МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И ТЕОРИЯ МАТРИЦ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения
направления «Информатика и вычислительная техника»

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «ИВТ»

Рубцовск 2022

УДК 512.64

Никитенко Е.В. Линейная алгебра и теория матриц. Учебное пособие для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022. – 56 с.

Учебное пособие посвящено изложению основ линейной алгебры и теории матриц. Рассмотрены основные понятия, определения и свойства объектов линейной алгебры, приведены формулировки основных утверждений. Отдельное внимание уделено начальным сведениям из теории линейных операторов.

Изложение теории сопровождается большим количеством задач с подробными решением, что должно способствовать лучшему усвоению материала, самостоятельной работе и приобретению навыков решения задач.

Рассмотрено и одобрено на
заседании НМС РИИ
Протокол № 5 от 02.06.2022 г.

Рецензент: канд. физ.- мат. наук, доцент Ю.В. Никонорова

© Рубцовский индустриальный институт, 2022

Оглавление

Предисловие

Целью изучения данной дисциплины является формирование у студента знаний и способностей к применению математического аппарата линейной алгебры и теории матриц при решении прикладных задач в профессиональной деятельности.

Данное пособие охватывает несколько больший объем материала, чем удается изложить за отведенные часы в течение семестра. В тоже время стоит отметить, что академический курс линейной алгебры намного шире предлагаемого материала. Различные варианты доказательств, приведенных в пособии утверждений, а также много дополнительного материала можно найти в учебниках [1-7,11,12].

Для хорошего усвоения материала, в качестве задачников для самостоятельного решения задач можно порекомендовать [9,10]. Много теоретического материала и интересных задач читатель сможет найти в книге [8].

Глава 1. Матрицы и определители

§1. Матрицы и основные операции над ними

Определение 1. *Матрицей* A размеров $m \times n$ называется совокупность $m \cdot \times n$ элементов из некоторого поля, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}.$$

Элементы матрицы a_{ij} $(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$ при решении прикладных задач обычно берутся из поля вещественных или поля комплексных чисел. Первый индекс элемента указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Определение 2. Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$. При этом число n называется порядком матрицы. У квадратной матрицы можно выделить *главную* и *побочную диагонали*, $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ и $a_{n1}a_{(n-1)2}\dots a_{1n}$ соответственно.

Определение 3. Квадратная матрица называется *верхней (нижней) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ ($a_{ij} = 0$ при $i < j$):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 4. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Диагональная матрица, у которой все $a_{ii} = 1$, называется *единичной* и обозначается E:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 6. Любая матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O:

$$O=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

Определение 7. Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на соответственных местах.

Линейные действия с матрицами

Определение 8. Суммой $A+B$ двух матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Определение 9. Суммой $A+B$ двух матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Замечание. Из выше приведенных определений следует, что действия сложения и вычитания можно производить только над теми матрицами, у которых одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Определение 10. Произведением $\lambda\cdot A$ матрицы $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на число λ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, у которой $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Свойства сложения матриц и умножения их на число:

1) $A+B=B+A$;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

3) $\lambda\cdot(\mu\cdot A)=(\lambda\cdot\mu)\cdot A$;

4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$;

5) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$.

Матрицу $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ можно разбить на столбцы и представить в виде $\mathrm{A}=(\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2\ \ldots\ \mathrm{A}_n)$, где

$$\mathrm{A}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{A}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix},\ \ldots,\qquad \mathrm{A}_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Определение 11. Выражение вида

$$\alpha_1\mathrm{A}_1+\alpha_2\mathrm{A}_2+\cdots+\alpha_n\mathrm{A}_n,$$

где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ некоторые числа (коэффициенты), называется линейной комбинацией столбцов матрицы A.

Определение 12. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Определение 13. Система столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ называется *линейно зависимой*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому столбцу. В противном случае система столбцов $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ называется *линейно независимой.*

Аналогичным образом матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ можно разбить на строки и рассматривать линейные комбинации строк матрицы.

Определение 14. Произведением $A \cdot B$ матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ на матрицу $B = \left(b_{ij}\right)_{n\times p}$ называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times p}$, где

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

т.е. элемент c_{ij} равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i – й строки матрицы A и j – го столбца матрицы B.

Замечание. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Свойства умножения матриц:

1) некоммутативно, т.е. в общем случае $A \cdot B \neq B \cdot A$;

2) ассоциативно $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

3) дистрибутивно $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

4) для любой квадратной матрицы A порядка n справедливо $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E - единичная матрица порядка n.

Определение 15. Транспонированием матрицы $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ называется замена строк данной матрицы на столбцы с сохранением порядка их следования. Полученная матрица обозначается $A^T = \left(a'_{ji}\right)_{n\times m}$, т.е. $a'_{ji} = a_{ij}$. Так, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования матрицы:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Определение 16. Квадратная матрица называется симметричной, если

$$A = A^T, \qquad \text{т.е. } a_{ij} = a_{ji}.$$

Определение 17. Квадратная матрица называется кососимметричной, если

$$A = -A^T, \qquad \text{т. е. } a_{ij} = -a_{ji}.$$

§2. Определители и их свойства

Для любой квадратной матрицы n– го порядка A существует специальная числовая характеристика, называемая *определителем (или детерминантом)* матрицы A и обозначаемая как $\det(A)$ (или $|A|$, или Δ).

Определение 1. Определителем матрицы $A = (a_{11})$ первого порядка называется число $\det(A) = a_{11}$.

Определение 2. Определителем матрицы A второго порядка называется число $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определение 3. Определителем матрицы A третьего порядка называется число $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

В дальнейшем, если речь не идет об определители конкретной матрицы, мы будем просто говорить определитель порядка n.

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться либо *правилом треугольников,* изображенном на рисунке 1:

«+» «–»

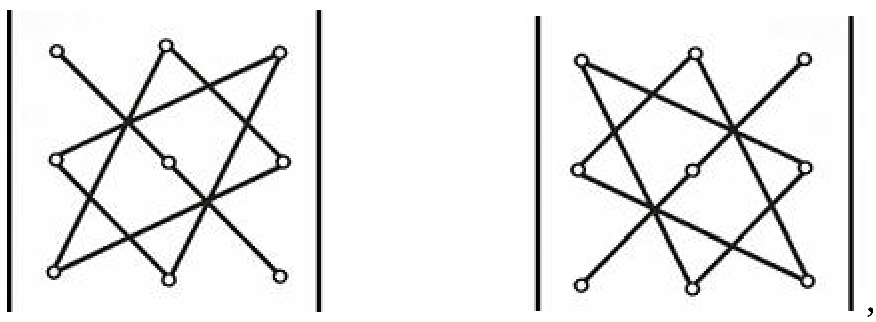

Рис. 1

либо правилом дополнения:

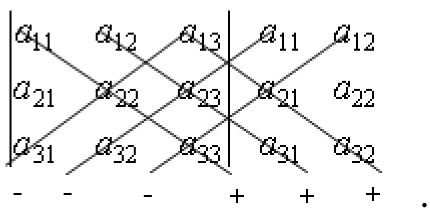

Рис. 2

Теперь сформулируем несколько вспомогательных определений, чтобы можно было дать понятие определителя $n-$ го порядка.

Определение 4. Рассмотрим множество натуральных чисел $\{1,2,\dots,n\}$. Последовательная их запись в определенном порядке без повторений называется *перестановкой* и обозначается $\{k_1, k_2, \dots k_n\}$. Полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 5. Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *инверсию,* если при $i<j$ имеет место $k_i > k_j$, т.е. большее число этой пары предшествует меньшему. Число пар, образующих инверсию, называют *числом инверсий перестановки.*

Определение 6. Определителем квадратной матрицы A порядка n называется число $\det(A)$, получаемое по формуле

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\{k_1,\dots,k_n\}} (-1)^s \, a_{1k_1} a_{2k_2} \cdot \dots \cdot a_{nk_n},$$

где $\{k_1, k_2, \dots k_n\}$ - всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы A, а s – число инверсий в данной перестановке.

Определение 7. Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют *вырожденной (или особой)*, в противном случае – *невырожденной (или не особой).*

Определитель матрицы является индикатором линейной зависимости столбцов (строк) матрицы. Если матрица вырожденная, то ее столбы (строки) являются линейно зависимыми. В противном случае, являются линейно независимыми.

Определение 8. Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} определителя n – го порядка, называется определитель $(n-1)$ – го порядка, получающийся из исходного вычеркиванием i–й строки и j– го столбца.

Определение 9. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} исходного определителя называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. Основные свойства определителей:

1. Определитель матрицы не меняется при транспонировании, т.е. $\det(A) = \det(A^T)$.

2. При перестановке двух строк (или столбцов) местами определитель меняет лишь знак.

3. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.

4. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (или столбца), равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель не изменится, если к некоторой строке (или столбцу) прибавить любую линейную комбинацию других строк (или столбцов).

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.

9. Если в определителе каждый элемент строки (или столбца) представим в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в качестве элементов данной строки используются первые слагаемые, во втором - вторые.

10. Сумма произведений элементов любой строки i (или столбца j) определителя Δ на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \ \left(\text{или } \Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}\right).$$

Данные соотношения называются соответственно *разложением определителя по элементам* i *–й строки* и *разложением определителя по элементам* j *– го столбца*.

11. Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

Заметим, что исторически понятие определителя сформировалось в 18 веке, при решении и исследовании систем линейных уравнений. Понятие матрицы было введено в алгебру позже, в середине 19 века.

Пример. Найти значение определителя 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вынесем за знак определителя общий множитель 1-ой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из элементов 2-ой и 4-ой строки элементы первой строки:

$$\Delta = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = 2 \cdot 4 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-6 + 4 + 4 - 9) = -56.$$

§3. Обратная матрица

Определение 1. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, где E– единичная матрица.

