МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Г.А. ОБУХОВА

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИГР

Методическое пособие

для студентов экономических направлений очной формы обучения

Рубцовск 2012

УДК 517.8

Обухова Г.А. Лекции по теории игр: Методическое пособие для студентов экономических направлений очной формы обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2012.- 31 с.

В методическом пособии изложены основные теоретические положения и сведения из теории игр, приведены примеры из различных сфер человеческой деятельности, приведено их строгое математическое обоснование. В пособии приводится исследование математических моделей принятия решений в условиях конфликта. В нем содержатся примеры для самостоятельной работы. Методическое пособие предназначено для студентов экономических направлений.

Рассмотрено и одобрено на заседании кафедры ВМФиХ Рубцовского индустриального института
Протокол № 3 от 29.11.2012г.

Рецензент:
к.пед.н., доцент Н.А. Ларина

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ИГР

Многие социально-экономические ситуации, в которых рассматривается вопрос о выборе решения, обладают тем свойством, что в них сталкиваются не менее двух сторон с различными (иногда противоположными) интересами, каждая из которых для достижения своей цели имеет возможность действовать различными способами, выбор которых при некоторых условиях может осуществляться в зависимости от действий противоборствующей стороны. Такие ситуации называют конфликтными. Конфликтная ситуация характеризуется следующими чертами:

1) наличие заинтересованных сторон (в качестве которых могут выступать потребители, фирмы, отдельные страны, различные таможенные, торговые, финансовые экономические союзы, индивидуумы и т.д.);

2) существование возможных действий каждой из сторон (выбор объема потребления, выбор дивидендной политики, различные способы комплектования инвестиционного портфеля, выбор объемов выпуска, недопущение на национальный рынок некоторых товаров по политическим или экономическим соображениям, заключение договоров о предоставлении «режима наибольшего благоприятствования» и т.д.);

3) интересы сторон (удовлетворение различных политических, финансовых, экономических потребностей, монопольные прибыли, вытеснение конкурентов с рынка сбыта, распродажа избыточного товара на внешнем рынке, повышение доходов казны и производителей и т.д.).

Выбор поведения каждой из сторон в реально-жизненных конфликтах — сложная задача. Поэтому для ее анализа прибегают к математическому моделированию, отбрасывая несущественные факторы данной конфликтной ситуации и ограничивая ее протекание определенными правилами.

Математическая модель конфликтной ситуации называется игрой. Раздел теории исследования операций, занимающийся математическими моделями принятия оптимальных решений в условиях конфликта, называется **теорией игр**.

Математико-игровые модели находят свое применение не только в конфликтных ситуациях социально-экономической области, но и во взаимодействии человека с природой, в политике, в биологии, в военной области и др.

Заинтересованные стороны (в частности, лица) в игре называются **игроками**. Часто, хотя и не всегда, считают всех игроков равноправными. В некоторых играх по различным причинам создаются объединения. Так, если целью объединения являются совместные действия, то эти объединения называются коалициями действия. Если же объединение образовано по признаку идентичности предпочтений исходов игры, то они называются коалициями интересов. Указанные коалиции не всегда совпадают. В случае совпадения их называют просто коалициями. С точки зрения временного фактора коалиции могут быть временные или постоянные на протяжении игры. Если в игре участвуют два противника, то она называется парной. Если число противников более двух, то игра называется множественной. Множественная игра с двумя постоянными коалициями есть не что иное, как парная игра.

С целью математической формализации игра должна проходить по определенным правилам, представляющим собой систему условий, описывающих:

1) возможные действия каждого из игроков;

2) объем информации, которую может получить каждая сторона о действиях другой;

3) исход игры в результате каждой совокупности ходов противников.

Любое возможное в игре действие игрока называется его стратегией или точнее — **чистой стратегией**.

Игра называется **конечной**, если множество стратегий каждого игрока конечно. В противном случае (т.е. когда множество стратегий хотя бы одного игрока бесконечно) игра называется бесконечной. Будем рассматривать только конечные игры.

Предполагая, что игрок A обладает $m \geq 1$ (чистыми) стратегиями, обозначим их через $A_1, ..., A_m$, а множество этих стратегий через S_A^C[1]. Таким образом, $S_A^C = \{A_1, ..., A_m\}$. В условиях конфликта каждый игрок делает свой ход, т.е. выбирает некоторую свою стратегию, в результате чего образуется набор x стратегий всех игроков, который называется *исходом* или *ситуацией* конфликта. Так, например, если в парной игре участвуют игроки A и B с множествами стратегий соответственно $S_A^C = \{A_1, ..., A_m\}$ и $S_B^C = \{B_1, ..., B_n\}$ и в результате очередного хода игроки выбрали стратегии соответственно A_i и B_j, то упорядоченная пара $x = (A_i, B_j)$ и является ситуацией после этого хода.

Декартовым произведением $D \times E$ двух множеств D и E (существен порядок сомножителей) называется множество $D \times E = \{(d, e) : d \in D, e \in E\}$ всех упорядоченных пар (d, e), первая координата которых d принадлежит первому сомножителю — множеству D, а вторая e — второму сомножителю E.

Принимая во внимание это определение, мы видим, что множество всех ситуаций в чистых стратегиях представляет собой декартово произведение $S_A^C \times S_B^C$ множества чистых стратегий S_A^C игрока A на множество чистых стратегий S_B^C игрока B, т.е. $S_A^C \times S_B^C = \{A_i, \mathrm{B_j}) : i = 1, ..., m; j = 1, ..., n\}$. Аналогичная интерпретация имеет место и для случая игр с конечным числом игроков более двух.

Иногда правила игры таковы, что не всякая ситуация допустима. Недопустимые ситуации называются **запрещенными**. При выборе игроками стратегий, приведших к запрещенной ситуации, игра считается несостоявшейся, поскольку проведена не по правилам.

Сравнение степеней удовлетворения интересов игрока в различных ситуациях осуществляется в общем случае с помощью отношения предпочтения данного игрока, которое для любых двух ситуаций либо определяет более предпочтительное из них, либо указывает на их равнопредпочтительность, либо устанавливает их несравнимость по предпочтению. Отношение предпочтения описывается с помощью отношения частичной упорядоченности на множестве X всех ситуаций, ко-

---

[1] Буква «С» в верхнем индексе – первая буква английского *clean* [kli:n] – чистый.

торое определяется следующим образом: подмножество τ декартова квадрата $X^2 = X \times X$ множества всех ситуаций $X\left(\tau \subset X^2\right)$ называется отношением частичной упорядоченности на множестве X, если оно рефлексивно, т.е. $(x,\ x) \in \tau$ для любой ситуации $x \in X$ (принадлежность $(x,\ x) \in \tau$ можно эквивалентным образом записать и так: $x\tau\ x$), и транзитивно, т.е. если для любых трех ситуаций $x,\ y,\ z \in X$ имеют место принадлежности $(x,\ x) \in \tau$ и $(y,\ z) \in \tau$, то $(x,\ z) \in \tau$ (в другой записи: если $x\tau y$ и $y\tau z$, то $x\tau z$).

Говорят, что ситуация x предпочтительнее (для данного игрока) ситуации y, и пишут $x \succ y$, если $x\tau y$, но не $y\tau x$. Ситуации x и y равнопредпочтительны: $x \sqcup y$, если $x\tau y$ и $y\tau x$; и, наконец, ситуации несравнимы по предпочтению, если не выполняется ни одно из соотношений $x\tau y$ и $y\tau x$.

Чаще, однако, степень удовлетворения интересов игрока A характеризуется его **функцией выигрыша** $F_A : X \to R$, определенной на множестве $X = S_A^C \times S_B^C$, всех ситуаций и ставящая в соответствие каждой ситуации $x \in X$ некоторое число $F_A(x) \in R$, называемое **выигрышем игрока *A в ситуации x***. В этом случае несравнимых ситуаций уже не будет.

Аналогично, для игрока B функция выигрыша $F_B : Y \to R$ определена на множестве $Y = S_A^C \times S_B^C = \left\{\left(B_j,\ A_i\right) : j = 1,\ \ldots,\ n,\ i = 1,\ \ldots,\ m\right\}$ ситуаций $y = \left(B_j,\ A_i\right)$ и каждой из них ставит в соответствие число $F_B(y) \in R$, называемое выигрышем игрока B в ситуации y.

Итак, протекание конфликтной игры состоит в выборе каждым игроком своей стратегии и получении в сложившейся ситуации выигрыша. Поэтому всякая конфликтная игра полностью описывается совокупностью, состоящей из множества игроков, множеств их возможных стратегий и множества их функций выигрыша.

Основной целью теории игр является выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте, т.е. выявление для каждого из них «оптимальной стратегии».

