МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания по выполнению
индивидуальных домашних заданий для студентов всех форм
обучения направления «Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2021

УДК 514.123.1

Никитенко Е.В. Аналитическая геометрия: методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий для студентов всех форм обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Е.В. Никитенко. – Рубцовск. 2021. – 27 с. [ЭР].

Настоящие указания содержат необходимые теоретические сведения и подробное решение одного варианта заданий. Приведен список из 25 вариантов индивидуальных заданий.

Рассмотрено и одобрено на
заседании кафедры ПМ РИИ
Протокол № 8 от 26.02.2021 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение индивидуальных домашних заданий по дисциплине «Аналитическая геометрия» является важной частью организации самостоятельной работы студентов, направленной на более углубленное изучение отдельных вопросов учебной дисциплины.

Домашние задания необходимы для систематизации и закрепления ранее полученных теоретических знаний и практических умений, а также помогают сформировать умения работать с дополнительной и справочной литературой.

Использование индивидуальных домашних заданий по различным темам способствует усвоению и получению необходимых знаний и навыков для дальнейшего их использования при освоении и изучении других дисциплин.

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения по направлению подготовки бакалавров 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника», изучающих дисциплину «Аналитическая геометрия».

Настоящие указания содержат необходимые теоретические сведения и подробное решение одного варианта заданий.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

1.1 Векторы и линейные операции над ними

1.1.1 Понятие вектора

Определение 1.1. Вектором называется направленный отрезок прямой. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или малыми латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}$, ...) (рис. 1.1).

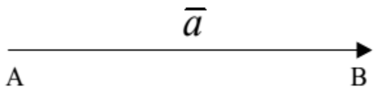

Рис. 1.1. Вектор AB

Определение 1.2. Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. *Длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$ или его *модулем* называется длина отрезка, образующего этот вектор. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Определение 1.3. *Связанным вектором* называется направленный отрезок, характеризующийся: длиной, направлением и точкой приложения. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к упругому телу.

Определение 1.4. Свободным вектором, соответствующим направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$, называется множество всех направленных отрезков, характеризующихся одинаковой длиной и направлением.

Мы будем работать со свободными векторами.

Определение 1.5. Вектор, у которого начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором или *нуль-вектором*. Обозначается нулевой вектор символом $\vec{0}$.

Определение 1.6. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют запись вида $\vec{a} \parallel \vec{b}$. При этом коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и противоположно направленными $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 1.7. Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины, т.е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Определение 1.8. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются компланарными, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

Определение 1.9. Множество свободных векторов на прямой, на плоскости и в пространстве мы будем обозначать V_1, V_2 и V_3 соответственно.

1.1.2 Операции сложения векторов и умножения вектора на число

Действие сложение векторов определим с помощью так называемого *правила треугольника*.

Определение 2.1. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов и обозначается $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.1).

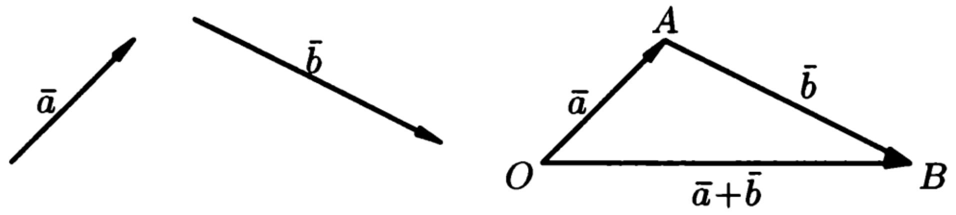

Рис. 2.1. Правило треугольника

Аналогичное правило сложения (правило многоугольника) действует и для нескольких векторов.

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, построив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах параллелограмм (рис. 2.2).

