**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВПО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»**

Г.А. ОБУХОВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методическое пособие и задания к выполнению контрольной работы
для студентов дневной формы обучения направления подготовки
«Менеджмент»

Рубцовск 2015

УДК 517.8

Обухова Г.А. Исследование операций: Методическое пособие и задания к выполнению контрольной работы для студентов дневной формы обучения направления подготовки «Менеджмент»/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. – 34 с.

Предлагаемая методическая разработка содержит задания контрольной работы по курсу: «Исследование операций». В работе кратко изложен теоретический материал по основным вопросам программы, необходимый для решения всех задач, а также приведены примеры, которые являются образцами решения этих задач.

Рассмотрено и одобрено
на заседании кафедры ВМФиХ
Рубцовского индустриального
института.
Протокол №8 от 22.04.15 г.

Рецензент: к.п.н. Н.С. Зорина

СОДЕРЖАНИЕ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Методы линейного программирования применяют к практическим задачам, в которых:

1) необходимо выбрать наилучшее решение (оптимальный план) из множества возможных;

2) решение можно выразить как набор значений некоторых переменных величин;

3) ограничения, накладываемые на допустимые решения специфическими условиями задачи, формулируются в виде линейных уравнений или неравенств;

4) цель выражается в форме линейной функции основных переменных. Значение целевой функции, позволяя сопоставлять различные решения, служит критерием качества решения.

Для практического решения экономической задачи математическими методами ее, прежде всего, следует записать с помощью математических выражений: уравнений, неравенств и т.п. – и составить *экономико-математическую модель*. Исходя из отмеченных выше особенностей задач линейного программирования, можно наметить следующую общую схему формирования модели:

1) выбор некоторого числа переменных величин, заданием числовых значений которых однозначно определяется одно из возможных состояний исследуемого явления;

2) выражение взаимосвязей, присущих исследуемому явлению, в виде математических соотношений (уравнений, неравенств); эти соотношения образуют систему ограничений задачи;

3) количественное выражение выбранного критерия оптимальности в форме целевой функции;

4) математическая формулировка задачи как задачи отыскания экстремума целевой функции при условии выполнения ограничений, накладываемых на переменные.

Для иллюстрации приведенной схемы рассмотрим примеры.

Общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме записи, называют задачу, в которой требуется максимизировать (минимизировать) линейную функцию

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1.1)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le a_{i0} \quad \left(i=\overline{1,\, s}\right)\ ; \qquad (1.2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le a_{i0} \quad \left(i=\overline{s+1,\, m}\right)\ . \qquad (1.3)$$

Функцию (1.1) называют *целевой*, а условия (1.2)-(1.3) – *ограничениями задачи.*

Задачей линейного программирования, заданной *в симметричной форме*, называют задачу, в которой требуется найти максимум функции (1.1) при условиях (1.2) и условиях

$$x_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,\ n}\right). \tag{1.4}$$

Задачей линейного программирования в канонической форме записи называют задачу, в которой требуется найти максимум функции (2.1) при условиях (1.3), где s=0, и (1.4).

Набор чисел $\bar{x} = (x_1;\ldots;x_n)$, удовлетворяющих ограничениям задачи линейного программирования, называется ее *планом*. План $\bar{x}^* = \left(x_1^*;\ldots;x_n^*\right)$, доставляющий максимум (минимум) функции (1.1), называется *оптимальным*.

Поскольку $\min f = -\max(-f)$, задачу минимизации функции f формально можно свести к задаче максимизации противоположной функции (-f). Найдя максимальное значение функции $-f$, его знак можно заменить на противоположный. Тем самым определится минимальное значение исходной функции f.

Переменную x_t, не подчиненную условию неотрицательности, заменяют парой неотрицательных переменных, приняв $x_t = x_t' - x_t''$.

Рассмотрим задачу линейного программирования

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \quad (\max)\ . \tag{1.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq a_{i0} \quad \left(i = \overline{1,\ m}\right)\ ; \tag{1.6}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,\ n}\right)\ . \tag{1.7}$$

Можно доказать, что *множество К планов задачи (1.5) – (1.7) является выпуклым,* т.е. если $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$ - планы задачи, то их выпуклая линейная комбинация $\bar{x} = \lambda\bar{x}_1 + (1-\lambda)\bar{x}_2$, где $0 \leq \lambda \leq 1$, также является планом задачи. Так как это множество определяется конечной совокупностью линейных ограничений (1.6) и (1.7), его граница состоит из кусков нескольких гиперплоскостей. Множество *К* может быть либо пустым множеством, либо выпуклым многогранником, либо выпуклой многогранной областью, уходящей в бесконечность. Важное значение имеет приведенная ниже теорема.

Теорема 1. *Линейная функция(1.5) задачи (1.5) – (1.7) достигает максимального значения в вершине многогранника планов. Если линейная функция принимает максимальное значение более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке, являющейся выпуклой линейной комбинацией этих вершин.*

Чтобы выразить аналитически утверждение второй части теоремы 1, обозначим через $\bar{x}_1^*;\ldots;\bar{x}_t^*$ вершины, в которых f достигает максимального значения. Тогда любую точку $\bar{x}^*$, в которой f достигает такого же значения, можно представить в виде $\bar{x}^* = \lambda_1\bar{x}_1^* + \ldots + \lambda_t\bar{x}_t^*$, где $\lambda_k \geq 0 \quad \left(k = \overline{1,\, t}\right)$, $\sum_{k=1}^{t}\lambda_k = 1$, т.е. если f достигает максимального значения более чем в одной вершине, то она достигает такого же значения в любой точке ребра или грани, которые определяются этими вершинами.

Можно доказать, что *каждому опорному решению системы (1.6) соответствует вершина многогранника планов и, наоборот, каждой вершине многогранника планов соответствует опорное решение системы (1.6).* Отсюда следует, что совокупность опорных планов задачи линейного программирования совпадает с системой вершин многогранника планов.

Так как число опорных решений системы (1.6) всегда конечно (по крайней мере, не больше, чем C_n^r), *многогранник планов будет иметь конечное число вершин.*

Указанные свойства позволяют наметить путь для решения задачи (1.5)-(1.7). Поскольку целевая функция достигает максимального значения при опорном плане множества планов, определяемого ограничениями (1.6)-(1.7), то нужно проверить все опорные планы этого множества и найти среди них тот, при котором f достигает максимума. Такой метод приемлем для задач с малым числом переменных и ограничений. Однако число опорных планов быстро растет с увеличением числа переменных и ограничений, и сплошная их проверка для многих практических задач оказывается непосильной даже для быстродействующих ЭВМ. Перебор опорных планов можно упорядочить, если при переходе от одного опорного плана к другому обеспечить возрастание f. Одним из методов упорядоченного перебора опорных планов является симплекс-метод.

Пример. Найти оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в таблице. По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы - 6 ден.ед., кукурузы - 4 ден. ед., критерий оптимальности - максимум валовой продукции в денежном выражении.

Культура	Урожайность участка, ц/га	
	1	2
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

Решение. Обозначим через x_1 площадь, отводимую под посев пшеницы на 1-м участке, через x_2 - на 2-м, через x_3 и x_4 - площади, отводимые под посев кукурузы соответственно на 1-м и 2-м участках.

