МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания по выполнению
контрольной работы

для студентов всех форм обучения направления
«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2021

УДК 517.27

Никитенко Е.В. Математический анализ: методические указания по выполнению контрольной работы для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Е.В. Никитенко. – Рубцовск: РИИ, 2021. – 17 с.

Настоящие указания содержат необходимые теоретические сведения и подробное решение одного варианта заданий. Приведен список из 30 вариантов контрольных работ.

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ПМ
Протокол № 8 от 26.02.2021 г.

Рецензент: к.ф.-м.н., доцент В.В. Борисовский

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В соответствии с учебным планом при изучении дисциплины «Математический анализ» студенты должны выполнить контрольную работу. Выполнение контрольной работы необходимо для систематизации и закрепления ранее полученных теоретических знаний и практических умений, а также способствует формированию умения работать с дополнительной и справочной литературой.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения по направлению подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», изучающих дисциплину «Математический анализ».

Настоящие указания содержат необходимые теоретические сведения и подробное решение одного варианта заданий.

1 Требования к оформлению контрольной работы

Контрольная работы выполняется в отдельной тетради или на листах формата А4, скрепленных в папке-скоросшивателе. На обложку тетради приклеивается или в качестве верхнего листа в папке-скоросшивателе прикладывается ***титульный лист,*** оформленный в соответствии с установленной формой (Приложение А). На титульном листе студентом указываются только свои ФИО, номер группы и номер варианта. Формулировка задания перед решением полностью переписывается.

Номер варианта контрольной работы соответствует порядковому номеру студента в списке журнала группы.

Работа должна быть аккуратно оформлена и представлена для проверки не менее чем за 2 недели до начала сессии. Контрольные работы, не соответствующие номеру варианта не проверяются.

2 Теоретические сведения

2.1 Асимптоты графика функции

Определение. Прямая линия называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x_0, f(x_0))$, лежащей на графике, до этой прямой стремится к нулю при движении точки M вдоль графика в бесконечность.

Различают три вида асимптот: вертикальные, наклонные и горизонтальные.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0 (быть может, односторонней) и выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty .$$

Тогда прямую $x = x_0$ называют *вертикальной асимптотой* графика функции $f(x)$.

Пример 1. График функции $y = \frac{1}{x}$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{1}{x} = -\infty$ и $\lim\limits_{x \to 0+0} \frac{1}{x} = +\infty$ (рис. 1).

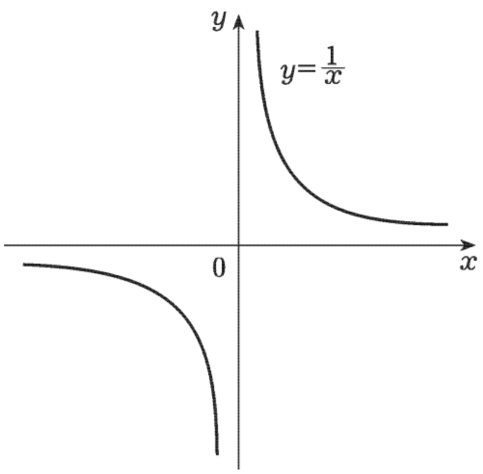

Рис. 1 Вертикальная асимптота

Определение. Если существуют оба предела

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1 \text{ и } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1,$$

то прямую $y = k_1 x + b_1$ называют *правой наклонной* асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

Определение. Если существуют оба предела

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2 \text{ и } \lim_{x\to-\infty}[f(x)-k_2x]=b_2,$$

то прямую $y=k_2x+b_2$ называют *левой наклонной* асимптотой графика функции $f(x)$ при $x\to-\infty$.

Если левая и правая наклонные асимптоты совпадают, то говорят, что график функции имеет наклонную асимптоту.

Горизонтальную асимптоту можно рассматривать как частный случай наклонной асимптоты при $k=0$.

Пример 2. Хорошо известно, что график функции $y=arcctg(x)$ имеет правую горизонтальную асимптоту $y=0$ и левую горизонтальную асимптоту $y=\pi$.