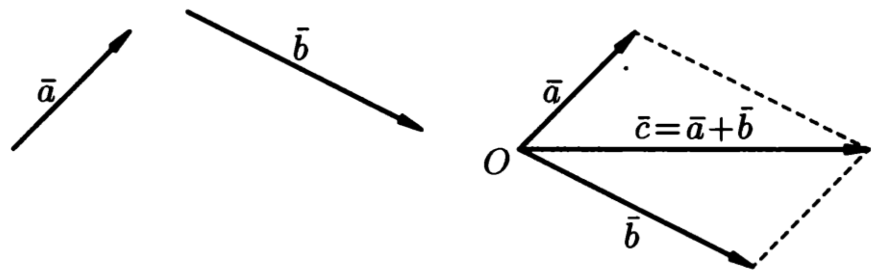

Рис. 2.2. Правило параллелограмма

Определение 2.2. Под разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Определение 2.3. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется новый вектор, обозначаемый $\lambda \cdot \vec{a}$, такой, что:

1) $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\lambda \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Теорема 2.1. Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность;

2) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}:\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность;

3) $\exists\ \vec{0}$, такой что $\forall\, \vec{a}:\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\forall \vec{a}\ \ \exists!\,(-\vec{a}):\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ – существование противоположного вектора;

5) $\forall \vec{a}, \vec{b}\quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}:\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;

6) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$;

7) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda\mu)\cdot\vec{a} = \lambda(\mu\vec{a})$;

8) $\forall\, \vec{a}:\ 1\cdot\vec{a} = \vec{a}$.

1.1.3. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 3.1. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется выражение следующего вида:

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots \lambda_n\vec{a}_n. \tag{3.1}$$

Определение 3.2. Линейная комбинация (3.1) называется *тривиальной,* если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Определение 3.3. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой,* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми,* т.е. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$..

1.1.4 Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Теорема 4.1. Два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Следствие. Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теорема 4.2. Любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми.

Следствие. Любой вектор на плоскости $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

Теорема 4.3. Три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Следствие. Для того чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Теорема 4.4. Любые четыре вектора в пространстве являются линейно зависимыми.

Следствие. Любой вектор $\vec{d}$ в пространстве V_3 можно единственным образом представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R.$$

1.1.5 Базис и координаты вектора

Определение 5.1. Пусть V – векторное пространство и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – некоторая система его векторов. Данная система называется *полной,* если любой вектор из V можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Определение 5.2. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется базисом пространства V, если она является линейно независимой и полной.

Теорема 5.1. Любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_2$ образуют базис в пространстве V_2, а любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V_3$ образуют базис в пространстве V_3.

Таким образом, любой вектор $\vec{a} \in V_3$ можно представить единственным образом в виде

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R. \quad (5.1)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а равенство (5.1) называется разложением вектора $\vec{a}$ по данному базису.

Выбор базиса в V_3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_3 и упорядоченными тройками $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ действительных чисел. Поэтому наряду с записью (5.1) пишут

$$\vec{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}.$$

Определение 5.3. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *ортонормированным, если* векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину.

1.1.6 Прямоугольная декартовая система координат

Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый прямоугольный базис, состоящий из ортонормированных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, называемых *ортами*. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Определение 6.1. Прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$ в пространстве V_3 называется совокупность некоторой точки O, называемой началом координат, и прямоугольного базиса. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении ортов базиса, называются координатными осями – *абсцисс, ординат и аппликат* соответственно (рис. 6.1).

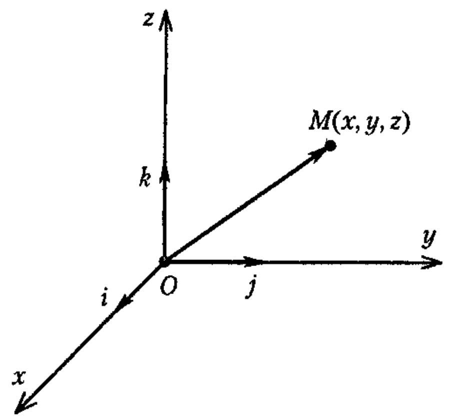

Рис. 6.1. Прямоугольная декартовая система координат в пространстве

Определение 6.2. Плоскости, проходящие через любые две координатные оси, называются *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oyz, Oxz соответственно.

