их элементами. Важнейшим видом знакового моделирования является математическое моделирование, при котором исследование объекта осуществляется посредством модели, сформированной на языке математики, и использованием тех или иных математических методов. При построении математической модели реальное явление всегда упрощается, схематизируется и полученная схема описывается с помощью того или иного математического аппарата. Общая для всех последовательность циклического процесса моделирования представлена на рис. 1.1.

Рис. 1.1

Цикличность моделирования дает возможность исследователю при необходимости совершенствовать модель последовательно, шаг за шагом.

2. ПРОЦЕСС ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Использование математических методов для решения экономических задач требует предварительного качественного анализа исследуемой системы, глубокого изучения ее сущности, выяснения направления целесообразного ее изменения. На основе данных такого анализа экономическая система описывается некоторыми математическими соотношениями с помощью независимых переменных, параметров и функций, отображающих интересующие нас свойства объекта или процесса, т. е. создается математическая модель. Эта модель, как правило, представляет собой математическое выражение в виде системы уравнений, неравенств, отображающих взаимосвязь между явлениями в каком-нибудь реальном экономическом процессе. Большинство экономико-математических моделей состоит из системы ограничений и целевой функции. Ограничения выражают условия, которые должны соблюдаться при решении задачи. Построение математической модели важно не само по себе, а имеет целью выявление оптимальных решений. Желательно выбрать такое решение, которое обеспечивает максимальную эффективность. Для того чтобы сравнивать между собой по эффективности различные решения, необходимо располагать каким-то количественным критерием, показателем эффективности (целевой функцией). Целевая функция — это принятый критерий эффективного решения задачи. При решении задачи отыскивается максимум или минимум целевой функции, являющийся оптимальным решением. Очень часто в качестве показателя эффективности фигурируют затраты на производство товара, которые, естественно, нужно минимизировать. Принятие решений в ходе использования экономико-математических методов при анализе конкретной социально-экономической системы есть сложный процесс, подразделяющийся на ряд этапов:

— постановка задачи;

— построение математической модели;

—- решение с помощью модели поставленной задачи;

— проверка адекватности модели реальной действительности и ее корректировка в случае недостаточной степени соответствия модели реальному процессу;

— реализация результатов исследования.

Наиболее ответственным является первый этап. От постановки задачи, от умения определить главное в анализируемой системе и выделить её характерные черты, от того, насколько правильно будет сформулирована цель исследования, в конечном счете зависит качество полученного результата. Степень адекватности построенной модели реальной системе прежде всего зависит от понимания исследователями сущности моделируемой системы. Поэтому постановку задачи должны осуществлять экономисты — специалисты в данной области, а не чисто математики. Как правило, на этом этапе строится качественная модель рассматриваемой проблемы, которая состоит из выделения наиболее важных признаков или факторов, а также в установлении закономерностей между этими факторами. На втором этапе исследования выбирается модель, наиболее подходящая для описания исследуемой системы. Для этого устанавливаются количественные соотношения, выражающие целевую функцию и ограничения в виде функций от управляемых переменных. Переменными в модели являются экономические величины, которые могут принимать любое значение из некоторого множества допустимых величин.

В модели различают два вида переменных. Одни переменные принимаются независимыми — это ***экзогенные*** переменные, которые приводят в движение модель. Другие переменные — ***эндогенные*** — получают свое значение в результате решения уравнений модели при заданных значениях экзогенных переменных.

Зависимость между переменными модели определяется величиной параметров модели — коэффициентов, которые остаются постоянными на протяжении всего периода.

Выражение исследуемого экономического явления в виде системы уравнений, неравенств, функций и количественных зависимостей называется ***формализацией***. При формализации экономической системы следует исключить все элементы, которые можно предполагать нетипичными, и выделить лишь основные.

Например, при составлении транспортной задачи оптимального прикрепления потребителей к поставщикам исходят из предположения, что весь груз, отправленный поставщиками, поступает потребителю и не берется во внимание возможность ошибочной адресации груза или аварии, в результате которых потребитель не получит груза.

На третьем этапе исследования осуществляется решение поставленной задачи на основе выбранной модели. Для решения задачи с помощью математической модели используются апробированные оптимизационные методы.

На четвертом этапе исследования проверяется адекватность модели реальной действительности. Проверка адекватности модели заключается в сопоставлении полученных результатов ее решения с характеристиками системы, которые при тех же исходных данных имели место в прошлом. В случае неадекватности модели ее приходится корректировать. Корректировка может потребовать дополнительных исследований системы, уточнения структуры математической модели, изменений переменных модели. Модель считается адекватной, если она способна обеспечить достаточно надежное предсказание поведения системы.

Пятый, заключительный, этап связан с практической реализацией результатов исследования. Полученное математическое решение облекают в соответствующую содержательную форму в виде рекомендаций, инструкций или методических указаний, которые используются для совершенствования организации управления системой.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В задачах линейного программирования требуется найти экстремум (максимум или минимум, в зависимости от содержательной постановки задачи) линейной функции

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n .$$

Эта функция, называемая целевой, неограниченна, и поэтому искать ее максимум или минимум, не налагая никаких ограничений на область изменения вектора *X* с компонентами, бессмысленно. Интерес представляет задача максимизации этой функции при условии, что вектор *X* принадлежит некоторому множеству, причем выбор значений вектора *X* стеснен условиями типа линейных неравенств.

В общем случае задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти величину вектора *X*, доставляющего максимум линейной функции

$$F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

на множестве значений $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющих ограничениям вида

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m;\\
&x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0;\ \ldots;\ x_n \ge 0.
\end{aligned}$$

В более компактной форме:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;$$

$$x_j \ge 0,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Вектор

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

называется вектором ограничений для задачи линейного программирования. Вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

удовлетворяющий линейным ограничениям, называется допустимым решением задачи линейного программирования. Допустимый вектор *X*, доставляющий максимум целевой функции, называется оптимальным решением задачи линейного программирования. Коэффициенты a_{ij}, c_j, b_i составляют условия задачи и трактуются исходя из содержательной постановки проблемы.

4. МОДЕЛЬ МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ В. ЛЕОНТЬЕВА

Макроэкономика функционирования многоотраслевого хозяйства требует баланса между отдельными отраслями. Каждая отрасль, с одной стороны, является производителем, а с другой — потребителем продукции, выпускаемой другими отраслями. Возникает довольно непростая задача расчета связи между отраслями через выпуск и потребление продукции разного рода. Впервые эта проблема была сформулирована в 1936 г. в виде математической модели в трудах известного американского экономиста В. Леонтьева, который пытался проанализировать причины экономической депрессии в США 1929-1932 гг. Эта модель основана на алгебре матриц и широко использует аппарат матричного анализа.

Для простоты будем полагать, что производственная сфера хозяйства представляет собой *n* отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт. Для обеспечения своего производства каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Обычно процесс производства рассматривается за некоторый период времени (в ряде случаев такой единицей служит год).

