МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**Рубцовский индустриальный институт (филиал)**
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

**Е.В. Никитенко**

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для студентов всех форм обучения направления
«Информатика и вычислительная техника»

***Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «ИВТ»***

Рубцовск 2022

УДК 514.122

Никитенко Е.В. Аналитическая геометрия. Учебное пособие для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022. – 49 с.

Учебное пособие посвящено знакомству с методом координат аналитической геометрии. Рассмотрены основные понятия, определения и свойства объектов аналитической геометрии, приведены формулировки основных утверждений.

Отдельное внимание уделено теории метрических инвариантов квадрик. Приведены метрические классификации кривых и поверхностей второго порядка по инвариантам.

Рассмотрено и одобрено на
заседании НМС РИИ
Протокол № 8 от 22.12.2022 г.

Рецензент: канд. физ.- мат. наук, доцент Ю.В. Никонорова

## СОДЕРЖАНИЕ

## Предисловие

Целью изучения данной дисциплины является формирование у студента знаний и способностей к применению математического аппарата аналитической геометрии при решении прикладных задач в профессиональной деятельности.

Курс аналитической геометрии знакомит студентов с методом координат, который позволяет исследовать свойства геометрических объектов средствами линейной алгебры и математического анализа.

Изложение теории сопровождается достаточным количеством задач с подробными решением, что должно способствовать лучшему усвоению материала, самостоятельной работе и приобретению навыков решения задач.

Читателю, желающему глубже изучить курс аналитической геометрии, можно посоветовать литературу, приведенную в конце пособия.

## Глава 1. Векторы и линейные операции над ними

### §1. Понятие вектора

**Определение 1.1.** Вектором называется направленный отрезок прямой. Вектор с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или малыми латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}$, ...) (рис. 1.1).

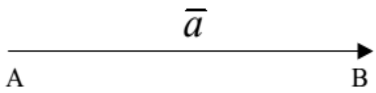


Рис. 1.1. Вектор AB

**Определение 1.2.** Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. *Длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$ или его *модулем* называется длина отрезка, образующего этот вектор. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

**Определение 1.3.** *Связанным вектором* называется направленный отрезок, характеризующийся: длиной, направлением и точкой приложения. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к упругому телу.

**Определение 1.4.** Свободным вектором, соответствующим направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$, называется множество всех направленных отрезков, характеризующихся одинаковой длиной и направлением.

Мы будем работать со свободными векторами.

**Определение 1.5.** Вектор, у которого начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором или *нуль-вектором*. Обозначается нулевой вектор символом $\vec{0}$.

**Определение 1.6.** Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют запись вида $\vec{a} \parallel \vec{b}$. При этом коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и противоположно направленными $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

**Определение 1.7.** Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины, т.е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

**Определение 1.8.** Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются компланарными, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

**Определение 1.9.** Множество свободных векторов на прямой, на плоскости и в пространстве мы будем обозначать $V_1$, $V_2$ и $V_3$ соответственно.

## §2. Операции сложения векторов и умножения вектора на число

Действие сложение векторов определим с помощью так называемого *правила треугольника*.

**Определение 2.1.** Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов и обозначается $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.1).

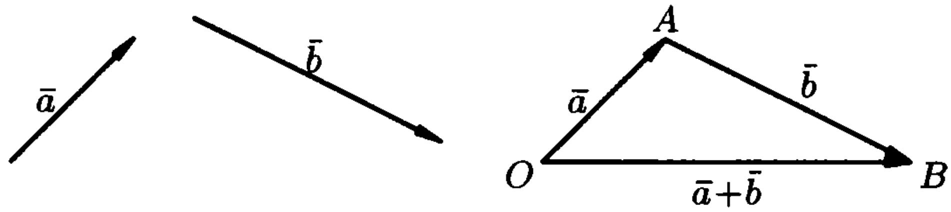


Рис. 2.1. Правило треугольника

Аналогичное правило сложения (правило многоугольника) действует и для нескольких векторов.

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, построив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах параллелограмм (рис. 2.2).

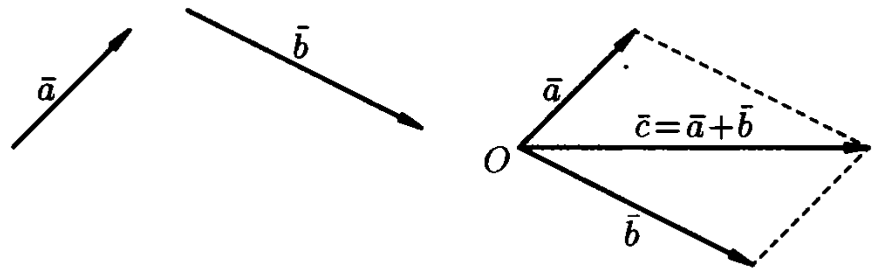


Рис. 2.2. Правило параллелограмма

**Определение 2.2.** Под разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

**Определение 2.3.** Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $\lambda$ называется новый вектор, обозначаемый $\lambda \cdot \vec{a}$, такой, что:

1) $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\lambda \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

**Теорема 2.1.** Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ – коммутативность;

2) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}:\ (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ – ассоциативность;

3) $\exists\ \vec{0}$, такой что $\forall\, \vec{a}:\quad \vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) $\forall \vec{a}\quad \exists!\,(-\vec{a}):\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ – существование противоположного вектора;

5) $\forall \vec{a}, \vec{b}\quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}:\ \lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

6) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

7) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda\mu)\cdot\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$;

8) $\forall\, \vec{a}:\ 1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

## §3. Линейная зависимость и независимость векторов

**Определение 3.1.** Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется выражение следующего вида:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots\lambda_n\vec{a}_n. \tag{3.1}$$

**Определение 3.2.** Линейная комбинация (3.1) называется *тривиальной,* если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

**Определение 3.3.** Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой,* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми,* т.е. $\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\cdots+\lambda_n\vec{a}_n=\vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1=\lambda_2=\ldots\lambda_n=0.$.

## §4. Геометрический смысл линейной зависимости векторов

**Теорема 4.1.** Два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они *коллинеарны.*

**Следствие.** Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были *неколлинеарны*.

**Теорема 4.2.** Любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми.

**Следствие.** Любой вектор на плоскости $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}\text{, где } \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

**Теорема 4.3.** Три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

**Следствие.** Для того чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

**Теорема 4.4.** Любые четыре вектора в трехмерном пространстве $V_3$ являются линейно зависимыми.

**Следствие.** Любой вектор $\vec{d}$ в пространстве $V_3$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}\text{, где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R.$$

## §5. Базис и координаты вектора

**Определение 5.1.** Пусть $V$ – векторное пространство и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – некоторая система его векторов. Данная система называется *полной*, если любой вектор из $V$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

**Определение 5.2.** Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется базисом пространства $V$, если она является линейно независимой и полной.

**Теорема 5.1.** Любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_2$ образуют базис на плоскости $V_2$, а любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V_3$ образуют базис в пространстве $V_3$.

Таким образом, любой вектор $\vec{a} \in V_3$ можно представить единственным образом в виде

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3\text{, где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R. \tag{5.1}$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а равенство (5.1) называется разложением вектора $\vec{a}$ по данному базису.

Выбор базиса в $V_3$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из $V_3$ и упорядоченными тройками $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ действительных чисел. Поэтому наряду с записью (5.1) пишут

$$\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

**Определение 5.3.** Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *ортонормированным, если* векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину.

## §6. Аффинная система координат

**Определение 6.1.** Репер – это пара, состоящая из некоторой точки и упорядоченного базиса. С каждым репером связана *аффинная система координат*.

Аффинная система координат на плоскости задается точкой $O$ (начало координат) и парой приложенных к ней неколлинеарных векторов $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$. Данные векторы определяют две оси, пересекающиеся в точке $\boldsymbol{O}$: ось абсцисс или ось $\boldsymbol{Ox}$ и ось ординат или ось $\boldsymbol{Oy}$. Сама система обозначается через $\boldsymbol{Oe_1e_2}$ или через $\boldsymbol{Oxy}$. Аналогично задается аффинная система координат в пространстве – произвольной точкой $O$ и базисом $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$. Обозначается $\boldsymbol{Oxyz}$.

Разложив радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ по базису $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ получим:

$$\overrightarrow{OM} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + x_3\boldsymbol{e_3}.$$

Коэффициенты разложения $x_1, x_2, x_3$ называются аффинными координатами точки $M$.

**Определение 6.2.** Аффинная система координат называется *прямоугольной* (или *евклидовой*), если соответствующий базис ортонормирован. Таким образом, евклидовы координаты являются частным случаем аффинных.

Ортонормированные векторы (орты) обычно обозначают $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (рис 6.1.). Прямоугольные координатные системы удобны при решении метрических задач и наиболее часто используются в приложениях. Например, расстояние $d$ между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ на плоскости выражается формулой:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

В то же время, в произвольных аффинных координатах формула для расстояния имеет более сложный вид:

$$d(A, B) = \sqrt{g_{11}(x_2 - x_1)^2 + 2g_{12}(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) + g_{22}(y_2 - y_1)^2},$$

где $g_{ij} = \left(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j}\right)$ –метрический коэффициент, равный скалярному произведению базисных векторов.