Понятие оптимальной стратегии — одно из важнейших понятий теории игр. Оптимальной называется стратегия, которая при многократно повторяющейся игре гарантирует игроку максимально возможный средний выигрыш (или, эквивалентно, минимально возможный средний проигрыш). Выбор оптимальной стратегии базируется на принципе, предполагающем, что оба игрока разумны в одинаковой степени и поведение каждого из них направлено на противодействие противнику в достижении его цели. Таким образом, теория игр абстрагируется от ошибок, просчетов, азарта и риска, присущих игрокам, в реальных конфликтах.

Оптимальность стратегии может пониматься в различных смыслах в зависимости от показателя оптимальности (эффективности). Стратегия, оптимальная по одному показателю, совсем не обязана быть оптимальной по другому. Поэтому чаще всего оптимальная стратегия, определенная в результате применения теории игр к реальным конфликтным ситуациям, является теоретически оптимальной и в большинстве случаев реально удовлетворительной.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение конфликтной ситуации и перечислите ее основные черты.
2. Как называется математическая модель конфликтной ситуации?
3. В чем состоит различие между реальным конфликтом и игрой?
4. В каких областях находят применение математико-игровые модели?
5. Как называются заинтересованные стороны в теории игр?
6. В чем состоит отличие коалиций интересов от коалиций действия?
7. Дайте определение понятия «стратегия».
8. Что понимается под исходом, или ситуацией конфликта?
9. Как называются недопустимые ситуации?
10. Чем измеряется степень удовлетворения интересов в теории игр?
11. Что представляет собой отношение предпочтения и какими свойствами оно обладает?
12. Дайте определение функции выигрыша.
13. Что понимается под оптимальной стратегией?

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения. Можно отметить основные направления, по которым осуществляется классификация игр: **количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрышей, количество ходов, состояние информации.**

Рассмотрим несколько подробнее эти направления.

1) В зависимости **от количества игроков** определяют игры: одного игрока, двух игроков, *n* игроков. Игры одного игрока (типа пасьянсов) не представляют интереса и не рассматриваются в теории игр. Игры двух игроков — наиболее распространенные, их исследованию посвящено много работ, и достигнуты наибольшие успехи как в теории, так и в практических приложениях. Игры трех и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Трудности решения игр повышаются с увеличением количества игроков.

2) **По количеству стратегий** игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной.* Отсюда вытекает, что понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий. Пусть, например, первый игрок имеет две стратегии, второй —десять стратегий, а третий — сто стратегий, тогда это конечная игра трех игроков (все игроки имеют конечное число стратегий). Если, например, в некоторой игре первый игрок имеет две стратегии, второй —десять стратегий, а третий — бесконечное количество (счетное множество или континуум) стратегий, то это бесконечная игра трех игроков (один из игроков имеет бесконечное число стратегий). Если, например, имеются два игрока, для каждого из которых стратегией является число из отрезка [0, 1], то это бесконечная игра двух

игроков (оба игрока имеют континуум стратегий). Трудности решения игр зависят от количества стратегий. Как правило, с увеличением количества стратегий повышаются трудности решения игр.

3) **По характеру взаимоотношений** игры делятся на: бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. *Бескоалиционными* называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, бескоалиционной будет военная ситуация, в которой сражение ведется без компромиссов, до победы. *Коалиционной* игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, коалиционной будет военная игра (ситуация), в которой противники могут вступать в переговоры с целью достигнуть компромиссного решения возникшей ситуации. В кооперативной игре коалиции наперед определены.

4) **По характеру выигрышей** они делятся на: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с *нулевой суммой* будет тогда, когда сумма выигрышей всех игроков в каждой ее партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Так, многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой.

В частности, игра двух игроков с нулевой суммой называется *антагонистической,* так как цели игроков в ней прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого.

Примером игры с *ненулевой суммой* могут быть торговые взаимоотношения между странами. В результате применения своих стратегий все страны могут быть в выигрыше. Всякая игра, в которой надо вносить взнос некоторому лицу за право принимать участие в ней, является игрой с ненулевой суммой. Действительно, в этом случае всегда в выигрыше получается некоторое лицо, которое не принимает участия в игре, а получает взнос от игроков, теряющих свой капитал за счет этих взносов. Другим примером служит лотерея: в ней организатор всегда имеет выигрыш, а участники игры —лица, купившие лотерейные билеты,— в сумме получают выигрыш меньше, чем они внесли.

Игры с ненулевой суммой решаются сложнее, так как они содержат все трудности, присущие играм с нулевой суммой, и еще дополнительные трудности, связанные с возможностью получения дополнительного выигрыша. В принципе игру с ненулевой суммой можно свести к некоторой искусственной игре с нулевой суммой, введя дополнительного фиктивного игрока, получающего сумму выигрыша, дополняющего до нуля. Однако в этом случае увеличивается количество игроков, и этот дополнительный игрок не является равноценным. Поэтому такой подход не улучшает дела.

5) **По виду функций выигрышей** игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра —это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец — номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Для матричных игр создана достаточно хорошая теория и разработаны практически приемлемые методы решения. Так, доказано, что любая матричная игра имеет решение и она легко может быть сведена к задаче линейного программирования, а затем решена с помощью известных методов, например, симплекс-метода.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии первого игрока, столбец — стратегии второго игрока, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш первого игрока, во второй матрице—выигрыш второго игрока). Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается такая игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий (естественно считается, что стратегии выражены числами из определенного отрезка). Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения. Простым примером непрерывной игры двух игроков является следующая: первый игрок выбирает число x из отрезка [0, 1], и второй игрок выбирает число y из отрезка [0, 1), после чего первый игрок выигрывает $x — y^2$, а второй проигрывает столько же. Очевидно функция $x — y^2$ является непрерывной и поэтому игра также считается непрерывной. Согласно теореме существования решения такая игра имеет решение.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой.* Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Если функция выигрышей может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента, то такая игра называется *сепарабельной* (разделимой). С помощью определенных преобразований ее решение сводится к решению игры с билинейной функцией выигрышей и к определению неподвижной точки при специальном отображении множеств элементов, соответствующих стратегиям.

6) **Игры типа *дуэлей*** характеризуются моментом выбора хода и вероятностями получения выигрышей в зависимости от времени, прошедшего от начала игры до момента выбора. Например, существуют интерпретации таких игр в экономических ситуациях: каждая фирма делает вклад своего капитала в определенный момент времени с целью овладения рынком сбыта. Чем раньше она сделает свой вклад, тем меньшая вероятность овладеть рынком, но, делая свой вклад слишком поздно, она теряет рынок сбыта. Функция выигрышей игроков в играх типа дуэлей принимает специальный вид: она непрерывна при разных значениях моментов времени, когда игроки делают ходы, и она разрывна при совпадении моментов хода игроков. Так что нет гарантий существования решений для игр типа дуэлей. Существуют определенные методы решения таких игр.

7) **По количеству ходов** игры делятся на одношаговые и многошаговые. *Одношаговые* игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Например, матричная игра является одношаговой, так как при этом каждый игрок делает только один ход, и потом происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры (применяемых стратегий). Такие игры с помощью определенных способов сводятся к матричным играм и могут решаться присущими им методами.

Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, то такая игра является *стохастической.*

Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и подчинять поведение игроков некоторым условиям, описываемым дифференциальными уравнениями, то такие игры являются *дифференциальными.* Например, в играх типа погони каждый объект может двигаться, подчиняясь определенным условиям, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель одного объекта — достичь определенной области, цель другого — не допустить первого до этой области. Выигрыш оценивается определенным числом (функцией).

8) В зависимости **от состояния информации** различают игры с полной информацией и с неполной информацией. Если на каждом ходе игры каждому игроку известно, какие выборы были сделаны игроками раньше, то это игра *с полной* информацией.

Примерами таких игр являются шашки, шахматы. Если в игре не все известно о предыдущих выборах, то это игра *с неполной* информацией.

Доказано, что всякая игра с полной информацией имеет решение в виде **седловой точки** в чистых стратегиях. Например, для игры в шахматы это значит, что для каждого игрока имеется такая стратегия, придерживаясь которой игрок либо выигрывает, либо сведет партию в ничью. Сложность заключается в отыскании такой стратегии. Существуют и другие виды игр, которые здесь не рассматриваются. Возможны и некоторые другие принципы классификации игр.

Контрольные вопросы и задания

1. Что такое участники игры и игроки?
2. Что называется стратегией игрока?
3. Что такое ход в игре?
4. Что такое выигрыши и как они измеряются в игре?
5. Какие основные принципы закладываются при классификации игр?
6. Приведите примеры игр согласно изложенной классификации.