Пример 3. График функции $y=x+2arcctg(x)$ имеет правую наклонную асимптоту $y=x$ и левую наклонную асимптоту $y=x+2\pi$ (рис. 2).

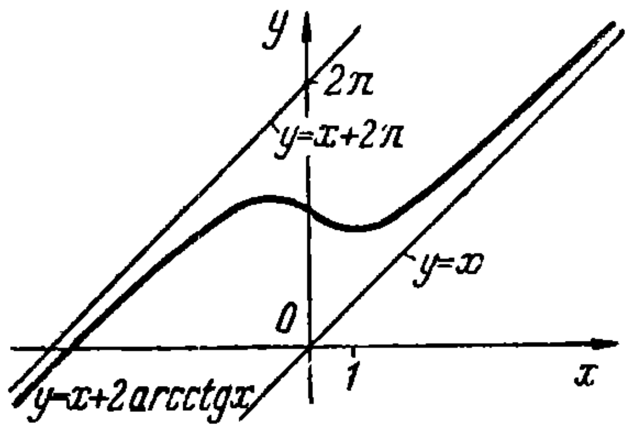

Рис. 2 Наклонные асимптоты

Пример 4. Нетрудно убедиться, что график функции $y=\frac{1+3x}{2+5x}$ имеет вертикальную асимптоту $x=-\frac{2}{5}$ и горизонтальную асимптоту $y=\frac{3}{5}$ (рис. 3).

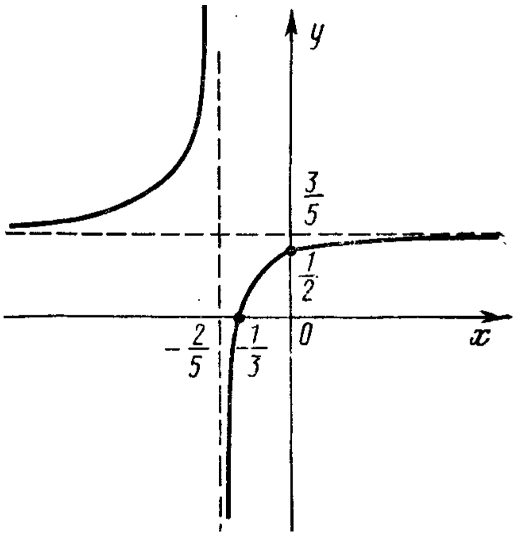

Рис. 3

2.2 Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$.

Если существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ выполняется строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$, то x_0 называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*) функции $f(x)$.

Точки (строгого) максимума или минимума функции $f(x)$ называются точками (строгого) экстремума $f(x)$.

В точках локального экстремума функция не обязана принимать своего наибольшего или наименьшего значения (глобальный экстремум) на всей области определения. Оно являться таковым лишь для значений функции в соседних точках. Слово «локальный» при обсуждении точек экстремума можно опускать.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и $f'(x_0) = 0$. Тогда x_0 называется *стационарной точкой* функции $f(x)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее производная либо равна нулю, либо не существует в данной точке. Тогда x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$.

Необходимое условие экстремума. Пусть x_0 является точкой экстремума функции $f(x)$, определенной в некоторой окрестности точки x_0. Тогда точка x_0 является *критической точкой* функции $f(x)$.

Данное условие не является достаточным условием наличия экстремума, что показывают следующие примеры.

Пример 5. Очевидно, что функция $f(x) = |x|$ является непрерывной в точке минимума $x_0 = 0$, но не имеет в этой точке производной. Таким образом, функция $f(x)$ может не быть дифференцируемой в точке локального экстремума.

Пример 6. Функция $f(x) = x^3$ имеет в точке $x_0 = 0$ производную, равную нулю. Однако данная точка не является точкой экстремума.

Достаточное условие существования экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и дифференцируема в некоторой проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$. И пусть производная $f'(x)$ функции $f(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через значение x_0.

Если $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – *точка строгого локального максимума* функции $f(x)$.

