МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Е.В. НИКИТЕНКО

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие
для студентов дневной формы обучения направления
«Информатика и вычислительная техника»

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Информатика и вычислительная техника

Рубцовск 2019

УДК 517.972

Никитенко Е.В. Вариационное исчисление. Учебное пособие для студентов дневной формы обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2019. – 49 с.

Учебное пособие посвящено изложению основ вариационного исчисления. Рассмотрены основные понятия, определения и свойства объектов вариационного исчисления, приведены формулировки и доказательства основных утверждений. Рассмотрено большое количество примеров, способствующих усвоению материала.

Рассмотрено и одобрено на
заседании НМС РИИ
Протокол № 5 от 03.10. 2019 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор НГУ Г.В. Демиденко

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Годом рождения вариационного исчисления принято считать 1969, когда И. Бернулли поставил перед математиками задачу о кривой наикратчайшего спуска или брахистохроне, которой оказалась циклоида.

В 1744 году вышел труд его ученика Л. Эйлера, в котором были заложены основы нового раздела математического анализа. В частности, было выведено дифференциальное второго порядка которому должны были удовлетворять экстремали. Данное уравнение было названо *уравнением Эйлера*.

В 1759 году выходит в свет первая работа Лагранжа, в которой он варьирует кривую, подозреваемую на экстремум. Впоследствии метод Лагранжа становится общепринятым и по предложению Эйлера весь раздел математики, в котором применялся метод Лагранжа, стали называть *вариационным исчислением*.

Настоящее пособие представляет собой введение в вариационное исчисление, знакомство с его основами. Приводятся необходимые и достаточные условия достижения экстремума функционалами различного вида.

Автор выражает благодарность студентке А.Е. Бобровой за помощь при наборе практического материала.

ГЛАВА 1. ПРОСТЕЙШАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

§1. Экстремум функционала

Напомним, что *функционалом* J, заданном на некотором множестве M называют *отображение* $J: M \longrightarrow R$ множества M в множество R действительных чисел.

Рассмотрим задачу о поиске локального экстремума интегрального *функционала*

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx,$$

на множестве функций $y(x) \in C^1[a, b]$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = y_a,\ y(b) = y_b.$$

Данную простейшую задачу вариационного исчисления называют *задачей с закрепленными концами* и символически записывают в виде

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx \to extr;\ \ y(a) = y_a, y(b) = y_b. \qquad (1)$$

Зададим множество $M = \{y(x) \in C^1[a, b]: y(a) = y_a, y(b) = y_b\}$, на котором будем искать точку экстремума. Данное множество является *линейным многообразием*, т.е. содержит вместе с $u(x)$ и $v(x)$ любую их линейную комбинацию $\alpha u(x) + \beta v(x)$, где α и β произвольные числа.

Определение 1.1. Функции (кривые) $y(x) \in M$ будем в дальнейшем называть *допустимыми*.

Замечание 1. Пространство $C^1[a, b]$ является банаховым, т.е. полным нормированным пространством, относительно нормы

$$\|y(x)\|_{C^1[a,b]} = \max\{\max_{x\in[a,b]}|y(x)|, \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|\}.$$

Определение 1.2. Обозначим, через $C_0^1[\mathrm{a}, b]$ множество всех тех функций $h(x) \in C^1[a, b]$, которые удовлетворяют нулевым граничным условиям $h(a) = h(b) = 0$, т.е. $C_0^1[\mathrm{a}, b] = \{h(x) \in C^1[a, b]: h(a) = h(b) = 0\}$. Тогда любая функция $h(x) \in C_0^1[\mathrm{a}, b]$ называется *допустимым приращением* или *вариацией* функции $y(x) \epsilon M$ и обозначается $\delta y(x) = h(x)$.

Замечание 2. Следуя Лагранжу, нам будет удобно рассматривать вариацию функции $y(x) \in M$ в виде $\delta y(x) = t \cdot h(x)$, где t – действительное число.

Определение 1.3. Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ доставляет функционалу J слабый локальный *минимум* (соответственно *максимум*), если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$).

Определение 1.4. Слабые локальные минимумы и максимумы функционала называются его *слабыми локальными экстремумами*.

Замечание 3. Наряду со слабым локальным экстремумом, в вариационном исчислении рассматривается сильный локальный экстремум, о котором будет сказано позже.

Определение 1.5. Говорят, что функционал J достигает на кривой $\hat{y}(x)$ абсолютного (или глобального) *минимума* (соответственно *максимума*), если неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$) выполняется для всех $y(x) \in M$.

§2. Вариация функционала

Введем понятие *дифференциала* или *вариации* функционала, аналогичное понятию дифференциала первого порядка функции многих переменных.

Определение 2.1. Пусть функционал J определен в линейном нормированном пространстве *X*. Если в некоторой точке $\hat{y} \epsilon X$ функция $J[\hat{y} + th]$ переменного t дифференцируема при $t = 0$ для любого $h \epsilon X$, то ее производная

$$\delta J[\hat{y}, h] = \lim_{t \to 0} \frac{J[\hat{y} + t \cdot h] - J[\hat{y}]}{t} = \frac{d}{dt} J[\hat{y} + t \cdot h]\Big|_{t=0}$$

называется *первой вариацией по Лагранжу* функционала J точке $\hat{y}$.

Замечание. Вариация $\delta J[\hat{y}, h]$ есть снова функционал, который каждому $h \epsilon X$ (при фиксированном $\hat{y}$) ставит в соответствие число.

Как известно, дифференцируемая функция может достигать экстремума только в тех точках, в которых равна нулю ее производная, т.е. в стационарных точках. Аналогичное утверждение справедливо и для функционалов.

Теорема 2.1. Пусть точка $\hat{y} \epsilon X$ доставляет локальный экстремум функционалу *J*. Если в точке $\hat{y}$ существует первая вариация функционала *J*, то $\delta J[\hat{y}, h] = 0$ для любого $h \epsilon X$.

Определение 2.2. Точка $\hat{y} \epsilon X$ называется *стационарной точкой* функционала *J*, если вариация $\delta J[\hat{y}, h]$ определена в этой точке и $\delta J[\hat{y}, h] = 0$ при любом $h \epsilon X$.

§3. Основные леммы вариационного исчисления

Лемма 3.1. *(лемма Лагранжа)*

Если функция $f(x) \in C[a, b]$ такая, что для любой $h(x) \epsilon C_0^1[\mathrm{a}, b]$выполнено интегральное соотношение

$$\int_a^b f(x)h(x)dx = 0,$$

тогда $f(x) \equiv 0$ на [*a,b*].

Лемма 3.2. *(лемма Дюбуа-Реймона)*

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и для любой функции $h(x)\epsilon\ C_0^1[\text{a}, b]$выполнено равенство

$$\int_a^b \big(g(x)h(x) + f(x)h'(x)\big)dx = 0.$$

Тогда функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[a,b]$ и

$$-\frac{d}{dx}f(x) + g(x) = 0.$$

§4. Уравнение Эйлера

Будем предполагать, что функция $F(x, y(x), y'(x))$ или *интегрант* функционала непрерывна по совокупности переменных вместе со своими частными производными F_y и $F_{y'}$.

Теорема 4.1. Для того чтобы функция $\hat{y}(x)\epsilon M$ доставляла слабый локальный экстремум в задаче (1), необходимо, чтобы эта функция на $[\text{a}, b]$ удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F_y\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) - \frac{d}{dx}F_{y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) = 0 \qquad (2)$$

или в сокращенной форме

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

Доказательство. Пусть кривая $\hat{y}(x)\epsilon M$ есть решение задачи (1). Рассмотрим однопараметрическое семейство функций $y(x,t) = \hat{y}(x) + t \cdot h(x)$, где $h \in C_0^1[\text{a}, b]$. Поскольку $y(x,t)\epsilon M$ при любом значении параметра $t\epsilon R$, то можно рассмотреть интегральный функционал

$$J\big(\hat{y}(x) + t \cdot h(x)\big) = \int_a^b F\big(x, \hat{y}(x) + t \cdot h(x), \hat{y}' + t \cdot h'(x)\big)dx,$$

который при фиксированных $\hat{y}(x)$ и $h(x)$ является скалярной функцией $\Phi(t)$, которая достигает своего локального минимума при $t = 0$. Допущения, наложенные на $F(x, y(x), y'(x))$, позволяют дифференцировать под знаком интеграла. Дифференцируя и подставляя $t = 0$, получаем

$$\Phi'(0) = \frac{d}{dt}J[\hat{y} + t \cdot h]\Big|_{t=0} = \delta J[\hat{y}, h] =$$

$$= \int_a^b \Big(F_y\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) \cdot h(x) + F_{y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) \cdot h'(x)\Big)dx = 0.$$

Отметим, что данное уравнение выполнено для любой $h(x) \in C_0^1[\text{a}, b]$.

В силу леммы Дюбуа-Реймона можно утверждать, что функция $\hat{y}(x)\epsilon M$, доставляющая локальный экстремум в задаче (1), должна удовлетворять уравнению Эйлера

$$-\frac{d}{dx}F_{y'}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)+F_y\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)=0.$$

Допустимую функцию $\hat{y}(x)$, для которой оно выполнено, принято называть *экстремалью.*

Теорема 4.2. Если дополнительно предположить, что функция $F(x,y(x),y'(x))$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках плоскости *xOy*, в которых $F_{y'y'}\neq 0$, функция $\hat{y}(x)$ имеет непрерывную вторую производную и уравнение (2) может быть переписано в виде

$$y''\cdot F_{y'y'}+y'\cdot F_{y'y}+F_{y'x}-F_y=0.$$

Данное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка и его общее решение содержит две произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

Пример 1. Найти экстремаль функционала

$$J(y)=\int_1^3[x^2(y')^2+x^2yy'+xy^2+4xy]dx,$$

$$y(1)=y(3)=4.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$2x^2y''+4xy'-4x=0,\text{ или } y''+y'=2e^t.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2+\lambda=0$ имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-1$. Поэтому, решение однородного уравнения представимо в виде

$$y_0(x)=C_1+\frac{C_2}{x}.$$

Частное решение уравнения имеет вид

$$y_1(x)=x.$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1+\frac{C_2}{x}+x.$$

Используя граничные условия

$$y(1)=C_1+C_2+1=4,$$

$$y(3)=C_1+\frac{C_2}{3}+3=4,$$

находим $C_1=0$, $C_2=3$.