Введем следующие обозначения:

x_i — общий объем продукции *i*-й отрасли (ее валовый выпуск);

x_{ij} — объем продукции *i*-й отрасли, потребляемой *j*-й отраслью при производстве объема продукции x_i;

y_i — объем продукции *i*-й отрасли, предназначенный для реализации (потребления) в непроизводственной сфере, или так называемый продукт конечного потребления. К нему относятся личное потребление граждан, удовлетворение общественных потребностей, содержание государственных институтов и т. д.

Балансовый принцип связи различных отраслей промышленности состоит в том, что валовый выпуск i - й отрасли должен быть равным сумме объемов потребления в производственной и непроизводственной сферах. В самой простой форме балансовые соотношения имеют вид $x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i$, где i = 1, 2, ..., n. Данные уравнения называются ***соотношениями баланса***. Поскольку продукция разных отраслей имеет разные измерения, будем в дальнейшем иметь в виду стоимостный баланс.

Леонтьевым был установлен важный факт: в течение длительного времени величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ меняются очень слабо и могут рассматриваться как постоянные. Это явление становится понятным в свете того, что технология производства остается на одном и том же уровне довольно длительное время и, следовательно, объем потребления j -й отраслью продукции i -й отрасли при производстве своей продукции объемом x_i есть технологическая константа. В силу указанного факта можно сделать следующее допущение: для производства продукции i - й отрасли объемом x_i- нужно использовать продукцию i -й отрасли объемом $a_{ij}x_i$, где a_{ij} — постоянное число. При таком допущении технология производства принимается линейной, а само это допущение называется ***гипотезой линейности***. При этом числа a_{ij} называются ***коэффициентами прямых затрат***. Согласно гипотезе линейности, имеем $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$. Отсюда $x_{ij} = a_{ij}x_j$, где $i, j = 1, 2, ..., n$. Данные уравнения можно переписать в виде системы уравнений $\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + y_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n + y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n + y_n \end{cases}$

Введем в рассмотрение векторы-столбцы объемов произведенной продукции (вектор валового выпуска), объемов продукции конечного потребления (вектор конечного потребления) и матрицу коэффициентов прямых затрат: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда наша система уравнений в матричной форме имеет вид $x = Ax + y$. Обычно это соотношение называют ***уравнением линейного межотраслевого баланса (модель Леонтьева)***.

Уравнение межотраслевого баланса можно использовать в двух целях. В первом, наиболее простом случае, когда известен вектор валового выпуска x, требуется рассчитать вектор конечного потребления y. Во втором случае уравнение межотраслевого баланса используется для целей планирования со следующей формулировкой задачи: для периода времени (например, год) известен вектор конечного потребления y и требуется определить вектор x валового выпуска. Здесь необходимо решать систему линейных уравнений $x = = Ax+y$ с известной матрицей A и заданным вектором y. Между тем система имеет ряд особенностей, вытекающих из прикладного характера данной задачи. В частности, все элементы матрицы A и векторов x и y должны быть неотрицательными.

4.1. Продуктивные модели Леонтьева

Матрица A, все элементы которой неотрицательны, называется ***продуктивной***, если для любого вектора $\vec{y}$ с неотрицательными компонентами существует решение уравнения $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ — вектор — $\vec{x}$, все элементы которого неотрицательны. В таком случае и модель Леонтьева называется ***продуктивной***.

Перепишем систему $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$ с использованием единичной матрицы E в виде $(E - A)\vec{x} = \vec{y}$. Если существует обратная матрица $(E - A)^{-1}$, то существует и единственное решение уравнения $\vec{x} = A\vec{x} + \vec{y}$, а именно $\vec{x} = (E - A)^{-1}\vec{y}$. Матрица $(E - A)^{-1}$ называется ***матрицей полных затрат***. Существует несколько критериев продуктивности матрицы A. Приведем два из них.

1. Матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E - A)^{-1}$ существует и ее элементы неотрицательны.

2. Матрица A с неотрицательными элементами продуктивна, если сумма элементов по любому ее столбцу (строке) не превосходит единицы: $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \le 1$, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше единицы.

Пример 1. Таблица содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени:

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый продукт
	1	2	3		
Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
Энергетика	10	10	20	60	100
Машиностроение	20	10	10	10	50

Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить соответственно до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\vec{y} \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}$,

$A=\begin{pmatrix} 0,05 & 0,35 & 0,40 \\ 0,10 & 0,10 & 0,40 \\ 0,20 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix}$. Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь вид $\vec{y}^*=\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$. Требуется найти новый вектор валового выпуска $\vec{x}^*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется.

В таком случае компоненты неизвестного вектора $\vec{x}^*$ находятся из системы уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид: $(E-A)\vec{x}^*=\vec{y}^*$. Матрица этой системы $(E-A)=\begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}$. Решение системы линейных уравнений $(E-A)\vec{x}^*=\vec{y}^*$ при заданном векторе правой части $\vec{y}^*=\begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\vec{x}^*=\begin{pmatrix} 152,2 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}$.

Таким образом, для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2 %, уровень энергетики — на 35,85 % и выпуск машиностроения — на 85 % по сравнению с исходными величинами.

Пример 2. Исследовать на продуктивность матрицу $A=\begin{pmatrix} 0,2 & 0,6 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Решение. В данном случае $(E-A)=\begin{pmatrix} 0,8 & -0,6 \\ -0,6 & 0,7 \end{pmatrix}$. Проводя необходимые вычисления для нахождения обратной матрицы, получим $(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 3,5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Мы видим, что эта матрица неотрицательна (все элементы этой матрицы неотрицательны), следовательно, A является продуктивной.

5. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА

5.1. Производственная функция Кобба — Дугласа

Производственная функция Кобба—Дугласа имеет следующий вид: $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где $A,\ \alpha,\ \beta$ — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$, а K — объем фондов либо в стоимостном выражении либо в натуральном количестве, L — объем трудовых ресурсов, например число рабочих, y— выпуск продукции в стоимостном выражении.

Величину $l = \dfrac{y}{L}$ естественно назвать средней производительностью труда — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), произведенное одним рабочим.

Величину $k = \dfrac{y}{K}$ естественно назвать средней фондоотдачей — ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на один станок (на одну единицу фондов).

Величину $f = \dfrac{K}{L}$ естественно назвать средней фондовооруженностью или просто фондовооруженностью — ведь это стоимость фондов, приходящаяся в среднем на единицу трудовых ресурсов, например на одного рабочего.

Частная производная от производственной функции по объему трудовых ресурсов приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной еще одним дополнительным рабочим. По этой причине эта частная производная $y'_L = \dfrac{\partial y}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ называется ***предельной производительностью труда.***

Если же увеличить фонды еще на единицу — купить еще один станок, то добавочная стоимость продукции, произведенной на нем, окажется приблизительно равной частной производной от производственной функции по объему фондов. Эта частная производная $y'_K = \dfrac{\partial y}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}$ называется ***предельной фондоотдачей.***

И предельная производительность труда, и предельная фондоотдача — это абсолютные величины. Но в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится выпуск продукции, если число рабочих увеличится на 1 % или если фонды возрастут на 1 %? Такие вопросы и ответы на них используют понятие «эластичность функции по аргументу».