Определение 2. Пусть $\tilde{A}$ – матрица порядка n, состоящая из элементов A_{ij}, являющихся алгебраическими дополнениями к элементам a_{ij} в матрице A. Тогда матрица $\tilde{A}^T$ называется *присоединенной* для матрицы A, т.е.

$$\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T.$$

Теорема. Для любой невырожденной матрицы A существует единственная обратная, которую можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T.$$

Доказательство. Пользуясь свойствами определителя при разложении по k-й строке имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{kj} = \begin{cases} \det(A), k = i, \\ 0, \qquad k \neq i. \end{cases}$$

Таким образом,

$$A \cdot \tilde{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E.$$

Аналогичным образом, пользуясь свойствами определителя при разложении по k-му столбцу имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ik} = \begin{cases} \det(A), k = j, \\ 0, \qquad k \neq j. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{A}^T \cdot A = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A) \cdot E.$$

Таким образом, формула доказана.

Для невырожденных матриц справедливы следующие соотношения:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Пример. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 4 \cdot 1 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 = -1 \neq 0.$$

Таким образом матрица невырожденная, обратная матрица существует. Находим алгебраические дополнения элементов данной матрицы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

§4. Ранг матрицы

Определение 1. Минором k-го порядка матрицы A размеров $m \times n$ (не обязательно квадратной) называется определитель с элементами, лежащими на пересечении k любых строк и k любых столбцов матрицы A (k не превосходит наименьшего из чисел m и n).

Определение 2. Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы A, называется рангом матрицы. Для ранга матрицы приняты следующие обозначения: $rank(A), rang(A)$ или $r(A)$.

Нетрудно показать, что ранг матрицы равен наибольшему числу ее линейно независимых строк (столбцов).

Определение 3. Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется базисным минором.

Определение 4. Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются базисными.

Определение 5. Угловым минором порядка k матрицы A будем называть определитель k -го порядка с элементами, лежащими на пересечении k первых строк и k первых столбцов матрицы A.

Под элементарными преобразованиями матрицы понимается:

1) перестановка двух строк (или столбцов) матрицы;

2) умножение строки (или столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой, умноженной на любое число.

Теорема 1. Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

Определение 6. Трапециевидной (частный случай ступенчатой) называется матрица следующего вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & a_{rn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1,2,\cdots,r$.

Теорема 2. Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований строк и перестановками столбцов может быть приведена к трапециевидной форме.

Теорема 3. В трапециевидной матрице число ненулевых строк равно ее рангу.

Теорема 4. Ранг суммы двух матриц не превосходит суммы их рангов:

$$\operatorname{rank}(A+B) \leq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

Теорема 5. Ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждого из сомножителей:

$$\operatorname{rank}(A \cdot B) \leq \min\{\operatorname{rank}(A), \operatorname{rank}(B)\}.$$

Пример. Вычислить ранг матрицы при помощи элементарных преобразований

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

Вычтем сначала из четвертой строки первую и из третей - вторую, а затем из второй строки первую, умноженную на три:

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем из последней строки вторую и третью**:**

$$\begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы равен трем.

Легко заметить, что в упрощенной матрице A', четвертый столбец является линейной комбинаций первых трех. Действительно:

$$A'_4 = \frac{8}{5}A'_1 - A'_2 + 2A'_3.$$

Так как линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются при элементарных преобразованиях строк, то для исходной матрицы справедливо:

$$\frac{8}{5}A_1 - A_2 + 2A_3 - A_4 = 0.$$

Глава 2. Линейные пространства

§1. Линейные пространства

Фундаментальным математическим понятием, обобщающим понятие множества векторов, является линейное пространство.

Определение 1. Множество L элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным пространством* над числовым полем R, если

1) каждым двум элементам x, y из L поставлен в соответствие элемент z из L, называемый их суммой $z = x + y$;

2) каждому элементу x из L и каждому числу $\alpha \in R$ поставлен в соответствие элемент αx из L, называемый произведением элемента на число.

Операция сложения и умножения на число удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам):

1) $\forall\, a, b:\ a + b = b + a$ – коммутативность;

2) $\forall\, a, b, c:\ (a + b) + c = a + (b + c)$ – ассоциативность;

3) $\exists\ \theta$, такой что $\forall\, a:\quad a + \theta = a$;

4) $\forall a\ \ \exists!\,(-a):\ a + (-a) = \theta$ – существование противоположного элемента;

5) $\forall a, b\quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}:\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

6) $\forall a\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$;

7) $\forall a\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda \mu) \cdot a = \lambda (\mu a)$;

8) $\forall\, a:\ 1 \cdot a = a$.

Элементы линейного пространства L также принято называть *векторами*, а само пространство – *векторным*. Стоит отметить, что в данном случае мы используем слово вектор в более общем или более абстрактном смысле. Элементами пространств могут быть функции, полиномы, матрицы и т.д., а в частном случае и геометрические векторы.

Векторное пространство L называют *комплексным,* если числа принадлежат множеству комплексных чисел, т.е. $\alpha \epsilon C$.

Теорема. Простейшие свойства линейных пространств.

1) В каждом линейном пространстве нулевой элемент единственный;

2) Для любого элемента x существует единственный противоположный;

3) Произведение любого элемента x на число 0 равно нулевому элементу, т.е. $0 \cdot x = \theta$;

4) Произведение любого элемента x на число -1 равно элементу, противоположному x, т.е. $(-1) \cdot x = -x$;

5) Произведение нулевого элемента θ на любое число λ равно нулевому элементу, т.е. $0 \cdot \theta = \theta$.

Примеры

1) Линейные пространства над полем действительных чисел образуют множества свободных векторов на прямой, на плоскости, в пространстве с операциями сложения векторов и умножения вектора на число. Будем обозначать такие (геометрические) векторные пространствами следующим образом; V_1, V_2 и V_3.

При работе с векторами было показано, что фиксируя некоторый базис, можно установить взаимнооднозначное соответствие между векторами и упорядоченными наборами вещественных чисел (координатами вектора в этом базисе). После этого операции над векторами могут быть фактически заменены операциями над их координатами.

2) Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$ – множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вещественных чисел $(n \geq 1)$. Элементы данного пространства можно называть строками длины n, точками или векторами. Числа x_k– компонентами вектора x.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число вводятся по правилам:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Нетрудно проверить, что введенные операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом θ.

3) Множество всех матриц размеров $m \times n$ с вещественными элементами $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ ($Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$ с комплексными элементами) также является линейным пространством относительно операции сложения матриц и умножения матрицы на число.

Определение 2. Непустое множество $L' \subseteq L$ называется линейным подпространством линейного пространства L если для любых $x, y \in L'$ выполняется:

1) $x + y \in L'$ (замкнутость относительно сложения векторов);
2) $\alpha \cdot x \in L'$ для любого $\alpha \in R$ (замкнутость относительно умножения вектора на число).

Определение 3. Линейное пространство L является прямой суммой своих подпространств L' и L'', пишут $L = L' \oplus L''$, если каждый элемент $z \in L$ можно единственным образом представить в виде суммы $z = x + y$, где $x \in L'$ и $y \in L''$.

Пример. $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ – пространство квадратных вещественных матриц можно представить в виде прямой суммы множества симметрических и кососимметрических матриц.

Таким образом, любую квадратную матрицу A единственным образом можно представить в виде суммы матриц

$$A = B + C,$$

где $B = \frac{1}{2}(A + A^T)$ симметричная и $C = \frac{1}{2}(A - A^T)$ кососимметричная матрицы.

§2. Линейная зависимость и независимость элементов

Понятия линейной зависимости, линейной независимости и линейной комбинации элементов любого линейного пространства определяются точно так же, как и для обычных столбцов или строк матрицы.

Определение 1. Линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства с действительными (комплексными) коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называется выражение следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n. \qquad (1)$$

Определение 2. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Определение 3. Будем называть *системой векторов* некоторое непустое конечное упорядоченное множество векторов.

Определение 4. Система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{n} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ называется *линейно зависимой*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому элементу. В противном случае система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ называется *линейно независимой*, т.е.

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \theta \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$$

§3. Размерность и базис линейного пространства

Определение 1. Линейное пространство L называется $n-$ мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ вектора линейно зависимы. Для обозначения размерности пространства используется следующая форма записи: $\dim L = n$ или просто L^n.

Определение 2. Линейной оболочкой системы векторов $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ называется множество $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_n)$, составленное из всех конечных линейных комбинаций этих векторов, т.е. множество

$$\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, \text{ где } \lambda_i \in R\right\}.$$

Определение 3. Система любых n линейно независимых векторов в n–мерном линейном пространстве L называется *базисом* в L.

Понятно, что линейная оболочка базисных векторов совпадает со всем пространством, т.е. если $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис линейного пространства L^n, то

$$\mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n) = L^n.$$

Определение 4. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$ базис в линейном пространстве L. Тогда каждый элемент пространства можно представить в виде:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k. \tag{1}$$

Формула (1) называется *разложением элемента* x по базису $\{e_k\}_{k=1}^n$, а числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ – координатами элемента x в данном базисе.

Будем обозначать X_e (или просто X) – координатный столбец вектора $x \in \mathbb{R}^n$ в некотором базисе $\{e_k\}$, т.е.

$$X_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Возьмем произвольный вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно в принципе уже рассматривать как координаты вектора x относительно стандартного базиса: $e_1 = (1,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,\dots,0)$, …, $e_n = (0,0,\dots,1)$. В то же время, в $\mathbb{R}^n$ существует бесчисленное множество других базисов, в которых координатами того же самого вектора x будут уже другие наборы чисел.

Замечание 2. Мы определили пространство $\mathbb{R}^n$ как векторное пространство строк длины n. Можно использовать данное обозначение для векторного пространства столбцов длины n. Иногда, для удобства работы, уместно записывать элементы x и y как вектор-столбцы:

$$x = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = (y_1, \dots, y_n)^{\mathrm{т}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Линейное пространство называется *конечномерным*, если его базис состоит из конечного числа элементов. В противном случае, если существует бесконечно много линейно независимых векторов, такое пространство называется *бесконечномерным*.