Площади выражаются неотрицательными числами, то есть

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right).$$

Так как на 1-м участке планируется x_1 гектаров засеять пшеницей и x_3

гектаров кукурузой, то должно выполняться равенство

$$x_1+x_3=100.$$

Для 2-го участка аналогичное условие запишется так:

$$x_2+x_4=200.$$

С 1-го участка предполагается собрать $20x_1$, а со 2-го участка – $15x_2$ ц пшеницы. Всего же необходимо собрать не менее 1500 ц. Это требование можно выразить записью

$$20x_1+15x_2\geq 1500.$$

Аналогичное требование к валовому сбору кукурузы приводит к неравенству

$$35x_3+30x_4\geq 4500.$$

Стоимость пшеницы, которую предполагается собрать с обоих участков, составит $6(20x_1+15x_2)$ ден. ед., стоимость кукурузы - $4(35x_3+30x_4)$ ден. ед., а общая стоимость валовой продукции выразится суммой

$$f=120x_1+90x_2+140x_3+120x_4.$$

Таким образом, задача свелась к нахождению решения системы линейных уравнений и неравенств, которое максимизирует линейную функцию:

$$f=120x_1+90x_2+140x_3+120x_4\to\max.$$

$$\begin{cases} x_1+x_3=100 \\ x_2+x_4=200 \\ 20x_1+15x_2\geq 1500 \\ 35x_3+30x_4\geq 4500 \end{cases}$$

$$x_{j\geq 0}\left(j=\overline{1,4}\right)$$

2. ГРАФИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Графический способ целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, записанных в симметричной форме, а также для задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Задачи с двумя переменными. В этом случае задачу можно записать в следующем виде:

$$f=c_1x_1+c_2x_2\ \to\ (\max); \tag{2.1}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq a_{10}; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq a_{m0}; \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

$$x_1\geq 0;\quad x_2\geq 0. \tag{2.3}$$

Областью допустимых решений задачи (2.1)-(2.3) может быть либо выпуклый многоугольник, либо выпуклая многоугольная неограниченная область, либо пустая область, либо единственная точка.

Уравнение (2.1) определяется на плоскости x_1Ox_2 семейство параллельных прямых, каждой из которых отвечает определенное значение параметра *f*. Вектор $\bar{N}=(c_1;c_2)$, перпендикулярный (при условии, что масштабы по осям координат одинаковы) к этим прямым, указывает *направление наискорейшего возрастания* параметра *f* (функции (2.1)), а противоположный вектор $(-\bar{N})$ - *направление наискорейшего убывания* (рис. 2.1).

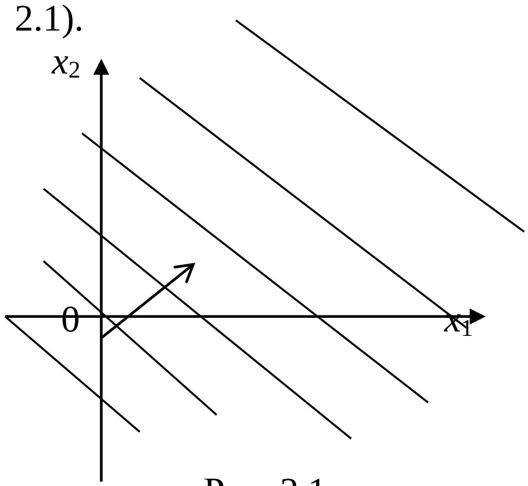


Рис. 2.1

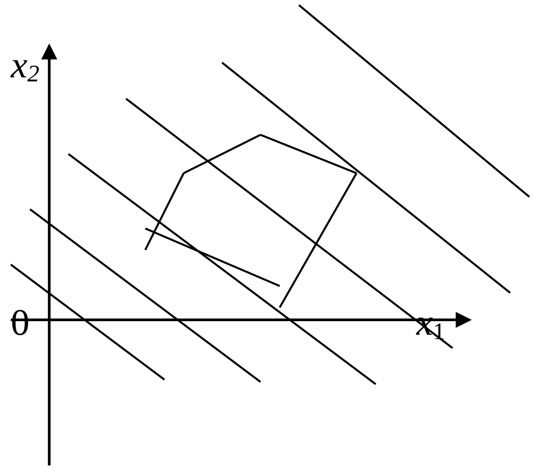


Рис. 2.2

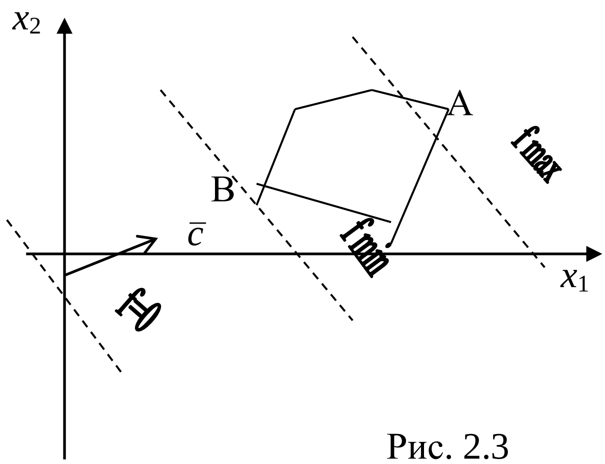


Рис. 2.3

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы (2.2)-(2.3) и семейство прямых (2.1) (рис. 2.2), то задача определения точки максимума функции *f* сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая семейства $f=const$, отвечающая наибольшему значению параметра *f*.

Для практического решения задачи (2.1)-(2.3) надо построить область допустимых решений, вектор $\bar{N}=(c_1;c_2)$ и перпендикулярно к нему одну из прямых семейства $f=const$, например, *f*=0. Искомая точка *A* найдется параллельным перемещением вспомогательной прямой *f*=0 в направлении вектора $\bar{N}$. В противоположной вершине *B* допустимой области функция *f* достигает минимума (рис. 2.3). Координаты точки A (точки B) можно определить либо по чертежу, либо решив совместно уравнения прямых, пересекающихся в этой точке.

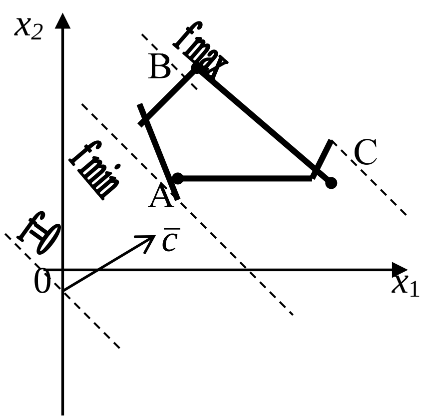


Рис. 2.4

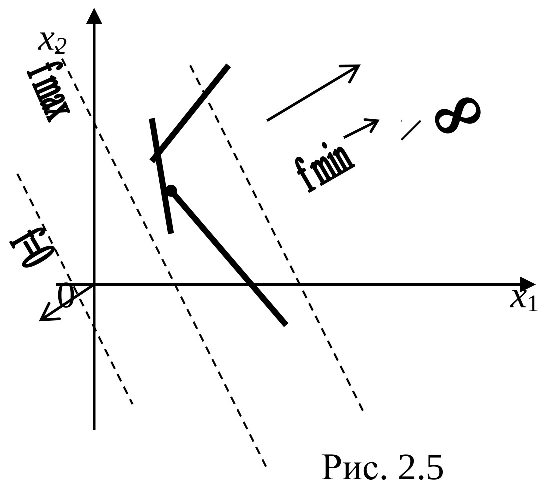


Рис. 2.5

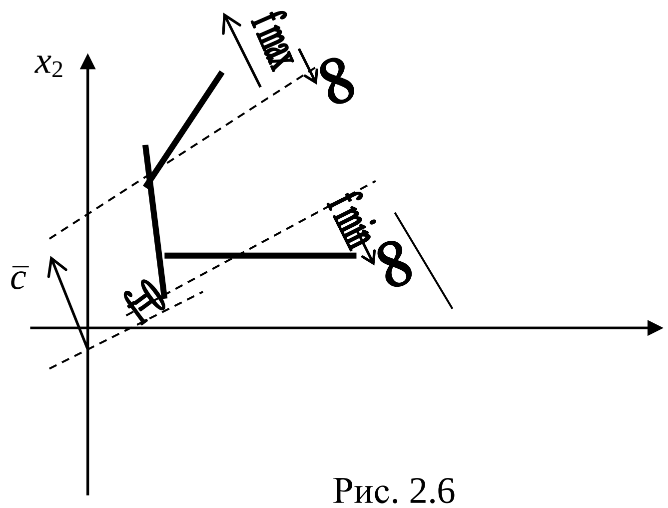


Рис. 2.6

В зависимости от характера области допустимых решений взаимного расположения области и вектора $\bar{N}$ могут встретиться случаи, изображенные на рисунках 2.4-2.6. На рисунке 2.4 функция достигает минимума в единственной точке A, а максимума – в любой точке отрезка BC; на рисунке 2.5 максимум достигается в точке A, минимума функция не имеет $(f \to -\infty)$; на рисунке 2.6 функция не имеет ни максимума $(f \to +\infty)$, ни минимума $(f \to -\infty)$.