Определение 6.3. *Прямоугольными координатами* произвольной точки M пространства V_3 называют координаты ее радиуса вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе и пишут $M(x, y, z)$, при этом x называется *абсциссой*, y – *ординатой*, а z – *аппликатой* точки M.

Пусть заданы две точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

1.1.7 Задача о делении отрезка в заданном отношении

Определение 7.1. Говорят, что точка $C \neq B$ делит невырожденный отрезок AB в отношении λ, если

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}, \ (\lambda \neq 0, \lambda \neq -1).$$

Рис. 7.1. Деление отрезка в отношении $\lambda = 2$.

Заметим, что если $\lambda < 0$, то точка C не принадлежит отрезку AB (рис 7.2).

Рис. 7.2. Деление отрезка в отношении $\lambda = -2$.

Теорема 7.1. Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат отрезок, концами которого являются точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты точки $C(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, делящей отрезок AB в отношении λ, определяются по следующим формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

1.2 Операции умножения векторов

1.2.1 Проекция вектора на ось и ее свойства

Пусть в пространстве задана некоторая ось *l*, то есть прямая, на которой отмечена фиксированная точка *O* и заданы направление и единица длины. Тогда каждой точке оси соответствует некоторое число.

Определение 1.1. *Проекцией точки A на ось l* называется число, соответствующее основанию перпендикуляра *AB*, опущенного из точки *A* на ось *l*.

Определение 1.2. *Проекцией вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на ось* l называется разность проекций конца вектора и его начала.

Проекция обозначается: $np_l \overrightarrow{AB}$.

Определение 1.3. *Углом* между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенными к общему началу, называется наименьший из углов, на который надо повернуть один из этих векторов так, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Обозначение: $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$.

Угол между векторами не зависит от направления поворота и принимает любое значение от 0 до π.

Свойства проекции:

1) $np_l(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

2) $np_l(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot np_l\vec{a}$;

3) $np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где φ– угол между вектором $\vec{a}$ и осью *l*.

Определение 1.4. *Проекцией вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) называется проекция вектора $\vec{a}$ на любую ось, параллельную вектору $\vec{b}$ и имеющую направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{b}$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается $np_{\vec{b}}\vec{a}$. Очевидно, что $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (разложенного по ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$) равны его проекциям на соответствующие координатные оси:

$$np_{OX}\vec{a} = a_x,\ np_{OY}\vec{a} = a_y,\ np_{OZ}\vec{a} = a_z.$$

1.2.2 Скалярное произведение двух векторов

Определение 2.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi. \qquad (2.1)$$

Иногда скалярное произведение обозначают $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Формулу (2.1) можно записать в виде:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \quad \text{или} \quad \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Определение 2.2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{a}) \geq 0$, причем $(\vec{a},\vec{a}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a} = \vec{0}$;

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right) = (\vec{a},\vec{c}) + \left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

4) $\left(\lambda \cdot \vec{a},\vec{b}\right) = \lambda \cdot \left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ и $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$. Тогда:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$;

2) $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a},\vec{a})} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

3) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$.

Определение 2.3. Косинусы углов, образованных вектором с осями координат, называются *направляющими косинусами вектора* и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},\ \cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

$$\cos\gamma = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}}) = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

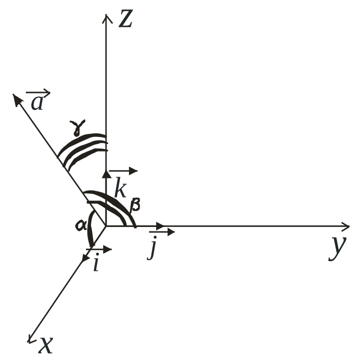

Рис. 2.1 Направляющие косинусы

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теорема 2.1 (Неравенство Коши-Буняковского)

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|.$$

1.2.3 Векторное произведение двух векторов

Определение 3.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется *правоориентированной*, или *правой (левой)*, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против хода часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке).