Найдем эластичность выпуска продукции по труду $E_y(L) = \dfrac{L}{y} \cdot y'_L = L \cdot \dfrac{\beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \beta$. Итак, параметр β имеет ясный экономический смысл — это эластичность выпуска по труду. Аналогичный смысл имеет и параметр α — это эластичность выпуска по фондам, т. е. $E_y(K) = \alpha$.

Пример 3. Пусть производственная функция есть функция Кобба— Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции па 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. В 1997 г. один работник за месяц производил продукции на 1 млн руб., а всего число работников составляет 1000 человек. Основные фонды оценивались в 10 млрд руб. Написать производственную функцию и величину средней фондоотдачи.

Решение. Эластичность выпуска по труду $\beta = \dfrac{1}{3}$, а по фондам $\alpha = \dfrac{1}{2}$, следовательно, функция Кобба — Дугласа имеет вид $y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Подставляя остальные данные, получим: $10^6 \cdot 1000 = A\left(10^{10}\right)^{1/2}\left(1000\right)^{1/3}$, т.е. A=1000. Окончательно функция Кобба — Дугласа есть $k = \dfrac{y}{K} = 10^6 \cdot \dfrac{1000}{10^{10}} = 0{,}1$.

5.2. Прибыль от производства разных видов продукции

Рассмотрим типичную задачу нахождения экстремума функции нескольких переменных, возникающую в экономике. Пусть $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m$ — количество производимых m разновидностей продукции, а их цены соответственно $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_m$. Пусть затраты на производство этих видов продукции задаются функцией издержек $C = C\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m\right)$. Тогда функция прибыли имеет вид $\pi = p_1x_1 + ... + p_mx_m - C\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m\right)$. Максимум прибыли естественно искать как условие локального экстремуму функции многих переменных $\dfrac{\partial \pi}{\partial x_i} = 0$, где i = 1, 2, ...,m при $x_i \geq 0$. Это условие приводит к системе алгебраических уравнений относительно переменных x: $p_i - \dfrac{\partial C}{\partial x_i} = 0$, где i = 1, 2, ..., m.

Система уравнений реализует известное правило экономики: предельная стоимость продукции равна предельным издержкам на производство этой продукции. Решениями этой системы уравнений являются наборы, состоящие из m значений каждый. Нужно заметить, что сам процесс нахождения решения системы уравнений зависит от вида функции издержек и может быть довольно сложным.

Пример 4. Пусть производится два вида продукции, обозначим их количества через x и y. Пусть цены этой продукции соответственно составят $p_1 = 8$ и $p_2 = 10$, а сама функция затрат примет вид: $C = x^2 + xy + y^2$. Прибыль является функцией двух переменных $\pi\left(x,\ y\right) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$.

Решение. Условие локального экстремума приводит к системе линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ x + 2y = 10, \end{cases}$ решение которой определяет точку (2. 4). Найденная точка определяет локальный максимум функции прибыли, которая равна $\pi = 28$.

6. МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой. Раздел теории исследования операций, занимающийся математическими моделями принятия оптимальных решений в условиях конфликта, называется **теорией игр**.

Математико-игровые модели находят свое применение не только в конфликтных ситуациях социально-экономической области, но и во взаимодействии человека с природой, в политике, в биологии, в военной области и др.

Заинтересованные стороны (в частности, лица) в игре называются **игроками**. Часто, хотя и не всегда, считают всех игроков равноправными. В некоторых играх по различным причинам создаются объединения. Так, если целью объединения являются совместные действия, то эти объединения называются коалициями действия. Если же объединение образовано по признаку идентичности предпочтений исходов игры, то они называются коалициями интересов. Указанные коалиции не всегда совпадают. В случае совпадения их называют просто коалициями. С точки зрения временного фактора коалиции могут быть временные или постоянные на протяжении игры. Если в игре участвуют два противника, то она называется парной. Если число противников более двух, то игра называется множественной. Множественная игра с двумя постоянными коалициями есть не что иное, как парная игра.

С целью математической формализации игра должна проходить по определенным правилам, представляющим собой систему условий, описывающих:

1) возможные действия каждого из игроков;

2) объем информации, которую может получить каждая сторона о действиях другой;

3) исход игры в результате каждой совокупности ходов противников.

Любое возможное в игре действие игрока называется его стратегией или, точнее — **чистой стратегией**.

Игра называется **конечной**, если множество стратегий каждого игрока конечно. В противном случае (т.е. когда множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно) игра называется бесконечной.

6.1. Матричная игра

Исход игры — это значение некоторой функции, называемой функцией «выигрыша», которая может задаваться аналитически либо таблично (матрицей). Игра, в которой выигрыши и проигрыши игроков задаются матрицей, называется матричной.

Игра, в которой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, называется **игрой с нулевой суммой**.

Пример 5. В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

Решение. У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 записать 2) и A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3.

Задача первого игрока — **максимизировать свой выигрыш**, задача второго игрока — **минимизировать свой проигрыш**.

Матрица игры, или платежная матрица, имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок выбрал стратегию A_1, то в худшем случае он получит выигрыш $\alpha_1 = \min(0;\ -1;\ -2) = -2$. Соответственно, при выборе стратегии A_2 — $\alpha_2 = \min(1;\ 0;\ -1) = -1$, $A_3 - \alpha_3 = \min(2;\ 1;\ 0) = 0$. Предвидя такую возможность, первый игрок должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2;\ -1;\ 0) = 0.$$

Величина α — **гарантированный выигрыш игрока — называется нижней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение выигрыша α, называется **максиминной**.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Второй игрок при выборе стратегии B_1 в худшем случае получит проигрыш $\beta_1 = \max(0;\ 1;\ 2) = 2$. При выборе стратегий B_2 и B_3 проигрыш составит, соответственно, $\beta_2 = \max(-1;\ 0;\ 1) = 1$; $\beta_3 = \max(-2;\ -1;\ 0)$. Он выбирает стратегию, при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(2;\ 1;\ 0) = 0.$$

Величина β — **гарантированный проигрыш игрока — называется верхней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение проигрыша β, называется **минимаксной**. Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta = v$, то такая игра называется игрой с **седловой точкой**. Элемент матрицы, соответствующий паре оптимальных стратегий, называется седловым элементом матрицы. Этот элемент является **ценой игры**.

Если платежная матрица не имеет седловой точки, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется **смешанной**.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\bar{x}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$, с которым игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для которых выполняются условия $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \ i = \overline{1,m}$. Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\overline{y}(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$,

$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_i \geq 0\ \ j = \overline{1,n}$.