Если $f'(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то x_0 – *точка строгого локального минимума* функции $f(x)$.

2.3 Понятие выпуклости и точки перегиба

Определение. Пусть функция $f(x)$ определенна на интервале (a, b). Если для любых точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ и любых чисел $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0$ таких, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, выполняется неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (1)$$

то говорят, что функция $f(x)$ *выпукла вниз* на интервале (a, b).

Геометрически условие выпуклости вниз означает, что точки любой дуги графика функции расположены не выше хорды, стягивающей эту дугу (рис. 4).

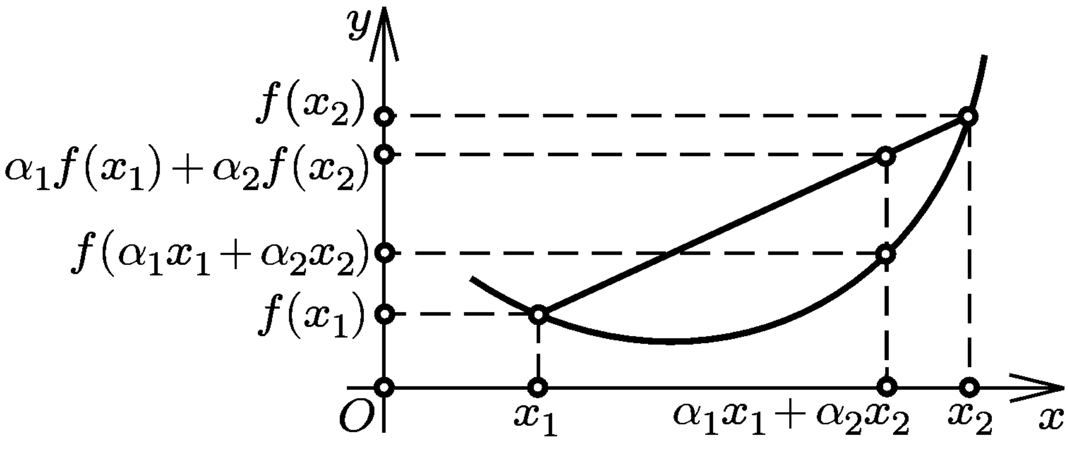

Рис. 4 Выпуклость функции

Определение. Если для функции $f(x)$ выполняется обратное неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2), \quad (2)$$

то говорят, что функция $f(x)$ *выпукла вверх* на интервале (a, b).

Определение. Если при $x_1 \neq x_2$ и $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ неравенство (1) (неравенство (2)) является строгим, то говорят, что функция $f(x)$ *строго выпукла вниз* (*строго выпукла вверх*) на интервале (a, b).

Направление выпуклости кривой относится к важным характеристикам ее формы. Укажем еще одну геометрическую характеристику выпуклой функции.

Рассмотрим на плоскости кривую $y = f(x)$, являющуюся графиком некоторой дифференцируемой функции $f(x)$ на интервале (a, b). Дифференцируемость $f(x)$ в точке x_0 эквивалентна существованию невертикальной касательной в точке $M(x_0, f(x_0))$ графика функции, причем уравнение касательной имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ была *выпукла вниз* (*выпукла вверх*) на интервале (a, b) необходимо и достаточно, чтобы ее график лежал не ниже (не выше) любой проведенной к нему касательной на данном интервале. При этом для *строгой выпуклости* функции требуется, чтобы все точки графика, за исключением самой точки касания, лежали строго выше (ниже) этой касательной.