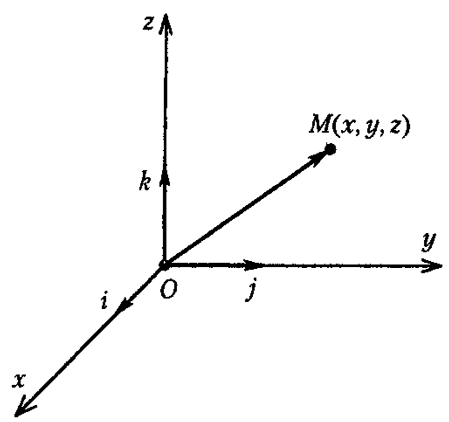


Рис. 6.1. Прямоугольная система координат в пространстве

## §7. Деление отрезка в данном отношении

**Определение 7.1.** Говорят, что точка $C \neq B$ делит невырожденный отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, если

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}, \ (\lambda \neq 0, \lambda \neq -1).$$


Рис. 7.1. Деление отрезка в отношении $\lambda = 2$.

Заметим, что если $\lambda < 0$, то точка $C$ не принадлежит отрезку $AB$ (рис 7.2).


Рис. 7.2. Деление отрезка в отношении $\lambda = -2$.

**Теорема 7.1.** Рассмотрим в прямоугольной системе координат отрезок, концами которого являются точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты точки $C(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, делящей отрезок $AB$ в отношении $\lambda$, определяются по следующим формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

## §8. Преобразование координат

Пусть на плоскости заданы две аффинные системы координат $\boldsymbol{Oxy}$ и $\boldsymbol{O'x'y'}$, связанные соответственно с реперами $\boldsymbol{Oe_1e_2}$ и $\boldsymbol{O'e'_1e'_2}$. Обозначим через $S = (s_{ij})$ – матрицу перехода от базиса $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}$ к $\boldsymbol{e'_1}, \boldsymbol{e'_2}$, т.е.

$$\boldsymbol{e'_1} = s_{11}\boldsymbol{e_1} + s_{21}\boldsymbol{e_2},$$
$$\boldsymbol{e'_2} = s_{12}\boldsymbol{e_1} + s_{22}\boldsymbol{e_2}.$$

Тогда координаты точки $M$ в данных системах связаны соотношениями:

$$x = s_{11}x' + s_{12}y' + x_0,$$
$$y = s_{21}x' + s_{22}y' + y_0,$$

где $(x_0, y_0)$ – координаты точки $O'$ в системе $\boldsymbol{Oxy}$. В матричном виде получим:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что матрица $S$ является невырожденной.

Аналогичным образом, если в пространстве заданы две системы координат $\boldsymbol{Oxyz}$ и $\boldsymbol{O'x'y'z'}$, связанные соответственно с реперами $\boldsymbol{Oe_1e_2e_3}$ и $\boldsymbol{O'e_1'e_2'e_3'}$, то координаты точки $M$ в данных системах связаны формулой:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}.$$

**Определение 8.1.** Если матрица $S = (s_{ij})$ – ортогональная (т.е. $S^{-1} = S^T$), то преобразование называется *ортогональным* или *изометрическим*. Данное преобразование сохраняет расстояние между точками.

Переход от одной прямоугольной системы координат к другой прямоугольной осуществляется с помощью ортогонального преобразования.

Напомним, что преобразование прямоугольных координат на плоскости при параллельном переносе осей (без изменения их направлений) определяется формулами

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases}$$

где $(x, y)$– координаты произвольной точки $M$ плоскости в старой системе координат $Oxy$, $(x', y')$– координаты той же точки в новой системе координат $O'x'y'$, $(a, b)$ – координаты начала $O'$ в системе $Oxy$ (рис. 8.1) .

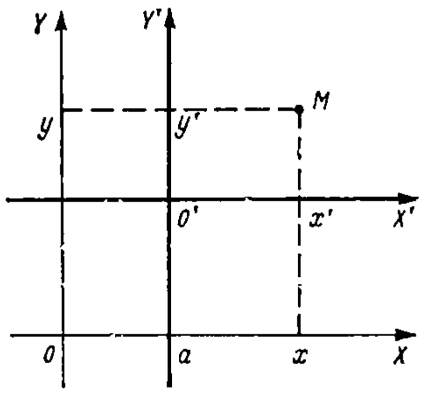


Рис. 8.1. Параллельный перенос осей

## Глава 2. Операции умножения векторов

### §1. Проекция вектора на ось и ее свойства

Пусть в пространстве задана некоторая ось *l*, то есть прямая, на которой отмечена фиксированная точка *O* и заданы направление и единица длины. Тогда каждой точке оси соответствует некоторое число.

**Определение 1.1.** *Проекцией точки A на ось l* называется число, соответствующее основанию перпендикуляра *AB*, опущенного из точки *A* на ось *l*.

**Определение 1.2.** *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось l* называется разность проекций конца вектора и его начала.

Будем использовать следующее обозначение для проекции: $np_l\overrightarrow{AB}$.

**Определение 1.3.** *Углом* между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенными к общему началу, называется наименьший из углов, на который надо повернуть один из этих векторов так, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Обозначение: $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$.

Угол между векторами не зависит от направления поворота и принимает любое значение от 0 до $\pi$.

***Свойства проекции:***

1) $np_l(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

2) $np_l(\lambda\cdot\vec{a}) = \lambda\cdot np_l\vec{a}$;

3) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью *l*.

**Определение 1.4.** *Проекцией вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ ($\vec{b}\neq\vec{0}$) называется проекция вектора $\vec{a}$ на любую ось, параллельную вектору $\vec{b}$ и имеющую направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{b}$.

Проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ будем обозначать $np_{\vec{b}}\vec{a}$. Очевидно, что $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Координаты $a_x, a_y, a_z$ вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (разложенного по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$) равны его проекциям на соответствующие координатные оси:

$$np_{OX}\vec{a} = a_x,\ np_{OY}\vec{a} = a_y,\ np_{OZ}\vec{a} = a_z.$$

## §2. Скалярное произведение двух векторов

**Определение 2.1.** *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла $\varphi$ между ними:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.1)$$

Иногда скалярное произведение обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Формулу (2.1) можно записать в виде:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \quad \text{или} \quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

**Определение 2.2.** Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

***Свойства скалярного произведения:***

1) $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$, причем $(\vec{a},\vec{a})=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$;

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=(\vec{a},\vec{c})+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

4) $\left(\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тогда:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

2) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

3) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

**Определение 2.3.** Косинусы углов, образованных вектором с осями координат, называются *направляющими косинусами вектора* и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\ \cos\beta=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}})=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

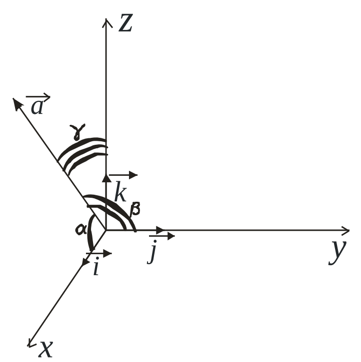


Рис. 2.1 Направляющие косинусы

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

**Теорема 2.1 (Неравенство Коши-Буняковского)**

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

Пример 1. Используя свойства скалярного произведения, покажем справедливость следующих равенств:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Действительно:

$$|\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) \pm (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \pm (\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}) =$$

$$= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 \pm 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}).$$

Пример 2. Пусть в треугольнике $ABC$ заданы длины сторон: $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a.$ Найти длину медианы $|CM|$.

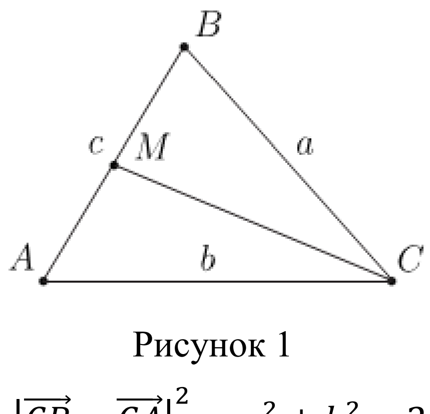


Рисунок 1

Поскольку $c^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\right|^2 = a^2 + b^2 - 2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right)$, следовательно $2\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}\right) = a^2 + b^2 - c^2$. Так как точка $M$ делит сторону $AB$ пополам, то $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}\right)$. Таким образом,

$$\left|\overrightarrow{CM}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + 2\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right)\right) = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

## §3. Векторное произведение двух векторов

**Определение 3.1.** Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется *правоориентированной*, или *правой (левой)*, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против хода часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке).

**Определение 3.2.** *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Иногда векторное произведение обозначают $\vec{a} \times \vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \vec{0}$.

***Свойства векторного произведения:***

1) $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ – антикоммутативность;

2) $\left[\lambda \cdot \vec{a}, \vec{b}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, где $\lambda$ – число;

3) $\left[\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}\right] = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{a}, \vec{c}\right]$ – распределительное свойство.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда

$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Для нахождения площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, применяется формула $S = \left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right|$.

## §4. Смешанное произведение векторов

**Определение 4.1.** *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $[\vec{a},\vec{b}]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$.

Иногда смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

***Свойства смешанного произведения:***

1) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=([\vec{b},\vec{c}],\vec{a})=([\vec{c},\vec{a}],\vec{b})$, т.е. смешанное произведение не изменится при циклической перестановке векторов;

2) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=(\vec{a},[\vec{b},\vec{c}])$, т.е. смешанное произведение не изменится при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=-([\vec{b},\vec{a}],\vec{c})=-([\vec{a},\vec{c}],\vec{b})=-([\vec{c},\vec{b}],\vec{a})$, т.е. при перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак;

4) $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=0$, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) векторы компланарны (в частности, два из перемножаемых векторов коллинеарны).

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ и $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$. Тогда

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Объем $V_{пар}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем $V_{пир}$ образованной ими треугольной пирамиды вычисляются по формулам:

$$V_{пар}=\left|([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})\right|,\ V_{пир}=\frac{1}{6}V_{пар}=\frac{1}{6}\left|([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})\right|.$$

Приведем решение нескольких задач для закрепления теоретического материала.