3. БЕСКОАЛИЦИОННЫЕ ИГРЫ

Игры классифицируют по различным признакам в соответствии с конкретизацией видов и свойств составляющих характеристик игры.

Если в игре образование коалиций недопустимо или нецелесообразно, то такие игры называются **бескоалиционными**, однако бескоалиционными можно считать и игры, в которых совокупности коалиций. Действия и коалиций интересов совпадают. В этом случае каждую коалицию можно считать игроком (поскольку это есть заинтересованная сторона).

Таким образом, бескоалиционная игра, которую называют также просто игрой, представляет собой совокупность множества игроков, множеств их стратегий и наборов их функций выигрыша.

В бескоалиционных играх цель каждого игрока— получение максимально возможного **индивидуального выигрыша**. Даже если игроки и объединяются в коалиции, то такие коалиции преследуют только интересы отдельных игроков, вошедших в коалицию, и основная задача бескоалиционной игры состоит в **дележе общего выигрыша** между игроками.

В играх, по существу коалиционных, совокупности коалиций действия и коалиций интересов различны. В коалиционных играх игроки стремятся максимизировать выигрыши коалиций без последующего их распределения между игроками.

Будем рассматривать только бескоалиционные игры.

Игры можно классифицировать по числу игроков: **парные** игры, в которых два игрока, и **множественные** игры, в которых число игроков больше двух. Если в парной игре игроки преследуют **противоположные цели**, то игра называется **антагонистической**. В такой игре один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой. Поэтому функции выигрышей $F_A : S_A^C \times S_B^C \to R$ и $F_B : S_B^C \times S_A^C \times S_A^C \to R$ соответственно игроков *A* и *B* связаны между собой соотношением

$$F_B\left(B_j,\, A_i\right) = -F_A\left(A_i,\, B_j\right),\ i = 1,\ldots,\, m,\ j = 1,\ldots,\, n. \qquad (2.1)$$

Из равенства (3.1) следует, что $F_B\left(B_j,\, A_i\right) + F_A\left(A_i,\, B_j\right),\ i = 1,\ldots,\, m,\ j = 1,\ldots,\, n$ и потому антагонистические игры называют также **играми двух сторон с нулевой суммой выигрыша**.

В силу равенства (2.1), функция выигрыша игрока *B* полностью определяется функцией выигрыша игрока *A* и, следовательно, антагонистическая игра с игроками *A* и *B* вполне определяется совокупностью $\{S_A{}^C ,\, S_B{}^C,\, F_A\}$, состоящей из множества $S_A{}^C$ стратегий игрока *A*, множества $S_B{}^C$ стратегий игрока *B* и функции F_A выигрыша игрока *A*.

Антагонистические игры с точки зрения математического моделирования являются достаточно простыми и потому наиболее хорошо изученными.

Можно разделить игры на классы по мощности множеств стратегий игроков. Если множество стратегий каждого игрока конечно, то игра называется **конечной**. В противном случае она называется **бесконечной**.

В конечной антагонистической игре с игроками *A* и *B* можно строки некоторой матрицы (таблицы) поставить в соответствие стратегиям A_i игрока *A*, а столбцы — в соответствие стратегиям B_j игрока *B*. Если на пересечениях строк и столбцов расставить значения $F_A\left(A_i,\, B_j\right) = a_{ij}$ функции выигрыша F_A игрока *A*, соответствующие ситуациям $\left(A_i,\, B_j\right)$, то получим матрицу *A*, которая называется **матрицей выигрышей игрока *A***.

Аналогичным образом, из значений $F_B\left(B_j, A_i\right) = ba_{ji}$ функции выигрыша F_B игрока *B* можно составить ***матрицу B выигрышей игрока B***.

В силу равенства (3.1), $B = -A^T$ (т.е. матрица *B* противоположна транспонированной матрице *A*). Таким образом, матрица *B* определяется матрицей *A*, и потому конечная антагонистическая игра характеризуется фактически только одной матрицей выигрышей и в силу этого называется **матричной**.

Матричная игра полностью определяется совокупностью $\{S_A^C, S_B^C, A\}$, состоящей из множества S_A^C стратегий игрока *A*, множества S_B^C стратегий игрока *B* и матрицы *A* выигрышей игрока *A*.

В качестве **примера** антагонистической игры можно привести модель социально-экономического конфликта во внешней торговле XVII-XVIII вв., определяемой теорией меркантилизма (преобладание экспорта над импортом, и, как следствие отсюда, накопление в стране золота и серебра). В этом случае увеличение золотого запаса одного государства осуществляется за счет другого.

Другими **примерами** антагонистических конфликтов могут служить отношения налоговых служб и недобросовестных налогоплательщиков, конкурирующих фирм в антагонистических условиях и т. д.

Несмотря на всю привлекательность антагонистической модели, она во многих случаях является достаточно грубым отражением реальных конфликтов, в которых интересы сторон хотя и разные, но тем не менее могут быть не противоположными, число игроков может быть больше двух и сумма их выигрышей может быть не равной нулю.

Если в конечной бескоалиционной игре участвуют два игрока *A* и *B* с различными, но не противоположными интересами, то матрицы их выигрышей *A* к *B* уже не будут удовлетворять равенству $B = -A^T$ и потому такую игру называют **биматричной**. Таким образом, биматричная игра вполне задается совокупностью $\{S_A , S_B^C, A, B\}$, состоящей из множества S_A^C стратегий игрока *A*, множества S_B^C стратегий игрока *B*, и уже двух матриц *A* и *B* выигрышей игроков *A* и *B*.

Дальнейшее рассмотрение бескоалиционных игр из перечисленных выше классов будет проводиться с позиций:

1) выработки принципов оптимальности (т.е. разумности или целесообразности поведения игроков);

2) реализуемости этих принципов (существования оптимальных ситуаций);

3) поиска этих реализаций.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие игры называются бескоалиционными и какую цель преследует каждый игрок в бескоалиционной игре?

2. Какие игры называются коалиционными?

3. На какие классы делятся игры в зависимости от числа игроков?

4. На какие классы делятся игры в зависимости от мощности и множества возможных стратегий?

5. Дайте определение антагонистической игре и опишите совокупность характеристик, полностью ее определяющих.

6. Почему конечные антагонистические игры получили название «матричные игры»?

7. Чем отличается совокупность характеристик биматричной игры от совокупности характеристик матричной игры?

4. ПРИМЕРЫ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ КОНФЛИКТОВ

Пример 1. Игра с двумя пальцами. Два человека одновременно показывают один или два пальца и называют цифру «один» или «два», которая по их мнению, означает количество пальцев, показываемое вторым человеком. После того, как пальцы показаны и названы числа, происходит распределение выигрышей по следующим правилам: если оба угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то фиксируется ничья – выигрыш нуль у каждого человека; если оба не угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то также фиксируется ничья; если только один человек угадал, сколько пальцев показал второй человек, то он (угадавший) получает выигрыш за счет второго (неугадавшего) в виде денег или очков пропорционально сумме показанных пальцев обоими участниками игры.

Итак, в этой конфликтной ситуации принимают участие только два человека, у которых прямо противоположные цели – получить максимальный выигрыш за счет второго участника, поэтому каждого участника следует считать игроком. Отсюда следует, что формализованная игра будет игрой двух игроков с нулевой суммой.

Что считать стратегией игрока? Очевидно, возможностями каждого игрока будет выбор двух чисел $\{a,\ b\}$, где a означает количество показанных им пальцев, b – предполагаемое число пальцев, которое покажет противник. Давая возможные значения для a=1, 2 и для b=1, 2, получим 4 возможные стратегии: {1, 1}, {1, 2}, {2, 1}, {2, 2}. Теперь можно ввести следующую нумерацию стратегий:

первая – это {1, 1}, показать один палец и назвать цифру 1;

вторая – это {1, 2}, показать один палец и назвать цифру 2;

третья – это {2, 1}, показать два пальца и назвать цифру 1;

четвертая – это {2, 2}, показать два пальца и назвать цифру 2.

Итак, каждый из игроков имеет по четыре чистые стратегии (конечное число). Таким образом, мы приходим к построению матричной игры, в которой следует определить матрицу A выигрышей первого игрока.