Алгоритм решения задач линейного программирования графическим методом

1. Находим область допустимых решений системы ограничений задачи (ОДР).

2. Строим вектор $\bar{N}$.

3. Проводим прямую $c_1x_1+c_2x_2=0$, которая перпендикулярна $\bar{N}$.

4. Прямую $c_1x_1 + c_2x_2$=const перемещаем по направлению вектора $\bar{N}$ - для задач на максимум и в направлении, противоположном $\bar{N}$, - для задач на минимум.

Перемещение прямой $c_1x_1 + c_2x_2$=const производится до тех пор, пока у нее не окажется только одна общая точка с областью допустимых решений. Эта точка, определяющая единственное решение задачи ЛП, и будет точкой экстремума.

Если окажется, что прямая $c_1x_1 + c_2x_2$=const параллельна одной из сторон ОДР, то в таком случае экстремум достигается во всех точках соответствующей стороны (рис. 2.4), а задача ЛП будет иметь бесчисленное множество решений.

Задача ЛП может быть неразрешима, если определяющие ее ограничения окажутся противоречивыми.

5. Находим координаты точки экстремума и значение целевой функции в ней.

Пример. Фирма выпускает два вида мороженого: сливочное и шоколадное. Для изготовления мороженого используются два исходных продукта: молоко и наполнители, расходы которых (на 1 кг мороженого) и суточные запасы даны в таблице.

Исходный продукт	Расход исходных продуктов на 1 кг мороженого		Запас, кг
	Сливочное	Шоколадное	
Молоко	0,8	0,5	400
Наполнители	0,4	0,8	365

Изучение рынка сбыта показало, что суточный спрос на сливочное мороженое превышает спрос на шоколадное не более чем на 100 кг. Кроме того, установлено, что спрос на шоколадное мороженое не превышает 350 кг в сутки. Розничная цена 1 кг сливочного мороженого 16 р., шоколадного - 14 р.

Какое количество мороженого каждого вида должна производить фирма, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение. Обозначим через x_1 - суточный объем выпуска сливочного мороженого, кг; x_2 - суточный объем выпуска шоколадного мороженого, кг.

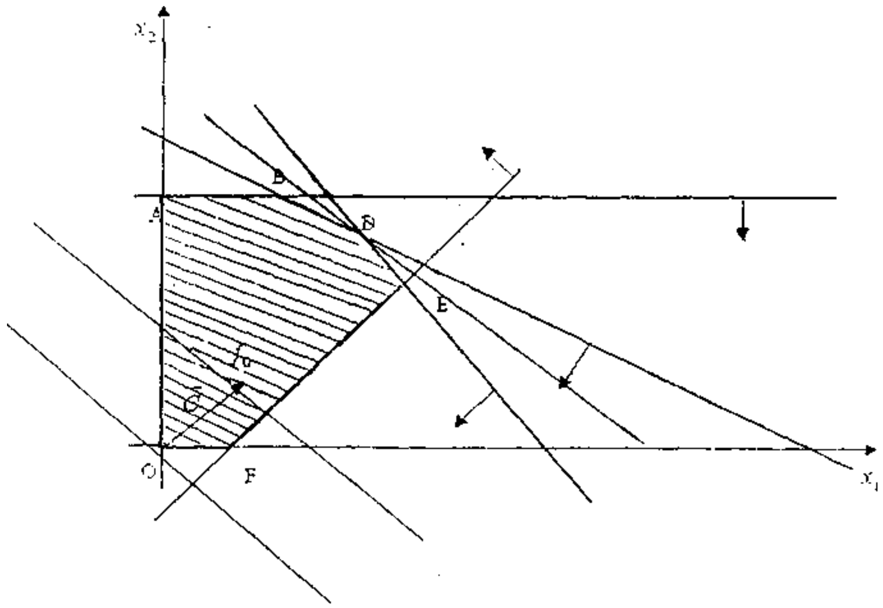
Составим математическую модель задачи.

Целевая функция будет иметь вид $f = 16x_1 + 14x_2 \to \max$ при ограничениях:

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 \le 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 \le 365, \\ x_1 - x_2 \le 100, \\ x_2 \le 350, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

На чертеже (рис. 2.1) строим область допустимых решений. Для этого наносим на чертеж границы области допустимых решений. Уравнение $0{,}8x_1+0{,}5x_2=400$ определяет прямую, которая делит всю числовую плоскость на две полуплоскости. Ограничение $0{,}8x_1+0{,}5x_2 \leq 400$ означает, что в искомую область входят точки, которые лежат «ниже» границы. Это легко проверить, подставив, например, координаты точки О (0;0) в данное неравенство, которое примет вид $O \leq 400$, то есть станет очевидным. Аналогично, но рассуждая и сопровождая рассуждения нанесением границ на плоскость чертежа, находим, что ОАВДЕF - область допустимых решений.



$$f_0 : 16x_1 + 14x_2 = const$$

Строим вектор $\bar{N}$=(16,14) и прямую $16x_1 + 14x_2 = 0$.

Перемещаем прямую по направлению вектора $\bar{N}$. Точкой выхода из области допустимых решений является точка *D*, ее координаты определяются как пересечение прямых, заданных уравнениями

$$\begin{cases} 0{,}8x_1 + 0{,}5x_2 = 400, \\ 0{,}4x_1 + 0{,}8x_2 = 365. \end{cases}$$

Решая систему, получим координаты точки D(312,5;300), в которой и будет оптимальное решение, то есть x_1 = 312,5; x_2 = 300. При этом $f_{max}=16\cdot312{,}5+14\cdot300=9200$ (р.).

Таким образом, фирма должна выпускать в сутки 312,5 кг сливочного мороженого и 300 кг шоколадного мороженого, при этом доход от реализации составит 9200 р.

3. РЕШЕНИЕ МНОГОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЛП С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРА

Рассмотренный выше графический способ применим к весьма узкому классу задач линейного программирования: эффективно им можно решать задачи, содержащие не более двух переменных. Если же переменных более двух, то изобразить на чертеже и визуально проанализировать положение линий уровня целевой функции затруднительно. Хотя с геометрической точки зрения поиск оптимального решения в n-мерном пространстве можно трактовать как вычисление значений целевой функции в вершинах многогранника и выбор в качестве решения координат той вершины, в которой целевая функция имеет максимальное (минимальное) значение. Поскольку число вершин многогранника, являющегося областью принятия решения, конечно, то через конечное число шагов будет либо найден оптимальный план, либо установлена неразрешимость задачи. Несмотря на то, что количество шагов при решении задачи ЛП конечно, требуется выполнить довольно много вычислений, поэтому желательно осуществлять решение с помощью компьютера, например так, как это показано ниже.

Пример. На предприятии освоены четыре технологии. Цены реализации единицы продукции, произведенной по каждой из технологий, запасы трех видов сырья (A, B, C) и расход сырья на единицу продукции по разным технологиям приведены в таблице.

Вид сырья	Запасы, т	Расход сырья по технологиям, т/ед.			
		I	II	III	IV
A	150	1	1	1	1
B	600	2	2	3	3
C	400	3	4	3	5
Цена реализации, тыс. р./ед.		2	3	3	4

Составить план выпуска продукции, дающий максимальную прибыль.

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество единиц выпускаемой продукции по I, II, III и IV технологиям соответственно. Ясно, что $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$, $x_4 \geq 0$.

Ограничения по виду сырья A можно выразить соотношением

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 150.$$

Ограничения по виду сырья B –

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 600.$$

Ограничения по виду сырья C –

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 400.$$

Требование максимизации прибыли определяет целевую функцию:

$$f\left(x\right) = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to (\max).$$

Требуется найти x_1, x_2, x_3, x_4, максимизирующие целевую функцию и удовлетворяющие ограничениям.