Определение 3.2. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\varphi$, где $\varphi-$ угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Иногда векторное произведение обозначают $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]-$ антикоммутативность;

2) $\left[\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}\right]=\lambda\cdot\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, где $\lambda-$число;

3) $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]-$ распределительное свойство.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Для нахождения площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, применяется формула $S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

1.2.4 Смешанное произведение векторов

Определение 4.1. *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$.

Иногда смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right)$, т.е. смешанное произведение не изменится при циклической перестановке векторов;

2) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$, т.е. смешанное произведение не изменится при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{a},\vec{c}\right],\vec{b}\right)=-\left(\left[\vec{c},\vec{b}\right],\vec{a}\right)$, т.е. при перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак;

4) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=0$, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) векторы компланарны (в частности, два из перемножаемых векторов коллинеарны).

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ и $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$. Тогда

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Объем $V_{пар}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем $V_{пир}$ образованной ими пирамиды:

$$V_{пар}=\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)\right|,\ V_{пир}=\frac{1}{6}V_{пар}=\frac{1}{6}\left|\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)\right|.$$

1.3 Геометрия прямых и плоскостей

1.3.1 Различные виды задания прямой на плоскости

Определение 1.1. Углом наклона φ прямой L к оси Ox называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг пересечения Ox и L в направлении против часовой стрелки до совмещения Ox с L (рис. 1.1).

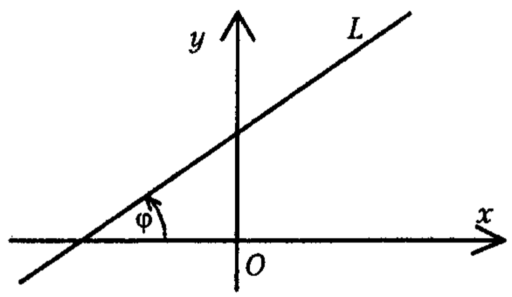

Рис. 1.1. Угол наклона

Определение 1.2. Уравнение прямой L с угловым коэффициентом имеет следующий вид:

$$y=kx+b,$$

где k - угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона φ прямой L к оси Ox, а b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Определение 1.3. Общим уравнением прямой L называется уравнение вида

$$Ax + By + D = 0,$$

где A, B и D - постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$. Заметим, что вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой L, т.е. $\vec{n}$ перпендикулярен прямой L.

Определение 1.4. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m)$, определяется *каноническими уравнениями:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{1.1}$$

Приравняв каждое из равных отношений в (1.1) параметру t и выразив x и y, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in R. \tag{1.2}$$

Определение 1.5. Система уравнений (1.2) называется *параметрическими уравнениями* прямой на плоскости.

Определение 1.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, имеет следующий вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

1.3.2 Расстояние от точки до прямой.

Теорема 2.1. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L, заданной уравнением $Ax + By + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

1.3.3 Взаимное расположение двух прямых на плоскости

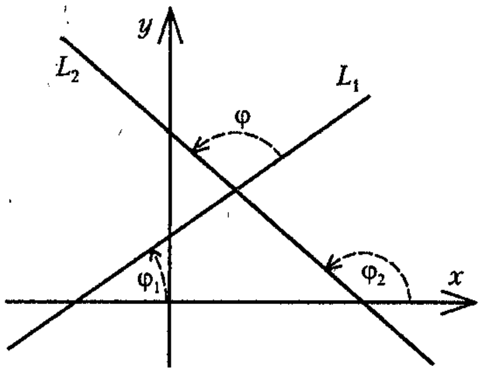

Рис 3.1

Определение 3.1. Под углом между прямыми L_1 и L_2 будем понимать угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Тогда величина угла φ между ними определяется из формулы

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Прямые L_1 и L_2 будут параллельны, если $k_1 = k_2$. Условие их перпендикулярности имеет вид: $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$.

1.3.4 Уравнение плоскости в пространстве

Определение 4.1. Уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, имеет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Определение 4.2. *Общее уравнение* плоскости P имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \text{ причем } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Определение 4.3. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости P.