Проведя простые вычисления и сопоставляя строки и столбцы номерам стратегий, получим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Например, если первый игрок применит четвертую стратегию {2, 2}, т.е. покажет два пальца и назовет цифру 2, а второй – вторую стратегию {1, 2}, т.е. покажет один палец и назовет цифру 2, то угадает только второй игрок и он получит от первого сумму 2+1=3, соответствующую количеству показанных пальцев обоими игроками, т.е. первый игрок выиграет -3. Четвертой стратегии первого игрока в матрице A соответствует четвертая строка, а второй стратегии второго игрока соответствует второй столбец в матрице A, на пересечении четвертой строки и второго столбца ставится цифра -3, соответствующая выигрышу первого игрока. Например, если первый и второй игроки применяют одинаковые стратегии, то они оба угадывают и первый игрок получает нуль, что соответствует элементам главной диагонали матрицы A (диагональ вниз направо). Вторая диагональ матрицы A (справа вниз налево) соответствует выигрышу 0, получаемому при применении игроками стратегий, приводящих к обоюдному неугадыванию. Положительный выигрыш 2 у первого игрока будет, если, например, первый игрок применит свою первую стратегию$\{1, 1\}$, а второй свою вторую - $\{1, 2\}$, т.е. угадает только первый игрок и он получит от второго игрока сумму 1+1=2, соответствующую количеству показанных пальцев обоими игроками.

Пример 2. Игра в монеты. Первый из двух участников игры накрывает рукой монету, которая может быть гербом кверху или решкой. Второй участник отгадывает, какой стороной кверху находится эта монета. Если второй отгадал, то первый платит второму сумму, равную единице. Если второй не отгадал, то он платит первому сумму, равную единице.

Очевидно, в этой игре каждый из имеющихся двух участников игры является игроком, так как у них противоположные интересы: получить выигрыш за счет другого участника игры. Поэтому рассматриваемая игра принадлежит к игре двух игроков с нулевой суммой. Поскольку монета имеет только две стороны (ставить на ребро монету запрещено), то у первого игрока имеется только две стратегии: 1-я – накрыть монету кверху гербом, 2-я – накрыть монету решкой кверху. У второго игрока также имеется только две стратегии: 1-я – сказать, что монета накрыта гербом кверху, 2-я – монета накрыта решкой кверху.

Итак, в этой игре каждый игрок имеет по две частные стратегии (число стратегий конечное у каждого игрока), поэтому она есть матричная игра. Матрица выигрышей формируется так: если чистые стратегии у обоих игроков совпадают, то это значит, что второй игрок отгадал, какой стороной накрыл монету первый игрок, и, следовательно, выигрывает второй игрок, а первый выигрывает -1. Если игроки применяют разные стратегии, то это значит, что второй игрок не отгадал, какой стороной накрыта монета, и выигрывает единицу первый игрок. Матрица A выигрышей первого игрока имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример 3. Военная игра. Имеется два противника и две позиции. Один противник – это полковник, второй – генерал. У полковника имеется 4 полка, у генерала – 3 полка. Каждый из этих противников хочет занять данные позиции. Взятые позиции оцениваются выигрышем в единицу. Каждый из противников может послать на любую позицию только целое число полков или совсем не посылать. Позиция считается занятой тем, кто послал на нее больше полков, и выигрыш составляет единицу за счет взятия позиции и плюс количество единиц, совпадающее с количеством полков противника, не занявшего позицию. Если у позиции оказывается одинаковое число полков полковника и генерала, то никто не выигрывает, выигрыш обоих составляет 0. Общий выигрыш каждого участника равен сумме его выигрышей у обеих позиций, и то, что получил один противник, считается потерей для другого.

Ввиду противоположности интересов у полковника и генерала, каждый из них считается игроком. Поскольку выигрыш одного получается за счет проигрыша другого, то это игра с нулевой суммой.

Возможные поведения игроков описываются чистыми стратегиями $\{a,\ b\}$, где a – количество полков, посланных данным игроком на первую позицию; b – число полков, посланных им на вторую позицию.

Итак, для полковника имеются следующие чистые стратегии:

1. На первую позицию послать все полки, т.е. $\{4,\,0\}$.
2. На вторую позицию послать все полки $\{0,\,4\}$.
3. На первую позицию послать 3 пока, на вторую – 1, т.е. $\{3,\,1\}$.
4. На вторую позицию послать 3 пока, на первую – 1, т.е. $\{1,\,3\}$.
5. На обе позиции послать два полка, т.е. $\{2,\,2\}$.

У генерала имеются следующие чистые стратегии:

1. На первую позицию послать все 3 полка, т.е. $\{3,\,0\}$.
2. На вторую позицию послать все 3 полка $\{0,\,3\}$.
3. На первую позицию послать 2 полка, на вторую – 1, т.е. $\{2,\,1\}$.
4. На вторую позицию послать 2 полка, на первую – 1, т.е. $\{1,\,2\}$.

Таким образом, у полковника имеется 5 чистых стратегий, а у генерала – 4 чистые стратегии, поэтому данная ситуация может рассматриваться как матричная игра. Формирование матрицы выигрышей первого игрока (полковника) производится согласно правилам выигрышей. Так, например, пусть полковник применит свою первую стратегию, а генерал применит свою вторую стратегию. Это значит, что на первую позицию полковник пошлет все свои 4 полка (на вторую позицию он никого не пошлет), а генерал на первую позицию никого не пошлет, но пошлет все три полка на вторую позицию. Тогда полковник займет первую позицию и получит выигрыш 1, а генерал займет вторую позицию, т.е. полковник потеряет вторую позицию, следовательно, на второй позиции его выигрыш будет равен -1, а суммарный его выигрыш на двух позициях будет 1-1=0.

Пусть, например, полковник применит свою вторую стратегию, а генерал – третью. Тогда на первую позицию полковник не пошлет ни одного полка, а генерал пошлет два полка, поэтому полковник потеряет первую позицию, т.е. его выигрыш на второй позиции будет равен -1; на вторую позицию полковник пошлет 4 полка, а генерал – один полк, поэтому полковник выиграет 1 за позицию и 1 за полк генерала, т.е. на второй позиции полковник выиграет 2. Общий выигрыш полковника в этом случае будет равен 2-1=1. Пусть, например, полковник применит свою 5-ю стратегию, а генерал – вторую. Тогда на первую позицию полковник пошлет 2 полка, а генерал никого не пошлет, поэтому полковник выигрывает позицию, т.е. 1; на вторую позицию полковник пошлет 2 полка, а генерал – три полка, поэтому позицию получит генерал и выигрыш генерала будет равен 1 за позицию и 2 за два полка полковника, т.е. 1+2=3; это значит, что на второй позиции полковник потерял 3 единицы. Общий выигрыш полковника в этой ситуации составит 1-3=-2.

Рассматривая выигрыш полковника для каждой пары чистых стратегий одного и другого игрока, получим следующую матрицу выигрышей полковника:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ -2 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы видно, что у полковника положение лучше, чем у генерала. Это легко объяснить тем, что у полковника больше полков, чем у генерала, а по правилам игры побеждает тот, у кого больше полков.

Пример 4. Оптимальный план. Предприятию поручено выпускать два вида скоропортящихся продуктов $П_1$ и $П_2$. Ежедневные расходы на производство и реализацию продукции не должны превышать 4000 руб. Перед руководством предприятия поставлена задача: определить ежедневный объем производства каждого вида продукции с целью получения наибольшей прибыли. Для этого были проведены исследования, которые показали следующее:

- себестоимость единицы продукции $П_1$ равна 0,8 руб., отпускная цена —1,2 руб; себестоимость единицы продукции $П_2$ равна 0,5 руб., отпускная цена — 0,8 руб;

- если продукция не реализуется в день выпуска, то ее качества значительно снижаются и она продается на следующий день по цене в 4 раза меньше отпускной;

- реализация продукции зависит от состояния погоды — в хорошую погоду реализуется 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц $П_2$; в плохую погоду реализуется 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц $П_2$; на реализацию всей произведенной за день продукции расходуется 200 руб.

Для предприятия важно знать состояние погоды и тогда производить продукцию в таком объеме и ассортименте, чтобы она реализовалась максимально в тот же день. Если бы можно было наперед предсказать состояние погоды, то оптимальным планом производства был бы план, полностью ориентированный на известное состояние погоды. Однако в настоящее время еще нет надежных способов прогноза погоды, и предприятие должно составлять план с учетом появления наиболее неблагоприятных для него состояний погоды. Можно трактовать ситуацию следующим образом: с одной стороны, предприятие заинтересовано производить продукцию с наибольшей пользой для себя, с другой стороны, имеется противник — природа, которая может максимально повредить предприятию. Поэтому данную ситуацию можно рассматривать как антагонистическую игру двух игроков: первый игрок — предприятие, второй — природа.

Можно считать, что природа не разумный противник и она не будет изучать поведение предприятия с целью максимально повредить ему, и поэтому не следует считать такую ситуацию как антагонистическую игру. Такие доводы имеют основания, тогда можно изучить статистические данные о поведении погоды и строить план производства продукции с учетом состояний погоды в среднем.