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стратегий определяется как математическое ожидание выигрыша, т.е. равен

$$M(A,\ X,\ Y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

Если платежная матрица не содержит седловой точки, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и недоминирующих стратегий.

Пример 6. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\alpha = \max(3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1) = 3$; $\beta = \min(8,\ 7,\ 7,\ 4,\ 5) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $3 \leq \nu \leq 4$. Элементы стратегий A_2 и A_4 одинаковы, одну из них можно исключить. Все элементы стратегий A_2 меньше элементов стратегий A_1, следовательно, A_2 можно исключить. Все элементы A_5 меньше A_3, исключаем A_5.

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для второго игрока, сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_5, исключаем B_2.

В результате преобразований получим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 3 \\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\alpha = \max(3,3) = 3$; $\beta = \min(7,\ 4,\ 5) = 4$; $\alpha \neq \beta$; $3 \leq \nu \leq 4$.

6.2. Решение матричных игр сведением к задаче линейного программирования

Каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданной платежной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\ \text{опт}} \ge \nu,\ j=\overline{1,n}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока *A*, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge \nu, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge \nu. \end{cases}$$

Величина ν неизвестна, однако можно считать, что цена игры $\nu > 0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого можно достигнуть, прибавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число. Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенства на ν.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \ge 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \ge 1, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \ge 1 \end{cases},$$

где

$$p_i = \frac{x_i}{\nu} \ge 0,\ i=\overline{1,m}.$$

По условию $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$. Разделим обе части этого равенства на ν.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = \frac{1}{\nu}.$$

Оптимальная стратегия игрока *A* должна максимизировать величину ν, следовательно, функция

$$F(\bar{p}) = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

должна принимать минимальное значение.

Таким образом, получена задача линейного программирования. Решая ее, находим значения p_i, $i=\overline{1,m}$ и величину $1/\nu$, затем отыскиваются значения $x_i = \nu p_i$.

Аналогично, для второго игрока оптимальная стратегия должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \le v,\ \ i=\overline{1,m}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока *B*, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le v, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le v, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \le v. \end{cases}$$

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенств на v.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \ldots + a_{2n}q_n \le 1, \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \le 1, \end{cases}$$

где

$$q_j = \frac{y_j}{v},\ \ j=\overline{1,n}.$$

По условию $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1$. Разделим обе части этого равенства на v.

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_n = \frac{1}{v}.$$

Оптимальная стратегия игрока *B* должна минимизировать величину v, следовательно, функция

$$Z(\bar{q}) = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

должна принимать максимальное значение.

Получена задача линейного программирования. Таким образом, для нахождения решения игры имеем симметричную пару двойственных задач линейного программирования. Можно найти решение одной из них, а решение второй находится с использованием теории двойственности.

Пример 7. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$

Решение.

$\alpha = \max(1,\ 2,\ 1) = 2$; $\beta = \min(4,\ 9,\ 3,\ 6,\ 7) = 4$; $\alpha \ne \beta$; $2 \le v \le 4$.

Игра не имеет седловой точки. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока *A* имеем следующую задачу линейного программирования.

$$F(\bar{p}) = p_1 + p_2 + p_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 4p_2 + 2p_3 \ge 1; \\ 7p_1 + 9p_2 + 3p_3 \ge 1; \\ p_1 + 3p_2 + p_3 \ge 1; \\ p_1 + 6p_2 + 4p_3 \ge 1; \\ 5p_1 + 2p_2 + 7p_3 \ge 1; \end{cases}$$

$p_i \ge 0,\ \ i = \overline{1,3}$.

Для оптимальной стратегии B имеет следующую задачу линейного программирования:

$$Z(\overline{q}) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 7q_2 + q_3 + q_4 + 5q_5 \le 1; \\ 4q_1 + 9q_2 + 3q_3 + 6q_4 + 2q_5 \le 1; \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 + 7q_5 \le 1; \end{cases}$$

$q_i \ge 0,\ \ j = \overline{1,5}$.

Оптимальные решения пары двойственных задач имеют вид

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{7}{19};\ \overline{p}_{опт}\left(0; \frac{6}{19}; \frac{1}{19}\right);\ \overline{q}_{опт}\left(0; 0; \frac{5}{19}; 0; \frac{2}{19}\right).$$

Учитывая соотношения между x_i и p_i; y_j и q_j, а также равенство $F_{\min} = Z_{\max} = \dfrac{1}{\nu}$, находим оптимальные стратегии игроков и цену игры

$$\overline{x}\left(0; \frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right);\ \overline{y}\left(0; 0; \frac{5}{7}; 0; \frac{2}{7}\right);\ \nu = \frac{19}{7}.$$

7. СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ

Проектом может быть разработка нового продукта или производственного процесса, строительство предприятия, здания или сооружения, ремонт сложного оборудования и т.д.

При реализации проекта составляется график выполнения работ. Для того чтобы проект был завершен вовремя, необходимо контролировать сроки выполнения этих работ. Усложняющим фактором является то, что работы взаимосвязаны. Одни работы зависят от выполнения других и не могут начаться, пока предшествующие работы не будут завершены.

Для описания проекта используются два основных способа: ***табличный*** и ***графический.***

Пример 8.

Рассмотрим следующую таблицу, описывающую проект:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения
A	—	t_A
B	—	t_B
C	*B*	t_C
D	*A, C*	t_D

Решение. В первом столбце указаны наименования всех работ проекта. Их четыре: *A, B, C, D.* Во втором столбце указаны работы, непосредственно предшествующие данной. У работ *A* и *B* нет предшествующих. Работе *C* непосредственно предшествует работа *B*. Это означает, что работа *C* может быть начата только после того, как завершится работа *B*. Работе *D* непосредственно предшествуют две работы: *A* и С. Это означает, что работа *D* может быть начата только после того, как завершатся работы *A* и *C*. В третьем столбце таблицы для каждой работы указано время ее выполнения. На основе этой таблицы может быть построено графическое описание проекта (рис. 7.1).

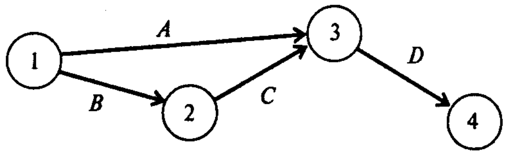

Рис. 7.1

На рис. 7.1 проект представлен в виде графа с вершинами 1,2, 3, 4 и дугами *A, B, C, D.* Каждая вершина графа отображает событие. Событие 1 означает начало выполнения проекта. Иногда такое событие обозначают буквой *s (start).* Событие 4 означает завершение проекта. Для обозначения такого события иногда используют *букву f(finish).* Любая работа проекта — это упорядоченная пара двух событий. Например, работа *A* есть упорядоченная пара событий (1, 3)(см. рис. 1). Работа *D* — упорядоченная пара событий (3,4). Событие проекта состоит в том, что завершены все работы, «входящие» в соответствующую вершину. Например, событие 3 состоит в том, что завершены работы *A* и *C*.