Примеры бесконечных линейных пространств:

1) в пространстве $P(x)$ многочленов одной действительной переменной x *счетной* линейно независимой системой является: $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad \forall\, n$;

2) в пространстве $C[-\pi, \pi]$ непрерывных функций линейно независимая следующая счетная система: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$.

Заметим, что в курсе линейной алгебры изучаются только конечномерные пространства.

Теорема. В конечномерном пространстве любое подпространство является линейной оболочкой некоторой системы элементов.

Пример. Найти максимальные линейно независимые подсистемы следующей системы векторов пространства $\mathbb{R}^3$:

$$a_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix}4\\3\\4\end{pmatrix}, a_5 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Решение. Легко заметить, что любые два вектора являются линейно независимыми. Выясним, существуют ли три линейно независимых вектора. Вычислим следующие определители:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 3 & 2\\3 & 4 & 3\end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\2 & 3 & 3\\3 & 4 & 4\end{vmatrix} = -2, \quad \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 1\end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\3 & 2 & 3\\4 & 3 & 4\end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\3 & 2 & 1\\4 & 3 & 1\end{vmatrix} = 2, \quad \begin{vmatrix}3 & 4 & 1\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 1\end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, мы имеем четыре максимальных независимых подсистемы векторов: $\{a_1, a_2, a_3\}$, $\{a_1, a_2, a_4\}$, $\{a_2, a_3, a_4\}$ и $\{a_2, a_3, a_5\}$.

§4. Изоморфизм линейных пространств

Определение. Рассмотрим два линейных пространства L и M. Говорят, что эти пространства *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi: L \to M$ такое, что $\forall\ x, y \in L$ и $\forall\ \lambda \in C$ выполняются равенства:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y), \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x).$$

Само отображение φ называется *изоморфизмом*.

Теорема. Для того, чтобы линейные пространства L и M были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были равны, т.е. $\dim L = \dim M$.

§5. Преобразование координат при переходе к новому базису

Пусть в $n-$ мерном векторном пространстве L имеются два базиса: $\{e_k\}_{k=1}^n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (старый) и $\{e'_k\}_{k=1}^n = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ (новый). Даны зависимости, выражающие каждый вектор нового базиса через векторы старого базиса

$$\begin{cases} e_1' = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + \cdots + a_{n1}e_n \\ e_2' = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + \cdots + a_{n2}e_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n' = s_{1n}e_1 + s_{2n}e_2 + \cdots + a_{nn}e_n \end{cases}.$$

Определение. Матрицу $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$ называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Заметим, что матрица перехода является невырожденной.

Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \cdots + x_n'e_n'$. Тогда координатные столбцы имеют вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Запишем формулы преобразования координат при изменении базиса пространства в матричной форме:

$$X = SX' \text{ и } X' = S^{-1}X.$$

Глава 3. Системы линейных уравнений

§1. Основные определения

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1}$$

где числа a_{ij} $(i = 1,2, \dots, m;\ j = 1,2, \dots, n)$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, b_2, .., b_m$ – *свободными членами (или правыми частями)* системы уравнений.

Определение 1. *Решением системы* (1) называется упорядоченный набор чисел $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$, такой, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных, каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Определение 2. Система уравнений (1) называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае она называется *несовместной*.

Определение 3. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если она имеет более одного решения.

Определение 4. Две системы уравнений называются *равносильными,* если множества их решений совпадают, т.е. если каждое решение первой из них является решением второй и наоборот.

Определение 5. Если $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$, то система (1) называется *однородной*, в противном случае *неоднородной*.

Заметим, что однородная система уравнений всегда совместна. Одно из ее решений очевидно: это так называемое нулевое, или тривиальное, решение

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Систему (1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *матрица коэффициентов системы,*

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – *столбец неизвестных* и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ – *столбец свободных членов.*

Определение 6. Матрица $A|B = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы* (1).

Теорема (Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$\mathrm{r}ank(A) = rank(A|B).$$

При этом возможны три варианта:

1) если $\mathrm{r}ank(A) < rank(A|B)$, то система несовместна;

2) если $\mathrm{r}ank(A) = rank(A|B) = n$ (где n– число неизвестных), то система совместна и определенна;

3) если $\mathrm{r}ank(A) = rank(A|B) < n$, то система совместна и неопределенна.

Если разбить матрицу А на столбцы, т.е. представить в виде $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2 \dots\ \mathrm{A}_n)$, где

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \mathrm{A}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

то можно утверждать, что система (1) совместна тогда и только тогда, когда

$$B \in \mathrm{Lin}(A_1, A_2, \dots, A_n),$$

т.е. правая часть является линейной комбинацией столбцов матрицы коэффициентов.

§2. Матричный метод и формулы Крамера

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме:

$$AX = B, \tag{1}$$

где $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$– матрица коэффициентов системы, $X = (x_1, \dots, x_n)^{\mathrm{т}}$– столбец неизвестных и $B = (b_1, \dots, b_n)^{\mathrm{т}}$ – столбец свободных членов.

Теорема 1. Если $\det(A) \neq 0$, то система (1) совместна и определенна, ее решение задается формулой:

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Отсюда непосредственно следует теорема Крамера.

Теорема 2 (Крамер). Если $\det(A) \neq 0$, то система (1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \qquad (i = 1,2,\dots,n),$$

где A_i – матрица, полученная из A заменой i – го столбца на столбец свободных членов.

Доказательство. Имеем

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{\det(A)} \cdot \tilde{A}^T \cdot B = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot b_j, \qquad (i = 1,2,\dots,n).$$

Осталось заметить, что сумма $\sum_{j=1}^{n} A_{ji} \cdot b_j = \det(A_i)$, поскольку является разложением определителя матрицы A_i по i-му столбцу.

Заметим, что на практике при решении систем с большим числом уравнений и неизвестных формулы Крамера неудобны в работе.

§3. Метод Гаусса

Чаще всего на практике применяется метод Гаусса, который заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Данный метод является универсальным и может быть применен для систем с любым числом уравнений и неизвестных.

Суть метода заключается в следующем. С помощью элементарных преобразований над строками и перестановками столбцов (кроме последнего столбца) расширенная матрица системы $A|B$ приводится к ступенчатому виду $A'|B'$:

$$A'|B' = \left(\begin{array}{cccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2r} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right),$$

где $a'_{ii} \neq 0,\ i = 1,2,\cdots,r$.

Полученной расширенной матрице $A'|B'$ соответствует исходная система линейных уравнений. При этом $rank(A') = rank(A)$ и $rank(A'|B') = rank(A|B)$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и определенна (неопределенна), верны и для исходной системы.

Возможны три варианта:

1) Очевидно, что если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \dots, b'_m$, не равно нулю, то $rank(A') < rank(A'|B')$ и, следовательно, система несовместна.

2) Если $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ и $rank(A') = rank(A'|B') = n$, то система совместна и определенна. Из последнего уравнения $a'_{nn} \cdot x_{k_n} = b'_n$ находим неизвестную x_{k_n} и подставляем в предыдущее уравнение. Находим из него $x_{k_{n-1}}$ и т.д. Неизвестная x_{k_n} соответствует x_n, если мы не переставляли n-й столбец.

3) Если $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$ и $rank(A') = rank(A'|B') < n$, то система совместна и неопределенна. Объявляем первые r неизвестных $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ *базисными,* а остальные $n - r$ неизвестных $x_{k_{r+1}}, \dots, x_{k_n}$ – *свободными*. Переносим в правую часть свободные неизвестные и решаем систему относительно базисных неизвестных. Присваивая какие-то значения свободным неизвестным, получаем *частные решения* исходной системы.

§4. Общее решение системы линейных уравнений

Рассмотрим однородную систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме:

$$AX = O, \tag{1}$$

где матрица коэффициентов $A = \left(a_{ij}\right)_{m \times n}$ имеет $rank(A) = r \le \min\{m, n\}$.

Находим методом Гаусса любые $n - r$ линейно независимых частных решения $X_1, \dots X_{n-r}$ системы (1) и записываем общее решение в виде их линейной комбинации:

$$X = c_1 X_1 + \dots + c_{n-r} X_{n-r}.$$

Точнее справедлива следующая

Теорема 1. Множество решений однородной СЛАУ совпадает с линейной оболочкой $\mathrm{Lin}(x^1, x^2, \dots, x^{n-r})$ линейно независимых решений $x^1, x^2, \dots, x^{n-r}$ системы (1), т.е. образует в пространстве L_n подпространство размерности $n - r$, где r – ранг системы.

Определение 1. Линейно независимую систему решений $\{X_1, \dots X_{n-r}\}$ называют *фундаментальной системой решений*.

Определение 2. Матрица $\Phi = (X_1 \; X_2 \dots X_{n-r})$, составленная из столбцов линейно независимых частных решений данной системы называется *фундаментальной матрицей однородной системы решений*.

В матричной форме общее решение однородной СЛАУ имеет вид:

$$X = \Phi \mathrm{C},$$

где C – столбец произвольных постоянных $c_1, c_2, \dots, c_{n-r}$.

Теорема 2. Общее решение неоднородной СЛАУ представляется в виде суммы произвольного частного решения X_0 этой системы и общего решения соответствующей ей однородной СЛАУ:

$$X = X_0 + \sum_{\boldsymbol{k}=1}^{p} c_k X_k.$$

где $c_1, c_2, \dots, c_p$ – произвольные числа, $X_1, X_2, \dots, X_p$ – фундаментальная система решений соответствующей однородной системы уравнений.

Пример 1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений для однородной СЛАУ:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Выпишем матрицу коэффициентов системы. После понятных преобразований будем иметь:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ \quad -x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Пусть x_1, x_2 – базисные переменные, а x_3, x_4 – свободные переменные.

Выразив базисные через свободные переменные, получим:

$$x_1 = 8x_3 - 7x_4,$$
$$x_2 = -6x_3 + 5x_4.$$

Фундаментальную систему решений можно получить, присвоив свободным переменным значения x_3=1 и x_4=0, а затем x_3=0 и x_4=1. ФСР имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение имеет следующий вид:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 \ \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где c_1 и c_2 – произвольные числа.