Однако и игровой подход имеет свои преимущества. Действительно, рассматривая природу как противника, предприятие может строить свои оптимальные планы с учетом наиболее неблагоприятных действий природы, а если природа отступит от этих своих самых неблагоприятных для предприятия действий, то этот оптимальный план поведения предприятия даст возможность ему увеличить свою прибыль.

Итак, в этой ситуации имеется два игрока: человек и природа. Какие же их стратегии? Очевидно, у природы имеется две стратегии: 1-я — создать хорошую погоду, 2-я — создать плохую погоду. У предприятия имеется также две стратегий: 1-я — производить продукцию в расчете на хорошую погоду, 2-я — производить продукцию в расчете на плохую погоду.

Таким образом, у обоих игроков имеется по две стратегии (конечное число стратегий), поэтому мы приходим к конечной игре двух игроков с нулевой суммой, т. е. к матричной игре, с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Элемент a_{ij} $(i — 1, 2; j = 1, 2)$ в матрице A выражает прибыль предприятия при условии, что предприятие применяет свою i-ю стратегию, а природа свою j-ю стратегию.

Произведем расчеты элементов a_{ij} $(i = 1, 2;\ j = 1,2)$. Прибыль P равна

$$P = Z — C,$$

где Z — сумма выручки за реализованную продукцию, C — затраты, на производство и реализацию продукции. Расчеты будут производиться для периода в один день. Для получения элемента a_{11} необходимо учесть, что предприятие применяет свою .первую стратегию, т. е. берет расчет на хорошую погоду и производит 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц продукции $П_2$, поэтому затраты C_1 составят

$$C_1 = 1000 \times 0,8 + 6000 \times 0,5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Поскольку природа также применяет свою первую стратегию, т. е. погода будет хорошей, то предприятие в тот же день реализует всю продукцию по отпускной цене и получит сумму

$$Z_1 = 1000 \times 1,2 + 6000 \times 0,8 = 6000 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{11} = Z_1 - C_1 = 6000 - 4000 = 2000 \text{ руб.}$$

Для получения a_{12} следует учесть, что предприятие берет расчет на хорошую погоду, т. е. применяет свою первую стратегию, а природа применяет свою вторую стратегию, т. е. погода будет плохой. В этом случае затраты C будут те же, т. е. C_1 = 4000 руб., а сумма выручки Z будет другая. При этом следует учесть, что при плохой погоде в тот же день реализуется 4000 единиц продукции $П_1$, а произведено только 1000 единиц, т. е. вся произведенная продукция $П_1$ будет реализована по цене 1,2 руб. Для продукции $П_2$ будет следующее: при плохой погоде ее реализуется в тот же день 1200 единиц по цене 0,8 руб, а остальные 6000 — 1200 = 4800 единиц реализуются на следующий день по цене 0,8 : 4 = 0,2 руб. за единицу. Таким образом, сумма выручки Z в этом случае будет

$$Z_2 = 1000 \times 1,2 + 1200 \times 0,8 + 4800 \times 0,2 = 3120 \text{ руб.}$$

Таким образом, в этом случае прибыль предприятия составит

$$a_{12} = 3120 — 4000 = — 880 \text{ руб.},$$

т. е. в этом случае предприятие понесет убыток 880 руб.

Пусть теперь предприятие применит свою 2-ю стратегию, т. е. возьмет расчет на плохую погоду, тогда будет произведено 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц продукции $П_2$ и его затраты составят

$$C_2 = 4000 \times 0,8 + 1200 \times 0,5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

Если погода окажется плохой, т. е. природа применит свою 2-ю стратегию, то вся произведенная продукция будет реализована в тот же день, и предприятие будет иметь сумму выручки

$$Z_3 = 4000 \times 1,2 + 1200 \times 0,8 = 5760 \text{ руб.}$$

и его прибыль составит

$$a_{22} = Z_3 — C_2 = 5760 — 4000 = 1760 \text{ руб.}$$

Если же предприятие применит свою вторую стратегию, а природа свою 1-ю стратегию, т. е. будет произведено 4000 единиц $П_1$ и 1200 единиц $П_2$, а в тот же день будет реализовано 1000 единиц $П_1$ по 1,2 руб., 1200 единиц $П_2$ по цене 0,8 руб., на другой день 4000 — 1000 = 3000 единиц $П_1$ по цене 0,3 руб. и сумма выручки составит

$$Z_4 = 1000 \times 1,2 + 1200 \times 0,8 + 3000 \times 0,3 = 3060 \text{ руб.},$$

а прибыль $P = Z_4 — C_2$, т. е.

$$a_{21} = 3060 — 4000 = — 940 \text{ руб.}$$

Итак, матрица A принимает вид

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & -880 \\ -940 & 1760 \end{pmatrix}.$$

5. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Исход игры — это значение некоторой функции, называемой функцией «выигрыша», которая может задаваться аналитически либо таблично (матрицей). Игра, в которой выигрыши и проигрыши игроков задаются матрицей, называется матричной.

Игра, в которой общий капитал игроков не меняется, а лишь перераспределяется в ходе игры, называется **игрой с нулевой суммой**.

Пример 5. В игре участвуют первый и второй игроки, каждый из них может записать независимо от другого цифры 1, 2 и 3. Если разность между цифрами, записанными игроками, положительна, то первый игрок выигрывает количество очков, равное разности между цифрами, и, наоборот, если разность отрицательна, то выигрывает второй игрок. Если разность равна нулю, то игра заканчивается вничью.

У первого игрока три стратегии (варианта действия): A_1 (записать 1), A_2 записать 2) и A_3 (записать 3); у второго игрока также три стратегии: B_1, B_2, B_3.

Задача первого игрока — **максимизировать свой выигрыш**, задача второго игрока — **минимизировать свой проигрыш**.

Матрица игры, или платежная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем наилучшую стратегию первого игрока. Если игрок выбрал стратегию A_1, то в худшем случае он получит выигрыш $\alpha_1 = \min(0;\ -1;\ -2) = -2$. Соответственно при выборе стратегии A_2 — $\alpha_2 = \min(1;\ 0;\ -1) = -1$, $A_3 - \alpha_3 = \min(2;\ 1;\ 0) = 0$. Предвидя такую возможность, первый игрок должен выбрать такую стратегию, чтобы максимизировать свой минимальный выигрыш

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2;\ -1;\ 0) = 0.$$

Величина α **— гарантированный выигрыш игрока — называется нижней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение выигрыша α, называется **максиминной**.

Аналогично определяется наилучшая стратегия второго игрока. Второй игрок при выборе стратегии B_1 в худшем случае получит проигрыш $\beta_1 = \max(0;\ 1;\ 2) = 2$. При выборе стратегий B_2 и B_3 проигрыш составит, соответственно, $\beta_2 = \max(-1;\ 0;\ 1) = 1$; $\beta_3 = \max(-2;\ -1;\ 0)$. Он выбирает стратегию, при которой его проигрыш будет минимальным и составит

$$\beta = \min_j \beta_j = \min(2;\ 1;\ 0) = 0.$$

Величина β **— гарантированный проигрыш игрока — называется верхней ценой игры**. Стратегия, обеспечивающая получение проигрыша β, называется **минимаксной**. Для матричных игр справедливо неравенство $\alpha \le \beta$.

Если $\alpha = \beta = v$, то такая игра называется игрой с **седловой точкой**. Элемент матрицы, соответствующий паре оптимальных стратегий, называется **седловым элементом** матрицы. Этот элемент является **ценой игры**.

Если платежная матрица не имеет **седловой точки**, т.е. $\alpha < \beta$, то поиск решения игры приводит к применению сложной стратегии, состоящей в случайном применении двух и более стратегий с определенными частотами. Такая сложная стратегия называется **смешанной**.

В игре, матрица которой имеет размерность $m \times n$, стратегии первого игрока задаются наборами вероятностей $\overline{x}(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m)$, с которым игрок применяет свои чистые стратегии. Эти наборы можно рассматривать как m-мерные векторы, для которых выполняются условия $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0\ \ i = \overline{1,m}$. Аналогично для второго игрока наборы вероятностей определяют n-мерные векторы $\overline{y}(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n)$,

$$\sum_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_i \ge 0\ \ j = \overline{1,n}.$$

Выигрыш первого игрока при использовании смешанных стратегий определяется как математическое ожидание выигрыша, т.е. равен

$$M\left(A,\ X,\ Y\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_i y_j\ .$$

Если платежная матрица не содержит **седловой точки**, то задача определения смешанной стратегии тем сложнее, чем больше размерность матрицы. Поэтому матрицы большой размерности целесообразно упростить, уменьшив их размерность путем вычеркивания дублирующих (одинаковых) и недоминирующих стратегий.