**Пример 1**. Даны точки $A(1,2,3)$, $B(2,3,2)$, $C(3,5,7)$, $D(0,4,5)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:
а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
б) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
в) площадь грани $ABC$;
г) объем тетраэдра $ABCD$;

**Решение.**

а) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ : $\overrightarrow{AB} = \{1,1,-1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2,3,4\}$. Косинус угла между векторами находим по формуле:

$$\cos(\varphi) = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 - 1 \cdot 4}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+9+16}} = \frac{1}{\sqrt{87}}.$$

б) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \{-1,2,2\}$. Для нахождения проекции вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ воспользуемся формулой:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \frac{1 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

в) Площадь грани $ABC$ найдем, используя свойство векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{86}.$$

г) Объем тетраэдра $ABCD$ находим, используя свойство смешанного произведения:

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)\right| = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}|-17| = \frac{17}{6}.$$

**Пример 2**. Применяя соответствующий математический аппарат, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что

$$\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 2;\ \ \left|\vec{b}\right| = 2;\ \ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

**Решение.**

Используя свойства векторного произведения, найдем

$$[\vec{p}, \vec{q}] = \left[2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}\right] = 2[\vec{a}, \vec{a}] - 6\left[\vec{a}, \vec{b}\right] + \left[\vec{b}, \vec{a}\right] - 3\left[\vec{b}, \vec{b}\right] = 7\left[\vec{b}, \vec{a}\right].$$

Вычисляем площадь параллелограмма:

$$S = |[\vec{p}, \vec{q}]| = 7\left|\vec{b}\right|\,|\vec{a}|\sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 14.$$

# Глава 3. Геометрия прямых и плоскостей

Все построения будут вестись в прямоугольной системе координат: $Oxy$ на плоскости или $Oxyz$ в пространстве.

## §1. Различные виды задания прямой на плоскости

**Определение 1.1.** Углом наклона $\varphi$ прямой $L$ к оси $Ox$ называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг пересечения $Ox$ и $L$ в направлении против часовой стрелки до совмещения $Ox$ с $L$ (рис. 1.1).

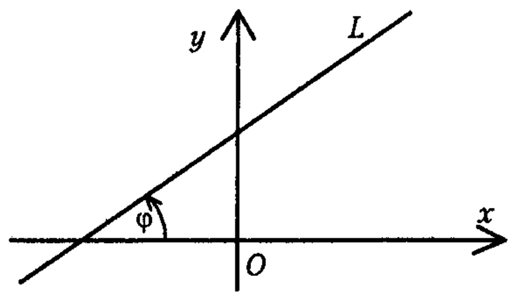


Рис. 1.1. Угол наклона

**Определение 1.2.** Уравнение прямой $L$ с угловым коэффициентом имеет следующий вид:

$$y = kx + b,$$

где $k$ - угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона $\varphi$ прямой $L$ к оси $Ox$, а $b$ - ордината точки пересечения прямой с осью $Oy$.

**Определение 1.3.** Общим уравнением прямой $L$ называется уравнение вида

$$Ax + By + D = 0,$$

где $A, B$ и $D$ - постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$. Заметим, что вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой $L$, т.е. $\vec{n}$ перпендикулярен прямой $L$.

**Определение 1.4.** Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m)$, определяется *каноническими уравнениями:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \qquad (1.1)$$

Приравняв каждое из равных отношений в (1.1) параметру $t$ и выразив $x$ и $y$, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in R. \qquad (1.2)$$

**Определение 1.5.** Система уравнений (1.2) называется *параметрическими уравнениями* прямой на плоскости.

**Определение 1.6.** Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, имеет следующий вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

## §2. Расстояние от точки до прямой.

**Теорема 2.1.** Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $L$, заданной уравнением $Ax + By + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

## §3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

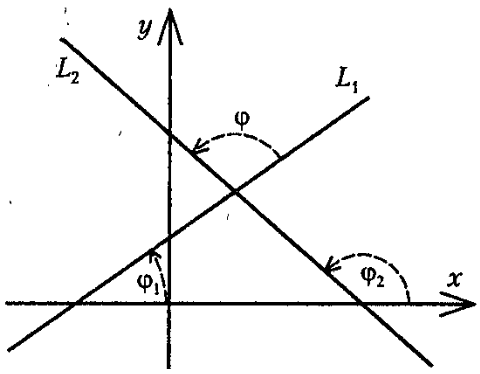


Рис 3.1

**Определение 3.1.** Под углом между прямыми $L_1$ и $L_2$ будем понимать угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой $L_1$ до совмещения с прямой $L_2$.

Пусть прямые $L_1$ и $L_2$ заданы следующими уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Тогда величина угла $\varphi$ между ними определяется из формулы

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Прямые $L_1$ и $L_2$ будут параллельны, если $k_1 = k_2$. Условие их перпендикулярности имеет вид: $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$.

## §4. Уравнение плоскости в пространстве

**Определение 4.1.** Уравнение плоскости $P$, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, имеет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

**Определение 4.2.** *Общее уравнение* плоскости $P$ имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ причем } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

**Определение 4.3.** Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости $P$.

**Лемма 4.4.** Уравнение плоскости $P$, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Действительно, пусть $M(x, y, z)$ – произвольная точка плоскости $P$. Поскольку векторы $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ компланарны, то определитель, составленный из их координат, равен нулю.

## §5. Расстояние от точки до плоскости

**Теорема 5.1.** Расстояние $d$ от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $P$, заданной уравнением $Ax + By + Cx + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## §6. Различные виды задания прямой в пространстве

**Определение 6.1.** Прямая, проходящая через точку $M_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m, n)$, который называется *направляющим*, определяется каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

**Определение 6.2.** Система уравнений $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \; t \in R, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$ называется *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве.

**Определение 6.3.** Прямая может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \qquad (6.1)$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой (система (6.1)). Эта система называется *общим* уравнением прямой. Направляющий вектор может быть найден по формуле

$$\vec{q} = \left( \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \right).$$

## §7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые $L_1$ и $L_2$ заданы уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

**Определение 7.1.** Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Величина угла между прямыми $L_1$ и $L_2$ определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых $L_1$ и $L_2$ имеет вид

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых $L_1$ и $L_2$ сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

## §8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Величина угла $\varphi$ между прямой $L$: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $P$: $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется из формулы

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой $L$ и плоскости $P$ имеет вид

$$(\vec{q}, \vec{n}) = A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой $L$ и плоскости $P$ сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}$ и $\vec{n}$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{A}{l}=\frac{B}{m}=\frac{C}{n}.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой $L$ и плоскости $P$ удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

подставив их в уравнение плоскости.

Применим теоретический материал для решения нижеприведенных задач.

**Пример 1.** Составить уравнения биссектрис между прямыми $x-7y=1$ и $x+y=-7$

**Решение.** Точка $B(x,y)$ лежит на биссектрисе углов, образованных данными прямыми, тогда и только тогда, когда расстояния $d_1$ и $d_2$ от этой точки до заданных прямых равны между собой, т.е.

$$\frac{|x-7y-1|}{\sqrt{1^2+7^2}}=\frac{|x+y+7|}{\sqrt{1^2+1^2}}.$$

Откуда получаем:

$$\frac{x-7y-1}{5\sqrt{2}}=\frac{x+y+7}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; x+3y+9=0,$$

$$\frac{x-7y-1}{5\sqrt{2}}=-\frac{x+y+7}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; 3x-y+17=0.$$

**Пример 2.** Найти точку $M'$,

а) симметричную точке $M$ относительно прямой:

$$M(2,8,0), \qquad \frac{x-1}{-3}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-3}{-1};$$

б) симметричную точке $M$ относительно плоскости:

$$M(3,-4,-6), \qquad x-y-4z-13=0.$$

**Решение.**

а) Составим уравнение плоскости $P$, проходящей через точку $M$ перпендикулярно заданной прямой. Понятно, что в качестве нормаля можно взять направляющий вектор прямой, т.е. $\vec{n} = \vec{q} = \{-3, 1, -1\}$. Уравнение плоскости имеет вид:

$$-3(x-2) + (y-8) - (z-0) = -3x + y - z - 2 = 0.$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = -3t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = -t + 3. \end{cases}$$

Найдем координаты точки $M''(x_c, y_c, z_c)$ пересечения данной прямой и плоскости. Подставим выражения для $x, y$ и $z$ в уравнение плоскости:

$$-3(-3t+1) + (t-3) - (-t+3) - 2 = 11t - 11 = 0 \quad \Rightarrow t_0 = 1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра $t_0 = 1$, получим

$$x_{\text{c}} = -2\,, y_{\text{c}} = -2\,, z_{\text{c}} = 2.$$

Так как точка $M''$ является серединой отрезка $MM'$, то воспользуемся формулами

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_c = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

где $M(x_1, y_1, z_1), M'(x_2, y_2, z_2)$.