Следовательно, $\hat{y}(x)=\frac{3}{x}+x$.

Пример 2. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\pi} [(y')^2 + y^2 + 10y'(x + \sin^2 x)]dx,$$

$$y(0) = 6;\ y(\pi) = 5 + e^{-\pi}.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$2y'' - 2y + 10 + 20\sin x \cos x = 0, \text{ или } y'' - y = -10\sin x \cos x - 5.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 1 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Поэтому, решение однородного уравнения представимо в виде

$$y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\ .$$

Частное решение уравнения имеет вид

$$y_1(x) = \sin 2x + 5\ .$$

Таким образом, общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \sin 2x + 5.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = C_1 + C_2 + 5 = 6,$$
$$y(\pi) = C_1 e^{\pi} + C_2 e^{-\pi} + 5 = 5 + e^{-\pi},$$

находим $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

В результате получаем экстремаль $\hat{y}(x) = e^{-x} + \sin 2x + 5$.

§5. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера

Случай 1. $F = F(x, y)$, т.е. интегрант не зависит от y'.

В этом случае $F_{y'} \equiv 0$ и уравнение Эйлера имеет вид $F_y(x, y(x)) = 0$, т.е. является алгебраическим уравнением относительно неизвестной функции *y(x)*. Решения этого уравнения, т.е. экстремали функционала, могут и не удовлетворять граничным условиям.

Пример 3. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (e^{x+y} - y - sinx)dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0, y(1) = -1$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция F=$e^{x+1} - y - sinx$ не зависит от y', следовательно, уравнение Эйлера является алгебраическим уравнением относительно неизвестной функции $y(x)$ и имеет следующий вид

$$e^{x+y} - 1 = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = -x.$$

Данная кривая удовлетворяет граничным условиям, следовательно, является экстремаль данного функционала: $\hat{y}(x) = -x$.

Случай 2. $F = F(y')$, т.е. интегрант зависит только от y'.

Уравнение Эйлера, имеющее следующий вид

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F\big(y'(x)\big)}{\partial y'} = 0,$$

допускает понижение порядка $F_{y'} = C$. Это алгебраическое уравнение относительно y'. Все его решения можно записать в виде $y' = C_1$, где C_1 — произвольная постоянная. Таким образом, экстремалями функционала в этом случае является семейство линейных функций $y = C_1x + C_2$ с произвольными постоянными C_1 и C_2.

Пример 4. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 y'^2 dx,$$

удовлетворяющую граничным условиям $y(0) = 0, y(1) = 1$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция $F = y'^2$ не зависит от y и x, следовательно, экстремалями функционала является следующее семейство

$$y(x) = C_1x + C_2.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = C_1 + C_2 = 1,$$

находим $C_1 = 1$, $C_2 = 0$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = x$.

Случай 3. $F = F(x, y')$, т.е. интегрант не зависит от y.

Уравнение Эйлера, имеющее следующий вид

$$\frac{d}{dx} \cdot \frac{\partial F\big(x, y'(x)\big)}{\partial y'} = 0,$$

допускает понижение порядка $F_{y'} = C$. Это дифференциальное уравнение первого порядка, не содержащее y.

Пример 5. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-1}^1 (xy' + y'^2) dx,$$

удовлетворяющую краевым условиям $y(-1) = 1, y(1) = 0$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция $F = xy' + y'^2$ не зависит от y, следовательно, уравнение Эйлера имеет следующий вид

$$\mathrm{x} + 2\mathrm{y}' = \mathrm{C}_1 \text{ или } y' = -\frac{x}{2} + \frac{C_1}{2}.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера, проинтегрировав обе части уравнения. В результате получим следующее решение

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{C_1}{2}x + C_2.$$

Используя граничные условия

$$y(-1) = -\frac{1}{4} - \frac{C_1}{2} + C_2 = 1,$$

$$y(1) = -\frac{1}{4} + \frac{C_1}{2} + C_2 = 0,$$

находим $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{3}{4}$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$.

Случай 4. $F = F(y, y')$, т.е. интегрант не зависит явно от x.

Уравнение Эйлера в этом случае имеет вид

$$y'' \cdot F_{y'y'} + y' \cdot F_{y'y} - F_y = 0.$$

Умножив его на $-y'$, получим в левой части точную производную

$$\frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае уравнение Эйлера допускает понижение порядка:

$$F - y'F_{y'} = C.$$

Пример 6. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y - y'^2)dx,$$

удовлетворяющую краевым условиям $y(0) = y(1) = 0$.

Решение. Заметим, что подынтегральная функция $F = y - y'^2$ не зависит от x, следовательно, уравнение Эйлера имеет следующий вид

$$y - y'^2 + 2\mathrm{y}'^2 = y + y'^2 = \mathrm{C}_1.$$

Данное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = y' = \pm\sqrt{C_1 - y},$$

$$\pm\frac{dy}{\sqrt{C_1 - y}} = dx.$$

Проинтегрировав обе части, получим решение в виде

$$y(x) = -\frac{1}{4}(x + C_2)^2 + C_1.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = -\tfrac{1}{4}C_2^2 + C_1 = 0,$$

$$y(1) = -\tfrac{1}{4}(1 + C_2)^2 + C_1 = 0,$$

находим $C_1 = \frac{1}{16}$, $C_2 = -\frac{1}{2}$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = \frac{1}{4}(x - x^2)$.

§6. Кусочно-гладкие допустимые кривые

Наряду со слабым экстремумом функционала может рассматриваться и сильный экстремум. Понятие сильного экстремума ввел в вариационное исчисление Вейерштрасс. Для этого расширим класс допустимых функций, в котором определяется экстремум.

Определение 6.1. Обозначим через $KC^1[a,b]$ множество непрерывных кусочно-гладких функций на $[a,b]$, т.е. непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих на $[a,b]$ непрерывную производную, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода.

Замечание 1. Пространство $KC^1[a,b]$ является нормированным, но не полным относительно нормы

$$\|y(x)\|_{C[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)|.$$

Пусть теперь областью определения функционала (1) является множество $M = \{y(x) \in KC^1[a,b]: y(a) = A, y(b) = B\}$.

Определение 6.2. Говорят, что $\hat{y}(x) \in M$ доставляет функционалу *сильный* локальный минимум (соответственно максимум), если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$).

Определение 6.3. Сильные локальные минимумы и максимумы функционала называются его *сильными локальными экстремумами*.

Замечание 2. Поскольку множество $C^1[a,b] \subset KC^1[a,b]$, то если $\hat{y}(x) \in C^1[a,b]$ доставляет сильный экстремум (1), то она доставляет и слабый экстремум:

$$\|\cdot\|_C \leq \|\cdot\|_{C^1},\ \text{т.е. } \|y(\cdot)-\hat{y}(\cdot)\|_{C^1} < \varepsilon \Rightarrow \|y(\cdot)-\hat{y}(\cdot)\|_C < \varepsilon.$$

В этом случае необходимое условие слабого экстремума является необходимым условием сильного, а достаточное условие сильного экстремума является достаточным условием слабого.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЫ БОЛЕЕ ОБЩЕГО ВИДА

§1. Функционалы, зависящие от нескольких функций

Рассмотрим банахово пространство $C^1([a,b],R^n)$ – непрерывно дифференцируемых n-мерных вектор-функций $y(\cdot)=(y_1(x),\dots,y_n(x))$, в котором норма задается следующей формулой

$$\|y(\cdot)\|_1=\max\{\|y(\cdot)\|_0,\|y'(\cdot)\|_0\},$$

где

$$\|y(\cdot)\|_0=\max_{1\le i\le n}\{\max_{x\in[a,b]}|y_i(x)|\}.$$

Рассмотрим простейшую векторную задачу ($n\ge 2$):

$$J[y(\cdot)]=\int_a^b F\big(x,y(x),y'(x)\big)dx=$$

$$\int_a^b F\big(x,y_1(x),\dots,y_n(x),y_1'(x),\dots,y_n'(x)\big)dx\to extr, \qquad (1)$$

$$y(a)=(y_{1a},\dots,y_{na}),\qquad y(b)=(y_{1b},\dots,y_{nb}).$$

Будем предполагать, что $F\in C([a,b]\times R^n\times R^n)$ и существуют производные $F_{y_i},F_{y_i'}\in C([a,b]\times R^n\times R^n)$ для всех $i=1,\dots,n$.

Теорема 1.1. Если вектор-функция $\hat{y}(x)=(\hat{y}_1(x),\dots,\hat{y}_n(x))$ из $C^1([a,b],R^n)$ доставляет слабый экстремум в задаче (1), то ее компоненты на $[a,b]$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0,\qquad i=1,\dots,n. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $\hat{y}(x)=(\hat{y}_1(x),\dots,\hat{y}_n(x))$ - доставляет экстремум в задаче (1). Фиксируем компоненты $\hat{y}_1(x),\dots\hat{y}_{i-1}(x),\hat{y}_{i+1}(x),\dots,\hat{y}_n(x)$ и варьируем компоненту $\hat{y}_i(x)$. Получаем простейшую задачу, решением которой является $\hat{y}_i(x)$. Из необходимого условия следует, что $\hat{y}_i(x)$ должна удовлетворять $F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}=0$. Поскольку i принимает значения от 1 до n. То в качестве необходимого условия мы получаем систему уравнений Эйлера (2).

Определение 1.1. Всякое решение системы уравнений Эйлера (2) называется экстремалью функционала (1).

Пример 7. Найти экстремали функционала

$$J(y_1,y_2)=\int_0^1[2y_1+y_2^2+(y_1')^2+(y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0)=0;\ y_2(0)=1;\ y_1(1)=\frac{1}{2};\ y_2(1)=e^{-1}.$$

Решение. Система дифференциальных уравнений Эйлера имеет вид

$$y_1'' - 1 = 0,$$
$$y_2'' - y_2 = 0.$$

Решая систему, получаем

$$y_1(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2\,,$$
$$y_2(x) = C_3 e^x + C_4 e^{-x}.$$

Используя граничные условия

$$y_1(0) = C_2 = 0,$$
$$y_2(0) = C_3 + C_4 = 1,$$
$$y_1(1) = \frac{1}{2} + C_1 + C_2 = \frac{1}{2},$$
$$y_2(1) = C_3 e + \frac{C_4}{e} = \frac{1}{e},$$

находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 1$.

Следовательно: $\hat{y}_1(x) = \frac{x^2}{2}$, $\hat{y}_2(x) = e^{-x}$.