Пример 6. Рассмотрим игру, представленную платежной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5\\ 5 & 3 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $\alpha=\max(3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1)=3$; $\beta=\min\left(8,\ 7,\ 7,\ 4,\ 5\right)=4$; $\alpha\neq\beta$; $3\le\nu\le 4$. Элементы стратегий A_2 и A_4 одинаковы, одну из них можно исключить. Все элементы стратегий A_2 меньше элементов стратегий A_1, следовательно, A_2 можно исключить. Все элементы A_5 меньше A_3, исключаем A_5.

$$A=\begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3\\ 4 & 7 & 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Для второго игрока, сравнивая B_1 и B_4, исключаем B_1; сравнивая B_2 и B_5, исключаем B_2.

В результате преобразований получим матрицу

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 3\\ 7 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

$\alpha=\max(3,3)=3$; $\beta=\min\left(7,\ 4,\ 5\right)=4$; $\alpha\neq\beta$; $3\le\nu\le 4$.

6. ИГРЫ ПОРЯДКА $2\times n$ И $m\times 2$

В играх порядка $2\times n$ первый игрок имеет только 2 чистые стратегии, а второй n чистых стратегий, т. е. матрица выигрышей первого игрока имеет вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

Если такая игра имеет **седловую точку**, то ее легко найти и получить решение.

Предположим, что игра не имеет **седловой точки**. Тогда необходимо найти такие смешанные стратегии $x=\left(x_1,\ x_2\right)$ и $y=\left(y_1,\ y_2,\ \dots,y_n\right)$ соответственно первого и второго игроков и цену игры υ, которые удовлетворяют соотношениям:

$$a_{1j}x_1+a_{2j}x_2\ge\upsilon \qquad \left(j=1,\ 2,\ \dots,\ n\right), \tag{6.2}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le \upsilon, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le \upsilon, \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 = 1 - x_1,\ \ y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1, \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ \left(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right). \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Поскольку игра не имеет **седловой точки**, то неравенства (6.3) заменяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n = \upsilon, \\ a_{21}y_1 + \ldots + a_{2n}y_n = \upsilon. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Для решения систем (6.2), (6.4), (6.5) целесообразно воспользоваться графическим методом. С этой целью введем обозначения для левой части неравенств (6.2)

$$M_i\left(x_1\right) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 \qquad \left(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right)$$

или, подставив x_2 из (6.4) и проведя простые преобразования, получим

$$M_i\left(x_1\right) = \left(a_{1j} - a_{2j}\right)x_1 + a_{2j} \qquad \left(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n\right),$$

где $M_j\left(x_1\right)$ — это средний выигрыш первого игрока при условии, что он применяет свою смешанную стратегию, а второй — свою j-ю чистую стратегию.

Каждому значению j=1,2, …, n согласно выражению $M_j\left(x_1\right)$ соответствует прямая линия в прямоугольной системе координат (рис. 6.1, где j =1,2,3,4).

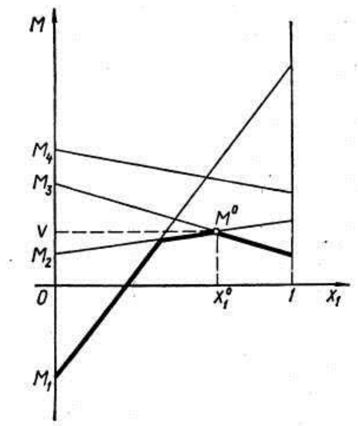

Рис. 6.1

Цель второго игрока - минимизировать выигрыш первого игрока за счет выбора своих стратегий. Поэтому вычисляем

$$\min_j M_j\left(x_1\right) = M\left(x_1\right),$$

где $M\left(x_1\right)$ — нижняя граница множества ограничений. На рис. 6.1 график функции $M\left(x_1\right)$ изображен жирной линией.

Цель первого игрока - максимизировать свой выигрыш за счет выбора x_1, т.е. вычислить

$$\max_{x_1} M_j\left(x_1\right) = M\left(x_1^0\right).$$

На рис. 6.1 точка M^0 означает максимальное значение $M\left(x_1^0\right)$, которое получается при $x_1 = x_1^0$. Цена игры $\upsilon = M\left(x_1^0\right)$, так как

$$\upsilon = \min_j \max_{x_1} M_j\left(x_1\right) = M\left(x_1^0\right).$$

Таким образом, графически определяется оптимальная смешанная стратегия $x = \left(x_1^0,\ x_2^0\right)$ первого игрока и пара чистых стратегий второго игрока, которые в пересечении образуют точку M^0. На рис. 6.1 изображены 2-я и 3-я стратегии второго игрока. Для таких стратегий неравенства (6.2) превращаются в равенства. На рис. 6.1 это стратегии $j = 2,\ i = 3$.

Теперь можно решить систему уравнений

$$M\left(x_1\right) = 0 \quad \left(j = 2,\ 3\right)$$

и точно определить значения x_1^0 и υ (графически они определяются приближенно). Затем, положив все значения $y_i = 0$ при тех *j*, для которых $M\left(x_1\right)$ не образуют точку M^0, можно определить y_j при тех *j*, для которых $M\left(x_1\right)$ образуют точку M^0, решая систему уравнений (6.5). Для примера, приведенного на рис. 6.1, это следующая система:

$$a_{12}y_2 + a_{13}y_3 = \upsilon,$$
$$a_{12}y_2 + a_{23}y_3 = \upsilon,$$

а остальные $y_1 = y_4 = 0$. Эту систему можно решить, полагая $y_2 = 1 - y_3$. Если при некоторой $j = j_0$ стратегии второго игрока образуют точку M^0 и $a_{1j_0} = a_{2j_0}$, то максимальное значение нижней границы множеств ограничений изображается отрезком, параллельным оси Ox_1. В этом случае первый игрок имеет бесконечно много оптимальных значений x_1^0, а цена игры $\upsilon = a_{1j_0} = a_{2j_0}$. Например, этот случай изображен на рис. 6.2, где $j_0 = 3$ и отрезок *MN* изображают верхнее значение нижней границы множества ограничений, оптимальные значения x_1 находятся в пределах $x_1^0,\ x_1^1$. У второго игрока имеется чистая оптимальная стратегия $j = j_0$.

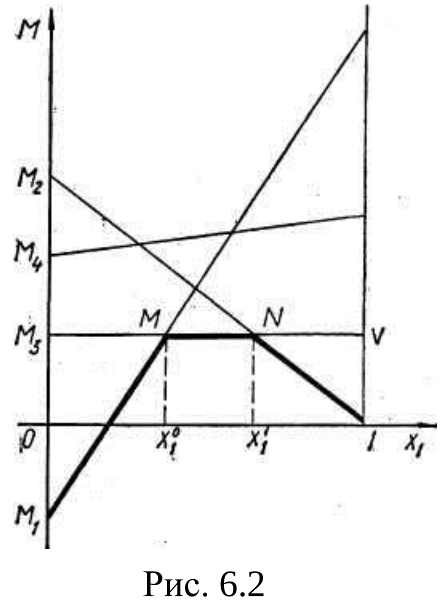

Рис. 6.2

7. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР СВЕДЕНИЕМ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Каждая конечная игра двух лиц с нулевой суммой может быть представлена как задача линейного программирования и решена симплексным методом.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой, заданной платежной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

Применение первым игроком оптимальной стратегии должно обеспечить ему при любых действиях второго игрока выигрыш не меньше цены игры.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_{i\ \text{опт}} \ge \nu,\ j = \overline{1,n}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока A, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{m1}x_m \ge \nu, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{m2}x_m \ge \nu, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}x_m \ge \nu. \end{cases}$$

Величина ν неизвестна, однако можно считать, что цена игры $\nu > 0$. Последнее условие выполняется всегда, если все элементы платежной матрицы неотрицательны, а этого можно достигнуть, прибавив ко всем элементам матрицы некоторое положительное число. Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенства на ν.

$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \dots + a_{m1}p_m \ge 1, \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \dots + a_{m2}p_m \ge 1, \\ \qquad\qquad \dots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \dots + a_{mn}p_m \ge 1 \end{cases},$$

где

$$p_i = \frac{x_i}{\nu} \ge 0,\ i = \overline{1,m}.$$

По условию $x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1$. Разделим обе части этого равенства на ν.

$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = \frac{1}{\nu}.$$

Оптимальная стратегия игрока A должна максимизировать величину ν, следовательно, функция

$$F\left(\bar{p}\right) = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

должна принимать минимальное значение.

Таким образом, получена задача линейного программирования. Решая ее, находим значения $p_i,\ i=\overline{1,m}$ и величину $1/\nu$, затем отыскиваются значения $x_i=\nu p_i$.