Рассмотрим другой проект, представленный следующей таблицей:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения
A	—	t_A
B	—	t_B
C	*B*	t_C
D	*A, C*	t_D
E	*C*	t_E
F	*C*	t_F
G	*D, E, F*	t_G

Графическое описание проекта, построенное по этой таблице, имеет вид, показанный на рис. 7.2.

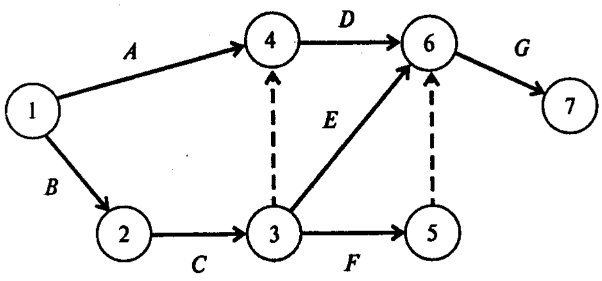

Рис.7.2

В этом графическом описании проекта, кроме тех работ, которые указаны в таблице, использованы две «фиктивные» работы (3, 4) и (5, 6). На рисунке они показаны штриховыми линиями. Эти работы не требуют времени на их выполнение и используются в графическом представлении проекта лишь для того, чтобы правильно отобразить взаимосвязь между работами. Получив графическое представление проекта, мы обеспечили себе возможность провести расчеты.

Путь — последовательность взаимосвязанных работ, ведущая из одной вершины проекта в другую вершину. Например, {*A, D, G*} и {*B, C, E, C*} — два различных пути, ведущие из вершины 1 в вершину 7 (см. рис. 7.2).

Длина пути — суммарная продолжительность выполнения всех работ пути.

Критический путь — путь, суммарная продолжительность выполнения всех работ которого является наибольшей.

Минимальное время, необходимое для выполнения любого проекта, равно длине критического пути. Именно на работы, принадлежащие критическому пути, следует обращать особое внимание. Если такая работа будет отложена на некоторое время, то и срок окончания проекта будет отложен на то же время. Если необходимо сократить время выполнения проекта, то в первую очередь нужно сократить время выполнения хотя бы одной работы на критическом пути.

Для того чтобы найти критический путь, достаточно перебрать все пути и выбрать тот или те из них, что имеют наибольшую суммарную продолжительность выполнения работ.

Пусть i и j — вершины, или события, проекта, (i,j) — работа проекта, s — событие «начало проекта» *(start)*, f — событие «окончание проекта» *(finish)*, T — длина критического пути.

Введем следующие обозначения:

$t(i,j)$ — время выполнения работы (i, j);

$ES(i,j)$ —наиболее раннее время начала работы (i,j);

$EF(i,j)$ —наиболее раннее время окончания работы (i,j);

$LS(i,j)$ —наиболее позднее время начала работы (i,j),

$LF(i,j)$ — наиболее позднее время окончания работы (i,j),

E_i — наиболее раннее время наступления события i;

L_i — наиболее позднее время наступления события i;

$R(i,j)$ — полный резерв времени на выполнение работы (i,j) (время, на которое может быть отложена работа (i,j) без увеличения продолжительности выполнения всего проекта);

$r(i,j)$ — свободный резерв времени на выполнение работы (i,j) (время, на которое может быть отложена работа (i,j) без увеличения наиболее раннего времени E_i наступления последующего события j).

Если *(i,j)* — работа проекта, то имеют место соотношения:

для любого j $ES(i,j) = E_i$;

для любого i $LF(i,j) = L_j$.

Для нахождения критического пути необходимо для каждой работы *(i,j)* определить наиболее раннее время начала и окончания работы ($ES(i,j)$ и $EF(i,j)$) и наиболее позднее время начала и окончания работы ($LS(i,j)$ и $LF(i,j)$).

Метод *CPM* описывается следующими соотношениями:

$$ES_{(s,j)} = 0 \tag{1}$$

для любой работы *(s,j)*, выходящей из стартовой вершины *s* проекта;

$$EF_{(i,j)} = ES_{(i,j)} + t_{(i,j)} = E_i + t_{(i,j)}, \tag{2}$$

т.е. наиболее раннее время окончания любой работы *(i,j)* превышает наиболее раннее время начала этой работы (время наступления предшествующего события *i)* на время ее выполнения;

$$ES_{(q,j)} = \max_i EF_{(i,q)} = E_q, \tag{3}$$

т.е. наиболее раннее время начала работы *(q, j)* равно наибольшему из значений наиболее раннего времени окончания непосредственно предшествующих ей работ;

$$T = \max_i EF_{(i,f)} = E_f, \tag{4}$$

т.е. длина критического пути равна наиболее раннему времени завершения проекта;

$$LF_{(i,f)} = T, \tag{5}$$

т.е. наиболее позднее время окончания любой работы, завершающей проект, равно длине критического пути;

$$LS_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - t_{(i,j)} = L_j - t_{(i,j)}, \tag{6}$$

т.е. наиболее позднее время начала любой работы меньше наиболее позднего времени окончания этой работы (времени наступления последующего события) на время ее выполнения;

$$LF_{(i,q)} = \min_j LS_{(q,j)} = L_q, \tag{7}$$

т.е. наиболее позднее время окончания работы (/, *q)* равно наименьшему из значений наиболее позднего времени начала непосредственно следующих за ней работ;

$$R_{(i,j)} = LS_{(i,j)} - ES_{(i,j)} = LF_{(i,j)} - EF_{(i,j)} = L_j - t_{(i,j)} - L_i, \tag{8}$$

т.е. полный резерв времени на выполнение любой работы равен разности между наиболее поздним и наиболее ранним временем ее начала или разности между наиболее поздним и наиболее ранним временем ее окончания;

$$r_{(i,j)} = L_j - ES_{(i,j)} - t_{(i,j)} = L_j - EF_{(i,j)} = L_j - E_i - t_{(i,j)}, \tag{9}$$

т.е. свободный резерв времени на выполнение любой работы равен разности между наиболее поздним временем наступления последующего события и наиболее ранним временем окончания работы.

Из приведенных выше определений и соотношений непосредственно вытекают следующие утверждения:

1. Длина критического пути равна *T.*

2. Если $R(i,j) = 0$, то работа (i,j) лежит на критическом пути;
если $R(i,j) > 0$, то работа (i,j) не лежит на критическом пути.

3. Если время начала работы (i,j), не лежащей на критическом пути, отложить на срок меньший, чем $r(i,j)$, то наиболее раннее время наступления последующего события не изменится.

4. Если время начала работы (i,j), не лежащей на критическом пути, отложить на срок меньший, чем $R(i,j)$, то время, необходимое на выполнение всего проекта, не увеличится.