Определение 4.4. Уравнение плоскости P, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.3.5. Расстояние от точки до плоскости

Теорема 5.1. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной уравнением $Ax + By + Cx + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

1.3.6 Различные виды задания прямой в пространстве

Определение 6.1. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m, n)$, который называется *направляющим*, определяется каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Определение 6.2. Система уравнений $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt,\ t \in R, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$ называется *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве.

Определение 6.3. Прямая может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой (система (6.1)). Эта система называется *общим* уравнением прямой. Направляющий вектор может быть найден по формуле

$$\vec{q} = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \right).$$

1.3.7 Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Определение 7.1. Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Величина угла между прямыми L_1 и L_2 определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых L_1 и L_2 сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

1.3.8 Взаимное расположение прямой и плоскости

Величина угла φ между прямой $L: \dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскостью $P:\ Ax + By + Cz + D = 0$ определяется из формулы

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой L и плоскости P имеет вид

$$(\vec{q}, \vec{n}) = A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n = 0.$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}$ и $\vec{n}$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой L и плоскости P удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

подставив их в уравнение плоскости.

2. ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНОГО ЗАДАНИЯ

Задача 1.

Применяя соответствующий математический аппарат, решите следующую задачу. Даны точки $A(1,2,3), B(2,3,2), C(3,5,7), D(0,4,5)$, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;
б) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;
в) площадь грани ABC;
г) уравнение плоскости ABC;
д) объем тетраэдра $ABCD$;
е) каноническое уравнение высоты OD;
ж) точку O пересечения высоты OD с плоскостью ABC;
з) канонические уравнения прямых AB и AC.

Решение.

а) Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB} = \{1,1,-1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{2,3,4\}$. Косинус угла между векторами находим по формуле:

$$\cos(\varphi) = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|} = \frac{1\cdot 2 + 1\cdot 3 - 1\cdot 4}{\sqrt{1+1+1}\sqrt{4+9+16}} = \frac{1}{\sqrt{87}}.$$

б) Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AD} = \{-1,2,2\}$. Для нахождения проекции вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$ воспользуемся формулой:

$$\text{пр}_{\overrightarrow{AB}}\overrightarrow{AD} = \frac{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{1\cdot(-1) + 1\cdot 2 - 1\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

в) Площадь грани ABC найдем, используя свойство векторного произведения:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{86}.$$

г) Для нахождения уравнения плоскости ABC воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 2-1 & 3-2 & 2-3 \\ 3-1 & 5-2 & 7-3 \end{vmatrix} = 7x - 6y + z + 2 = 0.$$

д) Объем тетраэдра $ABCD$ находим используя свойство смешанного произведения:

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right| = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|-17| = \frac{17}{6}.$$

е) Направляющий вектор прямой OD совпадает с нормальным вектором $\vec{n}$ плоскости ABC и имеет координаты $\vec{q} = \{7, -6,1\}$. Учитывая, что прямая OD проходит через точку $D(0,4,5)$, запишем канонические уравнения:

$$\frac{x}{7} = \frac{y-4}{-6} = \frac{z-5}{1}.$$

ж) Для нахождения координат точки $O(x_0, y_0, z_0)$ запишем параметрические уравнения прямой OD:

$$\begin{cases} x = 7t \\ y = -6t + 4 \\ z = t + 5 \end{cases}$$

Определим значение параметра t при котором происходит пересечение прямой и плоскости, подставляя выражения для x, y и z в уравнение плоскости:

$$49t - 6(-6t + 4) + t + 5 + 2 = 86t - 17 = 0 \quad \Longrightarrow t_0 = \frac{17}{86}.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра t_0, получим

$$x_0 = \frac{119}{86}, y_0 = \frac{121}{43}, z_0 = \frac{447}{86}.$$

з) Для нахождения канонических уравнений прямых AB и AC возьмем в качестве направляющих векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ соответственно:

$$AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

$$AC: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$$

Задача 2.

Применяя соответствующий математический аппарат, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что

$$\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}; \ \ \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b}; \ \ |\vec{a}| = 2; \ \ |\vec{b}| = 2; \ \ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{6}.$$

Решение.