Аналогично, для второго игрока оптимальная стратегия должна обеспечить при любых стратегиях первого игрока проигрыш, не превышающий цену игры.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_{j\text{опт}} \le \nu,\ \ i=\overline{1,m}.$$

Рассмотрим задачу отыскания оптимальной стратегии игрока *B*, для которой имеют место ограничения

$$\begin{cases} a_{11}y_1+a_{21}y_2+...+a_{1n}y_n \le \nu, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+...+a_{2n}x_n \le \nu, \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+...+a_{mn}y_m \le \nu. \end{cases}$$

Преобразуем систему ограничений, разделив все члены неравенств на ν.

$$\begin{cases} a_{11}q_1+a_{12}q_2+...+a_{1n}q_n \le 1, \\ a_{21}q_1+a_{22}q_2+...+a_{2n}q_n \le 1, \\ \qquad\qquad ... \\ a_{m1}q_1+a_{m2}q_2+...+a_{mn}q_n \le 1, \end{cases}$$

где

$$q_j=\frac{y_j}{\nu},\ \ j=\overline{1,n}.$$

По условию $y_1+y_2+...+y_n=1$. Разделим обе части этого равенства на ν.

$$q_1+q_2+...+q_n=\frac{1}{\nu}.$$

Оптимальная стратегия игрока *B* должна минимизировать величину ν, следовательно, функция

$$Z(\bar{q})=\sum_{j=1}^{n} q_j$$

должна принимать максимальное значение.

Получена задача линейного программирования. Таким образом, для нахождения решения игры имеем симметричную пару двойственных задач линейного программирования. Можно найти решение одной из них, а решение второй находится с использованием теории двойственности.

Пример 7. Найти решение игры, заданной матрицей

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$\alpha=\max(1,\ 2,\ 1)=2$; $\beta=\min(4,\ 9,\ 3,\ 6,\ 7)=4$; $\alpha\ne\beta$; $2\le\nu\le4$.

Игра не имеет **седловой точки**. Оптимальное решение следует искать в области смешанных стратегий.

Для определения оптимальной стратегии игрока *A* имеем следующую задачу линейного программирования.

$$F(\overline{p}) = p_1 + p_2 + p_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 3p_1 + 4p_2 + 2p_3 \ge 1; \\ 7p_1 + 9p_2 + 3p_3 \ge 1; \\ p_1 + 3p_2 + p_3 \ge 1; \\ p_1 + 6p_2 + 4p_3 \ge 1; \\ 5p_1 + 2p_2 + 7p_3 \ge 1; \end{cases}$$

$$p_i \ge 0, \ \ i = \overline{1,3}.$$

Для оптимальной стратегии *B* имеет следующую задачу линейного программирования:

$$Z(\overline{q}) = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 3q_1 + 7q_2 + q_3 + q_4 + 5q_5 \le 1; \\ 4q_1 + 9q_2 + 3q_3 + 6q_4 + 2q_5 \le 1; \\ 2q_1 + 3q_2 + q_3 + 4q_4 + 7q_5 \le 1; \end{cases}$$

$$q_i \ge 0, \ \ j = \overline{1,5}$$

Оптимальные решения пары двойственных задач имеют вид

$$F_{\min} = Z_{\max} = \frac{7}{19}; \ \overline{p}_{опт}\left(0; \frac{6}{19}; \frac{1}{19}\right); \ \overline{q}_{опт}\left(0; 0; \frac{5}{19}; 0; \frac{2}{19}\right).$$

Учитывая соотношения между x_i и p_i; y_j и q_j, а также равенство $F_{\min} = Z_{\max} = \dfrac{1}{\nu}$, находим оптимальные стратегии игроков и цену игры

$$\overline{x}\left(0; \frac{6}{7}; \frac{1}{7}\right); \ \overline{y}\left(0; 0; \frac{5}{7}; 0; \frac{2}{7}\right); \ \nu = \frac{19}{7}.$$

8. ИГРЫ С ПРИРОДОЙ

В некоторых задачах, приводящихся к играм, имеется неопределенность, вызванная отсутствием информации об условиях, в которых осуществляется действие (погода, покупательский спрос и т.д.). Эти условия зависят не от сознательных действий другого игрока, а от объективной действительности. Такие игры называются играми с природой. Человек в играх с природой старается действовать осмотрительно, второй игрок (природа, покупательский спрос) действует случайно.

Имеется ряд критериев, которые используются при выборе оптимальной стратегии.

1. **Критерий Вальда**. Рекомендуется применять максиминную стратегию. Она выбирается из условия

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

и совпадает с нижней ценой игры. Критерий является пессимистическим, считается, что природа будет действовать наихудшим для человека способом.

2. **Критерий максимума**. Он выбирается из условия

$$\max_i \left(\max_j a_{ij} \right)$$

Критерий является оптимистическим, считается, что природа будет наиболее благоприятна для человека.

3. **Критерий Гурвица**. Критерий рекомендует стратегию, определяемую по формуле

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right),$$

где α — степень оптимизма и изменяется в диапазоне [0,1].

Критерий придерживается некоторой промежуточной позиции, учитывающей возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения природы. При α = 1 критерий превращается в критерий Вальда, при α = 0 — в критерий максимума. На α оказывает влияние степень ответственности лица, принимающего решение по выбору стратегии. Чем больше последствия ошибочных решений, больше желания застраховаться, тем α ближе к единице.

4. **Критерий Сэвиджа**. Суть критерия состоит в выборе такой стратегии, чтобы не допустить чрезмерно высоких потерь, к которым она может привести. Находится матрица рисков, элементы которой показывают, какой убыток понесет человек (фирма), если для каждого состояния природы он не выберет наилучшей стратегии.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ & & \cdots & \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{\min} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

Элементы матрицы рисков находятся по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

где $\max_i a_{ij}$ - максимальный элемент в столбце исходной матрицы.

Оптимальная стратегия определяется выражением

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right).$$

При принятии решений в условиях неопределенности следует оценивать различные варианты с точки зрения нескольких критериев. Если рекомендации совпадают, можно с большей уверенностью выбрать наилучшее решение; если рекомендации противоречат друг другу, окончательное решение надо принимать с учетом его сильных и слабых сторон.

Пример 8. В приближении посевного сезона фермер Иванов имеет четыре альтернативы: A_1 - выращивать кукурузу, A_2 - выращивать пшеницу, A_3 - выращивать овощи, A_4 - использовать землю под пастбища. Платежи, связанные с указанными возможностями, зависят от количества осадков, которые условно можно разделить на четыре категории: B_1 - сильные осадки, B_2 - умеренные осадки, B_3 - незначительные осадки, B_4 - засушливый сезон.

Платежная матрица в тысячах рублей оценивается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} -10 & -20 & 40 & -20 \\ 50 & 90 & 35 & 40 \\ -40 & 150 & 55 & -15 \\ 20 & 25 & 35 & 15 \end{pmatrix}.$$

Что должен посеять Иванов?

Решение.

1. Согласно критерию Вальда рекомендуется применять максимальную стратегию.

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right) = \max\left(-20;35;-40;15\right) = 35.$$

Следует сеять пшеницу.

2. Воспользуемся критерием Сэвиджа. Составим матрицу рисков, элементы которой находим по формуле

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij};$$

$$R = \begin{pmatrix} 60 & 70 & 15 & 60 \\ 0 & 60 & 20 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 55 \\ 30 & 125 & 20 & 35 \end{pmatrix}.$$

Оптимальная стратегия определяется выражением

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$$

Найдем $\min\left(70;60;90;125\right) = 60$.

В соответствии с этим критерием следует сеять пшеницу.

3. Воспользуемся критерием Гурвица. Оптимальная стратегия определяется по формуле

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + \left(1-\alpha\right) \max_j a_{ij} \right),$$

где α - степень оптимума и изменяется в диапазоне [0;1], предположим, $\alpha = \dfrac{1}{2}$,

$$\max_i \left(\frac{1}{2} \min_j a_{ij} + \left(1-\alpha\right) \max_j a_{ij} \right) = \max\left(30;62;5;55;25\right) = 62,5,$$ т.е. следует принять решение о посеве пшеницы.

4. Если принять известным распределение вероятностей для различных состояний природы, например, считать эти состояния равновероятными

$\left(p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{4}\right)$, то для принятия решения следует найти математическое ожидание выигрыша

$$M_1 = (-10)\cdot\frac{1}{4} + 80\cdot\frac{1}{4} + 40\cdot\frac{1}{4} + (-20)\cdot\frac{1}{4} = \frac{90}{4},$$

$$M_2 = 50\cdot\frac{1}{4} + 90\cdot\frac{1}{4} + 35\cdot\frac{1}{4} + 40\cdot\frac{1}{4} = \frac{215}{4},$$

$$M_3 = (-40)\cdot\frac{1}{4} + 150\cdot\frac{1}{4} + 55\cdot\frac{1}{4} + (-15)\cdot\frac{1}{4} = \frac{150}{4},$$

$$M_4 = 20\cdot\frac{1}{4} + 25\cdot\frac{1}{4} + 35\cdot\frac{1}{4} + 15\cdot\frac{1}{4} = \frac{95}{4}.$$

Так как максимальное значение имеет M_2, то следует сеять пшеницу.