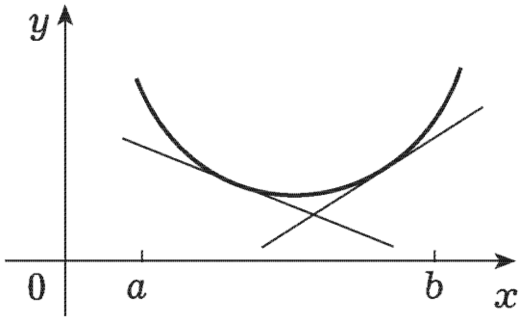

Рис. 5 Выпуклость вниз

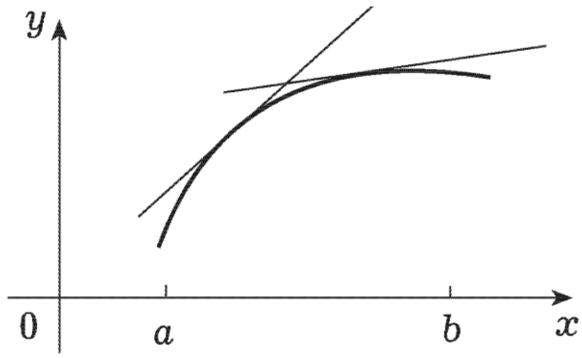

Рис. 6 Выпуклость вверх

Теорема. Для того чтобы дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) была *выпукла вниз* (*выпукла вверх*) на нем, необходимо и достаточно, чтобы $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) для всех $x \in (a, b)$.

Теорема. Для того чтобы дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на интервале (a, b) была *строго выпукла вниз* (*строго выпукла вверх*) на нем, достаточно, чтобы $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) для всех $x \in (a, b)$.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную. Если при переходе через точку x_0 функция $f(x)$ меняет направление выпуклости, то точка x_0 называется *точкой перегиба* функции $f(x)$.

Геометрически это означает, что в точке перегиба $M(x_0, f(x_0))$ график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую ее сторону (рис. 7).

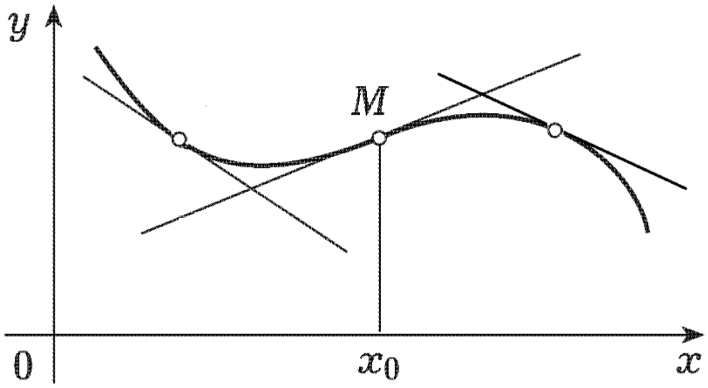

Рис. 7 Точка перегиба

Необходимое условие существования точки перегиба. Пусть x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$. Тогда либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует. Данные условия не являются достаточными.

Пример 7. Функция $f(x) = x^4$ имеет в точке $x_0 = 0$ вторую производную, равную нулю. Однако данная точка не является точкой перегиба.

Достаточное условие существования точки перегиба. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и дважды дифференцируема в проколотой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}$. Если вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ меняет свой знак при переходе аргумента через значение x_0, т.е. либо

$f''(x) > 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f''(x) < 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, либо

$f''(x) < 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f''(x) > 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,

то x_0 – *точка перегиба* функции $f(x)$.

2.4 Общая схема исследования функции

1) Найти область определения функции.

2) Выяснить, является ли функция четной, нечетной.

3) Исследовать характер точек разрыва функции, т.е. найти односторонние пределы в этих точках.

4) Найти асимптоты графика функции, если таковые имеются.

5) Вычислить первую производную функции и найти: промежутки убывания и возрастания функции, точки экстремума.

6) Вычислить вторую производную функции и найти: промежутки выпуклости вверх и вниз, точки перегиба.

7) Построить график функции, используя полученные ранее результаты исследования.

3. Образец выполнения контрольной работы

Задание. Применяя соответствующий математический аппарат, исследовать функцию на экстремум, найти асимптоты и построить график:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2}.$$

Решение.

1) Найдем область определения функции:

$$\left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right).$$

2) $f(-x) = -f(x)$. Следовательно функция нечетная и график функции симметричен относительно начала координат.