Следовательно, координаты искомой точки $M'(x_2, y_2, z_2)$ равны

$$x_2 = 2x_c - x_1 = -6,$$

$$y_2 = 2y_c - y_1 = -12,$$

$$z_2 = 2z_c - z_1 = 4.$$

б) Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M$ перпендикулярно заданной плоскости. Понятно, что в качестве направляющего вектора можно взять нормаль, т.е. $\vec{n} = \vec{q} = \{1, -1, -4\}$. Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z+6}{-4}.$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 4. \\ z = -4t - 6 \end{cases}$$

Найдем координаты точки $M''(x_c, y_c, z_c)$ пересечения данной прямой и плоскости. Подставим выражения для $x, y$ и $z$ в уравнение плоскости:

$$(t+3) - (-t-4) - 4(-4t-6) - 13 = 18t + 18 = 0 \quad \Rightarrow t_0 = -1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра $t_0 = -1$, получим

$$x_{\text{c}} = 2\,, y_{\text{c}} = -3\,, z_{\text{c}} = -2.$$

Так как точка $M''$ является серединой отрезка $MM'$, то воспользуемся формулами

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}, z_c = \frac{z_1 + z_2}{2},$$

где $M(x_1, y_1, z_1), M'(x_2, y_2, z_2)$.

Следовательно, координаты искомой точки $M'(x_2, y_2, z_2)$ равны

$$x_2 = 2x_c - x_1 = 1,$$

$$y_2 = 2y_c - y_1 = -2,$$

$$z_2 = 2z_c - z_1 = 2.$$

**Пример 3.** Применяя соответствующий математический аппарат, решите следующую задачу. Даны точки $A(1, 2, 3), B(2, 3, 2), C(3, 5, 7), D(0, 4, 5)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

а) уравнение плоскости $ABC$;

б) каноническое уравнение высоты $OD$;

в) точку $O$ пересечения высоты $OD$ с плоскостью $ABC$;

г) канонические уравнения прямых $AB$ и $AC$.

**Решение.**

а) Для нахождения уравнения плоскости $ABC$ воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ 2 - 1 & 3 - 2 & 2 - 3 \\ 3 - 1 & 5 - 2 & 7 - 3 \end{vmatrix} = 7x - 6y + z + 2 = 0.$$

б) Направляющий вектор прямой $OD$ совпадает с нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости $ABC$ и имеет координаты $\vec{q} = \{7, -6, 1\}$. Учитывая, что прямая $OD$ проходит через точку $D(0, 4, 5)$, запишем канонические уравнения:

$$\frac{x}{7} = \frac{y - 4}{-6} = \frac{z - 5}{1}.$$

в) Для нахождения координат точки $O(x_0, y_0, z_0)$ запишем параметрические уравнения прямой $OD$:

$$\begin{cases} x = 7t, \\ y = -6t + 4, \\ z = t + 5. \end{cases}$$

Определим значение параметра $t$ при котором происходит пересечение прямой и плоскости, подставляя выражения для $x, y$ и $z$ в уравнение плоскости:

$$49t - 6(-6t + 4) + t + 5 + 2 = 86t - 17 = 0 \implies t_0 = \frac{17}{86}.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра $t_0$, получим

$$x_0 = \frac{119}{86}, y_0 = \frac{121}{43}, z_0 = \frac{447}{86}.$$

г) Для нахождения канонических уравнений прямых $AB$ и $AC$ возьмем в качестве направляющих векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно:

$$AB\colon \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{-1},$$

$$AC\colon \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}.$$

## Глава 4. Многочлены второй степени и квадрики

### § 1. Уравнение квадрики

Рассмотрим уравнение с многочленом второй степени от $n$ неизвестных над полем $\mathbb{R}$ следующего вида

$$F(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j+2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i+c=0, \qquad (1)$$

где $a_{ij}=a_{ji}$ для $i,j=\overline{1,n}$ и хотя бы один коэффициент $a_{ij}\neq 0$.

**Определение 1.1** Множество $K$ точек в евклидовом пространстве, координаты которых удовлетворяют данному уравнению называется *квадрикой*. Квадрики называют также гиперповерхностями второго порядка.

Квадратичная форма $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ называется квадратичной частью многочлена $F(x_1,\dots,x_n)$, линейная форма $2\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$ – линейной частью, а число $c$ – свободным членом.

Для исследования свойств квадрики перепишем ее уравнение в матричном виде. Введем следующие обозначения: пусть $A=\left(a_{ij}\right)$ – симметричная матрица коэффициентов квадратичной части, $B=(b_1,\dots,b_n)$ – вектор-строка из коэффициентов линейной части, $X=(x_1,\dots,x_n)^{\,t}$– вектор-столбец координат. Тогда уравнение (1) можно записать в следующем виде:

$$F(X)=X^tAX+2BX+c=0, \qquad (2)$$

называемым *матричным уравнением квадрики*.

Матрица $A$ называется *основной матрицей* уравнения квадрики, а матрица вида

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}A & B^t\\ B & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & c\end{pmatrix},$$

*расширенной матрицей* уравнения квадрики. Используя расширенную матрицу матричное уравнение квадрики (2) можно записать в виде

$$(x_1 x_2 \ \dots \ x_n \ 1)\bar{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Очевидно, что для исследования свойств квадрики применима теория вещественных симметричных матриц.

## § 2. Изменение уравнения квадрики при аффинном преобразовании

**Теорема 2.1** Уравнение квадрики $F(X) = X^t AX + 2BX + c = 0$ после аффинного преобразования координат $X = QX' + X_0$ примет вид

$$\tilde{F}(X') = X'^t A_1 X' + 2B_1 X' + c_1 = 0\,,$$

где

$$A_1 = Q^t AQ, B_1 = (X_0^t A + B)Q, c_1 = F(X_0).$$

**Доказательство.**

Выполним замену переменных и преобразуем уравнение:

$$\tilde{F}(X') = F(QX' + X_0) = (QX' + X_0)^t A(QX' + X_0) + 2B(QX' + X_0) + c =$$
$$= (X'^t Q^t + X_0^t)A(QX' + X_0) + 2B(QX' + X_0) + c =$$
$$= X'^t \cdot Q^t AQ \cdot X' + 2(X_0^t A + B)QX' + X_0^t AX_0 + 2BX_0 + c = 0.$$

Следствие 1. При повороте осей $X = QX'$ уравнение квадрики примет вид

$$X'^t \cdot Q^t AQ \cdot X' + 2BQ \cdot X' + c = 0.$$

Очевидно, что путем поворотов системы можно упрощать квадратичную часть уравнения квадрики. Более того, существует поворот после которого матрица $A' = Q^t AQ$ будет диагональной.

Следствие 2. При параллельном переносе $X = X' + X_0$ уравнение квадрики примет следующий вид

$$X'^t AX' + 2(X_0^t A + B)X' + X_0^t AX_0 + 2BX_0 + c = 0.$$

Таким образом, путем параллельных переносов можно упрощать группу линейных членов уравнения.

Приведем без доказательства следующую теорему.

**Теорема 2.2** Многочлен второй степени $F(X)$ с помощью аффинного преобразования координат можно привести к одному из следующих (полуканонических) видов:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i'^2 + c,\ \ \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0,\ \ k \leq n;$$

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i'^2 + 2bx_{k+1}', \quad b, \lambda_1, \dots, \lambda_k \neq 0, \;\; k < n.$$

## § 3. Метрические инварианты уравнения квадрики

**Определение 3.1** Функция от коэффициентов многочлена второй степени называется *ортогональный инвариантом*, если она не меняется при переходе от одной прямоугольной системы к другой.

**Теорема 3.1**. Следующие величины

$$\tau_1 = I_1 = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\tau_2 = I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\delta = I_3 = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta = I_4 = \det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix}.$$

являются *инвариантами* уравнения поверхности относительно параллельного переноса и поворота осей прямоугольной системы координат.

**Доказательство.** В теореме 2.1 было показано, что после ортогонального преобразования $X = QX'$ матрица коэффициентов квадратичной части примет вид $A' = Q^{\mathrm{T}}AQ$=$Q^{-1}AQ$, т.е. матрицы $A$ и $A'$ подобны. Значит их характеристические многочлены совпадают. Действительно,

$$\det(A' - \lambda E) = \det(Q^{-1}AQ - \lambda E) = \det(Q^{-1}(A - \lambda E)Q) = \det(A - \lambda E).$$

Характеристический многочлен можно записать в таком виде:

$$\det(A - \lambda E) = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3,$$

где число $I_k$ равно сумме главных $k$- *ых* миноров матрицы $A$.
Заметим, что согласно теоремы 2.1 при параллельном переносе матрица квадратичной части не меняется.

Покажем теперь, что определитель $I_4$ не меняется при повороте и сдвиге, т.е. при замене $X = QX' + X_0$.

Введем следующие обозначения:

$$\bar{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & x_0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & y_0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \bar{X'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, многочлен $F(x, y, z)$ можно записать в следующем матричном виде

$$F(X) = F(\bar{X}) = \bar{X}^t \bar{A} \bar{X}.$$

Замена координат $X = QX' + X_0$ в новых обозначениях примет вид $\bar{X} = \bar{Q}\bar{X}'$. Таким образом, многочлен $F(X)$ в новых координатах $X'$ перепишется так:

$$\tilde{F}(X') = F(QX' + X_0) = \bar{X}'^t \bar{Q}^t \bar{A} \bar{Q} \bar{X}' = \bar{X}'^t \bar{A}' \bar{X}'.$$

Осталось показать, что $\det(\bar{A}') = \det(\bar{A})$. Действительно, нетрудно заметить, что $\det(\bar{Q}) = \det(\bar{Q}^t) = \det(Q) = \pm 1$ в силу ортогональности матрицы $Q$. Следовательно, $\det(\bar{A}') = \det(\bar{Q}^t \bar{A} \bar{Q}) = \det(\bar{A})$. Теорема доказана.

**Теорема 3.2** Величины

$$\kappa_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_3 \\ b_3 & c \end{vmatrix},$$

$$\kappa_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & b_1 \\ a_{13} & a_{33} & b_3 \\ b_1 & b_3 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{23} & a_{33} & b_3 \\ b_2 & b_3 & c \end{vmatrix},$$

являются *полуинвариантами*, т.е. не изменяются только при повороте прямоугольной системы координат.