Пример 9. *Реконструкция торгового центра.*

Департамент Юго-Западного округа Москвы рассматривает возможность реконструкции торгового центра у станции метро «Юго-Западная». После сноса старых палаток проектом предусматривается строительство павильонов для сдачи их в аренду торговым фирмам. Работы, которые необходимо выполнить при реализации проекта, а также их взаимосвязь и время выполнения указаны в следующей таблице:

Работа	Содержание работы	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
A	Подготовить архитектурный проект	—	5
B	Определить будущих арендаторов	—	6
C	Подготовить проспект для арендаторов	*A*	4
D	Выбрать подрядчика	*A*	3
E	Подготовить документы для получения разрешения на строительство	*A*	1
F	Получить разрешение на строительство	*E*	4
G	Осуществить строительство	*D, F*	14
H	Заключить контракты с арендаторами	*B, C*	12
I	Вселить арендаторов в павильоны	*G, H*	2

Вопросы:

1. Сколько работ на критическом пути?
2. Какова длина критического пути?
3. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *E*, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта?
4. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *B*, чтобы это не повлияло на срок выполнения проекта (полный резерв времени)?
5. На сколько недель можно отложить начало выполнения работы *C*, чтобы это не изменило наиболее поздний срок наступления последующего события (свободный резерв времени)?

Решение. Для того чтобы определить срок выполнения проекта, достаточно найти длину критического пути. Для этого построим графическое представление проекта (рис. 7.3).

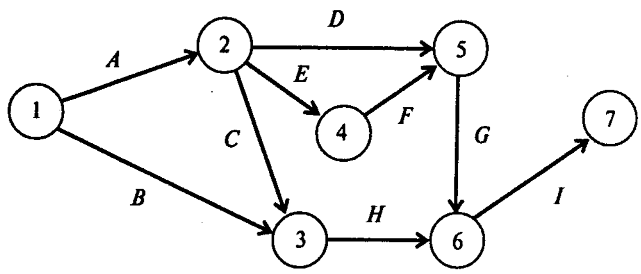

Рис.7.3

Исходную информацию, описывающую проект, запишем в виде следующей таблицы:

Работа	Время выполнения, недели	Предшествующие работы
A	5	
B	6	
C	4	*A*
D	3	*A*
E	1	*A*
F	4	*E*
G	14	*D, F*
H	12	*B, C*
I	2	*G, H*

Результаты расчетов будут представлены в виде следующей таблицы:

Project	26					
Работа	Время выполнения, недели	*ES*	*EF*	*LS*	*LF*	*R*
A	5	0	5	0	5	0
B	6	0	6	6	12	6
C	4	5	9	8	12	3
D	3	5	8	7	10	2
E	1	5	6	5	6	0
F	4	6	10	6	10	0
G	14	10	24	10	24	0
H	12	9	21	12	24	3
I	2	24	26	24	26	0

Эта таблица содержит информацию, позволяющую ответить на все вопросы задачи. Длина критического пути равна 26. На критическом пути лежат все работы, значения резерва времени которых, указанные в последнем столбце, равны нулю. Это работы *A, E, F, G, I*.

Таким образом, если отложить начало работы *E*, то срок выполнения проекта увеличится. В то же время работу *B* можно начать не в нулевой момент времени, а в момент 6, т.е. начало выполнения работы *B* можно отложить на 6 недель. Критический путь для этого проекта показан на рис. 7.4 полужирными стрелками.

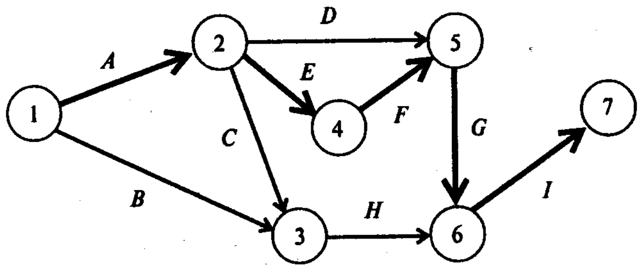

Рис.7. 4

Возможен другой способ, который использует графическое представление проекта и, как следствие, описывает дуги в виде пары вершин. Соответствующее описание проекта приведено в следующей таблице:

Работа	Начальная вершина	Конечная вершина	Время выполнения, недели
A	1	2	5
B	1	3	6
C	2	3	4
D	2	5	3
E	2	4	1
F	4	5	4
G	5	6	14
H	3	6	12
I	6	7	2

Результаты расчетов будут представлены в виде следующей таблицы:

Project	26							
Работа	Начальная вершина	Конечная вершина	Время выполнения, недели	*ES*	*EF*	*LS*	*LF*	*R*
A	1	2	5	0	5	0	5	0
B	1	3	6	0	6	6	12	6
C	2	3	4	5	9	8	12	3
D	2	5	3	5	8	7	10	2
E	2	4	1	5	6	5	6	0
F	4	5	4	6	10	6	10	0
G	5	6	14	10	24	10	24	0
H	3	6	12	9	21	12	24	3
I	6	7	2	24	26	24	26	0

Ответы: 1. Пять работ. 2. 26 недель. 3. Начало выполнения работы *E* отложить нельзя. Ответ — 0.

4. На шесть недель. 5. На три недели.

8. ВАРИАНТЫ ЗАДАЧ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.1. Задачи к главе «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ»

1. Использовать аппарат теории двойственности для экономико-математического анализа оптимального плана задачи линейного программирования[1]

Задача 1.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	2	1	0	18
II	1	1	2	1	30
III	1	3	3	2	40
Цена изделия	12	7	18	10	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получатель оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I и II видов на 4 и 3 единицы соответственно и уменьшении на 3 единицы сырья III вида;
- оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 10 ед., на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задача 2.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	1	0	2	1	180
II	0	1	3	2	210
III	4	2	0	4	800
Цена изделия	9	6	4	7	

[1] Нахождение оптимального плана задачи может быть получено с помощью надстройки

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:
   - проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
   - определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья II и III видов на 120 и 160 единиц соответственно и уменьшении на 60 единиц запасов сырья I вида;
   - оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задача 3. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукций приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I II III	2 1 2	1 2 4	3 4 1	2 8 1	200 160 170
Цена изделия	5	7	3	6	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:
   - проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
   - определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и II видов на 8 и 10 единиц соответственно и уменьшении на 5 единиц запасов сырья III вида;
   - оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 10 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задача 4.

Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья; нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	4	2	1	180
II	3	1	2	210
III	1	2	3	244
Цена изделия	10	14	12	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья I и III видов на 4 единицы каждого;
- оценить целесообразность включения в план изделия *Г* ценой 13 единиц, на изготовление которого расходуется соответственно 1, 3 и 2 единицы каждого вида сырья, и изделия *Д* ценой 12 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья.

Задача 5.

На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	1	4	3	200

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Сырье	1	1	2	80
Оборудование	1	1	2	140
Цена изделия	40	60	80	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска при увеличении запасов сырья на 18единиц;
- оценить целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 70 единиц, на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида ресурсов.

Задача 6.