Используя свойства векторного произведения, найдем

$$[\vec{p}, \vec{q}] = [2\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - 3\vec{b}] = 2[\vec{a}, \vec{a}] - 6[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{a}] - 3[\vec{b}, \vec{b}] = 7[\vec{b}, \vec{a}].$$

Вычисляем площадь параллелограмма:

$$S = |[\vec{p}, \vec{q}]| = 7|\vec{b}|\,|\vec{a}|\sin(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 14.$$

Задача 3.

Применяя соответствующий математический аппарат найти точку M',

а) симметричную точке M относительно прямой:

$$M(2,8,0), \qquad \frac{x-1}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-3}{-1};$$

б) симметричную точке M относительно плоскости:

$$M(3,-4,-6), \qquad x-y-4z-13=0.$$

Решение.

а) Составим уравнение плоскости P, проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой. Понятно, что в качестве нормаля можно взять направляющий вектор прямой, т.е. $\vec{n}=\vec{q}=\{-3,1,-1\}$. Уравнение плоскости имеет вид:

$$-3(x-2)+(y-8)-(z-0)=-3x+y-z-2=0.$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=-3t+1 \\ y=t-3. \\ z=-t+3 \end{cases}$$

Найдем координаты точки $M''(x_c,y_c,z_c)$ пересечения данной прямой и плоскости. Подставим выражения для x,y и z в уравнение плоскости:

$$-3(-3t+1)+(t-3)-(-t+3)-2=11t-11=0 \ \Rightarrow t_0=1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра $t_0=1$, получим

$$x_c=-2\,, y_c=-2\,, z_c=2.$$

Так как точка M'' является серединой отрезка MM', то воспользуемся формулами

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}, y_c=\frac{y_1+y_2}{2}, z_c=\frac{z_1+z_2}{2},$$

где $M(x_1,y_1,z_1), M'(x_2,y_2,z_2)$.

Следовательно, координаты искомой точки $M'(x_2,y_2,z_2)$ равны

$$x_2=2x_c-x_1=-6,$$

$$y_2=2y_c-y_1=-12,$$

$$z_2=2z_c-z_1=4.$$

б) Составим каноническое уравнение прямой, проходящей через точку M перпендикулярно заданной плоскости. Понятно, что в качестве направляющего вектора можно взять нормаль, т.е. $\vec{n}=\vec{q}=\{1,-1,-4\}$. Уравнение прямой имеет вид:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+6}{-4}.$$

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=t+3 \\ y=-t-4. \\ z=-4t-6 \end{cases}$$

Найдем координаты точки $M''(x_c, y_c, z_c)$ пересечения данной прямой и плоскости. Подставим выражения для x, y и z в уравнение плоскости:

$$(t+3)-(-t-4)-4(-4t-6)-13=18t+18=0 \quad \Rightarrow t_0=-1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение параметра $t_0=-1$, получим

$$x_{\text{c}}=2\,, y_{\text{c}}=-3\,, z_{\text{c}}=-2.$$

Так как точка M'' является серединой отрезка MM', то воспользуемся формулами

$$x_c=\frac{x_1+x_2}{2}, y_c=\frac{y_1+y_2}{2}, z_c=\frac{z_1+z_2}{2},$$

где $M(x_1, y_1, z_1), M'(x_2, y_2, z_2)$.

Следовательно, координаты искомой точки $M'(x_2, y_2, z_2)$ равны

$$x_2=2x_c-x_1=1,$$

$$y_2=2y_c-y_1=-2,$$

$$z_2=2z_c-z_1=2.$$

3. ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ

Задача 1.

Применяя соответствующий математический аппарат, решите следующую задачу. Даны точки A, B, C, D, являющиеся вершинами тетраэдра. Найти:

а) косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

б) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

в) площадь грани ABC;

г) уравнение плоскости ABC;

д) объем тетраэдра $ABCD$;

е) каноническое уравнение высоты OD;

ж) точку O пересечения высоты OD с плоскостью ABC;

з) канонические уравнения прямых AB и AC

1.1 $A(4,3,1)$, $B(2,7,5)$, $C(-4,-2,4)$, $D(2,-3,-5)$.