В матричной форме общее решение будет иметь следующий вид:

$$X=\begin{pmatrix}8 & -7\\ -6 & 5\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}.$$

Общее решение представляет собой линейную оболочку (т.е. является подпространством в $\mathbb{R}^4$) двух линейно независимых векторов x^1 и x^2, имеющих координатные столбцы X_1 и X_2 соответственно.

Пример 2. Исследовать неоднородную СЛАУ на совместность. Если система совместна, то найти общее решение:

$$\begin{cases}2x_1+7x_2+3x_3+x_4=6,\\ 3x_1+5x_2+2x_3+2x_4=4,\\ 9x_1+4x_2+x_3+7x_4=2.\end{cases}$$

Вначале поменяем местами первую и третью строки. Затем поменяем местами первый с третьим столбцом. Выпишем полученную расширенную матрицу и преобразуем ее к трапециевидному виду:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 7 & \vdots & 2\\ 2 & 5 & 3 & 2 & \vdots & 4\\ 3 & 7 & 2 & 1 & \vdots & 6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 7 & \vdots & 2\\ 0 & -3 & -15 & -12 & \vdots & 0\\ 0 & -5 & -25 & -20 & \vdots & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & 9 & 7 & \vdots & 2\\ 0 & 1 & 5 & 4 & \vdots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0\end{pmatrix}.$$

Таким образом, исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases}x_3+4x_2+9x_1+7x_4=2,\\ \qquad x_2+5x_1+4x_4=0.\end{cases}$$

Система совместна, ранг равен двум. Пусть x_2, x_3 – базисные переменные, а x_1, x_4 – свободные переменные.

Выразив базисные через свободные переменные, получим:

$$x_2=-5x_1-4x_4,$$
$$x_3=2+11x_1+9x_4.$$

Подставив, например, $x_1=x_4=0$ получим частное решение $X_0=(0\ 0\ 2\ 0)^T$.

Задав значения свободных переменных $x_1=\alpha_1, x_4=\alpha_4$ получим общее решение в параметрической форме:

$$x_1=\alpha_1,$$
$$x_2=-5\alpha_1-4\alpha_4,$$
$$x_3=2+11\alpha_1+9\alpha_4,$$
$$x_4=\alpha_4.$$

Рассмотрим далее однородную систему:

$$\begin{cases}x_3+4x_2+9x_1+7x_4=0,\\ \qquad x_2+5x_1+4x_4=0.\end{cases}$$

Найдем фундаментальную систему ее решений. Положив $x_1 = 1, x_4 = 0$, получим $x_2 = -5, x_3 = 11$. Затем, присвоив $x_1 = 0, x_4 = 1$, находим $x_2 = -4, x_3 = 9$. ФСР имеет вид:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение данной неоднородной СЛАУ в векторной форме имеет вид:

$$X = X_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 \ \text{ или } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В матричной форме общее решение будет иметь следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & -4 \\ 11 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Глава 4. Линейный оператор

§1. Линейный оператор

Рассмотрим обобщение понятия функции на случай, когда областью определения и областью значений являются произвольные линейные пространства.

Определение 1. Рассмотрим два линейных пространства L и M. Отображением $\varphi: L \to M$ называется правило, согласно которому каждому вектору $x \in L$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x) \in M$.

Определение 2. Отображение φ называется *линейным,* если для $\forall\ x, y \in L$ и $\forall\ \lambda \in C$ выполняются следующие два условия (условия линейности):

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

Определение 3. Линейное отображение $\varphi: L \to L$ (линейного пространства в себя) называется *линейным преобразованием* пространства L.

В курсе линейной алгебры линейные отображения обычно называют *линейными операторами* и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут.

§2. Матрица линейного оператора

Расмотрим линейный оператор $\mathbb{A}: L \longrightarrow M$. Зафиксируем какой-нибудь базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в L и какой-нибудь базис $\{q_1, \dots, q_m\}$ в M. Пусть

$$x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \text{ или } X_e = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

В силу линейности оператора $\mathbb{A}$ имеем:

$$\mathbb{A}(x) = \mathbb{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = x_1\mathbb{A}(e_1) + \dots + x_n\mathbb{A}(e_n).$$

Таким образом, оператор $\mathbb{A}$ полностью определяется своим действием на базисных векторах $\{e_1, \dots, e_n\}$. Разложим образы базисных векторов по базису $\{q_1, \dots, q_m\}$:

$$\mathbb{A}(e_j) = a_{1j}q_1 + \dots + a_{mj}q_m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Имеем:

$$\mathbb{A}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n)q_1 + \dots + (a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n)q_m$$
$$= y_1q_1 + \dots + y_mq_m.$$

В матричном виде зависимость между координатами можно записать так:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Определение 1. Матрица $A=(a_{ij})_{m\times n}$ – называется матрицей линейного оператора $\mathbb{A}: L \to M$ относительно базисов $\{e_1, \dots, e_n\}$ и $\{q_1, \dots, q_m\}$ (или в паре базисов).

Легко видеть, что столбцами матрицы оператора являются координаты векторов $\mathbb{A}(e_j)$ относительно базиса $\{q_1, \dots, q_m\}$.

Определение 2. Линейный оператор $\mathbb{A}$, действующий из пространства L в то же самое пространство L, называется *линейным оператором в* L.

Определение 3. Линейный оператор $\mathbb{A}: L \to L$ называется диагонализируемым, если существует базис, в котором его матрица диагональная.

Свойства линейных операторов существенно зависят от свойств поля. Над полем комплексных чисел можно показать, что любой оператор диагонализируем.

Определение 4. Если координаты вектора рассматривать как упорядоченный набор переменных, то система соотношений $Y = AX$ называется *линейным преобразованием* переменных $x_1, \dots, x_n$ в переменные $y_1, \dots, y_n$.

Особо отметим разницу между выражениями $y = \mathbb{A}\mathrm{x}$ и $Y = AX$. Первое из них означает символическую запись правила, согласно которому вектор x преобразуется в вектор y (независимо от выбора базиса), а второе устанавливает соответствие между координатами векторов x и y в выбранном базисе.

Пример. Найдем матрицу преобразования поворота плоскости V_2 на угол α в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$.

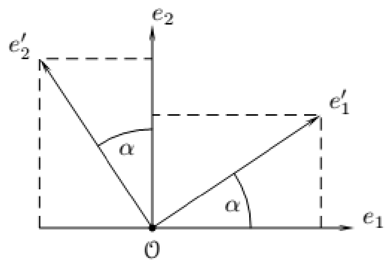

Рис. 3

Так как

$$e_1' = \mathbb{A}e_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2 \quad \text{и}$$

$$e_2' = \mathbb{A}e_2 = -\sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2, \text{то}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей поворота.* При повороте вектор $x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ переходит в вектор $y = y_1 e_1 + y_2 e_2$:

$$\begin{cases} y_1 = \cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot x_2 \\ y_2 = \sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 \end{cases}.$$

§3. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим линейное преобразование $y = \mathbb{A}x$, где векторы $x, y \in L$ в n–мерном пространстве L. Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n$. В этом базисе оператору соответствует линейное преобразование

$$Y = AX. \tag{1}$$

Рассмотрим новый базис $\{e'_k\}_{k=1}^n$, и пусть $S = (s_{ij})$ – матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда координаты векторов x и y в старом и новом базисах связаны соотношениями:

$$X = SX' \text{ и } Y = SY'. \tag{2}$$

Подставляя X и Y из (2) в формулу (1), получим:

$$SY' = ASX' \text{ или } Y' = S^{-1}ASX'.$$

Обозначив $A' = S^{-1}AS$, получим $Y' = A'X'$ – линейное преобразование, соответствующее оператору $\mathbb{A}$ в новом базисе.

Определение. Матрицы A и $A' = S^{-1}AS$ называются *подобными*. Они описывают действие одного и того же оператора $\mathbb{A}$ в разных базисах.

Теорема. Свойства подобных матриц:

1) равенство рангов;

2) равенство определителей;

3) равенство характеристических полиномов и собственных значений.

Пример. Оператор $\mathbb{A}$ имеет в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицу

$$A_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого оператора в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, если

$$e'_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3,$$
$$e'_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3,$$
$$e'_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3.$$

Решение. Составим матрицу перехода:

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\mathbb{A}$ в базисе $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$:

$$A_{e'} = S^{-1}A_eS = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -37 & -55 & -27 \\ 24 & 35 & 19 \\ 6 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

§4. Собственные числа и векторы линейного оператора

Рассмотрим векторное пространство L^n.

Определение 1. Ненулевой вектор $x \in L^n$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathbb{A}$, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство: $\mathbb{A}x = \lambda x$. При этом само число λ называется *собственным значением* (*числом*) линейного оператора $\mathbb{A}$, соответствующим вектору x.

Теорема 1. Любой линейный оператор $\mathbb{A}$, действующий в комплексном векторном пространстве L^n, имеет собственные векторы.

Пусть линейный оператор $\mathbb{A}$ в базисе $\{e_k\}_{k=1}^n$ задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

и пусть X координатный столбец вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^n$. Тогда из определения $AX = \lambda X = \lambda EX \Rightarrow (A - \lambda E)X = O$. Эта система имеет ненулевое решение, если

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Определение 2. Уравнение (1) называется *характеристическим уравнением*, а его левая часть – *характеристическим многочленом* матрицы A. Корни характеристического уравнения называются *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы A.

Определение 3. Множество всех характеристических чисел матрицы A называется ее спектром и обозначается через $\sigma(A)$.

Так как матрицы оператора $\mathbb{A}$ в различных базисах подобны, то характеристический многочлен матрицы A оператора $\mathbb{A}$ и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве V. Они являются инвариантами оператора.