§2. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка

Рассмотрим функционал вида

$$J[y(x)] = \int_a^b F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big)dx, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^n[a,b]: y^{(i)}(a) = y_{ai}, y^{(i)}(b) = y_{bi}, i = 0, \dots, n-1\},$$

где y_{ai}, y_{bi} – заданные числа для всех $i = \overline{0, n-1}$, а функция $F\big(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)\big)$ является $n+1$ раз непрерывно дифференцируемой по совокупности аргументов.

Замечание 1. Пространство $C^n[a,b]$ является банаховым, т.е. полным нормированным пространством, относительно нормы

$$\|y(x)\|_{C^n[a,b]} = \max_{x\in[a,b]}|y(x)| + \sum_{i=1}^{n} \max_{x\in[a,b]}\left|y^{(i)}(x)\right|.$$

Замечание 2. В этом случае *допустимой вариацией* является любая функция $h \in C^n[a,b]$, удовлетворяющая однородным краевым условиям

$$\begin{cases} h(a) = 0, h'(a) = 0, \dots, h^{(n-1)}(a) = 0; \\ h(b) = 0, h'(b) = 0, \dots, h^{(n-1)}(b) = 0. \end{cases}$$

Определение 2.1. Будем говорить, что $\hat{y}(x) \in M$ доставляет функционалу (1) слабый локальный минимум (соответственно максимум), если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C^n[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$).

Определение 2.2. Функцию $\hat{y}(x)$, доставляющую слабый локальный минимум или максимум функционалу $J[y]$, будем называть *точкой* слабого *локального экстремума функционала*.

Теорема 2.1 Пусть функция $\hat{y}(x) \in M$ является $2n$ раз непрерывно дифференцируемой и доставляет функционалу J слабый локальный экстремум. Тогда $\hat{y}(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо удовлетворяет уравнению *Эйлера – Пуассона*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} F_{y^{(k)}}\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) =$$

$$= F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0,$$

где $\frac{d}{dx}$ – полная производная по x.

Доказательство. Пусть функция $\hat{y}(x)$ доставляет экстремум функционалу J[y]. Выбрав произвольно допустимую вариацию $h(x)$ и зафиксировав её, рассмотрим функцию

$$\Phi(t) = J[\hat{y} + th] = \int_a^b F\left(x, \hat{y} + th, \hat{y}' + th', \hat{y}'' + th'', \ldots, \hat{y}^{(n)} + th^{(n)}\right) dx.$$

Поскольку функция $\Phi(t)$ в точке t=0 дифференцируема и имеет экстремум, то

$$\Phi'(0) = \int_a^b (F_y h + F_{y'} h' + \cdots + F_{y^{(n)}} h^{(n)}) dx = 0. \qquad (2)$$

Интегрируя по частям и используя краевые условия, получаем:

$$\int_a^b F_{y'} h'\, dx = -\int_a^b \left(\frac{d}{dx} F_{y'}\right) h\, dx,$$

$$\int_a^b F_{y''} h''\, dx = \int_a^b \left(\frac{d^2}{dx^2} F_{y''}\right) h\, dx,$$

……………………………….

$$\int_a^b F_{y^{(n)}} h^{(n)} dx = (-1)^n \int_a^b \left(\frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}}\right) h\, dx.$$

Подставляем полученные соотношения в (2):

$$\int_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}\right) h\,dx = 0$$

для любой допустимой вариации $h(x)$. Применяя *лемму Лагранжа* имеем

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} + \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0.$$

Данное уравнение называют *уравнением Эйлера − Пуассона*, а его $2n$ раз непрерывно дифференцируемые решения – *экстремалями* функционала $J[y]$.

Пример 8. Найти экстремаль функционала

$$J[y] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((y'')^2 - (y')^2 - 4y)\,dx,$$

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Решение. Уравнение Эйлера – Пуассона имеет следующий вид

$$2y^{\mathrm{IV}} + 2y'' - 4 = 0.$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и специальной правой частью. Решая его, получаем

$$y(x) = C_1\cos(x) + C_2\sin(x) + C_3 + C_4x + x^2.$$

Из граничных условий находим, что $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Следовательно, $\hat{y}(x) = x^2$.

Пример 9. Найти экстремали функционала

$$J(y) = \int_0^1 [2e^x y - (y'')^2]dx,$$

$$y(0) = y'(0) = 1;\ y(1) = e;\ y'(1) = 2e.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера – Пуассона

$$2y^{IV} - 2e^x = 0, \text{ или } \ y^{IV} = e^x.$$

Решение уравнения имеет вид

$$y(x) = e^x + \tfrac{x^3}{6}C_1 + \tfrac{x^2}{2}C_2 + C_3x + C_4.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = 1 + C_4 = 1,$$
$$y'(0) = 1 + C_3 = 1,$$

$$y(1) = e + \tfrac{1}{6}C_1 + \tfrac{1}{2}C_2 + C_3 + C_4 = e,$$

$$y'(1) = e + \tfrac{1}{2}C_1 + C_2 + C_3 = 2e,$$

находим $C_1 = 6e$, $C_2 = -2e$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$.

Следовательно, экстремаль имеет вид $\hat{y}(x) = e^x + e(x^3 - x^2)$.

§3. Функционалы, зависящие от функций нескольких переменных

Рассмотрим функционал вида

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_G F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad (1)$$

определенный на множестве функций

$$M = \left\{u(x,y) \in C^1\left(\overline{G}\right) : u|_{\partial G} = \varphi(x,y)\right\},$$

где функция $F(x,y,u,p,q)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно по всем аргументам.

Замечание 1. Норма в пространстве $C^1\left(\overline{G}\right)$ задается следующим образом

$$\|u(x,y)\|_{C^1(\overline{G})} = \max_{(x,y)\in\overline{G}}|u(x,y)| + \max_{(x,y)\in\overline{G}}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right| + \max_{(x,y)\in\overline{G}}\left|\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right|.$$

Замечание 2. В этом случае *допустимой вариацией* является любая функция $h(x,y) \in M$, удовлетворяющая условию $u|_{\partial G} = 0$.

Определение 3.1. Будем говорить, что $\hat{u}(x,y) \in M$ доставляет функционалу (1) слабый локальный минимум (соответственно максимум), если $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $u(x,y) \in M$, для которой $\|u(x,y) - \hat{u}(x,y)\|_{C^1(\overline{G})} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[u] \geq J[\hat{u}]$ (соответственно $J[u] \leq J[\hat{u}]$).

Определение 3.2. Функцию $\hat{u}(x,y)$, доставляющую слабый локальный минимум или максимум функционалу J, будем называть *точкой* слабого *локального экстремума функционала*.

Теорема 3.1 Пусть функция $\hat{u}(x,y) \in M$ является дважды непрерывно дифференцируемой в $\overline{G}$ и доставляет функционалу J в задаче (1) слабый локальный экстремум. Тогда $\hat{u}(x,y)$ на области G необходимо удовлетворяет уравнению *Эйлера – Остроградского*

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right) = 0, \qquad (2)$$

где $p = \frac{\partial u}{\partial x}$, $q = \frac{\partial u}{\partial y}$, а $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ – полные частные производные по x и по y соответственно:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = F_{px} + F_{pu}\frac{\partial u}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right) = F_{py} + F_{pu}\frac{\partial u}{\partial y} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Определение 2.1. Всякое решение уравнения (2) называется экстремалью функционала (1). Если экстремаль принадлежит M, то она называется допустимой.

Пример 10.

Напишем уравнение Эйлера-Остроградского для функционала

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_G \left((u'_x)^2 + \left(u'_y\right)^2\right) dxdy.$$

Имеем $\mathrm{F(x, y, u, p, q) = \ p^2 + \ q^2}$. Получим уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

ГЛАВА 3. ЗАДАЧИ С ПОДВИЖНЫМИ ГРАНИЦАМИ

§1. Задача с подвижными концами

Рассмотрим задачу об экстремуме *функционала*

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\,dx, \tag{1}$$

на кривых $y(x) \in C^1[\mathrm{a}, b]$ при условии, что левый конец искомой кривой должен находиться на прямой $x = a$, а правый $x = b$ (рис. 1.)

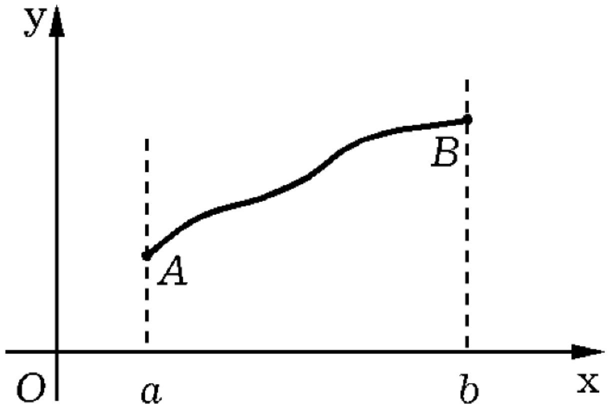

Рис. 1.

Определение 1.1. Задача о нахождении слабого локального экстремума функционала (1) называется *вариационной задачей с подвижными концами* или *задачей без ограничений*.

Сформулируем необходимое условие решения задачи.

Теорема 1.1 Пусть функция $\hat{y}(x) \in M$ является дважды непрерывно дифференцируемой и доставляет функционалу J слабый локальный экстремум в задаче с подвижными концами. Тогда $\hat{y}(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо удовлетворяет уравнению *Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и *естественным краевым условиям* вида:

$$F_{y'}(x, y, y')\Big|_{x=a} = 0,\ F_{y'}(x, y, y')\Big|_{x=b} = 0.$$

Доказательство. В силу необходимого условия, равенства нулю первой вариации, имеем

$$\delta J[\hat{y}, h] = \int_a^b \left(F_y(x, \hat{y}, \hat{y}') \cdot h + F_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}') \cdot h'\right)dx = 0 \quad \forall\, h \in C^1[\mathrm{a}, b]\,.$$

После интегрирования по частям вариация примет вид

$$\int_a^b \left(F_y(x, \hat{y}, \hat{y}') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')\right)h\,dx + F_{y'}(x, \hat{y}, \hat{y}')h\Big|_a^b = 0 \quad \forall\, h \in C^1[\mathrm{a}, b].$$

Интеграл на экстремали $\hat{y}$ обращается в нуль. Поэтому

$$F_{y'}(x,\hat{y},\hat{y}')\Big|_{x=b} h(b) - F_{y'}(x,\hat{y},\hat{y}')\Big|_{x=a} h(a) = 0 \quad \forall\, h \in C^1[\mathrm{a}, b].$$

Подставляя в данное уравнение $h(x) = \frac{b-x}{b-a}$ и $h(x) = \frac{x-a}{b-a}$ получим *естественные краевые условия*

$$F_{y'}(x,\hat{y},\hat{y}')\Big|_{x=a} = 0, \quad F_{y'}(x,\hat{y},\hat{y}')\Big|_{x=b} = 0.$$

Таким образом, если $\hat{y} \in C^1[\mathrm{a}, b]$ является решением задачи со свободными концами, то она является решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} F_y(x,y,y') - \dfrac{d}{dx} F_{y'}(x,y,y') = 0, \\ F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=a} = 0, \qquad F_{y'}(x,y,y')\Big|_{x=b} = 0. \end{cases}$$

Замечание. Также может рассматриваться и смешанная задача, когда один из концов фиксирован, а другой перемещается вдоль прямой.