Решить задачу линейного программирования:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 150 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le 600 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 \le 400 \\ x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,4}\right) \end{cases}$$

$$f = 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to \max.$$

Решим эту задачу с помощью Excel. Введем следующую таблицу, составленную из коэффициентов задачи.

	A	B	C	D	E	F
1	1	1	1	1		150
2	2	2	3	3		600
3	3	4	3	5		400
4	2	3	3	4		
5	x_1					
6	x_2					
7	x_3					
8	x_4					
9	f					

Ячейки B5, B6, B7, B8, B9 зарезервированы для значений x_1, x_2, x_3, x_4, f соответственно.

В ячейку E1 ввести: =A1×B5+B1×B6+C1×B7+D1×B8<enter>

(Формула начинается со знака =)

В ячейку E2 ввести: =A2×B5+B2×B6+C2×B7+D2×B8 < enter >

В ячейку E3 ввести: =A3×B5+B3×B6+C3×B7+D3×B8 < enter >

В ячейку B9 ввести: = A4×B5+B4×B6+C4×B7+D4×B8 < enter >

Далее вызывается Сервис/Поиск решения. В появившемся окне Поиск решения необходимо задать:

- в поле «Установить целевую ячейку» ввести B9;
- максимальное значение;
- в поле «Измение ячейки» ввести B5:
- для задания ограничений нажмите кнопку «Добавить» в окне Поиск решения.

В результате откроется окно Добавление ограничения.

Введем: E1<=F1/ Добавить.

Введем: E2<=F2/ Добавить.

Введем: E3<=F3/ Добавить.

Введем: B5>=0/ Добавить.

Введем: B6>=0/ Добавить.

Введем: B7>=0/ Добавить.

Введем: B8>=0/ Добавить.

Далее нажимаем «Выполнить».

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2=0$, $x_3= 133$, $x_4 = 0$, f =400 (тыс. р.).

4. ПОСТАНОВКА ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ

Транспортная задача - одна из распространенных задач линейного программирования. Ее цель - разработка наиболее рациональных путей и способов транспортирования товаров, устранение чрезмерно дальних, встречных, повторных перевозок. Все это сокращает время продвижения товаров, уменьшает затраты предприятий, фирм, связанные с осуществлением процессов снабжения сырьем, материалами, топливом, оборудованием и т.д.

В общем виде задачу можно представить следующим образом: в m пунктах производства A_1, A_2, ..., A_m имеется однородный груз в количестве соответственно a_1, a_2, ..., a_m. Этот груз необходимо доставить в n пунктов назначения B_1, B_2, ..., B_n в количестве соответственно b_1, b_2, ..., b_n. Стоимость перевозки единицы груза (тариф) из пункта A_i в пункт B_j равна c_{ij}.

Требуется составить план перевозок, позволяющий вывезти все грузы и имеющий минимальную стоимость.

В зависимости от соотношения между суммарными запасами груза и суммарными потребностями в нем транспортные задачи могут быть закрытыми и открытыми.

Определение. Если $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, то задача называется закрытой, а в противном случае - открытой.

Обозначим через x_{ij} количество груза, перевозимого из пункта A_i в пункт B_j. Рассмотрим закрытую транспортную задачу. Ее условия запишем в распределительную таблицу, которую будем использовать для нахождения решения.

Математическая модель закрытой транспортной задачи имеет вид:

$$f = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

при ограничениях $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$, $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$, $x_{ij} \ge 0$, $\quad i = \overline{1, m}$, $\quad j = \overline{1, n}$.

Оптимальным решением задачи является матрица $X_{opt}=(x_{ij})_{m\times n}$, удовлетворяющая системе ограничений и доставляющая минимум целевой функции.

4.1. Нахождение исходного решения транспортной задачи

Условия задачи и ее исходное решение будем записывать в распределительную таблицу. Клетки, в которые поместим грузы, называются занятыми, остальные клетки - незанятыми, или пустыми. В верхнем правом углу каждой клетки будем записывать тарифы. Существует несколько способов нахождения исходного решения.

Рассмотрим один из них - метод минимального тарифа (элемента). Согласно этому методу, грузы распределяются в первую очередь в те клетки, в которых находится минимальный тариф перевозок c_{ij}.

Далее поставки распределяются в незанятые клетки с наименьшими тарифами с учетом оставшихся запасов у поставщиков и удовлетворения спроса потребителей. Процесс распределения продолжается до тех пор, пока все грузы от поставщиков не будут вывезены, а потребители не будут удовлетворены. При распределении грузов может оказаться, что количество занятых клеток меньше, чем $m + n - 1$. В этом случае недостающее их число заполняется клетками с нулевыми поставками, такие клетки называют условно занятыми.

Нулевые поставки помещают в незанятые клетки с учетом наименьшего тарифа таким образом, чтобы в каждых строке и столбце было не менее чем по одной занятой клетке.

Рассмотрим нахождение исходного решения транспортной задачи на конкретном примере.

Пример. На складах A_1, A_2, A_3 имеются запасы продукции в количествах 90, 400 и 110 т соответственно. Потребители B_1,B_2,B_3 должны получить эту продукцию в количествах 140 г, 300 г и 160 т соответственно. Найти такой вариант прикрепления поставщиков к потребителям, при котором сумма затрат на перевозку была бы минимальной. Расходы по перевозке 1 т продукции заданы матрицей С:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверим, является ли данная транспортная задача закрытой:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 90 + 400 + 110 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{j=1}^{3} b_j = 140 + 300 + 160 = 600 \text{ т},$$

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{3} b_j.$$

Следовательно, данная транспортная задача закрытая. Найдем исходное решение по методу минимального тарифа.

a_i	b_j	1	2	3
		140	300	160
1	90	2 90	5	2
2	400	4	1 300	5 100
3	110	3 50	6	8 60

Число занятых клеток в таблице, приведенной выше, равно $m+n-1=3+3-1=5$, то есть условие невырожденности выполнено. Получили исходное решение, которое запишем в виде матрицы

$$X_1=\begin{pmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 160 \\ 50 & 0 & 60 \end{pmatrix}.$$

Стоимость перевозки при исходном решении составляет

$$f_1=90\cdot 2+300\cdot 1+100\cdot 5+50\cdot 3+60\cdot 8=1610\,.$$

4.2. Проверка найденного решения транспортной задачи на оптимальность

Найденное исходное решение проверяется на оптимальность методом потенциалов по следующему критерию: если решение транспортной задачи является оптимальным, то ему соответствует система m+n действительных чисел α_i и β_j, удовлетворяющих условиям $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$ для занятых клеток и $\alpha_i+\beta_j\le c_{ij}$ - для свободных клеток. Числа α_i и β_j называются потенциалами. В распределительную таблицу добавляют строку α и столбец β.

Потенциалы α_i и β_j находят из равенства $\alpha_i+\beta_j=c_{ij}$, справедливого для занятых клеток. Одному из потенциалов дается произвольное значение, например $\alpha_i=0$, тогда остальные потенциалы определяются однозначно. Так, если известен потенциал α_i, то $\beta_j=c_{ij}-\alpha_i$; если известен потенциал β_j, то $\alpha_i=c_{ij}-\beta_j$.

Обозначим $\Delta_{ij}=\alpha_i+\beta_j-c_{ij}$. Эту оценку называют оценкой свободных клеток. Если $\Delta_{ij}\le 0$, то опорное решение является оптимальным. Если хотя бы одна из оценок $\Delta_{ij}>0$, то решение не является оптимальным и его можно улучшить, перейдя от одного решения к другому.

Проверим найденное решение на оптимальность, добавив в распределительную таблицу, приведенную ниже, столбец α и строку β.