**Доказательство.** Рассмотрим следующий многочлен

$$G(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \mathrm{K}_1 \lambda^2 - \mathrm{K}_2 \lambda + \mathrm{K}_3,$$

где число $\mathrm{K}_\mathrm{k}$ равно сумме главных *k+1- ых* миноров, включающих в себя элемент $c$ матрицы $\bar{A}$. Покажем, что числа $\mathrm{K}_\mathrm{k}$ не меняются при повороте $X = QX'$. Перепишем многочлен $G(\lambda)$ в виде $\det(\bar{A} - \lambda \bar{E})$, где

$$\bar{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно результатам предыдущей теоремы, после замены $X = QX'$ получим

$$\bar{A}' = \bar{Q}^t \bar{A} \bar{Q}, \text{ где } \bar{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Запишем матрицу $\bar{E}$ следующим образом $\bar{E} = \bar{Q}^t \bar{E} \bar{Q}$. Покажем равенство определителей:

$$\det(\bar{A}' - \lambda \bar{E}) = \det(\bar{Q}^t \bar{A} \bar{Q} - \lambda \bar{Q}^t \bar{E} \bar{Q}) = \det(\bar{Q}^t (\bar{A} - \lambda \bar{E}) \bar{Q}) = \det(\bar{A} - \lambda \bar{E}).$$

Следовательно, значения коэффициентов $\mathrm{K}_\mathrm{k}$ не изменяются при поворотах. Заметим, что $\mathrm{K}_3 = I_4$ и ранее нами было показано, что это инвариант.
Теорема доказана.

Понятно, что для случая $n = 2$ ортогональными инвариантами являются:

$$S = \mathrm{tr}(A), \quad \delta = \det(A), \quad \Delta = \det(\bar{A}).$$

Отметим также, что при условии $\delta = \Delta = 0$ величина

$$\mathrm{K} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ b_1 & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & b_2 \\ b_2 & c \end{vmatrix},$$

является ортогональным инвариантом уравнения квадрики.

## § 4. Центр квадрики

Найдем условия при которых линейная часть уравнения квадрики зануляется. Согласно следствию теоремы 2.1 при параллельном переносе $X = X' + X_0$ уравнение квадрики примет следующий вид

$$X'^t AX' + 2(X_0^t A + B)X' + X_0^t AX_0 + 2BX_0 + c = 0.$$

Линейная часть зануляется при условии

$$X_0^t A + B = 0 \text{ или } AX_0 + B^t = 0. \qquad (1)$$

Если расписать данное уравнение поэлементно, то получим неоднородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \cdots + a_{1n}x_n^0 = -b_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \cdots + a_{2n}x_n^0 = -b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \cdots + a_{nn}x_n^0 = -b_n. \end{cases} \qquad (2)$$

Заметим, что данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Квадрики, удовлетворяющие данному условию, принято называть *центральными*. Центром квадрики называют такую точку $O'$, относительно которой все точки квадрики расположены симметрично парами, т.е. она является центром симметрии.

В противном случае, когда $\delta = 0$, система либо несовместна и решений нет, либо совместна и решения заполняют целую прямую или плоскость в зависимости от значения ранга матрицы $A$.

## Глава 5. Кривые второго порядка

### §1. Общее уравнение кривой второго порядка

**Определение 1.1.** *Кривой второго порядка* (или *квадрикой*) называется множество $S$ точек плоскости, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат $Oxy$ удовлетворяют уравнению второй степени

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0,$$

где $(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0,0,0)$. При этом два уравнения $F_1(x, y) = 0$ и $F_2(x, y) = 0$ являются *эквивалентными*, если $F_2 = \lambda \cdot F_1$ для некоторого ненулевого множителя $\lambda$.

Согласно теоремы 2.2 главы 4 произвольная кривая второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат описывается одним из приведенных уравнений:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \tag{1}$$

$$\lambda_2 y'^2 + 2bx' = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_2 y'^2 + c' = 0. \tag{3}$$

Все коэффициенты ненулевые, кроме, быть может, свободного слагаемого $c'$. $\lambda_1, \lambda_2$ − корни характеристического уравнения.

Случай (1) характеризуется тем, что $\delta \neq 0$ и свободное слагаемое $c' = \frac{\Delta}{\delta}$ . Это центральные квадрики, т.е. имеющие центр.

В случаях (2) и (3) $\delta = 0$. Это условие эквивалентно тому, что один из корней характеристического уравнения равен нулю. Данные квадрики нецентральные. Для случая (2) дополнительно $\Delta \neq 0$, а в случае (3) имеем $\Delta = 0$.

Для упрощения уравнения кривой можно применить следующую теорему.

**Теорема 1.1** Для уничтожения слагаемого $2a_{12}xy$ в уравнении квадрики необходимо повернуть координатные оси на угол $\alpha$ такой, что

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Далее, если это нужно, осуществляем перенос начала координат.

Приведем ниже ортогональную (метрическую) классификацию квадрик на плоскости.

**Теорема 1.2** При помощи ортогональных преобразований (поворота осей координат и переноса начала координат) уравнение квадрики может быть приведено к одному из следующих видов, называемых *каноническим уравнением*:

Таблица 1 - Классификация квадрик на плоскости

| | Название кривой | Значение инвариантов | Каноническое уравнение |
|---|---|---|---|
| 1 | Эллипс | $\delta > 0, S \cdot \Delta < 0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a=\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}, b=\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$ |
| 2 | Мнимый эллипс | $\delta > 0, S \cdot \Delta > 0$ | $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1,$ $a=\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}, b=\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$ |
| 3 | Пара мнимых пересекающихся прямых | $\delta > 0, \Delta = 0$ | $a^2x^2+b^2y^2=0$ $a=\sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}, b=\sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$ |
| 4 | Гипербола | $\delta < 0, \Delta \neq 0$ | $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$ $a=\sqrt{-\frac{\Delta}{\delta\lambda_1}}, b=\sqrt{\frac{\Delta}{\delta\lambda_2}}$ |
| 5 | Пара пересекающихся прямых | $\delta < 0, \Delta = 0$ | $a^2x^2-b^2y^2=0$ $a=\sqrt{\lvert\lambda_1\rvert}, b=\sqrt{\lvert\lambda_2\rvert}$ |
| 6 | Парабола | $\delta = 0, \Delta \neq 0$ | $y^2=2px,$ $p=\sqrt{-\frac{\Delta}{S^3}}$ |
| 7 | Пара параллельных прямых | $\delta = \Delta = 0, \mathrm{K} < 0$ | $y^2-a^2=0,$ $a=\sqrt{-\frac{\mathrm{K}}{S^2}}$ |
| 8 | Пара мнимых параллельных прямых | $\delta = \Delta = 0, \mathrm{K} > 0$ | $y^2+a^2=0,$ $a=\sqrt{\frac{\mathrm{K}}{S^2}}$ |
| 9 | Пара совпадающих прямых | $\delta = \Delta = 0, \mathrm{K} = 0$ | $y^2=0,$ |

## §2. Эллипс и его свойства

**Определение 2.1.** Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек $F_1$ и $F_2$ есть величина постоянная. Это число обозначается через $2 \cdot a$. Число $a$ называется большей полуосью эллипса.

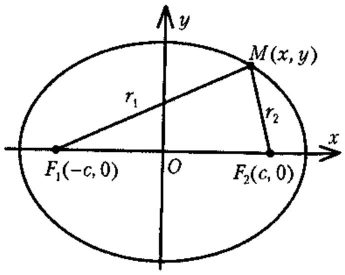


Рис. 2.1. Эллипс

**Определение 2.2.** Точки $F_1$ и $F_2$ называются *фокусами* эллипса (левым и правым соответственно). Расстояние между ними обозначается через $2 \cdot c$ и называется *фокусным расстоянием*.

**Определение 2.3.** Числа $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$, равные расстоянию произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до фокусов $F_1$ и $F_2$, называются фокальными радиусами точки $M$. Имеем $r_1 + r_2 = 2 \cdot a$.

Так как $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, а $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2 \cdot a. \qquad (2.1)$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем (2.1). Перенесем второй радикал в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. После очевидных преобразований получим: $(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

Так как $a > c$, то величина $b^2 = a^2 - c^2 > 0$. Имеем $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) называется *каноническим уравнением* эллипса, а число $b = +\sqrt{a^2 - c^2}$ - *малой полуосью* эллипса.

**Определение 2.4.** Величина $\varepsilon = \dfrac{2c}{2a} = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}} < 1$, равная отношению фокусного расстояния к большой оси, называется *эксцентриситетом эллипса*.

Эксцентриситет эллипса говорит о его форме (степени вытянутости). При уменьшении $\varepsilon$ фокусы эллипса $F_1$ и $F_2$ сближаются, а малая полуось приближается к большой. При $\varepsilon = 0$, т.е. когда фокусы эллипса совпадают, эллипс превращается в окружность. Если же эксцентриситет увеличивается, приближаясь к 1, то эллипс становится всё более вытянутым.

**Определение 2.5.** Пара параллельных малой оси эллипса прямых $l_1$ и $l_2$, заданных уравнениями $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами эллипса*.

### §3. Гипербола и ее свойства

**Определение 3.1.** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек $F_1$ и $F_2$, называемых *фокусами*, есть положительная постоянная. Эту величину обозначают через $2 \cdot a$. Число $a$ будем называть *действительной полуосью* гиперболы. Расстояние между фокусами $F_1$ и $F_2$ обозначается через $2 \cdot c$ и называется *фокусным расстоянием*.