Определение 4. Пусть $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ – собственный вектор оператора $\mathbb{A}$ с собственным числом λ. Тогда его координаты удовлетворяют следующей системе:

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+(a_{nn}-\lambda)x_n=0.\end{cases}$$

Поле вещественных чисел в отличие от поля комплексных чисел не замкнуто алгебраически, т.е. уравнение с вещественными коэффициентами не всегда имеет вещественные корни. Следовательно, линейный оператор в вещественном пространстве может не иметь собственных чисел.

Теорема 2. Если матрица A линейного оператора $\mathbb{A}$ является симметричной, то:

1) все собственные значения являются действительными числами;

2) собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны;

3) если все собственные значения различны, то соответствующие единичные собственные векторы образуют ортонормированный базис;

4) в базисе из единичных собственных векторов матрица A линейного оператора $\mathbb{A}$ является диагональной, причем элементами главной диагонали являются его собственные числа.

Пример. Найти собственные значения и собственные векторы оператора $\mathbb{A}$, заданного в некотором базисе матрицей:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&2\\0&2&5\end{pmatrix}$$

Записать матрицу оператора $\mathbb{A}$ в базисе из собственных векторов и указать матрицу перехода к этому базису.

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&2-\lambda&2\\0&2&5-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=-\lambda^3+8\lambda^2-13\lambda+6=-(\lambda-1)^2(\lambda-6)=0.$$

Его корни: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=6$ являются собственными числами оператора. Найдем соответствующие собственные векторы.

Так как собственное значение $\lambda=1$ имеет алгебраическую кратность равную двум, то найдем пару взаимно ортогональных собственных векторов $v_1=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$ и $v_2=\begin{pmatrix}\alpha'\\\beta'\\\gamma'\end{pmatrix}$, координаты которых удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 0\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0, \\ 0\alpha + 1\beta + 2\gamma = 0, \\ 0\alpha + 2\beta + 4\gamma = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\beta = -2\gamma$ и $\alpha -$ произвольное. Выделим два каких-нибудь взаимно ортогональных вектора (т.е. $(v_1, v_2) = 0$), например:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 6$ координаты собственного вектора $\boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} -5\alpha + 0\beta + 0\gamma = 0, \\ 0\alpha - 4\beta + 2\gamma = 0, \\ 0\alpha + 2\beta - 1\gamma = 0. \end{cases}$$

Решив систему, получим: $\alpha = 0$ и $\gamma = 2\beta$. Полагая, например, $\beta = 1$, получим $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, матрица A' линейного оператора $\mathbb{A}$ в базисе из собственных векторов и матрица перехода S к этому базису имеют следующий вид:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку, используя формулу $A' = S^{-1}AS$:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & -1/5 \\ 0 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Глава 5. Билинейные и квадратичные формы

§1. Билинейная форма

Определение 1. Отображение $f: V \times V \to R$, ставящее каждой паре векторов $x, y \in V$ число $f(x, y) \in R$ называется *билинейной функцией,* если она линейна по каждому из аргументов, т.е.

$$f(\alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}, \mathrm{z}) = \alpha f(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + \beta f(\mathrm{y}, \mathrm{z}),$$

$$f(z, \alpha \mathrm{x} + \beta \mathrm{y}) = \alpha f(\mathrm{z}, \mathrm{x}) + \beta f(\mathrm{z}, \mathrm{y})$$

для всех $x, y, z \in V$ и $\alpha, \beta \in R$.

Найдем матричное представление блинейной функции. Пусть $\{e_1, \dots, e_n\}$ некоторый базис в V. Выразим $x, y \in V$ через их координаты: $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ и $y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$. В силу линейности функции, имеем

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j f(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j,$$

где $b_{ij} = f(e_i, e_j)$.

Определение 2. Матрица $B = (b_{ij})$ называется *матрицей билинейной функции* f на V в базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$. Пусть X и Y координатные столбцы векторов $x, y \in V$. Тогда

$$f(x, y) = X^T \cdot B \cdot Y.$$

Определение 3. Многочлен $f(x)$ от переменных $x_1, \dots, x_n$ с вещественными (комплексными) коэффициентами называется *формой m– степени* от $x_1, \dots, x_n$ если все его члены имеют одну и туже степень m относительно совокупности переменных. Выражения вида

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i y_j$$

называются *билинейными формами*.

Таким образом, в заданном базисе произвольная билинейная функция определяется некоторой билинейной формой и наоборот. Поэтому билинейной формой называют и саму функцию $f(x, y)$.

Пример. Найти значение билинейной функции $f(x, y)$, заданной матрицей в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$, если

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \ x = e_1 + 3e_3, y = -e_1 + 2e_2 - 4e_3.$$

Решение. Пользуясь матричной записью имеем:

$$f(x, y) = X^T \cdot B \cdot Y = (1\ \ 0\ \ 3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = -43.$$

Заметим, что значение билинейной формы не зависит от выбора базиса.

Пусть в V задан еще идин базис $\{e_1', \dots, e_n'\}$ и S – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_i'\}$. Таким образом, если $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n = x_1'e_1' + \cdots + x_n'e_n'$, то координатные столбцы связаны соотношением $X = SX'$.

Теорема 1. Матрицы F и F' билинейной формы f на V в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$ связаны соотношением

$$F' = S^T \cdot F \cdot S.$$

Доказательство. Так как значение билинейной формы не зависит от выбора базиса, имеем

$$X'^T \cdot F' \cdot Y' = f(x, y) = X^T \cdot F \cdot Y = (SX')^T \cdot F \cdot (SY') = X'^T \cdot S^T \cdot F \cdot S \cdot Y'.$$

Определение 4. Матрицы A и A' называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица B, что $A' = B^TAB$.

Таким образом, матрицы конгруэнтны $\Leftrightarrow$ они являются матрицами одной и той же билинейной формы в разных базисах.

Пример. Билинейная функция f имеет в некотором базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$ матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу билинейной функции f в новом базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$, если

$$\begin{aligned} e_1' &= e_1 - e_2, \\ e_2' &= e_1 + e_3, \\ e_3' &= e_1 + e_2 + e_3. \end{aligned}$$

Решение. Составим матрицу перехода:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу билинейной функции f в новом базисе $\{e_1', e_2', e_3'\}$:

$$F' = S^T \cdot B \cdot S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -6 & -9 \\ -2 & 20 & 30 \\ -3 & 30 & 45 \end{pmatrix}.$$

Определение 5. Билинейная форма $f(x, y)$ называется симметричной (кососимметричной), если

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = f(\mathrm{y}, \mathrm{x}) \quad (f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -f(\mathrm{y}, \mathrm{x})) \text{ для всех } x, y \in V.$$

Симметричная форма относительно любого базиса задается симметричной матрицей ($F^T = F$), а кососимметричная форма – кососимметричной матрицей ($F^T = -F$).

Теорема 2. Любая симметричная матрица $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ конгруэнтна некоторой диагональной.

Теорема 3. Множество всех билинейных форм, заданных в линейном пространстве V, образует линейное пространство, которое является прямой суммой подпространства симметричных и подпространства кососимметричных билинейных форм.

Таким образом, билинейная форма однозначно разложима в сумму симметричной и кососимметричной форм:

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{1}{2}\big(f(x, y) + f(\mathrm{y}, \mathrm{x})\big) + \frac{1}{2}\big(f(x, y) - f(\mathrm{y}, \mathrm{x})\big).$$

§2. Квадратичная форма

Понятие симметричной билинейной формы приводит к понятию квадратичной формы, имеющей важные геометрические приложения.

Определение 1. Квадратичной формой на линейном пространстве L называется функция $q(x) = f(x, x)$, где f симметричная билинейная функция. Матричная форма записи квадратичной формы имеет вид

$$q(x) = X^T \cdot A \cdot X,$$

где X - координатный столбец вектора x. Исходная симметричная билинейная форма $f(x, y)$ называется *полярной* для квадратичной формы $q(x)$.

Определение 2. Симметричная матрица A называется *матрицей квадратичной формы* $q(x)$.

Определение 3. Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы.

Определение 4. Квадратичная форма называется *канонической* (диагональной), если ее матрица диагональная.

Определение 5. Квадратичная форма называется *нормальной*, если ее матрица диагональная и диагональные элементы равны: ± 1 или 0.

§3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Приведение квадратичной формы к каноническому виду является важной задачей в теоретической и прикладной математике.

Теорема 1 (Лагранж). Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторой линейной невырожденной замены переменных.

Пусть на линейном пространстве L задана квадратичная форма, которая в некотором базисе $\{e_1, \dots, e_n\}$ имеет следующий вид

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j.$$

Запишем матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

и рассмотрим так называемые главные миноры матрицы A:

$$\Delta_1 = a_{11}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \cdots, \Delta_n = \det(A).$$

Приведем теорему Якоби о каноническом виде квадратичной формы $q(x)$.

Теорема 2. Пусть в условиях приведенных выше главные миноры матрицы A квадратичной формы $q(x)$ отличны от нуля. Тогда в пространстве L существует базис $\{e_1', e_2', \cdots, e_n'\}$ в котором форма $q(x)$ принимает канонический вид:

$$q(x) = \frac{1}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2.$$

Рассмотрим теперь алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования в трехмерном пространстве. Пусть

$$\begin{cases} e_1' = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + s_{31}e_3, \\ e_2' = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + s_{32}e_3, \\ e_3' = s_{13}e_1 + s_{23}e_2 + s_{33}e_3, \end{cases}$$

– найденные нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2, e_3\}$. Как было сказано ранее, система векторов $\{e_1', e_2', e_3'\}$ образует ортонормированный базис.

Матрица $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса $\{e_1, e_2, e_3\}$ к базису $\{e_1', e_2', e_3'\}$.

Таким образом, формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = s_{11}x_1' + s_{12}x_2' + s_{13}x_3', \\ x_2 = s_{21}x_1' + s_{22}x_2' + s_{23}x_3', \\ x_3 = s_{31}x_1' + s_{32}x_2' + s_{33}x_3'. \end{cases}$$

В новом базисе квадратичная форма примет свой канонический вид: $q(x) = \lambda_1(x_1')^2 + \lambda_2(x_2')^2 + \lambda_3(x_3')^2$.