3) Исследуем характер точек разрыва

$$\lim_{x\to\sqrt{2}+0} \frac{x^3}{x^2 - 2} = +\infty; \quad \lim_{x\to\sqrt{2}-0} \frac{x^3}{x^2 - 2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}+0} \frac{x^3}{x^2 - 2} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\sqrt{2}-0} \frac{x^3}{x^2 - 2} = -\infty.$$

Таким образом: $x = \sqrt{2}, x = -\sqrt{2}$ точки разрыва второго рода.

4) Следовательно, прямые $x = \sqrt{2}$ и $x = -\sqrt{2}$ являются *вертикальными асимптотами*.

Найдем коэффициенты наклонной асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{(x^2 - 2)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2(1 - \frac{2}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{x^2}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3 - x^3 + 2x}{x^2 - 2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x(x - \frac{2}{x})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x - \frac{2}{x}} = 0.$$

Наклонная асимптота имеет вид $y = x$.

5) Вычислим первую производную функции для нахождения областей убывания и возрастания.

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 2}\right)' = \frac{3x^2(x^2 - 2) - 2x^3x}{(x^2 - 2)^2} = \frac{x^4 - 6x^2}{(x^2 - 2)^2} = \frac{x^2(x^2 - 6)}{(x^2 - 2)^2}.$$

x	$(-\infty; -\sqrt{6})$	$-\sqrt{6}$	$(-\sqrt{6}; -\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2}; 0)$	0	$(0; \sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2}; \sqrt{6})$	$\sqrt{6}$	$(\sqrt{6}; +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–		–	0	–		–	0	+
$f(x)$	Возрастает	т. max	Убывает	не сущ	Убывает		Убывает	не сущ	Убывает	т. min	Возрастает

Найдем значение функции в точках локального экстремума:

$$f(-\sqrt{6})=\frac{(-\sqrt{6})^3}{(-\sqrt{6})^2-2}=\frac{-6\sqrt{6}}{4}=\frac{-3\sqrt{6}}{2}, f(\sqrt{6})=\frac{3\sqrt{6}}{2}.$$

6) Вычислим вторую производную функции для нахождения областей выпуклости и точки перегиба.

$$f''(x)=\left(\frac{x^3}{x^2-2}\right)''=\left(\frac{x^4-6x^2}{(x^2-2)^2}\right)'=$$

$$=\frac{(4x^3-12x)(x^2-2)^2-2(x^2-2)2x(x^4-6x^2)}{(x^2-2)^4}=$$

$$=\frac{24x+4x^3}{(x^2-2)^3}=\frac{4x(6+x^2)}{(x^2-2)^3}=0.$$

x	$(-\infty;-\sqrt{2})$	$-\sqrt{2}$	$(-\sqrt{2};0)$	0	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
$f''(x)$	$-$		$+$	0	$-$		$+$
$f(x)$	выпуклая вверх	не сущ	выпуклая вниз	т. перегиба	выпуклая вверх	не сущ	выпуклая вниз

7) График исследуемой функции изображен на рис. 8.