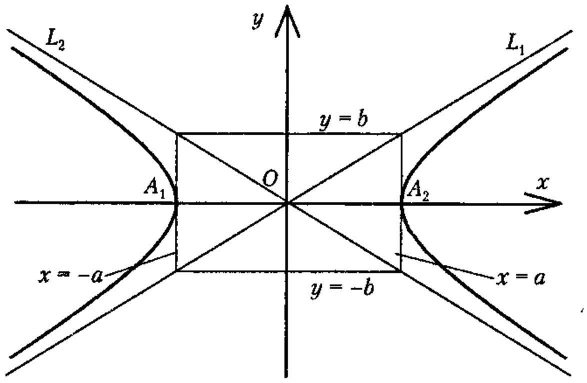


Рис. 3.1. Гипербола

**Определение 3.2.** Числа $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$, равные расстоянию произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до фокусов $F_1$ и $F_2$, называются *фокальными радиусами* точки $M$.

Имеем $|r_1 - r_2| = 2a$, или $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Так как $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, а $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2 \cdot a. \qquad (3.1)$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Преобразуем (3.1). Перенесем второй радикал в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. После простых преобразований получим: $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

Так как $c > a$, то величина $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Имеем $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называется *каноническим уравнением* гиперболы, а число $b = +\sqrt{c^2 - a^2}$ - *мнимой полуосью* гиперболы.

**Определение 3.3.** Если у гиперболы действительная и мнимая полуоси равны, т.е. $a = b$, то гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней*.

**Определение 3.4.** Прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$ , называется *основным прямоугольником гиперболы*.

**Определение 3.5.** Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых $L_1 : y = \frac{b}{a} x$ и $L_2 : y = -\frac{b}{a} x$, называемых *асимптотами гиперболы.* Данные прямые играют важную роль при построении и исследовании гиперболы.

**Определение 3.6.** Величина $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} > 1$, равная отношению фокусного расстояния к действительной оси, называется *эксцентриситетом гиперболы*.

**Определение 3.7.** Пара параллельных мнимой оси гиперболы прямых $l_1$ и $l_2$, заданных уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы*.

## §4. Парабола и ее свойства

**Определение 4.1.** Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки $F$, называемой *фокусом,* и заданной прямой $L$, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

**Определение 4.2.** Величина $p$, равная расстоянию от фокуса $F$ до директрисы $L$, называется *параметром* параболы.

Из школьного курса определение параболы известно как график квадратного трехчлена

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Легко видеть, что с помощью ортогональных преобразований данное уравнение может быть приведено к каноническому.

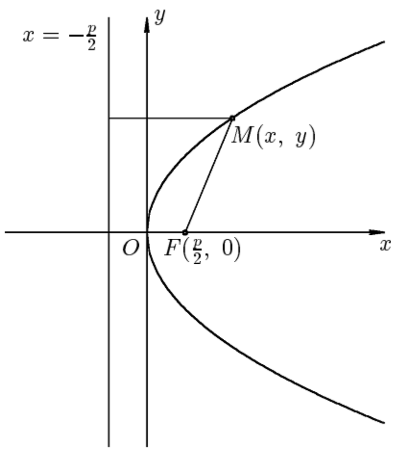


Рис. 4.1. Парабола

**Пример 1**. Привести уравнение линии второго порядка

$$F(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy + 8x - 2y + 9 = 0$$

к каноническому виду, найти ее центр.

**Решение.** Запишем матрицу A квадратичной части и найдем ее характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7\lambda + 6.$$

Следовательно, собственные значения (корни характеристического многочлена) равны: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 6$.

Находим ортогональные инварианты:

$$S = \mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} = 2 + 5 = 7,$$

$$\delta = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 6,$$

$$\Delta = \det(\bar{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & b_2 \\ b_1 & b_2 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 9 \end{vmatrix} = -12.$$

Поскольку $S \cdot \Delta < 0$ – это эллипс и уравнение кривой может быть преобразовано к полуканоническому виду

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_1 y''^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

В нашем случае получаем

$$x''^2 + 6y''^2 - \frac{12}{6} = 0,$$

или в каноническом виде

$$x''^2 + \frac{y''^2}{1/_3} = 1.$$

Найдем теперь соответствующие собственные векторы. При $\lambda_1 = 1$ координаты собственного вектора $u_1 = \binom{\alpha}{\beta}$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha + 4\beta = 0. \end{cases}$$

Откуда $\alpha = 2\beta$. Полагая, например, $\beta = 1,$ получим

$$u_1 = \binom{2}{1}.$$

Пронормировав его, можно записать:

$$v_1 = \frac{1}{|u_1|} \cdot u_1 = \binom{s_{11}}{s_{21}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2}{1}.$$

При $\lambda_2 = 6$ координаты собственного вектора $u_2 = \binom{\alpha}{\beta}$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} -4\alpha - 2\beta = 0 \\ -2\alpha - \beta = 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\beta = -2\alpha$. Полагая, например, $\alpha = -1,$ получим

$$u_2 = \binom{-1}{2}.$$

Пронормировав его, получим:

$$v_2 = \frac{1}{|u_2|} \cdot u_2 = \binom{s_{12}}{s_{22}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{-1}{2}.$$

Теперь перейдем в новую прямоугольную систему координат со старым центром $O$ и новым ортонормированным базисом $\{v_1, v_2\}$. При этом координаты преобразуются по формуле

$$\binom{x}{y} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\binom{x'}{y'}.$$

После перехода в новую систему координат уравнение кривой примет вид

$$\tilde{F}(x', y') = x'^2 + 6y'^2 + \frac{14}{\sqrt{5}}x' - \frac{12}{\sqrt{5}}y' + 9 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным $x'$и $y'$, получим

$$\tilde{F}(x', y') = \left(x' + \frac{7}{\sqrt{5}}\right)^2 + 6\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0.$$

После параллельного переноса начала координат в точку $O' = (-\frac{7}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$, определяемого формулами

$$\begin{cases} x'' = x' + \dfrac{7}{\sqrt{5}} \\ y'' = y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

уравнение кривой примет вид

$$(x'')^2 + 6(y'')^2 = 2.$$

Составим систему уравнений для поиска центра симметрии:

$$\begin{cases} 2x_0 - 2y_0 + 4 = 0, \\ -2x_0 + 5y_0 - 1 = 0. \end{cases}$$

Получим: $O'(x_0, y_0) = O'(-3, -1)$.

# Глава 6. Поверхности второго порядка

## §1. Общее уравнение поверхности второго порядка

**Определение 1.1.** *Поверхностью второго порядка* (или *квадрикой*) называется всякое множество $S$ точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ удовлетворяют уравнению второй степени

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0.$$

Согласно теоремы 2.2 главы 4 произвольная поверхность второго порядка в некоторой прямоугольной системе координат описывается одним из приведенных уравнений:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + c' = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b'z' = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + c' = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_2 y'^2 + 2b'x' = 0, \quad (4)$$

$$\lambda_2 y'^2 + c' = 0. \quad (5)$$

Все коэффициенты ненулевые, кроме, быть может, свободного слагаемого $c'$.

**Теорема 1.1.** Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов, называемых *каноническим уравнением*:

Таблица 2 - Метрическая классификация квадрик в пространстве

| Каноническое уравнение | Название поверхности |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ | эллипсоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ | мнимый эллипсоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ | однополостный гиперболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ | двуполостный гиперболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ | конус |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ | мнимый конус |
| $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p,q>0)$ | эллиптический параболоид |
| $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p,q>0)$ | гиперболический параболоид |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ | эллиптический цилиндр |
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ | мнимый эллиптический цилиндр |
| $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ | гиперболический цилиндр |

| | |
|---|---|
| $y^2 = 2px$ | параболический цилиндр |
| $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ | пара пересекающихся плоскостей |
| $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ | пара мнимых пересекающихся плоскостей |
| $y^2 = a^2 \ (a \neq 0)$ | пара параллельных плоскостей |
| $y^2 + a^2 = 0 \ (a \neq 0)$ | пара мнимых параллельных плоскостей |
| $y^2 = 0$ | пара совпадающих плоскостей |

## §2. Эллипсоиды

**Определение 2.1.** Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

**Определение 2.2.** Положительные числа $a, b, c$ называются *полуосями* эллипсоида, а точки $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$, $B_1(-b,0,0)$, $B_2(b,0,0)$, $C_1(-c,0,0)$, $C_2(c,0,0)$ - его *вершинами*.

Меняя, если нужно, оси координат, можно считать, что в каноническом уравнении $a \geq b \geq c > 0$.

Эллипсоид обладает центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей.

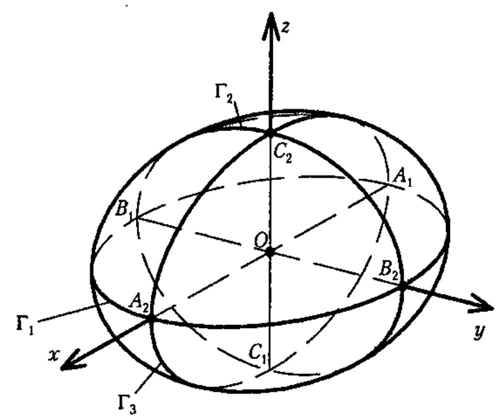


Рис. 2.1. Эллипсоид

В сечении эллипсоида плоскостью $z=0$ получается эллипс $\Gamma_1$ с полуосями $a$ и $b$. Если $a=b$, то сечения эллипсоида плоскостями $z=h$ при $h\in(-c,c)$ есть окружности. Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*, так как его можно получить, например, вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси $Oz$.