Пример 11. Найти экстремаль функционала с подвижным правым концом:

$$J(y) = \int_0^2 [2xy + (y')^2]dx,$$

$$y(0) = 0.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$2y'' - 2x = 0, \text{ или } y'' = x.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части уравнения. В результате получим следующее решение

$$y(x) = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\,.$$

Используя граничное условие на левом конце и естественное краевое условие на правом конце:

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$F_{y'}|_{x=2} = 2y'|_{x=2} = 2 + C_1 = 0,$$

находим $C_1 = -2$, $C_2 = 0$.

В результате получаем экстремаль $\hat{y}(x) = \frac{x^3}{6} - 2x$.

§2. Задача с подвижными границами

Рассмотрим задачу об экстремуме *функционала*

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\, dx, \qquad (1)$$

на кривых $y(x) \in C^1[\mathrm{a}, b]$, граничные точки которых $A(a, y_a)$ и $\mathrm{B}(b, y_b)$ лежат на заданных гладких кривых $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$ и $\mathrm{y} = \psi(\mathrm{x})$, так что $y_a = \varphi(a)$ и $y_b = \psi(b)$ (рис. 2).

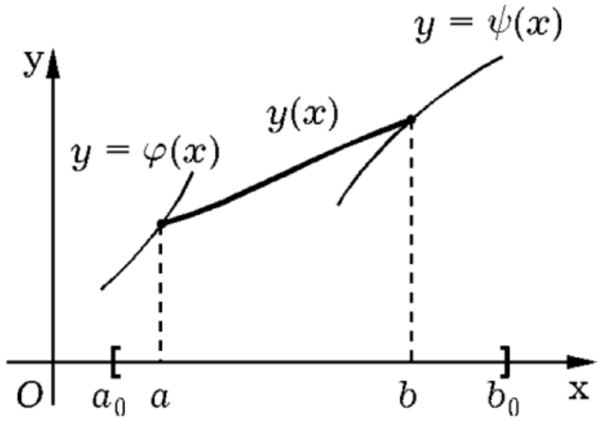

Рис. 2.

Определение 2.1. Задача о нахождении слабого локального экстремума функционала (1) называется *вариационной задачей с подвижными границами*.

Приведем необходимое условие решения задачи.

Теорема 2.1 Пусть функция $\hat{y}(x) \in M$ является дважды непрерывно дифференцируемой и доставляет функционалу J слабый локальный экстремум в задаче с подвижными границами. Тогда $\hat{y}(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо удовлетворяет уравнению *Эйлера*

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0$$

и *условиям трансверсальности* в точках $A(a, y_a)$ и $\mathrm{B}(b, y_b)$ пересечения $\hat{y}(x)$ с кривыми $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$ и $\mathrm{y} = \psi(\mathrm{x})$ вида:

$$\Big(F\big(x, y(x), y'(x)\big) + [\varphi'(x) - y'(x)] \cdot F_{y'}(x, y, y')\Big)\Big|_{x=a} = 0,$$

$$\Big(F\big(x, y(x), y'(x)\big) + [\psi'(x) - y'(x)] \cdot F_{y'}(x, y, y')\Big)\Big|_{x=b} = 0.$$

Замечание. Также может рассматриваться и смешанная задача, когда один из концов фиксирован, а другой подвижный.

Пример 12. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{0}^{x_1} (y')^2 dx,$$

$$y(0) = 0;\ y(x_1) = -x_1 - 1.$$

Решение. Так как подынтегральная функция $F = (y')^2$ не зависит явно от x и y, уравнение Эйлера имеет общее решение вида

$$y(x) = C_1 x + C_2\ .$$

Запишем условие трансверсальности:

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\big|_{x=x_1} = (y')^2 + (-1 - y')2y'\big|_{x=x_1} =$$
$$= C_1^2 + (-1 - C_1)2C_1 = 0,$$

и граничные условия:

$$y(0) = C_2 = 0,$$
$$y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = -x_1 - 1.$$

Так как, уравнение $C_1^2 + (-1 - C_1)2C_1 = 0$ имеет два решения $C_1 = 0$ или $C_1 = -2$, найдем C_2, x_1 из двух систем:

$$\begin{cases} y'(x_1) = C_1 = 0 \\ y(0) = C_2 = 0 \\ y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = -x_1 - 1 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} y'(x_1) = C_1 = -2 \\ y(0) = C_2 = 0 \\ y(x_1) = C_1 x_1 + C_2 = -x_1 - 1 \end{cases}$$

Из первой системы находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $x_1 = -1$. Из второй: $C_1 = -2$, $C_2 = 0$, $x_1 = 1$.

Решением является экстремаль $\hat{y}(x) = -2x$ и $x_1 = 1$.

Пример 13. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$y(x_0) = x_0^2;\ y(x_1) = x_1 - 5.$$

Решение. Так как подынтегральная функция $F = \sqrt{1 + (y')^2}$ не зависит явно от x и y, уравнение Эйлера имеет общее решение:

$$y(x) = C_1 x + C_2\ .$$

Используя условия трансверсальности и граничные условия

$$\left[F + (\varphi' - y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0} = \sqrt{1 + (y')^2} + (2x - y')\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\Big|_{x=x_0} = 0,$$

$$\left[F + (\psi' - y')F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1} = \sqrt{1 + (y')^2} + (1 - y')\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\Big|_{x=x_1} = 0,$$

$$y(x_0) = C_1x_0 + C_2 = x_0^2,$$

$$y(x_1) = Cx_1 + C_2 = x_1 - 5,$$

находим $C_1 = -1$, $C_2 = \frac{3}{4}$, $x_0 = \frac{1}{2}$, $x_1 = \frac{23}{8}$.

Следовательно, $\hat{y}(x) = -x + \frac{3}{4}$.

Значение функционала на найденной экстремали равно

$$J[\hat{y}(x)] = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{23}{8}} \sqrt{1 + (-1)^2}dx = \frac{19\sqrt{2}}{8}.$$

ГЛАВА 4. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

§1. Изопериметрическая задача

Рассмотрим функционал вида

$$J[y(x)] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций

$$M = \left\{ \begin{matrix} y(x) \in C^1[a,b]: y(a) = y_a, y(b) = y_b, \\ K[y(x)] = \displaystyle\int_a^b G(x, y(x), y'(x))dx = l, \end{matrix} \right\}$$

где y_a, y_b , l – заданные числа, а функция $F(x, y(x), y'(x))$ и $G(x, y(x), y'(x))$ является дважды непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов.

Условие $K[y(x)] = l$ называется условием связи. Будем предполагать, что искомая кривая не является экстремалью для функционала K.

Определение 1.1. Будем говорить, что $\hat{y}(x) \in M$ доставляет функционалу (1) слабый локальный минимум (соответственно максимум), если $\exists\ \varepsilon > 0$ такое, что для любой функции $y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$).

Определение 1.2. Как и ранее, слабые локальные минимумы и максимумы функционала называются его *слабыми локальными экстремумами*.

Определение 1.3. Изопериметрической задачей называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1).

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа (лагранжиан)

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda G(x, y(x), y'(x)),$$

Где λ – некоторое число, называемое неопределенным множителем Лагранжа.

Теорема 1.1 Пусть дважды непрерывно дифференцируемая функция $\hat{y}(x) \in M$ является решением изопериметрической задачи и не является экстремалью для функционала K. Тогда найдется такой множитель Лагранжа λ, что $\hat{y}(x)$ будет на отрезке $[a, b]$ необходимо удовлетворять уравнению *Эйлера*

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0. \qquad (2)$$

Определение 1.4. Всякое решение уравнения (2) называется экстремалью изопериметрической задачи. Если экстремаль принадлежит M, то она называется допустимой.

Замечание. Изометрическая задача может обобщаться на случай нескольких условий связи

$$K_i[y(x)] = \int_a^b G_i(x, y(x), y'(x))dx = l_i, \ \ i = 1, \dots, m,$$

а также на случай функционалов $J[y(\cdot)]$, зависящих от n-мерных вектор-функций $y(\cdot) = \big(y_1(x), \dots, y_n(x)\big)$.

Пример 14. Найти экстремали функционала

$$J[y] = \int_0^1 \ [2xy + (y')^2]dx,$$

$$\int_0^1 \ xydx = 1,$$

$$y(0) = 0; \ y(1) = 3.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, y', \lambda) = 2xy + (y')^2 + \lambda xy.$$

Запишем уравнение Эйлера

$$2y'' - 2x - \lambda x = 0, \text{ или } \ y'' = \tfrac{x}{2}(2 + \lambda).$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x) = \tfrac{x^3}{12}(2 + \lambda) + C_1 x + C_2.$$

Использую уравнение связи и граничные условия

$$\int_0^1 \left[\frac{x^4}{12}(2 + \lambda) + C_1 x^2 + C_2 x\right] dx = \frac{2 + \lambda}{60} + \frac{C_1}{3} + \frac{C_2}{2} = 1,$$

$$y(0) = C_2 = 0,$$

$$y(1) = \tfrac{2+\lambda}{12} + C_1 + C_2,$$

находим $\lambda = -2$, $C_1 = 3$, $C_2 = 0$.

Следовательно, экстремаль имеет вид $\hat{y}(x) = 3x$.