Полагая $\alpha_i=0$, запишем это значение в последнем столбце таблицы.

a_i \ b_j		1	2	3	α_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
	β_j	2	3	7	

Рассмотрим занятую клетку первой строки, которая расположена в первом столбце (1, 1), для нее выполняется условие $\alpha_1 + \beta_1 = 2$, откуда $\beta_1 = 2$. Это значение запишем в последней строке таблицы. Далее надо рассматривать ту из занятых клеток таблицы, для которой один из потенциалов известен. Рассмотрим занятую клетку (3,1):

$\alpha_3 + \beta_1 = 3, \quad \beta_1 = 2,$ откуда $\alpha_3 = 1$.

Для клетки (3,3): $\alpha_3 + \beta_3 = 8, \quad \alpha_3 = 1, \quad \beta_3 = 7$.

Для клетки (2,3): $\alpha_2 + \beta_3 = 5, \quad \beta_3 = 7, \quad \alpha_2 = -2$.

Для клетки (2,2): $\alpha_2 + \beta_2 = 1, \quad \alpha_2 = -2, \quad \beta_2 = 3$.

Найденные значения потенциалов заносим в таблицу. Вычисляем оценки свободных клеток:

$$\Delta_{12} = \alpha_1 + \beta_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$

$$\Delta_{13} = \alpha_1 + \beta_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$

$$\Delta_{21} = \alpha_2 + \beta_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$

$$\Delta_{32} = \alpha_3 + \beta_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

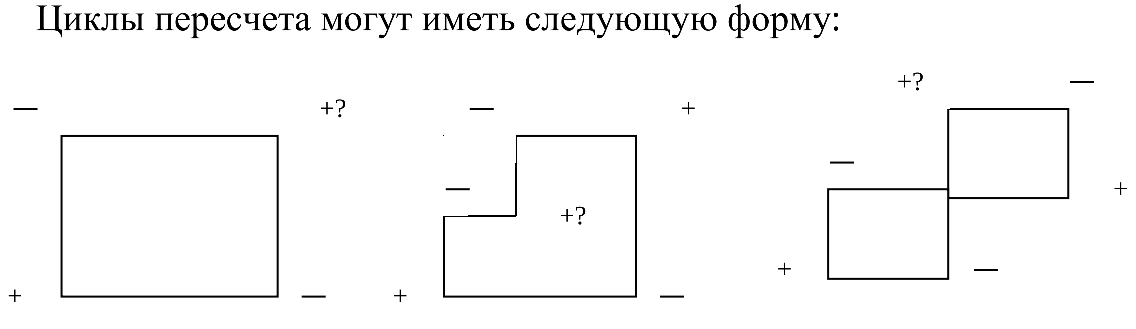
Получили одну оценку $\Delta_{13} = 5 > 0$, следовательно, исходное решение не является оптимальным и его можно улучшить.

4.3. Переход от одного решения транспортной задачи к другому

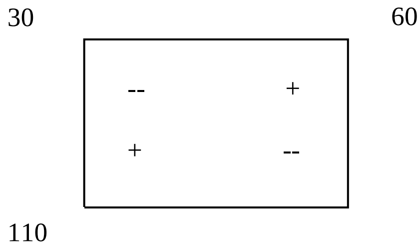
Наличие положительной оценки свободной клетки $(\Delta_{ij} > 0)$ при проверке решения на оптимальность свидетельствует о том, что полученное решение не оптимально и для уменьшения значения целевой функции надо перейти к другому решению. При этом надо перераспределить грузы, перемещая их из занятых клеток в свободные. Свободная клетка становится занятой, а одна из ранее занятых клеток - свободной.

Для свободной клетки с $\Delta_{ij} > 0$ строится цикл (цепь, многоугольник), все вершины которого, кроме одной, находятся в занятых клетках; углы прямые, число вершин четное. Около свободной клетки цикла ставится знак (+), затем поочередно проставляют знаки (-) и (+). У вершин со знаком (-) выбирают минимальный груз, его прибавляют к грузам, стоящим у вершин со знаком (+), и отнимают от грузов у вершин со знаком (-). В результате перераспределения груза получим новое решение. Это решение проверяем на оптимальность, и так далее до тех пор, пока не получим оптимальное решение.

Циклы пересчета могут иметь следующую форму:



Строим цикл для клетки (1,3), имеющей положительную оценку. У вершин цикла ставим знаки (+) и (-) и записываем грузы:



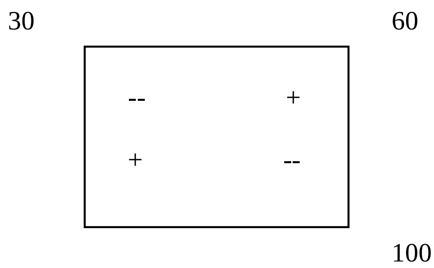
Новое решение: $X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Проверим полученное решение на оптимальность. Для этого запишем его в распределительную таблицу, приведенную ниже, найдем потенциалы занятых и оценки свободных клеток.

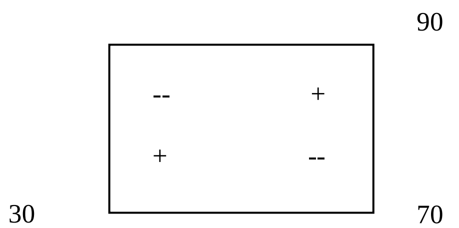
a_i	b_j	1	2	3	α_i
		140	300	160	
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	3
3	110	3 110	6	8	2
	β_j	2	-2	2	

Имеем $\Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{21} = 1 > 0, \quad \Delta_{32} = -7, \quad \Delta_{33} = -5.$

Построим цикл для клетки с положительной оценкой:



Произведем перераспределение грузов:



Получим новое решение, которое занесем в нижеследующую таблицу. Проверим его на оптимальность.

a_i \ b_j		1	2	3	α_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2 90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
	β_j	1	-2	2	

Получим $\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$

Все оценки свободных клеток отрицательные, следовательно, найденное решение оптимальное. Итак,

$$X_{\text{опт}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стоимость транспортных расходов равна
$f_{\min} = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280.$

По сравнению с исходным решением, транспортные расходы уменьшились на 1610-1280=330 усл. ед.

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ СТУДЕНТОВ

1. Компания производит полки для ванных комнат двух размеров - А и В. Агенты по продаже считают, что за неделю на рынке может быть реализовано до 550 полок. Для каждой полки типа А требуется 2 м^2 материала, для полки типа В — 3 м^2 материала. Компания может получить до 1200 м^2 материала в неделю. Для изготовления одной полки типа А требуется 12 мин. работы оборудования, а для изготовления одной полки типа В -30 мин. Оборудование можно использовать 160 час. в неделю. Если прибыль от продажи полок типа А составляет 8 долл., а от полок типа В — 4 долл., то сколько полок надо выпускать в неделю, чтобы получить максимальную прибыль?

Как изменится производственная программа, если рынок не сможет принимать в неделю более 450 полок? Какова в этом случае будет максимальная прибыль?

Ответ: 1750; 1583.

2. Производитель элементов центрального отопления изготовляет радиаторы четырех моделей. Ограничения на производство обусловлены количеством рабочей силы и количеством стальных листов, из которых изготавливают радиаторы.

Модель радиатора	A	B	C	D
Необходимое количество рабочей силы, человеко-часы	0,5	1,5	2	1,5
Необходимое количество стального листа, м^2	4	2	6	8
Прибыль от продажи одного радиатора, долл.	5	5	12,5	10

Количество стального листа - не более 2500 м^2, количество человеко-часов - не более 500. Решите эту задачу с максимизацией прибыли в качестве целевой функции.

Ответ: 6250.

3. Фирма производит три вида продукции (A, B, C), для выпуска каждого из которых требуется определенное время обработки на всех четырех устройствах I**,** II, III, IV.

Вид продукции	Время обработки				Прибыль, долл.
	I	II	III	IV	
A	1	3	1	2	3
B	6	1	3	3	6
C	3	3	2	4	4

Пусть время работы на устройствах – соответственно 84, 42, 21 и 42 часа. Определите, какую продукцию и в каких количествах следует производить. Рынок сбыта для каждого продукта неограничен. Временем, требуемым для переключения устройства в зависимости от вида продукции, можно пренебречь. Рассмотреть задачу максимизации прибыли.