9. ПРИМЕР РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ «ОПТИМАЛЬНЫЙ ПЛАН»

Пример 9.

Решим задачу «Оптимальный план», платежная матрица которой была составлена в примере 4.

$$A = \begin{pmatrix} 2000 & -880 \\ -940 & 1760 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта игра не имеет седловой точки, поэтому найдем ее решение в смешанных стратегиях, где x_1 x_2 — соответственно вероятности применения первым игроком своих 1-й и 2-й стратегий, y_1, y_2 —вероятности применения вторым игроком своих 1-й и 2-й стратегий.

$$\begin{cases} 2000x_1 - 940x_2 \ge \upsilon, \\ -880x_1 + 1760x_2 \ge \upsilon, \\ x_1 + \quad x_2 = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2000y_1 - 880y_2 \le \upsilon, \\ -940y_1 + 1760y_2 \le \upsilon, \\ y_1 + \quad y_2 = 1. \end{cases}$$

Решая системы, получаем:

$$x_1 = 0,483, \quad x_2 = 0,517, \; y_1 = 0,473, \; y_2 = 0,527, \; v = 482,$$

или приближенно

$$x_1 = x_2 = 0,5, \qquad y_1 = y_2 = 0,5.$$

Полученное решение рекомендует первому игроку (предприятию) примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, применить свои чистые стратегии, а природа максимально навредит предприятию, если будет также примерно с одинаковой вероятностью, равной 0,5, менять погоду. При этом предприятие в среднем будет иметь ежедневно прибыль в размере v — 482 рубля.

Применить свою 1-ю стратегию для предприятия — это значит брать расчет на хорошую погоду и произвести 1000 единиц продукции $П_1$ и 6000 единиц продукции $П_2$. Для применения своей 2-й стратегии предприятию следует произвести 4000 единиц продукции $П_1$ и 1200 единиц продукции $П_2$, т. е., меняя случайно стратегии, как это рекомендует оптимальное решение, следует случайно менять технологию производства, что для предприятия невозможно. Поэтому оптимальные стратегии лучше использовать так: в среднем ежедневно можно производить продукцию $П_1$ в количестве

$$1000x_1 + 4000x_2 = 1000 \cdot 0{,}483 + 4000 \cdot 0{,}517 = 2551 \text{ единиц},$$

продукции $П_2$ в количестве

$$6000x_1 + 1200x_2 = 6000 \cdot 0{,}483 + 1200 \cdot 0{,}517 = 3518 \text{ единиц},$$

и независимо от поведения природы ежедневная прибыль предприятия будет составлять 482 руб. Действительно, предприятие затратит на изготовление и реализацию этой продукции

$$2551 \cdot 0{,}8 + 3518 \cdot 0{,}5 + 200 = 4000 \text{ руб.}$$

При хорошей погоде предприятие реализует 1000 единиц $П_1$ по цене 1,2 руб., остальные 2551 —1000 = 1551 единиц $П_1$ по цене в четыре раза меньше — 0,3 руб., 3518 единиц по цене 0,8 руб., т. е. получит

$$1000 \cdot 1{,}2 + 1551 \cdot 0{,}3 + 3518 \cdot 0{,}8 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит 4482 — 4000 = 482 руб.

Если погода плохая, то предприятие реализует 2551 единицу продукции $П_x$ по цене 1,2 руб., 1200 единиц продукции $П_2$ по цене 0,8 руб., остальные 3518 — 1200 = 2318 единиц продукции $П_2$ по цене в четыре раза меньше — 0,2 руб., т. е. получит

$$2551 \cdot 1{,}2 + 1200 \cdot 0{,}8 + 2318 - 0{,}2 = 4482 \text{ руб.},$$

и его прибыль составит 4482 — 4000 = 482 руб.

Существенное отличие этой игры от предыдущих заключается в том, что элементы матрицы A не являются точными: они взяты приближенно, в среднем (ведь нельзя наперед быть уверенным в продаже, скажем, точно 1000 единиц продукции; ее может быть продано в один день 980 единиц, — в другой 1030 и т. д.). Выводы, сделанные относительно этой игры, будут справедливы только в случае незначительного изменения количества проданных изделий (в данном случае, скажем, в пределах 30—50 единиц ежедневно). В противном случае анализ игры усложняется.

Предположим, наконец, что в городе имеется бюро прогнозов погоды, предсказания которого оправдываются с вероятностью 0,75 и не оправдываются с вероятностью 0,25. Предприятие поступает в точности по прогнозам. Тогда описанная выше ситуация по существу теряет игровой смысл и может решаться чисто вероятностными методами.

Действительно, пусть в данной местности за летний сезон бывает примерно одинаковое число дней с хорошей и плохой погодой, т. е. погода является случайным событием, появляющимся с вероятностью $\frac{1}{2}$. Согласно выводам, сделанным из матрицы A, это наихудший вариант для завода. Следовательно, прибыль завода является случайной величиной, принимающей свои значения:

$$2000 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8},$$

$$— 880 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$— 940 \text{ с вероятностью } 0{,}25 \cdot 0{,}5 = \frac{1}{8},$$

$$1760 \text{ с вероятностью } 0{,}75 \cdot 0{,}5 = \frac{3}{8}.$$

(Например, для получения прибыли 2000 руб. требуется совмещение независимых событий: 1-е —хорошая погода, 2-е —оправдался прогноз. Вероятность совмещения этих событий равна произведению их вероятностей (0,75 · 0,5). Для остальных величин прибылей рассуждения аналогичны). При этих условиях математическое ожидание прибыли завода

$$M = 2000 \cdot \frac{3}{8} - 880 \cdot \frac{1}{8} - 940 \cdot \frac{1}{8} + 1760 \cdot \frac{3}{8} = 1183 \text{ руб.}$$

Таким образом, ежедневная прибыль завода в среднем будет значительно больше, чем в предыдущем случае, на 1183 — 482 = 701 руб.

10. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Составить матрицу выигрышей для следующей ситуации и решить её как матричную игру.

Два военных подразделения с целью разведки определенного района могут одновременно выслать либо танк, либо бойцов с противотанковым оружием, либо бойцов-пулеметчиков. Если в этом районе встретятся боевые единицы одинаковых видов, то разведка не состоится, и каждая из сторон ничего не получает. Далее, при встрече разных подразделений: танк побеждает бойцов-пулеметчиков, бойцы-пулеметчики побеждают бойцов с противотанковым оружием, бойцы с противотанковым оружием побеждают танк. Выигрыш оценивается единицей.

2. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x = \left(\frac{1}{6}, \frac{4}{6}, \frac{1}{6}\right), \quad y = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right), \quad \upsilon = 0{,}4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

3. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right), \quad y = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \upsilon = 4$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 14 & -4 & 2 \\ -4 & 8 & 8 \\ 4 & 4 & 4 \\ 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Проверить, являются ли данные смешанные стратегии

$$x = \left(\frac{10}{42}, \frac{9}{42}, \frac{23}{42}, 0, 0, 0\right), \; y = \left(0, 0, \frac{5}{14}, \frac{8}{14}, 0, \frac{1}{14}, 0\right), \quad \upsilon = \frac{13}{14}$$

решением следующей матричной игры:

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -2 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & -2 & 3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Составить задачу линейного программирования для следующих игр:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -4 \\ -6 & -3 & 0 \\ -10 & -4 & 2 \end{pmatrix}$,

в) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & 2 \\ -8 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, г) $\begin{pmatrix} 0 & -17 & -34 \\ -2 & -15 & -35 \\ -20 & -22 & -24 \\ -3 & -15 & -35 \\ -40 & -27 & -14 \end{pmatrix}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акимов В.П. Основы теории игр: учеб. пособие / В.П. Акимов; Моск. гос. ин-т межд. отношений (ун-т) МИД России, каф. математич. методов и информационных технологий. – М.: МГИМО-Университет, 2008. – 156 с.
2. Экономико-математические методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. авторов; под ред. С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой. – М.: КНОРУС, 2008. – 208 с.

Обухова Галина Александровна

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ИГР

Методическое пособие для студентов экономических направлений
очной формы обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 06.12.12. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 1,94. Тираж 50 экз. Зак. 12 1142. Рег. № 224.

Отпечатано в РИО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.