На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Вид сырья	Нормы расхода сырья на ед. продукции			Запасы сырья
	А	Б	В	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Цена изделия	9	10	16	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 45 кг, а II — уменьшить на 9 кг;
- оценить целесообразность включения в план изделия *Г* ценой 11 единиц, на изготовление которого расходуется 9, 4 и 6 кг соответствующего вида сырья.

Задача 7.

Предприятие выпускает четыре вида продукции и использует три вида оборудования: токарное, фрезерное, шлифовальное. Общий фонд рабочего времени оборудования- каждого; вида, нормы расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Тип оборудования	Нормы расхода ресурса на одно изделие				Фонд рабочего времени, ч.
	А	Б	В	Г	
Токарное	2	1	1	3	300
Фрезерное	1	0	2	1	70
Шлифовальное	1	2	1	0	340
Цена изделия	8	3	2	1	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукций, получить оптимальный план выпуска продукций.

2.Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный тан с помощью теорем двойственности.

3.Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции, если фонд рабочего времени шлифовального оборудования увеличить на 24 часа;
- оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 11 единиц, если нормы затрат оборудования 8,2 и 2 единицы соответственно.

Задача 8.

На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на ед. продукции			Запасы сырья
	I вид	II вид	III вид	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Цена изделия	3	2	5	

Требуется:

1.Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

*2.*Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3.Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном **плане.**

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее

выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 5 единиц, а II — уменьшить на 5 единиц;

- оценить целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 7 у.е., если нормы затрат сырья 2, 4 и 3 единицы.

Задача 9.

Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице:

Тип сырья	Нормы расхода ресурса на одно изделие				Запасы сырья
	А	Б	В	Г	
I	2	1	0,5	4	2400
II	1	5	3	0	1200
III	3	0	6	1	3000
Цена изделия	7,5	3	6	12	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от. реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.
3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.
4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запасов сырья I вида на 100 единиц и уменьшении на 150 единиц запасов сырья II вида;
- оценить целесообразность включения в план изделия *Д* ценой 10 единиц, если нормы затрат сырья 2,4 и 3 единицы.

Задача 10.

Для изготовления трех видов продукции используют четыре вида ресурсов. Запасы ресурсов, нормы расхода и цены реализации единицы каждого вида продукции приведены в таблице.

Вид ресурсов	Нормы расхода ресурсов на ед. продукции			Запасы ресурсов
	I вид	II вид	III вид	
Труд	3	6	4	2000
Сырье 1	20	15	20	15000
Сырье 2	10	15	20	7400
Оборудование	0	3	5	1500
Цена изделия	6	10	9	

Требуется:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукций.

2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3. Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4. На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;
- определить, как изменятся выручка и план выпуска продукции при увеличении запаса ресурса первого вида на 24 единицы;
- оценить целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 11 единиц, если нормы затрат ресурсов 8, 4, 20 и 6 единиц.

8.2. Задачи к главе «МОДЕЛЬ МНОГООТРАСЛЕВОЙ ЭКОНОМИКИ В. ЛЕОНТЬЕВА»

Используя балансовый метод планирования и модель Леонтьева, построить баланс производства и распределения продукции предприятий.

Задачи 1 — 10.

Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трех видов, при этом каждое из трех предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется: на выпуске продукции первого вида, второе предприятие — продукции второго вида; третье предприятие — продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идет на внутреннее потребление), остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителям, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки a_{ij} (i = 1, 2. 3; j =1, 2, 3) элементов технологической матрицы A (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов y_i вектора конечной продукции Y.

Требуется:

1. Проверить продуктивность технологической матрицы $A=\left(a_{ij}\right)$ (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат).

2. Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга.

В соответствии с номером вашего варианта ниже в табл. 1 выберите числовые значения для табл. 2.

Таблица 1

Вариант	Для первой строки				Для второй строки				Для третьей строки			
	1А	2А	3А	4А	1Б	2Б	3Б	4Б	1В	2В	3В	4В
1	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0,0	150	0,0	0,2	0,1	250
2	0,0	0,1	0,2	180	0,1	0,2	0,1	200	0,2	0,1	0,2	200
3	0,2	0,1	0,2	150	0,0	0,1	0,2	180	0,1	0,0	0,1	100
4	0,1	0,0	0,1	100	0,1	0,0	0,2	300	0,2	0,1	0,0	160
5	0,2	0,3	0,0	120	0,3	0,1	0,2	250	0,1	0,0	0,3	180
6	0,3	0,4	0,1	200	0,1	0,2	0,4	300	0,3	0,4	0,1	200
7	0,1	0,2	0,4	100	0,0	0,4	0,1	200	0,1	0,3	0,4	100
8	0,0	0,4	0,1	160	0,4	0,1	0,0	180	0,3	0,0	0,1	150
9	0,4	0,2	0,3	180	0,2	0,1	0,0	200	0,2	0,1	0,0	160
10	0,1	0,1	0,2	160	0,1	0,2	0,3	180	0,1	0,2	0,3	170

Таблица 2

Предприятие (вид продукции)	Коэффициент прямых затрат a_{ij}			Конечный продукт Y
	1	2	3	
1	1А	2А	3А	4А
2	1Б	2Б	3Б	4Б
3	1В	2В	3В	4В

8.3. Задачи к главе «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ПОТРЕБИТЕЛЬСКОГО ВЫБОРА»

Задачи № 1-7.

Найти функцию спроса для набора из двух товаров, если функция полезности имеет вид $u(x_1, x_2) = x_1^a x_2^b$.

Значения a и b даны в таблице.

Вариант							
	1	2	3	4	5	6	7
a	0,1	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9
b	0,9	0,8	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1

Задача № 8

Пусть некоторое производство можно описать с помощью функции Кобба-Дугласа. В настоящее время 1 работник производит в месяц продукции на 8000 руб. Общая численность работников 400 чел. Основные фонды оцениваются в 6,4 млн. руб. Известно, что для увеличения выпуска продукции на 5% следует увеличить или стоимость фондов на 10%, или численность работников на 20%.

а) Составить для данного производства функцию Кобба-Дугласа, определив коэффициенты эластичности.

б) Определить среднюю и предельную производительность труда.

в) Определить среднюю и предельную фондоотдачу.

г) Найти нормы замещения ресурсов, предельные нормы замещения ресурсов.

Дать экономическую интерпретацию полученным показателям.

д) Определить численность работников, если стоимость основных фондов увеличить в 4 раза, уменьшить в 4 раза.

Задача № 9.

Пусть некоторое производство можно описать с помощью функции Кобба-Дугласа. В настоящее время один работник производит в месяц продукции на 50 тыс. руб. Общая численность работников составляет 5000 чел. Основные фонды оцениваются в 50 млрд. руб. Известно, что для увеличения выпуска продукции на 2% следует увеличить или стоимость фондов на 4%, или численность работников на 8%.

а) Составить для данного производства функцию Кобба-Дугласа, определив коэффициенты эластичности.

б) Определить среднюю и предельную производительность труда.