При $a=b=c$ эллипсоид является сферой радиуса $a$.

## §3. Гиперболоиды

**Определение 3.1.** Поверхности второго порядка, заданные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ (a\ge b>0,\ c>0),$$

называются *однополостным* и *двуполостным* гиперболоидами соответственно.

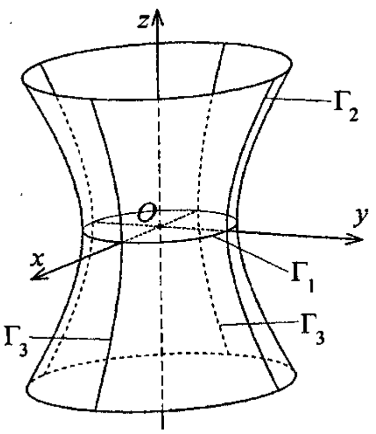


Рис. 3.1. Однополостный гиперболоид

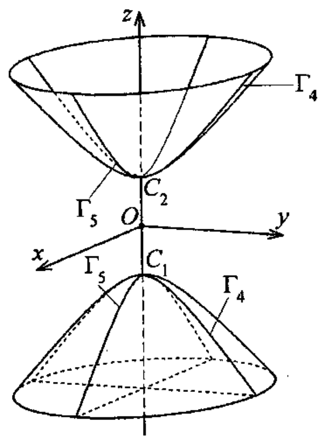


Рис. 3.2. Двуполостный гиперболоид

Гиперболоиды обладают центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей. Положительные числа $a,b,c$ называются *полуосями*.

В сечении однополостного гиперболоида плоскостью $z=0$ получаем так называемый *горловой эллипс* $\Gamma_1 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, а в сечениях плоскостями $x=0$ и $y=0$ имеем гиперболы $\Gamma_2 : \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ и $\Gamma_3 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ соответственно (рис 3.1).

Точки $C_1(0,0,-c)$ и $C_2(0,0,c)$ называются *вершинам* двуполостного гиперболоида. Сечения данной поверхности плоскостями $x=0$ и $y=0$ являются гиперболами $\Gamma_4 : \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ и $\Gamma_5 : \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$ соответственно (рис 3.2).

## §4. Конусы второго порядка

**Определение 4.1.** Поверхность второго порядка, заданная в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ (a,b,c>0), \qquad (4.1)$$

называется *конусом второго порядка*.

Начало системы координат $O(0,0,0)$ принадлежит конусу и называется его *вершиной*. Сечение конуса плоскостью $P: z=z_0$ представляет собой эллипс $\Gamma$ (рис. 4.1).

**Определение 4.2.** *Образующими* конуса второго порядка, заданного уравнением (4.1), являются прямые, проходящие через его вершину и пересекающие эллипс $\Gamma$, называемый его *направляющей*.

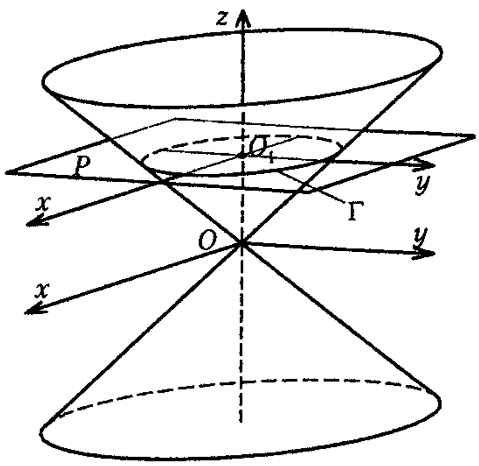


Рис. 4.1. Конус

## §5. Параболоиды

**Определение 5.1.** Поверхности второго порядка, заданные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\,,\ \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ \ (\,p,q>0\,),$$

называются *эллиптическим* и *гиперболическим* параболоидами соответственно.

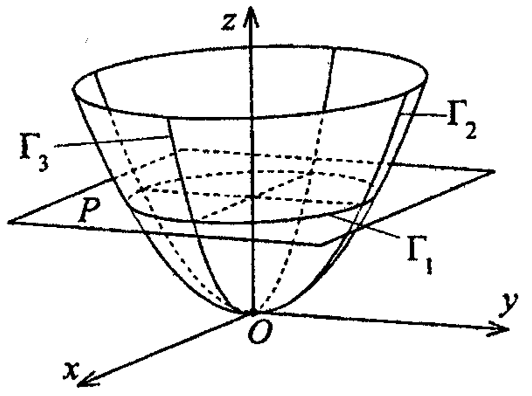


Рис. 5.1. Эллиптический параболоид

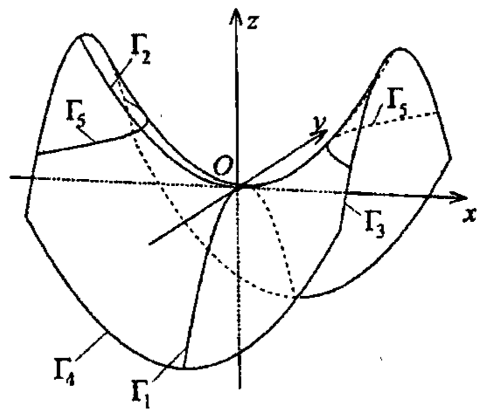


Рис. 5.2. Гиперболический параболоид

Данные поверхности симметричны относительно координатных плоскостей $Oxz$ и $Oyz$.

Начало системы координат $O(0{,}0{,}0)$ принадлежит эллиптическому параболоиду и называется его *вершиной* (рис. 5.1).

В сечении эллиптического параболоида плоскостью $P: z=z_0$ $(z_0>0)$ получается эллипс $\Gamma_1$ с полуосями $\sqrt{2pz_0}$ и $\sqrt{2qz_0}$, а в сечении координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ имеем так называемые *главные параболы параболоида* $\Gamma_2: y^2=2qz$ и $\Gamma_3: x^2=2pz$ соответственно (см. рис. 5.1).

Если $p=q$, то сечения эллиптического параболоида плоскостями $z=z_0>0$ являются окружностями. Такой параболоид есть *параболоид вращения*, так как его можно получить, например, вращением параболы $x^2=2pz$ вокруг оси $Oz$.

Название «гиперболический параболоид» объясняется тем, что в его сечении плоскостью $P: z=z_0$ $\left(z_0\neq 0\right)$ получается гипербола $\Gamma_5$ (рис. 5.2). Сечениями гиперболического параболоида с координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ снова имеем *главные* параболы $\Gamma_1: y^2=-2qz$ и $\Gamma_2: x^2=2pz$ соответственно (см. рис. 5.2).

### §6. Цилиндры второго порядка

**Определение 6.1.** *Цилиндрическая поверхность второго порядка* (или *цилиндр*) в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением вида

$$F(x,y)=0\,, \tag{6.1}$$

где $F(x,y)$- многочлен второй степени от переменных $x$ и $y$.

**Определение 6.2.** Кривая $\Gamma$, определяемая уравнением (6.1) в плоскости $Oxy$, называется *направляющей (или основанием)* цилиндрической поверхности (рис. 6.1).

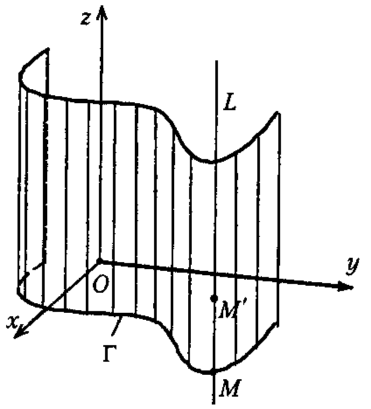


Рис. 6.1. Направляющая и образующая

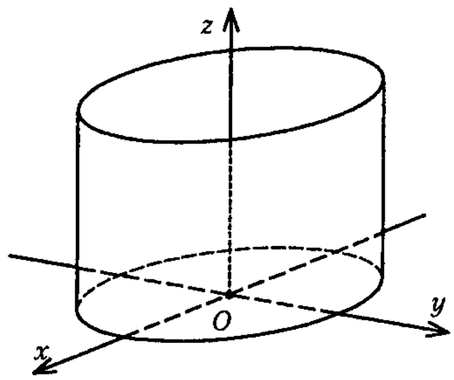


Рис.6.2. Эллиптический цилиндр

Если через любую точку $M(x,y,0)$ кривой $\Gamma$ провести прямую $L$, параллельную оси $Oz$, то все точки $M'(x,y,z)$ на этой прямой будут принадлежать цилиндру, так как их координаты будут удовлетворять уравнению (6.1). Итак, можно сказать следующее, что цилиндр образован прямыми, параллельными оси $Oz$ и пересекающими его направляющую $\Gamma$. Эти прямые называются *образующими* цилиндра.

В зависимости от вида направляющей кривой $\Gamma$ различают: эллиптические (рис. 6.2), гиперболические (рис. 6.3), параболические (рис. 6.4) цилиндры. Если направляющая $\Gamma$, определяемая уравнением (6.1), есть пара прямых, то цилиндрическая поверхность вырождается в пару плоскостей: пересекающихся (действительных или мнимых), параллельных (действительных или мнимых) или совпадающих.