Ответ: 60,75.

4. Фирма производит два продукта A и B, рынок сбыта которых неограничен. Каждый продукт должен быть обработан каждой из машин I, II и III. Время обработки в часах для каждого из изделий A и B приведено ниже:

	I	II	III
A	0,5	0,4	0,2
B	0,25	0,3	0,4

Время работы машин I, II, III, соответственно, 40, 36 и 36 часов в неделю. Прибыль от изделий A и B составляет 5 и 3 долл.

Фирме надо определить недельные нормы выпуска изделий A и B, максимизирующие прибыль. Сформулируйте эту задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

Ответ: 420.

5. Прибыль от изделий A, B, C составляет, соответственно, 3, 4, 5 единиц. Для каждого изделия требуется время использования станка I и II**,** которые доступны, соответственно, 12 и 15 часов в день:

	A	B	C
I	2	3	3
II	4	1	2

Найдите оптимальный план производства.

Ответ: 20.

6. Два изделия B1 и B2 последовательно обрабатываются на станках N1, 2, 3, 4, 5. Машинное время на единицу изделий на каждом станке указано в таблице. Здесь же приведена прибыль от каждого изделия, причем объем производства второго вида продукции не должен превышать 40% общего выпуска.

Определить оптимальную программу выпуска, обеспечивающую максимальную прибыль.

Номер полуфабриката	Номер рабочего места					Прибыль, руб./шт.
	1	2	3	4	5	
1	4	3	2	3	0	1
2	2	0	6	5	4	1,5
Недельный фонд рабочего времени, мин.	352	240	330	420	400	

Решите задачу графически.

Ответ: 110.

7. На предприятии могут изготавливать два вида продукции i_1 и i_2. На выпуск единицы продукции i_1 расходуется 3 единицы ресурса, а на единицу продукта i_2 — 1 единица того же ресурса. В плановом периоде в распоряжении предприятия имеется 300 единиц этого же ресурса. Ограничение по выпуску продукции первой и высшей категории качества выглядит следующим образом: $-3x_1 + 4x_2 \leq 0$. При этом требуется, чтобы продукции i_1 было выпущено не менее 40 единиц. Предприятие желает получить максимальную прибыль.

Каждое изделие вида i_1 дает 3 долл. прибыли, каждое изделие вида i_2 дает 4 долл. прибыли. Решите эту задачу графически.

Ответ: 480.

8. В цехе имеется 6 типов рабочих мест. В соответствии с оптимальной производственной программой на следующей неделе в цехе должны изготовлять 7 типов полуфабрикатов. Производство единицы каждого полуфабриката увеличивает фонд материального поощрения. Размер прибыли от единицы каждого вида полуфабриката, время, затрачиваемое на изготовление каждого полуфабриката на каждом рабочем месте, недельный фонд; рабочего времени на каждом рабочем месте указаны в таблице.

Номер полуфабриката	Номер рабочего места						Прибыль от единицы полуфабриката, тыс.руб./шт.
1	2						3
	1	2	3	4	5	6	
1	5	7	15	2	3	14	0,10
2	2	0	6	7	3	2	0,115
3	5	5	4	1	1	10	0,120
4	4	8	7	0	8	5	0,090
5	3	1	7	2	4	0	0,065
6	6	0	4	3	1	8	0,080
7	10	2	1	11	10	7	0,160
Недельный фонд рабочего времени, тыс.мин.	21	18	27	16,8	18,6	24	

Выпуск полуфабрикатов №5 не должен быть меньше 15%, а №7 - не больше 7% от общего объема производства. Определите оптимальную программу выпуска продукции, обеспечивающую максимальную прибыль.

Ответ: 527,442.

9. Небольшая фирма производит два типа подшипников А и В, каждый из которых должен быть обработан на трех станках, а именно токарном, шлифовальном и сверлильном. Время, требуемое для каждой из стадий производственного процесса, приведено в таблице.

Тип подшипника	Время обработки, ч			Прибыль от продажи одного подшипника, руб.
	Токарный станок	Шлифовальный станок	Сверлильный станок	
А	0,01	0,02	0,04	80
В	0,02	0,01	0.01	125
Полное возможное время работы в неделю, ч	160	120	150	

Фирма хотела бы производить подшипники в количествах, максимизирующих прибыль. Сформулируйте задачу как задачу линейного программирования и решите ее.

Ответ: 1035000.

10. Фирма производит три вида продукции, используя для этого два вида ресурсов. Технологическая матрица задана в виде таблицы:

	Продукт 1	Продукт 2	Продукт 3
Ресурс 1	1	2	0
Ресурс 2	2	3	I

Фирма имеет в своем распоряжении 20 единиц 1-ресурса и 25 единиц 2-го ресурса; цены, по которым предполагает реализовать свою продукцию фирма, равны 15, 20, 30 тыс.руб. за 1-й, 2-й и 3-й товар, соответственно. Фирма желает получить максимальный доход.

Ответ: 750.

11. Средства очистки пола оценивают по следующим трем показателям:

А) очищающие свойства;

Б) дезинфицирующие свойства;

В) раздражающее воздействие на кожу.

Каждый из этих показателей измеряется по линейной шкале от 0 до 100.

Продукт на рынке должен иметь по крайней мере 6 единиц очищающих свойств и по крайней мере 60 единиц дезинфицирующих свойств по соответствующе шкале. При этом раздражающее воздействие на кожу должно быть минимальным. Конечный продукт должен быть смесью трех основных очистителей, характеристики которых приводятся ниже:

Очиститель	Очищающие свойства	Дезинфицирующие свойства	Раздражающие свойства
А	90	30	70
В	65	85	50
С	45	70	10

Сформулируйте задачу нахождения оптимальной смеси как задачу линейного программирования и решите ее.

Ответ: 31,35.

12. Фирма специализируется на производстве мебели для жилых помещений. Она может производить три типа мебельных гарнитуров А, В, С, что требует различных затрат труда на каждой стадии производства:

«Производственный» участок	Затраты труда, чел-ч		
	А	В	С
Лесопилка	1	2	4
Сборочный цех	2	4	2
Отделочный цех	1	1	2

В течение недели можно планировать работу на лесопилке на 360 чел-ч, в сборочном цехе - на 250 чел-ч, в от-, елочном цехе — на 220 чел-ч. Прибыль от продажи каждого типа гарнитуров А, В, С составляет, соответственно,900, 1100 и 1500 долл.

А- Определите избыток чел-ч работы на лесопилке, сборочном цехе, в отделочном цехе.

Б. Для выполнения обязательств по организации интерьера гостиниц необходимо производить, по крайней мере, 40 гарнитуров типа С еженедельно. Как это дополнительное требование повлияет на план производства? Как при этом изменится размер прибыли предприятия?

Ответ: 159500.

13. Фирма производит на фабрике четыре сорта изделий. Производство лимитируется временем использования станков и количеством комплектующих изделий. Известно также, что суммарное время использования станков - 90 ч в день, а комплектующих изделий может быть поставлено не более 80 в день.

Производственные характеристики	Изделие			
	1	2	**3**	4
Время использования станка, ч	1	**3**	8	4
Количество комплектующих изделий	2	*2*	1	3
Себестоимость изделия, ден. ед.	20	25	40	85*I*
Доход от продажи, ден. ед.	30	45	80	45

Определите производственную программу для получения максимальной прибыли.

А. Фирма может увеличить время работы станков до 100 ч, при этом себестоимость каждого изделия всех четырех видов увеличится на 10 ден.ед. Какова будет прибыль фирмы в этом случае? Изменится ли производственная программа?

Б. Беспорядки на заводе одного из потребителей приводят к тому, что дневной выпуск изделия 4 сокращен до 15 единиц. Как это повлияет на производственный план и размер прибыли фирмы?

Ответ: 900; 1000; 837,5.

14. Фирма, выпускающая трикотажные изделия, использует для производства продукции два вида сырья. Все необходимые данные приведены в таблице.