§2. Задача Лагранжа

Рассмотрим функционал вида

$$J[y(x), z(x)] = \int_a^b F(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x))dx, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций

$$M = \{y(x), z(x) \in C^1[a,b]: y(a) = y_a, y(b) = y_b, z(a) = z_a, z(b) = z_b,$$
$$\varphi\big(x, y(x), z(x)\big) = 0, \forall\, x \in [a,b]\},$$

где функции $F(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x))$ и $\varphi\big(x, y(x), z(x)\big)$ являются дважды непрерывно дифференцируемыми по совокупности аргументов.

Пара функций $y = y(x)$ и $z = z(x)$ при $x \in [a,b]$ задает пространственную кривую γ, лежащую на заданной поверхности $\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$ и соединяющую две заданные точки.

Мы будем предполагать, что поверхность не имеет особых точек и, кроме того,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 > 0,$$

т.е. касательная плоскость к поверхности ни в одной точке не перпендикулярна оси OX.

Определение 2.1. Будем говорить, что пара функций $\hat{y}(x), \hat{z}(x) \in M$ доставляет функционалу (1) слабый локальный минимум (соответственно максимум), если $\exists\, \varepsilon > 0$ такое, что для любой пары функции $y(x), y(x) \in M$, для которой $\|y(x) - \hat{y}(x)\|_{C^1[a,b]} + \|z(x) - \hat{z}(x)\|_{C^1[a,b]} < \varepsilon$, выполняется неравенство $J[y] \geq J[\hat{y}]$ (соответственно $J[y] \leq J[\hat{y}]$).

Определение 2.2. Как и ранее, слабые локальные минимумы и максимумы функционала называются его *слабыми локальными экстремумами*.

Определение 2.3. Задачей Лагранжа называется задача нахождения слабого локального экстремума функционала (1).

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа (лагранжиан)

$$L(x, y(x), y'(x), \lambda(x)) = F(x, y(x), y'(x)) + \lambda(x) G(x, y(x), y'(x)),$$

$\lambda(x)$ – некоторая функция из $C[a,b]$, называемая неопределенным множителем Лагранжа.

Теорема 2.1 Пусть дважды непрерывно дифференцируемые функции $\hat{y}(x), \hat{z}(x) \in M$ являются решением задачи Лагранжа. Тогда найдется такой множитель Лагранжа $\lambda(x) \in C'[a,b]$, что функции $\hat{y}(x)$ и $\hat{z}(x)$ будут на отрезке $[a,b]$ необходимо удовлетворять системе уравнений *Эйлера* вида

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z'} = 0. \tag{2}$$

Определение 2.4. Всякое решение системы уравнений Эйлера (2) называется допустимой экстремалью задачи Лагранжа.

Замечание 1. Задача Лагранжа может обобщатся на случай функционалов $J[y(\cdot)]$, зависящих от n-мерных вектор-функций $y(\cdot) = \big(y_1(x), \dots, y_n(x)\big)$, и $m < n$ уравнений связи

$$\varphi_i(x, y(x), z(x)) = 0, \qquad i = 1, \dots, m.$$

Замечание 2. Уравнения связи в задаче Лагранжа могут содержать производные первого порядка от неизвестных функций, т.е. иметь следующий вид

$$\Phi(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x) = 0.$$

Связи подобного вида в механике называются *неголономными*, а связи вида

$$\varphi(x, y(x), z(x)) = 0$$

голономными.

Классическим примером задачи Лагранжа является задача нахождения геодезической линии на поверхности.

Напомним, что *геодезической линией* называется линия наименьшей длины, расположенная на поверхности и соединяющая две заданные точки. Постановка задачи будет иметь следующий вид.

Пусть $\varphi(x, y, z) = 0$ – уравнение гладкой поверхности в трехмерном евклидовом пространстве. $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – две заданные точки, лежащие на данной поверхности. Геодезическая линия, соединяющая эти точки будет являться экстремалью следующего функционала

$$J[x(t)y(t), z(t)] = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}dt,$$

при следующих граничных условиях

$$x(a) = x_1, x(b) = x_2, y(a) = y_1, y(b) = y_2, z(a) = z_1, z(b) = z_2,$$

и уравнении связи

$$\varphi(x, y, z) = 0.$$

Пример 15. Найти экстремали функционала

$$J(y_1, y_2) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(y_1{}')^2 - (y_2')^2]dx,$$

$$y_1(0) = y_2(0) = 0;\ y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}, y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\ , y_1' - y_2 - \sin x = 0.$$

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x, y, y', \lambda) = (y_1')^2 - (y_2{}')^2 + \lambda(x)(y_1' - y_2 - \sin x)\ .$$

Запишем систему уравнений Эйлера и уравнение связи

$$2y_1'' + \lambda'(x) = 0,$$

$$2y_2''' - \lambda'(x) = 0,$$

$$y_1' - y_2 - \sin x = 0.$$

Решив систему, получим

$$y_1(x) = C_1 x + C_2 \sin x - C_3 \cos x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + C_4 ,$$

$$y_2(x) = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{x}{2}\cos x.$$

Используя граничные условия

$$y_1(0) = -C_3 - \frac{1}{2} + C_4 = 0,$$

$$y_2(0) = C_1 + C_2 = 0$$

$$y_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}C_1 + C_2 + \frac{\pi}{4} + C_4 = \frac{\pi}{4},$$

$$y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 + C_3 = -\frac{1}{2}.$$

находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = -\frac{1}{2}$, $C_4 = 0$.

В результате получаем экстремали

$$\hat{y}_1(x) = \frac{x}{2}\sin x,$$

$$\hat{y}_2(x) = \frac{1}{2}(x\cos x - \sin x).$$

ГЛАВА 5. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА

§1. Вторая вариация функционала

Ранее было сказано, что если функционал J, действующий в линейном нормированном пространстве X, имеет в точке экстремума $\hat{y}$ первую вариацию $\delta J[\hat{y},h]$, то $\delta J[\hat{y},h]=0$ для любого $h\epsilon X$. Равенство нулю первой вариации является необходимым, но не достаточным условием экстремума функционала.

Для получения достаточных условий нам потребуется понятие второй вариации функционала. Сформулируем необходимые определения.

Рассмотрим следующий интегральный *функционал*

$$J[y(x)]=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))dx, \qquad (1)$$

определенный на множестве функций

$$M=\{y(x)\in C^1[a,b]: y(a)=A, y(b)=B\},$$

где A и B – заданные числа. Будем считать, что функция $F(x,y,p)$ трижды непрерывно дифференцируемая функция. Тогда вторая вариация функционала будет иметь следующий вид:

$$\delta^2 J[\hat{y}\,,h]=\int_a^b\left(F_{yy}h^2+2F_{yy'}hh'+F_{y'y'}(h')^2\right)dx.$$

Проинтегрировав второе слагаемое по частям и учитывая, что вариация $h(a)=h(b)=0$ получим:

$$2\int\limits_a^b F_{yy'}hh'dx=\int\limits_a^b F_{yy'}d(h^2)=F_{yy'}\cdot h^2\Big|_a^b-$$
$$-\int\limits_a^b\left(\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)h^2dx=-\int\limits_a^b\left(\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)h^2dx.$$

Таким образом:

$$\delta^2 J[\hat{y}\,,h]=\int\limits_a^b\left(\left(F_{yy}-\frac{d}{dx}F_{yy'}\right)h^2+F_{y'y'}(h')^2\right)dx=\int\limits_a^b(Qh^2+P(h')^2)\,dx,$$

где $P(x)=F_{y'y'}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big)$,

$$Q(x) = F_{yy}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) - \frac{d}{dx} F_{yy'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big).$$

Теорема 1.1. Для того чтобы функционал J в задаче (1) достигал в точке $\hat{y}$ минимума (соответственно максимума), необходимо, чтобы выполнялось условие $\delta^2 J[\hat{y}\,, h] \geq 0$ (соответственно $\delta^2 J[\hat{y}\,, h] \leq 0$) для всех допустимых значений h.

Определение 1.1. Будем говорить, что для функции $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ выполнено *условие Лежандра*, если $P(x) \geq 0$ для любого $x \in [a, b]$. Если же $P(x) > 0\ \forall\, x \in [a, b]$, то говорят, что для $\hat{y}(x)$ на $[a, b]$ выполнено *усиленное* условие Лежандра.

Теорема 1.2 (Лежандра). Для того чтобы функционал J в задаче (1) достигал в точке $\hat{y}$ минимума (соответственно максимума), необходимо, чтобы для функции $\hat{y}(x)$ выполнялось *условие Лежандра*

$$F_{y'y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) \geq 0,$$

$$(\text{соответственно } F_{y'y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) \leq 0), \forall\, x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}].$$

§2. Условие Якоби

Рассмотрим следующий функционал K при фиксированной $\hat{y}(x) \in M$, определенный на множестве функций $h(x) \in C_0^1[\mathrm{a}, b]$

$$K[\hat{y}\,, h] = \int_a^b (Q(x) h^2(x) + P(x)(h'(x))^2)\, dx.$$

Уравнение Эйлера для функционала K имеет следующий вид

$$\frac{d}{dx}(P(x) h'(x)) - Q(x) h(x) = 0, \qquad h(a) = h(b) = 0.$$

Очевидно, что данная задача имеет тривиальное решение $\mathrm{h(x)} \equiv 0$, но могут существовать и нетривиальные решения.

Определение 2.1. Уравнение $\frac{d}{dx}(P(x) h'(x)) - Q(x) h(x) = 0$ называется уравнением Якоби.

Определение 2.2. Будем говорить, что точка $c \in (\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ является *сопряженной* с точкой a, если уравнение Якоби имеет не тривиальное решение $\mathrm{h(x)} \neq 0$ при условии $h(a) = 0$ такое, что $h(c) = 0$.

Определение 2.3. Говорят, что для функции $\hat{y}(x) \in M$ выполнено условие Якоби, если интервал (a, b) не содержит точек, сопряженных с точкой a. Если сопряженных точек нет на полуинтервале $(a, b]$, то говорят, что выполнено *усиленное* условие Якоби.

Замечание 1. Усиленное условие Якоби может быть переформулировано следующим образом: краевая задача

$$\frac{d}{dx}(P(x)h'(x)) - Q(x)h(x) = 0, \qquad x \in (a, \mathrm{c}),$$

$$h(a) = 0, \qquad h(\mathrm{c}) = \ 0$$

при всех с $\in (a, b]$ имеет только тривиальное решение.