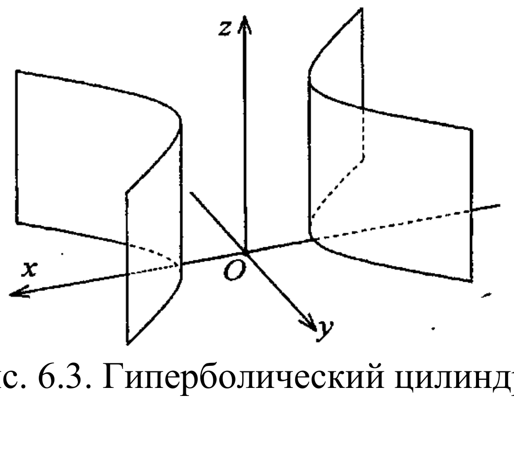


Рис. 6.3. Гиперболический цилиндр

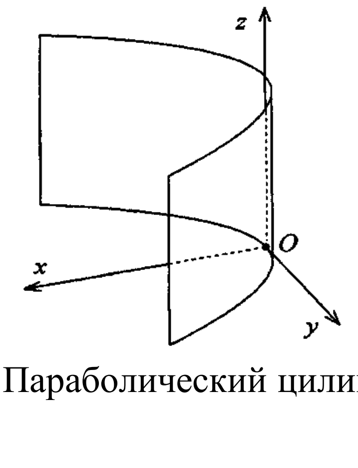


Рис.6.4. Параболический цилиндр

## § 7. Приведение уравнения поверхности к каноническому виду

Типичной задачей общей теории поверхностей второго порядка является приведение к *каноническому виду* уравнения поверхности

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0. \qquad (1)$$

Метод решения весьма схож с задачей для кривых. Вначале рассмотрим квадратичную часть уравнения поверхности

$$F_2(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Найдем собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ матрицы квадратичной части

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Далее находим ортонормированный базис из собственных векторов матрицы А:

$$v_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix}.$$

Переходим в новую декартову систему координат со старым центром $O$ и новым базисом $\{v_1, v_2, v_3\}$. При этом координаты преобразуются по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

После перехода в новую систему координат уравнение (1) примет вид

$$\tilde{F}(x', y', z') = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2a'_{14}x + 2a'_{24}y + 2a'_{34}z + a'_{44} = 0.$$

Далее, для нахождения канонического вида, если это нужно, осуществляем перенос начала координат.

Приведем ниже таблицу для определения типа поверхности согласно значения метрических инвариантов.

Таблица 3 - Классификация квадрик в пространстве по инвариантам

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Признаки вида</th><th>Название поверхности</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Центральные поверхности</td><td rowspan="6">$\boldsymbol{\delta \neq 0}$</td><td rowspan="3">Эллиптический тип</td><td rowspan="3">$\begin{cases} \boldsymbol{\tau_2 > 0} \\ \boldsymbol{\tau_1 \cdot \delta > 0} \end{cases}$<br>$\Updownarrow$<br>$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$<br>одного знака</td><td>$\boldsymbol{\Delta < 0}$</td><td>Эллипсоид</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\Delta > 0}$</td><td>Мнимый эллипсоид</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\Delta = 0}$</td><td>Мнимый конус</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Гиперболический тип</td><td rowspan="3">$\boldsymbol{\tau_2 \leq 0}$<br>или (и)<br>$\boldsymbol{\tau_1 \cdot \delta \leq 0}$<br>$\Updownarrow$<br>$\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$<br>разных знаков</td><td>$\boldsymbol{\Delta > 0}$</td><td>Однополостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\Delta < 0}$</td><td>Двуполостный гиперболоид</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\Delta = 0}$</td><td>Конус</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="11">Нецентральные поверхности</td><td rowspan="11">$\boldsymbol{\delta = 0}$</td><td rowspan="11">Параболический тип</td><td colspan="4">$\boldsymbol{\Delta < 0}$</td><td>Эллиптический параболоид</td></tr>
<tr><td colspan="4">$\boldsymbol{\Delta > 0}$</td><td>Гиперболический параболоид</td></tr>
<tr><td rowspan="9">$\boldsymbol{\Delta = 0}$</td><td rowspan="3">$\boldsymbol{\tau_2 > 0}$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{\tau_1 \cdot \kappa_2 < 0}$</td><td>Эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\tau_1 \cdot \kappa_2 > 0}$</td><td>Мнимый эллиптический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\kappa_2 = 0}$</td><td>Пара мнимых пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\boldsymbol{\tau_2 < 0}$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{\kappa_2 \neq 0}$</td><td>Гиперболический цилиндр</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{\kappa_2 = 0}$</td><td>Пара пересекающихся плоскостей</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\boldsymbol{\tau_2 = 0}$</td><td colspan="2">$\boldsymbol{\kappa_2 \neq 0}$</td><td>Параболический цилиндр</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\boldsymbol{\kappa_2 = 0}$</td><td>$\boldsymbol{\kappa_1 < 0}$</td><td>Пара параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\kappa_1 > 0}$</td><td>Пара мнимых параллельных плоскостей</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{\kappa_1 = 0}$</td><td>Пара совпадающих плоскостей</td></tr>
</table>

**Пример 1**. Определить тип поверхности по инвариантам и центр симметрии.

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0.$$

Решение. Вычислим ортогональные инварианты:

$$\tau_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 + 5 = 8.$$

$$\tau_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 5 = 13.$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 6.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & 10 \\ 0 & 10 & 10 & -10 \end{vmatrix} = -360.$$

Таким образом, это уравнение эллипсоида. Составим систему уравнений для поиска центра симметрии:

$$\begin{cases} 1x_0 + 0y_0 + 0z_0 + 0 = 0, \\ 0x_0 + 2y_0 + 2z_0 + 10 = 0, \\ 0x_0 + 2y_0 + 5z_0 + 10 = 0. \end{cases}$$

Получим: $O'(x_0, y_0, z_0) = O'(0, -5, 0)$.

**Пример 2**. Привести к каноническому виду следующее уравнение поверхности

$$F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 4yz + 20y + 20z - 10 = 0. \quad (2)$$

Решение. Запишем матрицу A квадратичной части и найдем ее характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + I_1\lambda^2 - I_2\lambda + I_3 =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 13\lambda + 6 = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 6).$$

Итак, собственные значения равны: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 6.$ Найдем соответствующие собственные векторы.

Так как собственное значение $\lambda = 1$ имеет алгебраическую кратность равную двум, то найдем пару взаимно ортогональных собственных нормированных векторов $u_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ и $u_2 = \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0, \\ 0\alpha + 1\beta + 2\gamma = 0, \\ 0\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\beta = -2\gamma$ и $\alpha -$ произвольное. Выделим два каких-нибудь взаимно ортогональных вектора (т.е. $(u_1, u_2) = 0$), например:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

После нормирования векторов можно записать:

$$v_1 = \frac{1}{|u_1|} \cdot u_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ s_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad v_2 = \frac{1}{|u_2|} \cdot u_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ s_{32} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 6$ координаты собственного вектора $u_3 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} -5\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0, \\ 0\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0, \\ 0\alpha + 2\beta - 1\gamma = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\alpha = 0$ и $\gamma = 2\beta$. Полагая, например, $\beta = 1$, получим

$$u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пронормировав его, можно записать:

$$v_3 = \frac{1}{|u_3|} \cdot u_3 = \begin{pmatrix} s_{13} \\ s_{23} \\ s_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь перейдем в новую декартову систему координат со старым центром $O$ и новым ортонормированным базисом $\{v_1, v_2, v_3\}$. При этом координаты преобразуются по формуле

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

После перехода в новую систему координат уравнение (2) примет вид

$$\tilde{F}(x', y', z') = x'^2 + y'^2 + 6z'^2 + 4\sqrt{5}y' + 12\sqrt{5}z' - 10 = 0.$$

Выделив полные квадраты по переменным $y'$ и $z'$, получим

$$\tilde{F}(x', y', z') = x'^2 + (y' + 2\sqrt{5})^2 + 6(z' + \sqrt{5})^2 - 60 = 0.$$

После параллельного переноса начала координат в точку $O' = (0, -2\sqrt{5}, -\sqrt{5})$, определяемого формулами

$$\begin{cases} x'' = x', \\ y'' = y' + 2\sqrt{5}, \\ z'' = z' + \sqrt{5}, \end{cases}$$

уравнение поверхности примет вид

$$(x'')^2 + (y'')^2 + 6(z'')^2 = 60$$

или в канонической форме

$$\frac{(x'')^2}{60} + \frac{(y'')^2}{60} + \frac{(z'')^2}{10} = 1.$$

Это уравнение эллипсоида.

## Список литературы

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 512 с.

2. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 19-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 448 с.

3. Гайнов, А.Т. Высшая алгебра и аналитическая геометрия: Учеб. пособие / А.Т. Гайнов, А.А. Коробов. Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2009. – 276 с.

4. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия. / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – 3-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

5. Карчевский, Е.М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии : учебное пособие / Е. М. Карчевский, М. М. Карчевский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 424 с.

6. Корпусов, М.О. Аналитическая геометрия. Методы решения задач : учеб. пособие для вузов / М.О. Корпусов, А.В. Овчинников. – М.: Физический факультет МГУ, 2019. – 216 с.

7. Постников, М.М. Аналитическая геометрия : учебное пособие / М. М. Постников. – 3-е изд.,испр. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 416 с.

8. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 496 с.

9. Садовничий, Ю.В. Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами / Ю.В. Садовничий, В.В. Федорчук. – М.: Экзамен, 2009. – 350 [2] с.

10. Сторожук, К.В. Лекции по аналитической геометрии: Учеб. пособие / К.В. Сторожук : Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : ИПЦ НГУ, 2018. – 122 с.

Евгений Витальевич Никитенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника»

Подписано к печати 27.12.22. Формат 60х84 /16.
Усл. печ. л. 3,06. Тираж 15 экз. Заказ 221829. Рег. № 30.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.