Сырье	Запас сырья, кг	Затраты на единицу продукции		
		свитер	пуловер	костюм
Чистая шерсть	160	0,4	0,2	0,8
Силон	60	0,2	0,1	0,2
Прибыль за изделие, ден. ед.		16	15	22

Записать в математической форме условия выпуска готовой продукции, если сырье расходуется полностью, а прибыль должна быть максимальной.

Ответ: 8200.

15. Цех производит изделия А и Б. За смену не может использоваться более 540 ед. оборудования, более 550 ед, сырья и более 450 ед. электроэнергии. Расход ресурсов на одно изделие указан в таблице. От реализации изделия А прибыль составляет 80 ден. ед., изделия Б – 70 ден. ед. Каков должен быть минимальный выпуск продукции, чтобы обеспечить прибыль не менее 2800 ден. ед?

Ресурсы	Изделия	
	А	Б
Оборудование	2	3
Сырье	1	4
Электроэнергия	2	1,5

Ответ: 35.

16. В торговом зале необходимо выставить для продажи товары Т1 и Т2. Рабочее время продавцов не превышает 360 часов, а площадь торгового зала, которую можно занять, не превышает 120 м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль, соответственно, в 50 и 80 ден. ед. Нормы затрат ресурсов на единицу проданного товара приведены в таблице.

Ресурсы	Товары	
	Т1	Т2
Рабочее время, ч	0,4	0,6
Площадь, м^2	0,2	0,1

Записать в математической форме условия, которым должна удовлетворять структура товарооборота, обеспечивающая прибыль не менее 40000 ден. ед.

Ответ: 500.

17. Компания производит различные типы мебели для кабинетов. Она производит столы трех типов (1, 2, 3). Объем работы, необходимой для каждой операции, приводится в таблице:

Операция	Объем работы, чел-ч		
	1	2	3
Изготовление частей	2	3	2
Сборка	1	2	3
Полировка и проверка	1	1	2

Максимум объема работ в неделю составляет 36 чел-ч на изготовление частей стола, 240 чел-ч — на сборку и 180 чел-ч — на полировку. Рынок сбыта расширяется, но он недолговечен, а возможности хранения ограничивают производство 170 столами в неделю. Прибыль от продажи столов типов 1, 2, 3 составляет, соответственно, 15, 22 и 19 долл. Определите оптимальный план производства.

А. Как изменится оптимальный план производства, если для удовлетворения потребностей ценного клиента необходимо выпускать не менее 30 столов типа 3 в неделю?

Б. Как изменится оптимальный план производства, если из-за беспорядков на участке изготовления частей стола объем работ в неделю сократился вдвое?

Ответ: 2760; 2580; 1650.

18. Фабрика производит два основных типа товара. Изделию типа I требуется 3 единицы сырья А и единица сырья В. Оно приносит прибыль 3 единицы. Изделию типа II требуется 4 единицы сырья А и 3 единицы сырья В. Оно приносит прибыль в 2 единицы. Найдите оптимальный план производства, если доступны всего 20 единиц сырья А и 10 единиц сырья В.

Как изменится оптимальный план производства, окажется доступной еще одна единица сырья А, а затем и еще одна единица сырья В?

Ответ: 20; 21; 21.

19. Требуется определить план выпуска четырех видов продукции П1, П2, П3, П4, для изготовления которых необходимы ресурсы трех типов: трудовые, материальные, финансовые. Нормы расхода ресурса, количество каждого вида ресурса указаны в таблице. Исходя из требований спроса, заданы нижние и верхние предельные границы выпуска каждого вида продукции. На основании приведенных исходных данных составить математическую модель для определения плана выпуска продукции с целью получения максимальной прибыли.

Ресурсы		Вид продукции				Располагаемый ресурс
		П1	П2	П3	П4	
Трудовые		1	2	3	4	40
Материальные		б	5	4	3	110
Финансовые		4	6	8	12	100
Граница:	нижняя	12		2	3	-
	верхняя	-	-	-	3	-
Прибыль		60	70	120	130	

Ответ: 1350.

20. Фирме требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с примесью пепла не более 3,25%. Доступны сорта угля А, В, С по следующим ценам (за тонну):

Сорт угля	Содержание примеси фосфора, %	Содержание примеси пепла, %	Цена, долл
А	0,06	2,0	30
В	0,04	4,0	30
С	0,02	3,0	45

Как их следует смешать, чтобы удовлетворить ограничениям на примеси и минимизировать цену?

Ответ: 38,75.

6. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОВЕРКИ ОСТАТОЧНЫХ ЗНАНИЙ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Задачи 1-10. Решить графически задачу линейного программирования.

$$1.\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 24 \\ 2x_1 + x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$2.\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 \le 12 \\ x_1 \le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$z = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$3.\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 4x_1 - x_2 \le 8 \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$4.\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$5.\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$6.\begin{cases} x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \le 5 \\ 2x_1 + x \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$7.\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = 4x_1 + x_2 \to \max$$

$$8.\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 4 \\ x_1 + 3x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = 3x_1 + x_2 \to \max$$

$$9.\begin{cases} x_1 + 4x_2 \ge 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 18 \\ 4x_1 + x_2 \ge 4 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = x_1 + x_2 \to \max$$

$$10.\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 12 \\ x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ 2x_1 + x_2 \ge 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$z = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

Задачи 11-20. На трех базах A_1, A_2, A_3 имеется однородный груз в количестве a_1, a_2, a_3 единиц. Этот груз нужно перевезти в пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 в количестве b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 единиц соответственно. Затраты на перевозку груза между пунктами поставок и потребления заданы матрицей тарифов С:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \end{pmatrix}$$

Спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

11. $a_1 = 250, a_2 = 200, a_3 = 150,$
$b_1 = 180, b_2 = 120, b_3 = 80,$
$b_4 = 115, b_5 = 105,$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 22 & 10 & 15 \\ 16 & 4 & 15 & 13 & 21 \\ 19 & 18 & 26 & 16 & 20 \end{pmatrix}.$$

12. $a_1 = 150, a_2 = 230, a_3 = 220,$
$b_1 = 170, b_2 = 130, b_3 = 90,$
$b_4 = 100, b_5 = 110,$

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 6 & 5 & 9 & 5 \\ 17 & 10 & 8 & 11 & 4 \\ 15 & 11 & 7 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

13. $a_1 = 300, a_2 = 400, a_3 = 300,$
$b_1 = 170, b_2 = 230, b_3 = 220,$
$b_4 = 180, b_5 = 200,$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 13 & 19 & 17 & 8 \\ 7 & 10 & 15 & 6 & 14 \\ 24 & 20 & 19 & 18 & 16 \end{pmatrix}.$$

14. $a_1 = 270, a_2 = 300, a_3 = 230,$
$b_1 = 170, b_2 = 110, b_3 = 200,$
$b_4 = 140, b_5 = 180,$

$$C = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 7 & 18 & 10 \\ 35 & 13 & 12 & 15 & 3 \\ 30 & 16 & 11 & 25 & 16 \end{pmatrix}.$$

15. $a_1 = 200, a_2 = 150, a_3 = 150,$
$b_1 = 100, b_2 = 90, b_3 = 80,$
$b_4 = 120, b_5 = 110,$

$$C = \begin{pmatrix} 12 & 15 & 20 & 14 & 18 \\ 14 & 8 & 15 & 11 & 20 \\ 20 & 15 & 25 & 12 & 19 \end{pmatrix}.$$

16. $a_1 = 400, a_2 = 300, a_3 = 300,$
$b_1 = 190, b_2 = 180, b_3 = 220,$
$b_4 = 225, b_5 = 185,$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 9 & 16 & 12 & 17 \\ 14 & 25 & 13 & 14 & 22 \\ 20 & 18 & 14 & 19 & 21 \end{pmatrix}.$$

17. $a_1 = 200, a_2 = 240, a_3 = 160,$
$b_1 = 130, b_2 = 170, b_3 = 100,$
$b_4 = 90, b_5 = 110,$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 17 & 11 & 8 \\ 13 & 4 & 9 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 14 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

18. $a_1 = 240, a_2 = 400, a_3 = 360,$
$b_1 = 300, b_2 = 160, b_3 = 220,$
$b_4 = 180, b_5 = 140,$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 35 & 20 & 8 \\ 15 & 35 & 12 & 10 & 6 \\ 16 & 19 & 36 & 15 & 24 \end{pmatrix}.$$

19. $a_1 = 150, a_2 = 210, a_3 = 140,$
$b_1 = 160, b_2 = 60, b_3 = 100,$
$b_4 = 80, b_5 = 100,$

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 20 & 6 & 11 & 16 \\ 5 & 14 & 12 & 15 & 18 \\ 15 & 22 & 11 & 13 & 20 \end{pmatrix}.$$

20. $a_1 = 350, a_2 = 400, a_3 = 250,$
$b_1 = 175, b_2 = 225, b_3 = 240,$
$b_4 = 160, b_5 = 200,$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 15 & 18 & 16 & 8 \\ 6 & 10 & 15 & 6 & 4 \\ 25 & 20 & 10 & 15 & 18 \end{pmatrix}.$$

Задачи 21-30. Составить экономико-математическую модель. Найти решение задачи линейного программирования при помощи средств Excel на ПК.