§4. Знакопостоянные квадратичной формы

Пусть на линейном пространстве L задана квадратичная форма $k(x)$.

Определение 1. Квадратичная форма $k(x)$ называется положительно определённой, если для всех $x \in L$ $(x \neq \theta)$ значение $k(x) > 0$.

Определение 2. Квадратичная форма $k(x)$ называется отрицательно определённой, если для всех $x \in L$ $(x \neq \theta)$ значение $k(x) < 0$.

Теорема (критерий Сильвестра). Для того, чтобы квадратичная форма $k(x)$ на n–мерном вещественном линейном пространстве L была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ее матрицы $A = (a_{ij})$ были положительны.

Следствие. Для того, чтобы квадратичная форма $k(x)$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки главных миноров чередовались, начиная с отрицательного.

Глава 6. Евклидовы пространства

§1. Скалярное произведение

Для того, чтобы обогатить работу с элементами абстрактного линейного пространства, нам необходимо ввести метрику, т.е. способ измерять углы и длины. Удобнее всего распространить метрические понятия на линейные пространства с помощью скалярного произведения.

Определение 1. Линейное вещественное пространство L называется евклидовым, если на нем задано отображение $L \times L \to \mathbb{R}$, ставящее каждой паре элементов $x, y \in L$ число, обозначаемое $(x, y) \in \mathbb{R}$ и называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$ – симметричность;

3) $(\mathrm{x} + \mathrm{y}, \mathrm{z}) = (\mathrm{x}, \mathrm{z}) + (\mathrm{y}, \mathrm{z}),\ (\alpha\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ линейность;
для любых элементов $x, y, z \in L$ и числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Нетрудно заметить, что скалярное произведение – это положительно определенная симметричная билинейная форма.

Понятие скалярного произведения естественным образом обобщает понятие скалярного произведения геометрических векторов. Заметим, что существуют как конечномерные, так и бесконечномерные евклидовы пространства.

Любое конечномерное линейное пространство L всегда можно превратить в евклидово пространство. Действительно, пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис пространства L, а $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ и $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ его элементы. Рассмотрим в качестве скалярного произведения элементов x и y величину

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

Нетрудно убедиться, что все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

Определение 2. *Длиной* или *нормой* вектора x в евклидовом пространстве называется следующая величина $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$.

Норма является обобщением понятия длины вектора из элементарной геометрии.

Определение 3. Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Умножая любой ненулевой вектор $x \in L^n$ на число $\lambda = \frac{1}{\|x\|}$, мы получим вектор $x_0 = \frac{x}{\|x\|}$ единичной длины. Эта операция называется *нормированием* вектора x.

Примеры

1) в пространствах V_2 и V_3 скалярное произведение вводится обычным образом $(\vec{x},\vec{y})=|\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos(\vec{x}\hat{,}\vec{y})$;

2) в пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ можно ввести скалярное произведение равенством: $(x(t),y(t))=\int_a^b x(t)y(t)dt$.

§2. Матрица Грама

Пусть $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ – произвольный базис евклидова пространства. Векторы x и y имеют координатные столбцы X и Y в этом базисе. Найдем выражение скалярного произведения через координаты векторов в выбранном базисе. Пользуясь свойствами скалярного произведения, имеем

$$(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j(e_i,e_j)=X^T\cdot\Gamma\cdot Y,$$

где симметричная матрица

$$\Gamma=\begin{pmatrix}(e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \cdots & (e_1,e_n)\\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \cdots & (e_2,e_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & \cdots & (e_n,e_n)\end{pmatrix}$$

называется *матрицей Грама,* построенной по системе векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$.

Теорема 1. Свойство матрицы Грама

1) Система векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\det\Gamma(e_1,e_2,\dots,e_n)>0.$$

2) Система векторов $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда

$$\det\Gamma(e_1,e_2,\dots,e_n)=0.$$

Теорема 2 (Неравенство Коши-Буняковского). Для любых векторов x и y евклидова пространства V справедливо

$$|(x,y)|\le|x|\cdot|y|,$$

причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Доказательство. Для системы векторов $\{x,y\}$ определитель матрицы Грама неотрицателен, т.е.

$$\det\Gamma(x,y)=\begin{vmatrix}(x,x) & (x,y)\\ (y,x) & (y,y)\end{vmatrix}=|x|^2|y|^2-(x,y)^2\ge 0.$$

Следовательно, $(x,y)^2 \le |x|^2|y|^2$ или $|(x,y)| \le |x||y|$. Заметим, что равенство выполняется когда векторы x и y линейно зависимы.

Пример. Найти скалярное произведение векторов x и y, если заданы их координаты в некотором базисе и матрица Грама Г этого базиса:

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \Gamma = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$(x,y) = (1\ \ 1\ \ 1)\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Таким образом, векторы ортогональны.

§3. Ортогональность и ортогональные матрицы

Определение 1. Векторы x, y линейного пространства L называются *ортогональными* (в пространствах V_2 и V_3 - *перпендикулярными*), если их скалярное произведение $(x,y) = 0$. Обозначается: $x \perp y$.

Определение 2. Система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется ортогональной, если $\left(e_i, e_j\right) = 0$ при $i \ne j$, где $i = 1,2, \dots, n$ и $j = 1,2, \dots, n$.

В евклидовом пространстве, благодаря наличию операции скалярного произведения, существуют более удобные для работы ортонормированные базисы.

Определение 3. Система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется ортонормированной, если

$$\left(e_i, e_j\right) = \begin{cases} 1 \text{ при } \ i = j \ \ (\text{т. е. } |e_i| = 1), \\ 0 \text{ при } \ i \ne j \ \ \left(\text{т. е. } e_i \perp e_j\right). \end{cases}$$

Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ – ортонормированный базис пространства L. Тогда для любого $x \in$ L существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

при этом координаты равны скалярным произведениям вектора x на соответствующие базисные векторы

$$x_i = (x, e_i)$$

и называются *проекциями* вектора x на оси координат. Таким образом, ортонормированный базис обладает свойствами аналогичными свойствам декартова прямоугольного базиса.

В ортонормированном базисе матрица Грама единичная:

$$\Gamma(e_1, e_2, \dots, e_n) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}.$$

Определение 4. Матрица A называется ортогональной, если $A^T = A^{-1}$.

Свойства ортогональной матрицы:

1) из определения следует, что ортогональная матрица всегда невырожденная. Так как $\det(A \cdot A^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(E) = 1$, а $\det(A) = \det(A^T)$, то $\det(A) = \pm 1$.

2) столбцы, рассматриваемые как векторы арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, образуют ортонормированную систему.

Теорема. Матрица S перехода от одного ортонормированного базиса $\{e\}$ к другому ортонормированному базису $\{e'\}$ является ортогональной.

§4. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

К любой линейно независимой системе векторов $\{v_i\}_{i=1}^n = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ евклидова пространства L можно применить *процесс ортогонализации Грама-Шмидта,* в результате которого получается ортонормированная система $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, более удобная для работы.

Теорема. Пусть $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ – система линейно независимых векторов евклидова пространства L. Тогда существует ортонормированная система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такая, что:

$$\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Напомним, что $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$. Опишем процесс ортогонализации:

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{v_1}{\sqrt{(v_1, v_1)}};$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}}, \qquad \text{где } g_2 = v_2 - (v_2, e_1) \cdot e_1;$$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} = \frac{g_3}{\sqrt{(g_3, g_3)}}, \qquad \text{где } g_3 = v_3 - (v_3, e_1) \cdot e_1 - (v_3, e_2) \cdot e_2;$$

....

$$e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|} = \frac{g_n}{\sqrt{(g_n, g_n)}}, \qquad \text{где } g_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} (v_n, e_i) \cdot e_i.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система векторов $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является ортонормированной.

Пример. Ортонормировать следующую систему векторов евклидова пространства:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим

$$e_1 = \frac{v_1}{\sqrt{(f_1, f_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1+9+1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{11}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$g_2 = v_2 - (v_2, e_1) \cdot e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}(5 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}} = \frac{1}{\sqrt{16+4+4}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$g_3 = v_3 - (v_3, e_1) \cdot e_1 - (v_3, e_2) \cdot e_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} - \frac{1}{11}(1 \cdot 1 + 6 \cdot 3 - 8 \cdot 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}(1 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 8 \cdot 1) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

$$\mathrm{e}_3 = \frac{\mathrm{g}_3}{\sqrt{(\mathrm{g}_3, \mathrm{g}_3)}} = \frac{1}{\sqrt{16+1+49}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{66}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

§5. Линейные преобразования евклидовых пространств

Определение 1. Пусть $\mathbb{A}$ – линейное преобразование (линейный оператор) конечномерного евклидова пространства V. Оператор $\mathbb{A}^*: V \to V$ называется *сопряженным* к линейному оператору $\mathbb{A}$, если для любых векторов $x, y \in V$ выполняется равенство

$$(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}^* y).$$

Теорема 1. Для любого линейного преобразования $\mathbb{A}$ евклидова пространства V существует единственный сопряженный оператор $\mathbb{A}^*$, причем его матрица в базисе $\{e_k\}_{k=1}^n$ определяется по матрице А оператора $\mathbb{A}$ формулой

$$\mathrm{A}^* = \Gamma^{-1} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma.$$

Если базис $\{e_k\}$ является ортонормированным, то матрица Грама единичная и вышеприведенная формула принимает более простой вид

$$\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{\mathrm{T}}.$$

Теорема 2. Сопряженный оператор $\mathbb{A}^*$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathbb{A}^*$– сам является линейным оператором;
2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$;
3) $(\alpha\mathbb{A})^* = \alpha\mathbb{A}^*$;
4) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*$;
5) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$.

Определение 2. Линейный оператор $\mathbb{A}: \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ называется *самосопряженным* или *симметричным* если справедливо равенство

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{A}.$$

В ортонормированном базисе $\{e_k\}$ матрица самосопряженного оператора симметрична. Самосопряженные операторы играют большую роль в квантовой механике.