в) Определить среднюю и предельную фондоотдачу.

г) Найти нормы замещения ресурсов, предельные нормы замещения ресурсов.

Дать экономическую интерпретацию полученным показателям.

д) Определить численность работников, если стоимость основных фондов увеличить в 25 раз, уменьшить в 25 раз.

Задача № 10.

Дана производственная функция $y = \alpha_0 x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, где y – объем товарной продукции в стоимостном выражении, x_1 – фонд заработной платы, x_2 – стоимость основных фондов. Произошли следующие изменения: фонд заработной платы изменился на A%, стоимость основных фондов изменилась на B%. На сколько процентов при этом изменится: объем товарной продукции, производительность труда, фондоотдача, если:

а) $\alpha_0 = 9{,}5$; $\alpha_1 = 0{,}3$; $\alpha_2 = 0{,}4$; $A = 6\%$, $B = -8\%$.

б) $\alpha_0 = 1{,}7$; $\alpha_1 = 0{,}9$; $\alpha_2 = 0{,}3$; $A = -5\%$, $B = 2\%$.

в) $\alpha_0 = 4{,}1$; $\alpha_1 = 0{,}7$; $\alpha_2 = 0{,}5$; $A = -3\%$, $B = 9\%$.

8.4. Задачи к главе «МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ»

Задачи 1-5.

Графическим методом найти решение игры, заданной матрицей:

1. $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \\ 3 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$;

$$3.\ \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 5 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 4.\ \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \qquad 5.\ \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задачи 6-10.

Симплексным методом найти решение игры, заданной матрицей:

$$6.\ \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 7.\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ 6 & -3 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \ 8.\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$9.\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad 10.\ \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.5. Задачи к главе «СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ»

Задачи 1-2. Экономический факультет РИИ разрабатывает новую программу для повышения квалификации преподавателей, обучающих количественным методам анализа экономики. Желательно, чтобы эту программу можно было реализовать в наиболее сжатые сроки. Имеются существенные взаимосвязи между дисциплинами, которые необходимо отразить, составляя расписание занятий. Например, методы управления проектами *PER T/ CPM* должны рассматриваться лишь после того, как слушатели обсудят различные аспекты (коммерческие, финансовые, экономические, технические и др.) проектного анализа, связанные с жизненным циклом проекта.

Дисциплины и их взаимосвязь указаны в следующей таблице:

Дисциплина	Непосредственно предшествующие дисциплины	Время изучения, дни
A	—	4
B	—	6
C	*A*	2
D	*A*	6
E	*C, B*	3
F	*C, B*	3
G	*D, E*	5

Найдите минимальное время, за которое можно выполнить программу.

Вопросы:

1. Какова длина критического пути?
2. Какое количество дисциплин находится на критическом пути?
3. Каков резерв времени изучения дисциплины f?

Задачи 3-4. Консалтинговая компания «Системы управленческих решений» специализируется на разработке систем поддержки проектов. Компания заключила контракт на разработку компьютерной системы, предназначенной для помощи руководству фирмы при планировании капиталовложений.

Руководитель проекта разработал следующий перечень взаимосвязанных работ:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
A	—	4
B	—	6
C	—	5
D	*B*	2
E	*A*	9

Окончание таблицы

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
F	*B*	4
G	*C*, *D*	8
H	*B*, *E*	3
I	*F*, *G*	5
J	*H*	7

Постройте графическое представление проекта. Используйте метод *CPM* для нахождения критического пути.

Вопросы:

1. Какова длина критического пути?
2. Сколько работ находится на критическом пути?
3. Каков резерв выполнения работы *F?*

Задачи 5-6. Рассмотрите следующий проект:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
A	—	5
B	—	3
C	*A*	7
D	*A*	6
E	*B*	7
F	*D*, *E*	3
G	*D*, *E*	10
H	*C*, *F*	8

Найдите критический путь.

Вопросы:

1. За какое минимальное время может быть выполнен проект?
2. Сколько работ находится на критическом пути?
3. На сколько недель можно отложить выполнение работы *D* без отсрочки завершения проекта в целом?

4. На сколько недель можно отложить выполнение работы С без отсрочки завершения проекта в целом?

Задачи 7-8. Проект пусконаладки компьютерной системы состоит из восьми работ. Непосредственно предшествующие работы и продолжительность выполнения работ указаны в следующей таблице:

Работа	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, дни
A	—	3
B	—	6
C	*A*	2
D	*B, C*	5
E	*D*	4
F	*E*	3
G	*B, C*	9
H	*F, G*	3

Найдите критический путь.

Вопросы:

1. Сколько времени потребуется для выполнения проекта?
2. Сколько работ на критическом пути?
3. Чему равно наиболее раннее время начала работы *C*?
4. На сколько дней можно отложить выполнение работы *C* без отсрочки завершения проекта в целом?
5. Чему равно наиболее позднее время окончания работы *F?*
6. На сколько дней можно отложить выполнение работы *F* без отсрочки завершения проекта?

Задачи 9-10. РИИ рассматривает предложение о строительстве новой библиотеки. Работы, которые следует выполнить перед началом строительства, представлены ниже:

Работа	Содержание работы	Непосредственно предшествующие работы	Время выполнения, недели
A	Определить место строительства	—	6
B	Разработать первоначальный проект	—	8
C	Получить разрешение на строительство	*A, B*	12
D	Выбрать архитектурную мастерскую	*C*	4
E	Разработать смету затрат на строительство	*C*	6
F	Разработать проект строительства	*D, E*	15
G	Обеспечить финансирование проекта	*E*	12
H	Нанять подрядчика	*F, G*	8

Найдите критический путь.

Вопросы:

1. Сколько работ находится на критическом пути? (Фиктивные работы не учитываются.)

2. Через какое минимальное время после принятия решения о реализации проекта можно начать работу по строительству библиотеки?

3. На сколько недель можно отложить выбор архитектурной мастерской?

4. Чему равно наиболее позднее время завершения работы по обеспечению финансирования?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов В.П. Основы теории игр: учеб. пособие / В.П. Акимов; Моск. гос. ин-т межд. отношений (ун-т) МИД России, каф. математич. методов и информационных технологий. – М.: МГИМО-Университет, 2008. – 156 с.

2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1986.

3. Красс М.С. Математика для экономических специальностей. -М.: ИНФРА-М, 1998.

4. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование. - М.: Высшая школа, 1980.

5. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. - М.: ИНФРА-М, 2002.

6. Высшая математика для экономистов / Под ред. Н. Ш. Кремера.-М.: ЮНИТИ, 1997.

7. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. авторов; под ред. С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2008. – 208 с.

Обухова Галина Александровна

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ЭКОНОМИКЕ

Методическое пособие
для студентов заочной формы обучения направления «Экономика»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано в печать 14.02.13. Формат 60х84/16.

Усл. печ. л. 2,38. Тираж 50 экз. Зак. 12 1143. Рег. № 225.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института

658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.