Замечание 2. Дадим еще одну формулировку усиленного условия Якоби: если каждое нетривиальное решение задачи

$$\frac{d}{dx}(P(x)h'(x)) - Q(x)h(x) = 0, \qquad h(a) = 0,$$

не имеет нулей на $(a, b]$.

Замечание 3. Можно показать, что если $P(x) > 0$ и $Q(x) \geq 0$ на $[a, b]$, то усиленное условие Якоби выполнено.

§3. Достаточные условия экстремума функционала

Вначале сформулируем достаточные условия существования слабого локального минимума в простейшей вариационной задаче.

Теорема (Якоби) 3.1. Функция $\hat{y}(x) \in C^1[a, b]$ доставляет функционалу J[y] *строгий слабый локальный минимум* в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются следующие условия:

1) функция $\hat{y}(x)$ является экстремалью функционала J[y];
2) на полуинтервале $(a, b]$ нет точек, сопряженных точке a (*усиленное условие Якоби);*
3) для этой функции выполняется *усиленное условие Лежандра*

$$F_{y'y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) > 0, x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}].$$

Замечание 1. Если при сделанных предположениях выполняется условие

$$F_{y'y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) < 0, x \in [\mathrm{a}, \mathrm{b}],$$

то на кривой $y = \hat{y}(x)$ функционал J[y] достигает своего *строгого слабого локального максимума.*

В следующей теореме сформулируем достаточные условия существования сильного локального минимума.

Теорема 3.2. Функция $\hat{y}(x) \in C^1[a, b]$ доставляет функционалу J[y] *сильный локальный минимум* в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются следующие условия:

1) функция $\hat{y}(x)$ является экстремалью функционала J[y];

2) на полуинтервале $(a, b]$ нет точек, сопряженных точке a (*усиленное условие Якоби);*

3) выполняется *условие Лежандра*

$$F_{y'y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) \geq 0,$$

для точек (x, y) близких к точкам на исследуемой экстремали и для произвольных значений y'. При этом предполагается, что $F\big(x, y(x), y'(x)\big)$ трижды дифференцируема по y' для любых y'.

Замечание 2. Если при сделанных предположениях выполняется условие

$$F_{y'y'}\big(x, y(x), y'(x)\big) \leq 0,$$

для точек (x, y) близких к точкам на исследуемой экстремали и для произвольных значений y', тогда на кривой $y = \hat{y}(x)$ функционал J[y] достигает своего *сильного локального максимума.*

Пример 16. Исследовать на экстремум функционал, если

$$J(y) = \int_0^{\pi/4} [4y^2 - (y')^2 + 8y]dx,$$

$$y(0) = 1, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$y'' + 4y = -4.$$

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - 1.$$

Граничным условиям

$$y(0) = C_1 - 1 = 1,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_2 - 1 = 0$$

удовлетворяет экстремаль $\hat{y}(x) = 2\cos(2x) + \sin(2x) - 1$.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Уравнение Якоби имеем вид

$$h'' + 4h = 0.$$

Нетривиальные решения данного уравнения, удовлетворяющие условию $h(0) = 0$, имеют вид $h(x) = C_2 \sin(2x)$ и нигде на промежутке $(0, \frac{\pi}{4}]$ не обращаются в нуль. Таким образом, выполнено усиленное условие Якоби.

Так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по y', то проверим условие Лежандра. Поскольку $F_{y'y'} = -2 < 0$ при любых y', значит выполнено усиленное условие Лежандра.

Таким образом, на экстремали $\hat{y}(x) = 2\cos(2x) + \sin(2x) - 1$ функционал достигает своего сильного максимума.

Пример 17. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (y^2 - y'^2 + 6ysin2x\,)dx,$$

$$y(0) = 0;\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$y'' + y = -3\sin 2x.$$

Общее решение однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет вид

$$y_0(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Подберем частное решение неоднородного уравнения в виде

$$y_1(x) = A\cos 2x + B\sin 2x,$$

где A и B – неизвестные параметры. Тогда $y_1'(x) = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x$, $y_1''(x) = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Подставляя в неоднородное уравнение, получаем

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + A\cos 2x + B\sin 2x = -3\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях от x, получаем $A = 0, B = 1$. Таким образом: $y_1(x) = \sin 2x$.

Следовательно, общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin 2x.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = C_1 = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = C_1\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 = 1,$$

находим $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = \sin 2x$.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Составим уравнение Якоби. Так как $F_{yy} = 2$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'y'} = -2$, то уравнение имеет вид

$$-2h'' - 2h = 0 \text{ или } h'' + h = 0.$$

Отсюда $h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Из условия $h(0) = C_1 = 0$ получаем

$$h(x) = C_2 \sin x.$$

Так как нетривиальное решение ($C_2 \neq 0$) уравнения Якоби $h(x) = C_2 \sin x \neq 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right]$, то выполнено усиленное условие Якоби.

Так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по y', то проверим условие Лежандра. Поскольку $F_{y'y'} = -2 < 0$ при всех y', то на экстремали $\hat{y}(x)$ достигается сильный максимум.

Пример 18. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12y^2)dx,$$

$$y(1) = 1;\ y(2) = 8.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0.$$

Если положить $x = e^t$, то $y' = e^{-t} y'_t$, $y'' = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$. Подставив в уравнение получим

$$e^{2t}(y'' - y')e^{2t} + 2e^{-t}y'e^t - 12y = 0 \text{ или } y'' + y' - 12y = 0.$$

Так как характеристическое уравнение $\lambda^2 + \lambda - 12 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, то решение уравнения можно представить в виде

$$y(t) = C_1 e^{-4t} + C_2 e^{3t}.$$

Сделав обратную замену $t = \ln x$, получим общее решение исходного уравнения Эйлера

$$y(x) = C_1 x^{-4} + C_2 x^3$$

Используя граничные условия

$$y(1) = C_1 + C_2 = 1,$$

$$y(2) = \frac{C_1}{16} + 8C_2 = 8,$$

находим $C_1 = 0$, $C_2 = 1$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = x^3$.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Составим уравнение Якоби. Так как $F_{yy} = 24$, $F_{yy'} = 0$, $F_{y'y'} = 2x^2$, то уравнение имеет вид

$$2x^2 h'' + 4xh' - 24h = 0 \text{ или } x^2 h'' + 2xh' - 12h = 0.$$

Нетривиальные решения этого уравнения, удовлетворяющие условию $h(1) = 0$, имеют вид $h(x) = C_1(x^{-4} - x^3)$ и нигде на промежутке $(1{,}2]$ не обращаются в нуль. Таким образом, выполнено усиленное условие Якоби.

Так как подынтегральная функция трижды дифференцируема по y', то проверим условие Лежандра. Поскольку $F_{y'y'} = 2x^2 > 0$ при всех $x \in [1,2]$, то на экстремали $\hat{y}(x) = x^3$ достигается сильный минимум.

§4. Поле экстремалей

Определение 4.1. Говорят, что семейство кривых $y = y(x, C)$ образует центральное поле в области D плоскости XOY, если все кривые семейства проходят через точку $(x_0, y_0) \in D$ (центр пучка), покрывают всю область D и нигде, кроме центра пучка, больше не пересекаются.

Определение 4.2. Угловой коэффициент $p = p(x, y)$ касательной к кривой семейства $y = y(x, C)$, проходящей через точку (x, y), называется *наклоном поля* в точке (x, y).

Определение 4.3. Если центральное поле образовано семейством экстремалей некоторой вариационной задачи, то оно называется *полем экстремалей*.

Так как в поле экстремалей через каждую точку проходит единственная экстремаль, то наклон поля экстремалей в данной точке является вполне определенной функцией этой точки.

Рассмотрим однопараметрическое семейство плоских кривых $\Phi(\mathrm{x}, y, C) = 0$. Геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \Phi(\mathrm{x}, y, C) = 0, \\ \Phi'_C(\mathrm{x}, y, C) = 0 \end{cases}$$

называется C-дискриминантом этого семейства.

В общем случае в состав C-дискриминанта входят: огибающее семейства, геометрическое множество узловых точек и точек заострения.

Напомним, что огибающей семейства $\Phi(\mathrm{x}, y, C) = 0$ называется кривая $y = \varphi(x)$, которая в каждой своей точке касается одной из кривых семейства и не имеет общих дуг ни с одной кривой семейства.

Заметим, что центр пучка кривых будет принадлежать C-дискриминанту.

Определение 4.4. Если дуга **AB** кривой $y = y(x)$ имеет отличную от A общую точку A^* с C-дискриминантом пучка кривых $y = y(x, C)$ с центром в точке A, содержащем данную кривую, то точку A^* будем называть *сопряженной* с точкой A.

§5. Функция Вейерштрасса

Пусть экстремаль $\hat{y}(x)$, удовлетворяющая граничным условиям $y(a) = y_a, y(b) = y_b$, может быть включена в центральное поле экстремалей с наклоном поля $p = p(x, y)$.

Определение 5.1. Функцией Вейерштрасса $E(x, y, p, y')$ называется функция

$$E(x, y, p, y') = F(x, y, y') - F(x, y, p) - (y' - p)F_{y'}(x, y, p).$$

Функция E рассматривается на кривых сравнения $y = y(x)$ из того же множества допустимых кривых, что и экстремаль $\hat{y}(x)$. Понятно, что на экстремали функция Вейерштрасса равна нулю, так как $\hat{y}' = p$.

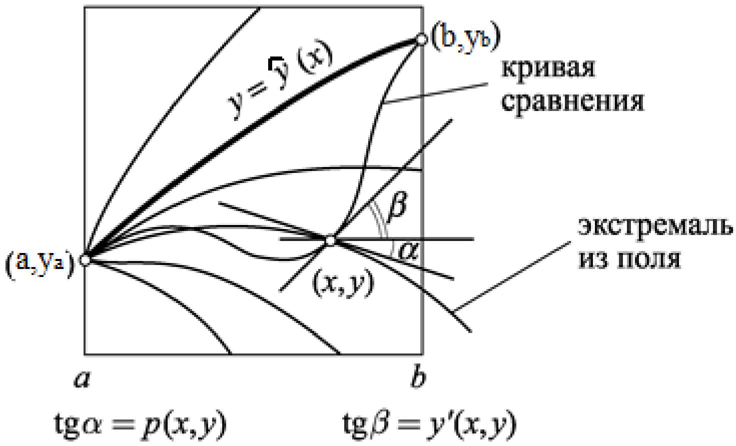

Рис. 3.