Теорема 3. Собственные значения самосопряженного оператора *вещественны*.

Теорема 4. Собственные векторы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, *ортогональны*.

Пример. Пусть в евклидовом пространстве V задан ортонормированный базис $\{e_1, e_2\}$ и не ортонормированный базис $\{f_1, f_2\} = \{e_1, e_1 + e_2\}$. Оператор $\mathbb{A}$ имеет в базисе $\{f_1, f_2\}$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу сопряженного оператора $\mathbb{A}^*$ в базисе $\{f_1, f_2\}$.

Решение. Поскольку базис $\{f_1, f_2\}$ не является ортонормированным, то найдем матрицу Грама и обратную к ней:

$$\Gamma(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & (e_1, e_1 + e_2) \\ (e_1 + e_2, e_1) & (e_1 + e_2, e_1 + e_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\Gamma^{-1}(f_1, f_2) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица сопряженного оператора $\mathbb{A}^*$ в базисе $\{f_1, f_2\}$ имеет вид

$$\mathrm{A}^* = \Gamma^{-1} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{T}} \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Глава 7. Унитарные пространства

Унитарное пространство является комплексным аналогом евклидова пространства. Практически все понятия, имеющие смысл для евклидова пространства, переносятся на случай унитарного (или эрмитового) пространства. Приведем некоторые из них.

§1. Основные определения

Определение 1. Числова функция $f(x,y)$ называется *полуторалинейной формой*, если она линейна по первому аргументу и сопряженно линейна по второму аргументу:

$$f(\alpha \mathrm{x}+\beta \mathrm{y},\mathrm{z}) = \alpha f(\mathrm{x},\mathrm{z}) + \beta f(\mathrm{y},\mathrm{z}),\ f(z,\alpha \mathrm{x}+\beta \mathrm{y}) = \overline{\alpha} f(\mathrm{z},\mathrm{x}) + \overline{\beta} f(\mathrm{z},\mathrm{y})$$

ля всех $x,y,z \in U$ и $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$.

Черта с верху означает взятие комплексного сопряженного, т.е. $\overline{a+bi} = a - bi$.

Пусть $\{e_1,\dots,e_n\}$ некоторый базис в U. Выразив $x,y \in U$ через координаты $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ и $y = y_1e_1 + \dots + y_ne_n$, получим

$$f(x,y) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f\left(e_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \overline{y}_j f(e_i,e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_i\overline{y}_j,$$

где $b_{ij} = f(e_i,e_j)$.

Как и в случае билинейных форм, матрица $B = (b_{ij}) \in Mat_n(\mathbb{C})$ называется *матрицей полуторалинейной формы* f на U в базисе $\{e_1,\dots,e_n\}$. В матричной записи формула примет вид

$$f(x,y) = X^T \cdot B \cdot \overline{Y}.$$

Пример 1. Найти значение полуторалинейной функции $f(x,y)$, заданной матрицей в двумерном комплексном пространстве с некоторым базисом $\{e_1,e_2\}$, если

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix},\ \ x = (i,-2),\ \ y = (1-i, 3+i).$$

Решение. Вычисляем значение:

$$f(x,y) = X^T \cdot B \cdot \overline{Y} = (i \ \ -2)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i \\ 3-i \end{pmatrix} = -3 + 7i.$$

Формула, связывающая матрицы B и B' одной и той же полуторалинейной формы f на U в базисах $\{e_i\}$ и $\{e_i'\}$, имеет вид

$$F' = S^T \cdot B \cdot \overline{S},$$

где S – матрица перехода от $\{e_i\}$ к $\{e_i'\}$.

Пример 2. Полуторалинейная функция f в двумерном комплексном пространстве с некоторым базисом $\{e_1, e_2\}$ задана следующей матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу полуторалинейной функции f в новом базисе $\{e_1', e_2'\}$, если

$$e_1' = e_1 + ie_2,$$
$$e_2' = ie_1 + e_2.$$

Решение. Составим матрицу перехода:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу полуторалинейной функции f в новом базисе $\{e_1', e_2'\}$:

$$B' = S^T \cdot B \cdot \overline{S} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+i & -1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+i & 1-i \\ -3+i & 1-i \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Полуторалинейная форма $f(x, y)$ называется *эрмитовой*, если

$$f(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \overline{f(\mathrm{y}, \mathrm{x})} \quad \text{для всех } x, y \in U.$$

Эрмитова форма относительно любого базиса задается эрмитовой матрицей

$$F^T = \overline{F}.$$

Определитель эрмитовой матрицы является действительным числом.

Определение 3. Линейное комплексное пространство U называется *унитарным* (или *эрмитовым*), если на нем задано отображение $U \times U \to \mathbb{C}$, ставящее каждой паре элементов $x, y \in U$ в соответствие комплексное число, обозначаемое (x, y) и называемое *скалярным произведением*, обладающее следующими свойствами:

1) $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $(x, y) = \overline{(y, x)}$ – эрмитовость;

3) $(\alpha\mathrm{x} + \beta\mathrm{y}, \mathrm{z}) = \alpha(\mathrm{x}, \mathrm{z}) + \beta(\mathrm{y}, \mathrm{z})$, линейность по первой переменной;
для любых элементов $x, y, z \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Заметим, что из последних двух свойств следует:

$$(\mathrm{x}, \alpha y + \beta \mathrm{z}) = \overline{\alpha}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) + \overline{\beta}(\mathrm{x}, \mathrm{z}).$$

Таким образом, скалярное произведение – это положительно определенная эрмитова полуторалинейная форма.

Приведем пример унитарного пространства**.** Рассмотрим комплексное n – мерное координатное пространство $\mathbb{C}^n$. Его элементами являются упорядоченные последовательности из n комплексных чисел: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, где x_i – координаты. Операции сложения элементов и умножения элемента на число вводятся по правилам:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\ \alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

Легко проверить, что введенные операции удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства. Стандартное скалярное произведение векторов x и y вводится следующим образом:

$$(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \dots + x_n\overline{y_n}.$$

Для удобства работы, будем записывать элементы x и y как вектор-столбцы:

$$x = (x_1, \dots, x_n)^{\text{т}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad y = (y_1, \dots, y_n)^{\text{т}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

В матричной форме записи скалярное произведение примет вид

$$(x, y) = x^T\overline{y} = (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} \overline{y}_1 \\ \vdots \\ \overline{y}_n \end{pmatrix}.$$

Норма (или длина) вектора $x \in \mathrm{V}$ определяется как и в евклидовом пространстве

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)}.$$

Все свойства нормы легко проверяются. Вектор x называется *нормированным*, если $\|x\| = 1$.

Остается справедливым неравенство Коши-Буняковского (в иностранной литературе его называют *неравенство Шварца*)

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|,$$

где слева стоит модуль скалярного произведения. Напомним, что модуль комплексного числа вычисляется по формуле

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Так как скалярное произведение является комплексным числом, в унитарном пространстве угол между векторами не определен. Однако, так же как и в евклидовом пространстве, два ненулевых вектора x и y называются *ортогональными*, если их скалярное произведение $(x, y) = 0$.

Пример 3. В комплексном координатном пространстве со стандартным скалярным произведением найти скалярное произведение векторов:

$$x = \begin{pmatrix} 1 + 2i \\ -1 + 2i \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 2 - i \\ 2 + i \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$(x, y) = x^T\overline{y} = (1 + 2i \quad -1 + 2i)\overline{\begin{pmatrix} 2 - i \\ 2 + i \end{pmatrix}} =$$

$$= (1+2i)(2+i) + (-1+2i)(2-i) =$$
$$= 2 + 4i + i - 2 - 2 + 4i + i + 2 = 10i.$$

§2. Матрица Грама

На случай унитарных пространств переносится понятие *матрицы Грама*. Определитель матрицы Грама, построенной по некоторой системе векторов неотрицателен и равен нулю тогда и только тогда, когда вектора линейно зависимы. Найдем формулу скалярного произведения через координаты векторов в произвольном базисе.

Выберем в унитарном пространстве U некоторый базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, тогда

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i \ \text{ и } \ y = \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j.$$

Запишем скалярное произведение:

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j\, e_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i\, \overline{y_j} (e_i, e_j).$$

Полагая $\gamma_{ij} = (e_i, e_j)$, получим

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} x_i\, \overline{y_j},$$

или в матричной форме записи

$$(x, y) = x^T \Gamma\, \overline{y},$$

где $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times n}$ – матрица Грама, построенная по системе векторов $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Пример . Найти скалярное произведение векторов унитарного пространства по их координатам в базисе $\{e_1, e_2\}$ и матрице Грама Γ этого базиса:

$$x = \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}, \quad \Gamma = \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. По вышеприведенной формуле находим:

$$(x, y) = (1+i \ \ i) \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= (1+i \ \ i) \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (1+i)(1+i) \\ (1-i) \cdot 1 + 1 \cdot (1+i) \end{pmatrix} =$$

$$= (1+i \ \ i) \begin{pmatrix} 3 + 1 + i + i - 1 \\ 1 - i + 1 + i \end{pmatrix} = (1+i \ \ i) \begin{pmatrix} 3+2i \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= (1+i)(3+2i) + 2i = 3 + 3i + 2i - 2 + 2i = 1 + 7i.$$

§3. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта

Определение. Линейной оболочкой элементов $u_1, u_2, \dots, u_n$ линейного комплексного пространства U называется множество $\mathrm{Lin}(u_1, u_2, \dots, u_n)$, составленное из всех конечных линейных комбинаций этих векторов, т.е. множество

$$\mathrm{Lin}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \left\{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, \text{ где } \lambda_i \in \mathbb{C} \right\}.$$