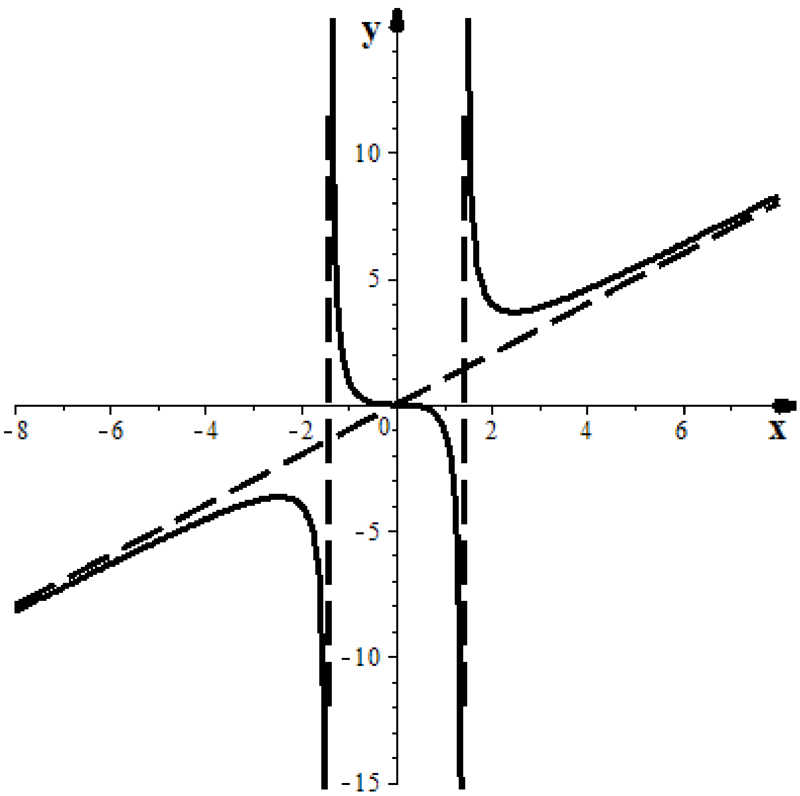

Рис. 8 График функции

4. Комплект заданий для выполнения контрольной работы

Задание. Применяя соответствующий математический аппарат, исследовать функцию на экстремум, найти асимптоты и построить график.

1.1	$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$	**1.16**	$f(x) = \frac{4x^3}{2-x^2}$
1.2	$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-1}$	**1.17**	$f(x) = \frac{x^3}{x^2-3}$
1.3	$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-1}$	**1.18**	$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-3}$
1.4	$f(x) = \frac{4x^3}{x^2-1}$	**1.19**	$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-3}$
1.5	$f(x) = \frac{x^3}{1-x^2}$	**1.20**	$f(x) = \frac{4x^3}{x^2-3}$
1.6	$f(x) = \frac{2x^3}{1-x^2}$	**1.21**	$f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$
1.7	$f(x) = \frac{3x^3}{1-x^2}$	**1.22**	$f(x) = \frac{2x^3}{3-x^2}$
1.8	$f(x) = \frac{4x^3}{1-x^2}$	**1.23**	$f(x) = \frac{3x^3}{3-x^2}$
1.9	$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-2}$	**1.24**	$f(x) = \frac{4x^3}{3-x^2}$
1.10	$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-2}$	**1.25**	$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$
1.11	$f(x) = \frac{4x^3}{x^2-2}$	**1.26**	$f(x) = \frac{2x^3}{x^2-4}$
1.12	$f(x) = \frac{5x^3}{x^2-2}$	**1.27**	$f(x) = \frac{3x^3}{x^2-4}$
1.13	$f(x) = \frac{x^3}{2-x^2}$	**1.28**	$f(x) = \frac{x^3}{4-x^2}$
1.14	$f(x) = \frac{2x^3}{2-x^2}$	**1.29**	$f(x) = \frac{2x^3}{4-x^2}$
1.15	$f(x) = \frac{3x^3}{2-x^2}$	**1.30**	$f(x) = \frac{3x^3}{4-x^2}$

Список литературы

1. Бермант, А.Ф. Краткий курс математического анализа [Электронный ресурс] : учебное пособие / А.Ф. Бермант, И.Г. Араманович. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2010. — 736 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/2660.

2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / Б.П. Демидович. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2018. — 624 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/99229.

3. Запорожец, Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу [Электронный ресурс] : учебное пособие / Г.И. Запорожец. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2014. — 464 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/149.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт (филиал)

федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования

«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

(РИИ АлтГТУ)

Кафедра Прикладная математика

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

по дисциплине: «Математический анализ»

Вариант № __

Выполнил:

студент группы ИВТ-__

____

Проверил:

доцент кафедры

Е. В. Никитенко

Рубцовск 2021

Евгений Витальевич Никитенко

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Методические указания по выполнению контрольной работы для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника»

Подписано к печати 30.04.21. Формат 60х84 /16.
Усл. печ. л. 1,06. Тираж 15 экз. Заказ 161610. Рег. № 63.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.