Через функцию Вейерштрасса приращение функционала можно записать следующим образом:

$$\Delta J = J[y(x)] - J[\hat{y}(x)] = \int_a^b E\Big(x, y(x), p\big(x, y(x)\big), y'(x)\Big)\,dx.$$

Знакоопределенность функции Вейерштрасса в окрестности экстремали $\hat{y}(x)$ является достаточным условием достижения экстремума функционалом.

Экстремум будет сильным или слабым в зависимости от того, в сильной или слабой окрестности экстремали $\hat{y}(x)$ функция Вейерштрасса сохраняет свой знак.

§6. Достаточные условия экстремума функционала в терминах полей экстремалей

Теорема 6.1. Для построения центрального поля экстремалей с центром в точке **A,** содержащего дугу экстремали **AB** достаточно, чтобы точка $\boldsymbol{A}^*$, сопряженная с точкой A, не лежала на дуге **AB**.

Теорема 6.2. Функция $\hat{y}(x) \in C^1[a,b]$ доставляет функционалу J[y] *слабый локальный минимум* в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются следующие условия:

1) функция $\hat{y}(x)$ является экстремалью функционала J[y];
2) экстремаль $\hat{y}(x)$ может быть включена в центральное поле экстремалей с центром в точке **A**;
3) функция Вейерштрасса

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{p},\mathrm{y}') \geq 0,$$

в точках (x,y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для значений y', близких к $p(x,y)$.

Замечание 1. Если при сделанных предположениях выполняется условие

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{p},\mathrm{y}') \leq 0,$$

тогда на кривой $y = \hat{y}(x)$ функционал J[y] достигает своего *слабого локального максимума*

В следующей теореме сформулируем достаточные условия существования сильного локального минимума.

Теорема 6.3. Функция $\hat{y}(x) \in C^1[a,b]$ доставляет функционалу J[y] *сильный локальный минимум* в простейшей задаче вариационного исчисления, если одновременно выполняются следующие условия:

1) функция $\hat{y}(x)$ является экстремалью функционала J[y];
2) экстремаль $\hat{y}(x)$ может быть включена в центральное поле экстремалей с центром в точке **A**;
3) функция Вейерштрасса

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{p},\mathrm{y}') \geq 0,$$

в точках (x,y), близких к точкам на исследуемой экстремали, и для произвольных значений y'.

Замечание 2. Если при сделанных предположениях выполняется условие

$$\mathrm{E}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{p},\mathrm{y}') \leq 0,$$

тогда на кривой $y = \hat{y}(x)$ функционал J[y] достигает своего *сильного локального максимума*

Пример 19. Исследовать на экстремум функционал, если

$$J(y) = \int_1^3 [12xy + (y')^2]dx,$$

$$y(1) = 0;\ y(3) = 26.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$12x - 2y'' = 0 \text{ или } y'' = 6x.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части уравнения. В результате получим следующее решение

$$y(x) = x^3 + C_1 x + C_2.$$

Граничным условиям

$$y(1) = 1 + C_1 + C_2 = 0,$$
$$y(3) = 27 + 3C_1 + C_2 = 26$$

удовлетворяет экстремаль $\hat{y}(x) = x^3 - 1$.

На промежутке [1,3] данная экстремаль $\hat{y}(x) = x^3 - 1$ может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x, C_1) = x^3 - 1 + C_1(x - 1)$.

Функция Вейерштрасса

$$E(x, y, p, y') = 12xy + (y')^2 - 12xy - p^2 - (y' - p')2p = (y' - p)^2 \geq 0$$

знакоопределена при любых y', т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $\hat{y}(x) = x^3 - 1$.

Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и экстремаль $\hat{y}(x) = x^3 - 1$ доставляет сильный минимум.

Пример 20. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')dx,$$

$$y(1) = 3;\ y(2) = 5.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$x^2 y'' + 2xy' = 0.$$

Если положить $x = e^t$, то $y' = e^{-t} y'_t$, $y'' = e^{-2t}(y''_{tt} - y'_t)$. Подставив в уравнение получим

$$e^{2t}(y'' - y')e^{-2t} + 2e^t y' e^{-t} = 0 \text{ или } y'' + y' = 0.$$

Решение данного уравнения имеет вид

$$y(t) = C_1 + C_2 e^{-t}.$$

Сделав обратную замену $t = \ln x$, получим общее решение исходного уравнения Эйлера

$$y(x) = C_1 + \frac{C_2}{x}$$

Используя граничные условия

$$y(1) = C_1 + C_2 = 3,$$

$$y(2) = C_1 + \frac{C_2}{2} = 5,$$

находим $C_1 = 7$, $C_2 = -4$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = 7 - \frac{4}{x}$.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Экстремаль $\hat{y}(x) = 7 - \frac{4}{x}$ при $x \in [1,2]$ может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x, C_1) = C_1 + \frac{3-C_1}{x}$.

Функция Вейерштрасса имеет следующий вид

$$E(x, y, p, y') = y' + x^2 y'^2 - p - x^2 p^2 - (y' - p)(1 + x^2 2p) = x^2 (y' + p)^2 \geq 0.$$

При любых y' функция знакоопределена, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $\hat{y}(x) = 7 - \frac{4}{x}$.

Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и функционал на экстремали $\hat{y}(x) = 7 - \frac{4}{x}$ достигает сильного минимума.

Пример 21. Найти экстремум функционала

$$J(y) = \int_0^2 (xy' + {y'}^2) dx,$$

$$y(0) = 2; \; y(2) = 0.$$

Решение. Запишем уравнение Эйлера

$$1 + 2y'' = 0 \text{ или } y'' = -\frac{1}{2}.$$

Найдем общее решение уравнения Эйлера, интегрируя последовательно обе части уравнения. В результате получим следующее решение

$$y(x) = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + C_2.$$

Используя граничные условия

$$y(0) = C_2 = 2,$$

$$y(2) = -1 + 2C_1 + C_2 = 0,$$

находим $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2 = 2$.

В результате получим экстремаль $\hat{y}(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 2$.

Проверим достаточные условия сильного экстремума.

Экстремаль $\hat{y}(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 2$ при $x \in [0,2]$ может быть включена в центральное поле экстремалей $y(x, C_1) = -\frac{x^2}{4} + C_1 x + 2$.

Проверим условие Вейерштрасса. Функция Вейерштрасса имеет следующий вид

$$E(x,y,p,y') = xy' + {y'}^2 - xp - p^2 - (y'-p)(x+2p) =$$
$$y'^2 - 2y'p + p^2 = (y'-p)^2 \geq 0.$$

При любых y' функция знакоопределена, т.е. сохраняет знак в сильной окрестности кривой $\hat{y}(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 2$.

Следовательно, выполнено достаточное условие Вейерштрасса, и функционал на экстремали $\hat{y}(x) = -\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}x + 2$ достигает сильного минимума.

ГЛАВА 6. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

По определению С.Л. Соболева прямыми называются такие методы приближенного решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений. Данное определение считается наиболее общим и полным, хотя некоторые из методов, например метод Л.В. Канторовича, трудно подвести под данное выше определение.

В своей монографии "Некоторые применения функционального анализа в математической физике” Соболев дал теоретическое обоснование прямых методов в связи с теоремами существования соответствующих экстремальных функций и исследовал их свойства.

§1. Минимизирующая последовательность

Пусть $J[y]$ – некоторый функционал, значения которого ограничены снизу. Тогда существует точная нижняя грань его значений

$$\mu = \inf_{y \in D(J)} J[y],$$

где $D(J)$ – область определения функционала $J[y]$.

Определение 1.1. Последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ функций из области определения функционала $J[y]$ называется *минимизирующей* для этого функционала, если

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n] = \mu.$$

Теорема 1.1. Функционал, ограниченный снизу, имеет по крайней мере одну минимизирующую последовательность.

Теорема 1.2. Пусть $D(J)$ – линейное многообразие некоторого банахова пространства X. Если функционал $J[y]$ непрерывен в $D(J)$ и существует предел минимизирующей последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y^*$, тогда элемент y^* доставляет функционал $J[y]$ минимальное значение.

Выше приведенные теоремы позволяют находить минимум функционала минуя уравнение Эйлера. Для этого нужно погрузить множество $D(J)$ в такое банахово пространство X, в котором функционал $J[y]$ был бы непрерывен. Затем построить минимизирующую последовательность. Если она сходится в пространстве X, то ее предел доставляет минимум функционалу $J[y]$.

Наиболее важным методом построения минимизирующей последовательности является метод Ритца, но существуют и другие. Ниже нами будет рассмотрен метод приведения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений Канторовича. Также можно отметить метод Куранта и метод наискорейшего спуска.

§2. Метод Ритца

Рассмотрим вычислительную схему метода Ритца на примере поиска минимума следующего функционала

$$J[y(x)] = \int_a^b \Big(p(x){y'}^2(x) + q(x)y^2(x) + 2f(x)y(x)\Big)\,dx \qquad (1)$$

на множестве функций

$$M = \{y(x) \in C^1[a,b]: y(a) = y_a, y(b) = y_b\}. \qquad (2)$$

Выберем последовательность функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ из M, удовлетворяющих следующим двум условиям:

1) при любом n элементы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы;
2) последовательность $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ полна в M.

Напомним, что последовательность $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$, состоящая из элементов линейного нормированного пространства X, называется *полной*, если для каждого элемента $y(x) \in X$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое n, что

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i^n \varphi_i(x) - y(x) \right\| < \varepsilon.$$

Определение 2.1. Элементы $\varphi_i(x)$ будем называть *координатными* функциями, а их всю совокупность $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ – *координатной системой*.

Построим линейную комбинацию первых n координатных функций:

$$y_n(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^n \varphi_i(x),$$

где a_i^n – постоянные коэффициенты, зависящие от n. На таких линейных комбинациях функционал $J[y(x)]$ обращается в функцию от n независимых аргументов a_i^n:

$$\mathrm{J}[y_n(\mathrm{x})] = \Phi(a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n).$$

Далее ищем значения $a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n$, которые доставляют экстремум функции Φ.

Для этого составляем и решаем систему линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Phi(a_1^n, a_2^n, \dots, a_n^n)}{\partial a_i^n} = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n.$$

Нетрудно показать, что данная система имеет единственное решение.

Пусть $a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*$ – решение системы уравнений, тогда функция

$$y_n^*(\mathrm{x}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \varphi_i(x),$$

будет n – м приближением к решению $y^*(\text{x})$.