В n – мерном линейном комплексном пространстве U любая система $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ из n – линейно независимых элементов является базисом пространства U, т.е. для любого $x \in$ U существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, что

$$x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i. \qquad (1)$$

Формула (1) называется разложением элемента x по базису $\{u_i\}_{i=1}^n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – координатами элемента x в данном базисе. Понятно, что

$$\mathrm{U} = \mathrm{Lin}(u_1, u_2, \dots, u_n).$$

Теорема 1. В каждом конечном унитарном пространстве существует ортонормированный базис, т.е. система $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ попарно ортогональных векторов единичной длины, т.е. для любого $x \in$ U существуют такие числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$, что

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i,$$

при этом координаты равны скалярным произведениям вектора x на соответствующие базисные векторы

$$x_i = (x, e_i).$$

К любой линейно независимой системе векторов $\{u_i\}_{i=1}^n = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ унитарного пространства U можно также применить *процесс ортогонализации Грама-Шмидта,* в результате которого получается ортонормированная система $\{e_i\}_{i=1}^n = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Теорема 2. Пусть $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ – система линейно независимых векторов унитарного пространства U. Тогда существует ортонормированная система $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ такая, что:

$$\mathrm{Lin}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \mathrm{Lin}(e_1, e_2, \dots, e_n).$$

Процесс ортогонализации аналогичен евклидову случаю:

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{(u_1, u_1)}};$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\|g_2\|} = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}}, \qquad \text{где } g_2 = u_2 - (u_2, e_1) \cdot e_1;$$

$$e_3 = \frac{g_3}{\|g_3\|} = \frac{g_3}{\sqrt{(g_3, g_3)}}, \qquad \text{где } g_3 = u_3 - (u_3, e_1) \cdot e_1 - (u_3, e_2) \cdot e_2;$$

……………………………………………………………………………………………

$$e_n = \frac{g_n}{\|g_n\|} = \frac{g_n}{\sqrt{(g_n, g_n)}}, \qquad \text{где } g_n = u_n - \sum_{i=1}^{n-1} (u_n, e_i) \cdot e_i.$$

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что система векторов $\{e_i\}_{i=1}^{n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ является ортонормированной.

Пример. В линейной оболочке заданных векторов линейного комплексного пространства со стандартным скалярным произведением построить ортонормированный базис:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта. Получим

$$e_1 = \frac{u_1}{\sqrt{(u_1, u_1)}} = \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 1 + i \cdot (-i)}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$g_2 = u_2 - (u_2, e_1) \cdot e_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1 \cdot 1 - 1 \cdot i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

$$e_2 = \frac{g_2}{\sqrt{(g_2, g_2)}} = \frac{2}{\sqrt{(1+i)(1-i) + (1-i)(1+i)}} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + i \\ 1 - i \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вектор g_2 сразу был нормирован, так как

$$\|g_2\| = \sqrt{(g_2, g_2)} = \frac{1}{2} \sqrt{(1+i)(1-i) + (1-i)(1+i)} = 1.$$

§4. Операторы в унитарном пространстве

Определение 1. Пусть $\mathbb{A}$ – линейное преобразование (линейный оператор) конечномерного унитарного пространства U. Оператор $\mathbb{A}^*\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ называется *сопряженным* к линейному оператору $\mathbb{A}$, если для любых векторов $x, y \in \mathrm{U}$ выполняется равенство

$$(\mathbb{A}x, y) = (x, \mathbb{A}^* y).$$

Теорема 1. Для любого линейного преобразования $\mathbb{A}$ унитарного пространства U существует единственный сопряженный оператор $\mathbb{A}^*$, причем его матрица в базисе $\{e_k\}_{k=1}^n$ определяется по матрице A оператора $\mathbb{A}$ формулой

$$\mathrm{A}^* = \overline{\Gamma^{-1} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{т}} \cdot \Gamma}.$$

Если базис $\{e_k\}$ является ортонормированным, то матрица Грама единичная и вышеприведенная формула принимает более простой вид

$$\mathrm{A}^* = \overline{\mathrm{A}^{\mathrm{т}}}.$$

Отметим, что операция транспонирования матрицы с последующим комплексным сопряжением называется операцией *эрмитова сопряжения*.

Теорема 2. Сопряженный оператор $\mathbb{A}^*$ обладает следующими свойствами:

1) $\mathbb{A}^*$– сам является линейным оператором;
2) $(\mathbb{A} + \mathbb{B})^* = \mathbb{A}^* + \mathbb{B}^*$;
3) $(\alpha\mathbb{A})^* = \overline{\alpha}\mathbb{A}^*$;
4) $(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = \mathbb{B}^*\mathbb{A}^*$;
5) $(\mathbb{A}^*)^* = \mathbb{A}$.

Пример 1. Оператор $\mathbb{A}$ имеет в не ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$ матрицу

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & 2i \end{pmatrix}.$$

Матрица Грама имеет вид

$$\Gamma(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу сопряженного оператора $\mathbb{A}^*$ в базисе $\{e_1, e_2\}$:

$$\mathrm{A}^* = \overline{\Gamma^{-1} \cdot \mathrm{A}^{\mathrm{т}} \cdot \Gamma} = \overline{\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} i & 1 \\ 29 & -13i \end{pmatrix}.$$

Определение 2. Линейный оператор $\mathbb{A}\colon \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ называется эрмитовым или самосопряженным если справедливо равенство

$$\mathbb{A}^* = \mathbb{A}.$$

Матрица эрмитового оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет соотношению:

$$\mathrm{A} = \overline{\mathrm{A}^{\mathrm{т}}}.$$

В евклидовом пространстве, когда все элементы матрицы вещественные числа, такие матрицы мы называли симметричными.

Теорема 3. Матрица Грама унитарного пространства является эрмитовой.

Теорема 4. Собственные значения эрмитового оператора являются действительными числами.

Теорема 5. Собственные векторы эрмитового оператора, соответствующие различным собственным значениям, *ортогональны*.

В евклидовых пространствах переход от одного ортонормированного базиса к другому осуществляется с помощью ортогональных матриц. В унитарных пространствах данный переход реализуется с помощью унитарных матриц.

Определение 3. Линейный оператор $\mathbb{A}: \mathrm{U} \to \mathrm{U}$ называется *унитарным*, если для любых векторов $x, y \in \mathrm{U}$ выполняется равенство

$$(\mathbb{A}x, \mathbb{A}y) = (x, y).$$

Свойства матрицы унитарного оператора:

1) в ортонормированном базисе матрица удовлетворяет соотношению;

$$\mathrm{A}^{-1} = \overline{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}.$$

2) определитель матрицы – комплексное число, модуль которого равен 1;

3) столбцы матрицы образуют ортонормированный базис в унитарном пространстве.

Благодаря своим свойствам, унитарные матрицы занимают особое место в вычислительной алгебре. Среди них можно выделить два очень полезных для вычислительной алгебры подкласса: матрицы отражения и матрицы вращения.

Пример 2. Приведем пример унитарной матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{-1+i}{2} \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверим ее свойства. Вычислим определитель матрицы:

$$\det(A) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1+i}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1+i}{2} \cdot \frac{i}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{i}{2} \cdot \frac{1-i}{2} = \frac{i-1}{\sqrt{2}}.$$

$$|\det(A)| = 1.$$

Рассмотрим следующие векторы:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{-i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \\ \frac{1+i}{2} \\ \frac{i}{2} \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{-1+i}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверим, что система $\{v_1, v_2, v_3\}$ – ортонормированная. Действительно, векторы нормированы:

$$\|v_1\| = \sqrt{(v_1, v_1)} = \sqrt{\frac{i(-i) - i(i)}{2}} = 1,$$

$$\|v_2\| = \sqrt{(v_2, v_2)} = \sqrt{\frac{i(-i) + (1+i)(1-i) + i(-i)}{4}} = 1,$$

$$\|v_3\| = \sqrt{(v_3, v_3)} = \sqrt{\frac{1 + (-1+i)(-1-i) + 1}{4}} = 1.$$

Являются взаимно ортогональными:

$$(v_1, v_2) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-i}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-i}{2} = 0.$$

$$(v_1, v_3) = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$(v_2, v_3) = \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1+i}{2} \cdot \frac{-1-i}{2} + \frac{i}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

$$\overline{\mathrm{A}^{\mathrm{т}}} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{-i}{2} & \frac{1-i}{2} & \frac{-i}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1-i}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 19-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 448 с.

2. Винберг, Э. Б. Курс алгебры : учебник / Э. Б. Винберг. — 2-е изд. — Москва : МЦНМО, 2013. — 590 с.

3. Гантмахер, Ф. Р. Теория матриц : учебное пособие / Ф. Р. Гантмахер. – 5-е изд. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 560 с.

4. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия. / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – 3-е изд. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 464 с.

5. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. – 4-е изд. – Москва : МЦНМО, 2020 – Часть I : Основы алгебры – 2020. – 271 с.

6. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : учебник : в 3 частях / А. И. Кострикин. – 3-е изд., стер. – Москва : МЦНМО, 2020 – Часть II : Линейная алгебра – 2020. – 367 с.

7. Мальцев, А. И. Основы линейной алгебры : учебник / А. И. Мальцев. – 5-е изд.,стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2021. –480 с.

8. Прасолов, В. В. Задачи и теоремы линейной алгебры / В. В. Прасолов. – Москва : МЦНМО, 2016. – 576 с.

9. Сборник задач по алгебре : учебное пособие для вузов / И.В. Аржанцев и др. Под ред. А. И. Кострикина. –2-е изд., стер.– Москва: МЦНМО, 2015.–416 с.

10. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие для вузов / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – 9-е изд., стер.– Санкт-Петербург : Лань, 2022.– 496 с.

11. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра : учебное пособие / Е. Е. Тыртышников. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 480 с.

12. Шафаревич, И. Р. Линейная алгебра и геометрия : учебное пособие / И. Р. Шафаревич, А. О. Ремизов. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 512 с.

Никитенко Евгений Витальевич

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ МАТРИЦ

Учебное пособие для студентов всех форм обучения
направления «Информатика и вычислительная техника»

Подписано к печати 03.06.22. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 3,5. Тираж 15 экз. Заказ 221814. Рег. № 15.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.