21. Трикотажная фабрика использует для производства свитеров и кофточек, жилетов и шапочек чистую шерсть, силон, нитрон, запасы которых составляют соответственно 1000, 500 и 400 кг. Количество пряжи каждого вида, необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, получаемая от их реализации, приведены в таблице. Установить план выпуска изделий, максимизирующий прибыль.

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 шт. изделий, кг			
	Свитера	Кофточки	Жилеты	Шапочки
Шерсть	4	2	3	1
Силон	2	1	1,5	0,5
Нитрон	1	1	0,5	0,5
Прибыль	6	5	5	1

22. Торговое предприятие реализует товары T_1, T_2, T_3, T_4, используя при этом площади торговых залов, оборудование и время обслуживающего персонала. Затраты на продажу одной партии товара каждого вида, их объемы и прибыль, получаемая от реализации каждой партии товара, приведены в таблице. Найти оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую предприятию максимальную прибыль.

Ресурсы	Запас ресурса	Затраты ресурсов на товары			
		T_1	T_2	T_3	T_4
Время, чел.-ч	370	0,5	0,7	0,6	0,5
Оборудование, маш.-ч	100	0,3	0,4	0,2	0,3
Площадь, м^2	90	0,1	0,3	0,2	0,2
Прибыль, ден. ед.		5	8	6	6

23. На предприятии освоены четыре технологии производства основной продукции. В таблице указаны запасы потребляемых ресурсов, затраты их в течение месяца и объемы выпуска готовой продукции. Установить такое время работы предприятия по каждой технологии, при котором выпуск продукции

будет максимальным, а расход ресурсов не превысит их наличия.

Ресурсы	Запасы ресурсов	Расход ресурса при технологии			
		I	II	III	IV
P_1	20	2	2	1	5
P_2	16	4	1	4	1
P_3	22	2	3	1	2
Объем выпуска продукции		6	3	4	5

24. Механический завод использует токарное, фрезерное и сварочное оборудование. Обработку детали можно вести по четырем технологиям. Полезный фонд времени работы каждой группы оборудования (в станкочасах), затраты времени на изготовление детали (в часах) и прибыль от выпуска каждой детали приведены в таблице. Составить оптимальный план загрузки оборудования, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Оборудование	Фонд времени, ч	Технология			
		I	II	III	IV
Токарное	37	3	1	1	2
Фрезерное	20	2	2	3	0
Сварочное	30	0	1	1	4
Прибыль, ден. ед.		11	6	9	6

25. При подкормке посева нужно внести на 1 га почвы не менее 10 ед. химического вещества А, 25 ед. вещества Б, 20 ед. вещества В. Сельскохозяйственное предприятие закупает комбинированные удобрения четырех видов (I, II, III, IV). В таблице указаны содержание химических веществ и цена за единицу массы каждого вида удобрений. Минимизировать расходы по закупке необходимого количества удобрений.

Химическое вещество	Содержание вещества в единице массы удобрения			
	I	II	III	IV
А	1	5	2	1
Б	12	3	3	2
В	4	4	2	2
Цена	5	3	2	3

26. Имеющийся фонд материалов M_1, M_2, M_3 нужно распределить между изготовителями продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$ так, чтобы получить максимальную прибыль. Нормы расходов материалов, запасы и прибыль, получаемая за единицу продукции, приведены в таблице.

Материал	Фонд материалов	Продукция			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
$М_1$	50000	0,7	0,9	1,5	2,3
$М_2$	28000	1,4	0,3	0,7	2,5
$М_3$	40000	0,5	2,1	1,8	0,7
Прибыль		5	7	6	9

27. Предприятие может выпускать продукцию четырех видов – $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$, сбыт любого количества которой обеспечен. При производстве продукции расходуются различные ресурсы, их запасы и удельные затраты приведены в таблице, там же указана и цена продукции. Найти оптимальный план выпуска продукции, максимизирующий выручку предприятия от ее реализации.

Ресурсы	Запасы ресурса	Продукция			
		$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
Трудовые ресурсы	4800	4	2	2	2
Полуфабрикаты	2400	2	10	6	0
Станочное оборудование	1500	1	0	2	1
Цена единицы продукции		65	70	60	120

28. В суточном рационе кормления крупного рогатого скота должно быть не менее 20 кормовых единиц, не менее 2000 г белков и не менее 100 г кальция. Для кормления используют сено, силос, корнеплоды и концентраты. Содержание питательных веществ в 1 кг каждого вида корма, а также его себестоимость представлены в таблице. Составить кормовой рацион минимальной стоимости.

Содержание питательных веществ в 1 кг корма	Корм			
	Сено	Силос	Корнеплоды	Концентрат
Кормовая единица	0,5	0,2	6	0,8
Белки, г	40	10	12	200
Кальций, г	5	4	3	1
Себестоимость 1 кг корма, ден.ед.	2	1	2	4

29. Имеется четыре проекта на строительство жилых домов. Расход стройматериалов, их запас и полезная площадь дома каждого проекта даны в таблице. Определить, сколько домов каждого проекта нужно построить, чтобы полезная площадь была наибольшей.

Стройматериалы	Запасы стройматериалов, $м^3$	Расход стройматериалов для проектов, $м^3$			
		I	II	III	IV
Кирпич силикатный	1365	7	3	2	2
Кирпич красный	1245	6	3	3	2
Пиломатериалы	650	1	2	5	5
Полезная площадь, $м^2$		70	50	60	50

30. Сельскохозяйственное предприятие может произвести закупку техники четырех марок для выполнения трех видов работ. Производительность техники, общий объем работ и стоимость каждого трактора приведены в таблице. Найти оптимальный вариант приобретения техники, обеспечивающий выполнение всех работ при минимальных затратах на технику.

Вид работ	Объем работ	Производительность техники для каждой модели			
		M_1	M_2	M_3	M_4
P_1	80	4	3	2	5
P_2	60	8	1	5	1
P_3	40	1	3	4	2
Стоимость единицы техники		7	2	5	3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баллод Б.А. Методы и алгоритмы принятия решений в экономике: учеб. пособие / Б.А. Баллод, Н.Н. Елизарова. – М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2009. – 224 с.: ил.

2. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций: учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по направлению 061800 «Математические методы в экономике»/ Б.Т. Кузнецов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 390 с. (35 экз.).

3. Просветов Г.И. Методы оптимизации. Учебно-практическое пособие. – М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2009. – 168 с. (10 экз.).

4. Шапкин А.С. Математические методы и модели исследования операций [Электронный ресурс]: Учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. – Электрон. дан. – М.: Дашков и К, 2009. – 400 с.

Обухова Галина Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ

Методическое пособие и задания к выполнению контрольной работы
для студентов дневной формы обучения направления подготовки
«Менеджмент»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 29.05.15. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 2,13. Тираж 30 экз. Зак. 151437. Рег. №68.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.