Замечание 1. Отметим, что из того, что последовательность $\{y_n^*(\text{x})\}$ является минимизирующей, т.е. предел равен нижней грани функционала

$$\lim_{n\to\infty} J[y_n^*(\text{x})] = \inf_{y\in M} J[y(x)] = \mu\,,$$

не всегда следует ее сходимость к функции $y^*(\text{x})$, реализующей экстремум в классе допустимых функций $\lim\limits_{n\to\infty} y_n^*(\text{x}) = y^*(\text{x})$. Сходимость имеет место при выполнении определенных условий. Укажем одно из них.

Теорема 2.1. Пусть в задаче (1) – (2) выполнены следующие условия:
1) $p(x) \geq p_0 > 0, p(x) \in C^1[a,b]$;

2) $q(x) \geq 0, q(x), f(x) \in C[a,b]$;

3) последовательность функций $\{y_n^*(\text{x})\}$ является минимизирующей.

Тогда эта последовательность будет равномерно сходящейся на $[a,b]$ к $y^*(\text{x})$ – решению вариационной задачи (1) – (2).

Пусть в задаче (1) – (2) граничные условия имеют вид $y(0) = y(1) = 0$. Если в качестве координатных функциях взять тригонометрические функции

$$\varphi_k(x) = \sqrt{2}\sin(\pi k x) \quad (k = 1,2,\dots),$$

то можно показать, оценка погрешности на отрезке [0,1] будет иметь вид:

$$\max|y_n^*(x) - y^*(x)| \leq \frac{1}{n+1}\left[\max p(x) + \frac{\max q(x)}{(n+1)^2\pi^2}\right]^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}}{\pi^2\sqrt{2}[\min p(x)]^{\frac{5}{2}}}$$
$$\times\left[\max|p'(x)| + \frac{1}{\pi}\max q(x) + \pi\min p(x)\right].$$

Используя более тонкие методы, например свойства функции Грина, можно получить более точные оценки.

Замечание 2. Поиск приближенного решения в задаче (1) – (2) эквивалентен поиску решения вариационным методом следующей краевой задачи:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) + q(x)y = -f(x),$$
$$y(-1) = y(1) = 0,$$
$$p(x) \geq p_0 = const > 0,\ q(x) \geq 0.$$

Можно показать [7], что две координатные системы

$$\varphi_k(x) = (1-x)(1+x)^k, k \in \mathbb{N}$$

и $(P(x)$ — многочлены Лежандра)

$$\psi_k(x) = \sqrt{2k+1}\int_{-1}^{x} P_k(t)dt\,, k \in \mathbb{N}$$

приводят к одинаковым приближенным решениям. Однако, система $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ приводит к неустойчивым приближениям, а система $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – к устойчивым. Если же для упрощения вычислений отбросить у функций $\psi_k(x)$ множитель $\sqrt{2k+1}$, то приближенные решения потеряют устойчивость.

Пример 22. Найти приближенное решение функционала методом Ритца

$$J[y(x)] = \int_0^2 (y'^2 + y^2 + 2xy)dx\,,$$

$$y(0) = y(2) = 0, n = 2.$$

Решение. В качестве координатных функций выбираем следующие:

$$\varphi_k(x) = (2-x)x^k, k \in \mathbb{N}.$$

Эти функции удовлетворяют граничным условиям $\varphi_k(0) = \varphi_k(2) = 0$. При $n = 2$ ищем решение в виде

$$y_2(x) = C_1 x(2-x) + C_2 x^2(2-x),$$

откуда

$$y_2'(x) = C_1(2-2x) + C_2(4x-3x^2).$$

После подстановки в функционал и интегрирования получим

$$\Phi(C_1, C_2) = \frac{56}{15}C_1^2 + \frac{192}{35}C_2^2 + \frac{112}{15}C_1C_2 + \frac{8}{3}C_1 + \frac{16}{5}C_2.$$

Воспользовавшись необходимыми условиями экстремума функции $\Phi(C_1, C_2)$ составляем систему:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_1} = \frac{112}{15}C_1 + \frac{112}{15}C_2 + \frac{8}{3}\,,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial C_2} = \frac{112}{15}C_1 + \frac{384}{35}C_2 + \frac{16}{5}.$$

Решая систему, получим $C_1^* = -\frac{33}{161}$, $C_2^* = -\frac{7}{46}$.

Следовательно, приближенное выражение $\hat{y}_2(x)$ для экстремали $y(x)$ имеет вид

$$\hat{y}_2(x) = -\frac{33}{161}x(2-x) - \frac{7}{46}x^2(2-x)$$

В данном случае существует точное решение поставленной задачи:

$$y^*(x) = \frac{2e^2}{1-e^4}(e^{-x} - e^x) - x\,.$$

Сравним полученное методом Ритца приближенное решение $\hat{y}_2(x)$ и точное $y^*(x)$ при некоторых значениях аргумента:

Таблица 1

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$y^*(x)$	0,0000	-0,1107	-0,2126	-0,2965	-0,3519	-0,3666	-0,3258	-0,2113	0,0000
$\hat{y}_2(x)$	0,0000	-0,1063	-0,2108	-0,2992	-0,3571	-0,3705	-0,3249	-0,2062	0,0000

Из таблицы видно, что точное и приближенное решения отличаются в выбранных точках не более чем на 0,0052.

§ 3. Метод Канторовича

Данный метод применяется для исследования на экстремум функционалов, зависящих от функций нескольких переменных. Он занимает промежуточное положение между точным решением задачи и методом Ритца. Преимущество этого метода заключается в том, что в нем лишь часть выражения, дающего решение выбирается априорно, другая же часть определяется в соответствии с характером задачи. Проиллюстрирует сущность метода на следующем примере.

Рассмотрим функционал вида

$$J[u(x,y)] = \iint\limits_G F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\, dy, \qquad (1)$$

где $G = \{(x,y): a \le x \le b,\ -\alpha(x) \le y \le \alpha(x)\}$, $u|_{\partial G} = 0$.

Как и в методе Ритца, выбирается система координатных функций $\{\varphi_k(\mathrm{x},\mathrm{y})\}_{k=1}^{\infty}$ и ищется приближенное решение в виде

$$u_n(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\mathrm{x})\, \varphi_k(\mathrm{x},\mathrm{y}), \qquad (2)$$

где коэффициенты $a_k(\mathrm{x})$ являются неизвестными функциями и определяются таким образом, чтобы функционал (1) достигал экстремального значения.

После подстановки (2) в (1) и интегрирования полученного выражения по переменной y получается следующий функционал

$$J[u_n(x,y)] = \int_a^b \Phi(x, a_1(\mathrm{x}), \dots, a_n(\mathrm{x}), a_1'(\mathrm{x}), \dots, a_n'(\mathrm{x}))dx,$$

зависящий от нескольких функций $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x)$. Далее составляем систему уравнений Эйлера

$$\Phi_{a_i} - \frac{d}{dx}\Phi_{a_i'} = 0, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий.

Пусть $a_1^*(x), a_2^*(x), \dots, a_n^*(\text{x})$ – решение системы дифференциальных уравнений, тогда функция

$$u_n^*(\text{x}, \text{y}) = \sum_{i=1}^{n} a_i^*(x)\varphi_i(x, y),$$

будет n – м приближением к решению $u^*(\text{x}, \text{y})$.

Как мы видим, сущность метода Канторовича заключается в том, что он сводит (приближенно) интегрирование уравнения в частных производных к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Можно также доказать сходимость минимизирующей последовательности к решению при определенных дополнительных ограничениях [5].

Пример 23. Методом Канторовича найти экстремум функционал вида

$$J[u(x, y)] = \iint\limits_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - 2u\right] dxdy, \tag{3}$$

где $G = \left\{(x, y)\colon 1 \le x \le 3, -\frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \frac{x}{\sqrt{3}}\right\}$, $u|_{\partial G} = 0$.

Решение. При n =1 будем искать решение в виде

$$u_1(x, y) = \left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right)a(x).$$

Граничные условия на прямых $y = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}$ выполняются. После подстановки $u_1(x, y)$ в (3) и интегрирования по переменной у получаем

$$J[u_1] = \int\limits_1^3 \frac{16\sqrt{3}}{405}x^3\left(x^2(a'(x))^2 + 5xa'(x)a(x) + 15a^2(x) + \frac{15a(x)}{2}\right) dx.$$

Уравнение Эйлера для данного функционала имеет следующий вид:

$$\frac{32\sqrt{3}}{405}x^3\left(x^2a''(x) + 5xa'(x) - 5a(x) - \frac{15}{4}\right) = 0.$$

Находим общее решение уравнения:

$$a(x) = xC_2 + \frac{C_1}{x^5} - \frac{3}{4}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий

$$a(1) = C_2 + C_1 - \frac{3}{4} = 0,$$

$$a(3) = 3C_2 + \frac{C_1}{3^5} - \frac{3}{4} = 0,$$

откуда $C_1^* = \frac{729}{1456}$ и $C_2^* = \frac{363}{1456}$.

Окончательно получаем следующее приближенное выражение для экстремали функционала (3):

$$u_1^*(x,y) = \frac{3}{4}\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right)\left(\frac{243}{364}x^{-5} + \frac{121}{364}x - 1\right).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев, В.М. Оптимальное управление/ В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В. Фомин. – 4-е изд., испр. и доп. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2018. – 384 с.

2. Андреева, Е.А. Вариационное исчисление и методы оптимизации/ Е.А. Андреева, В.М. Цирулева. – М. : Высш. шк., ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 584 с.

3. Васильева, А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах/ А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. – 2-е издание, исправленное. – М. ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 432 с.

4. Зеликин, М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 160 с.

5. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа/ Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М., «Физматлит», 1962. – 709 с.

6. Михлин, С.Г. Курс математической физики. – 2-е изд., стер. – СПб.: Издательство ≪Лань≫, 2002. – 576 с.

7. Михлин, С.Г. Численная реализация вариационных методов/ С.Г. Михлин. – М., «Наука», 1966. – 432 с

8. Романко, В.К. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления. – 2-е изд. – М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. – 344 с.: ил.

Евгений Витальевич Никитенко

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие для студентов дневной формы обучения направления «Информатика и вычислительная техника»

Подписано к печати 25.10.19. Формат 60х84 /16.
Усл. печ. л. 3,06. Тираж 15 экз. Заказ 191703. Рег. № 21.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.