1.2 $A(-7,-5,6)$, $B(-2,5,-3)$, $C(3,-2,4)$, $D(1,2,2)$.

1.3 $A(1,3,1)$, $B(-1,4,6)$, $C(-2,-3,4)$, $D(3,4,-4)$.

1.4 $A(2,4,1)$, $B(-3,-2,-4)$, $C(3,5,-2)$, $D(4,2,-3)$.

1.5 $A(-5,-3,-4)$, $B(1, 4, 6)$, $C(3,2,-2)$, $D(8,-2,4)$.

1.6 $A(3,4,2)$, $B(-2,3,-5)$, $C(4,-3,6)$, $D(6,-5,3)$.

1.7 $A(-4, 6, 3)$, $B(3,-5,1)$, $C(2,6,-4)$, $D(2,4,-5)$.

1.8 $A(7,5,8)$, $B(-4,-5,3)$, $C(2,-3,5)$, $D(5,1,-4)$.

1.9 $A(3,-2, 6)$, $B(-6,-2, 3)$, $C(1,1,-4)$, $D(4,6,-7)$.

1.10 $A(-5,-4,-3)$, $B(7,3,1)$, $C(6,-2,0)$, $D(3,2,-7)$.

1.11 $A(3,-5,-2)$, $B(-4,2,3)$, $C(1,5,7)$, $D(-2,-4,5)$.

1.12 $A(7,4,9)$, $B(1,-2,3)$, $C(-5,-3,0)$, $D(1,-3,4)$.

1.13 $A(-4,-7,-3)$, $B(-4,-5,-7)$, $C(2,-3,3)$, $D(3,2,1)$.

1.14 $A(-4,-5,3)$, $B(3, 1,2)$, $C(5,7,-6)$, $D(6,-1,5)$.

1.15 $A(5,2,4)$, $B(-3,5,7)$, $C(1,-5,8)$, $D(9,-3,5)$.

1.16 $A(-6, 4, 5)$, $B(5,-7,3)$, $C(4,2,-8)$, $D(2,8,-3)$.

1.17 $A(5, 3, 6)$, $B(-3,-4,1)$, $C(5,-6,8)$, $D(4,0,-3)$.

1.18 $A(5,-4, 4)$, $B(-4,6,5)$, $C(3,2,-7)$, $D(6,2,-9)$.

1.19 $A(-7,-6,-5)$, $B(5,1,-3)$, $C(8,-4,0)$, $D(3,4,-7)$.

1.20 $A(7,-1,-2)$, $B(1,7,8)$, $C(3,7,9)$, $D(-3,-5,2)$.

1.21 $A(5,2\ \ ,7),\ B(7,-6,-9), C(-7,-6,3), D(1,-5,2)$.

1.22 $A(-2,-5,-1),\ B(-6,-7,-9), C(4,-5,1), D(2,1,4)$.

1.23 $A(-6,-3,-5),\ B(5,1,7), C(3,5,-1), D(4,-2,9)$.

1.24 $A(7,4,2),\ B(-5,3,-9), C(1,-5,3), D(7,-9,1)$.

1.25 $A(-8,\ 2,\ 7\ ),\ B(3,-5,9), C(2,4,-6), D(4,6,-5)$.

Задача 2.

Применяя соответствующий математический аппарат, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{p}$ и $\vec{q}$, если известно, что

2.1 $\vec{p} = \vec{a} - 3\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b};\ |\vec{a}| = \frac{1}{5};\ |\vec{b}| = 1;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

2.2 $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b};\ |\vec{a}| = 4;\ |\vec{b}| = \frac{1}{2};\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$.

2.3 $\vec{p} = 3\vec{a} - 2\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 5\vec{b};\ |\vec{a}| = 4;\ |\vec{b}| = \frac{1}{2};\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{5\pi}{6}$.

2.4 $\vec{p} = \vec{a} - 2\vec{b};\ \vec{q} = 2\vec{a} + \vec{b};\ |\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 3;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{3\pi}{4}$.

2.5 $\vec{p} = \vec{a} + 3\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b};\ |\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 3;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2.6 $\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b};\ |\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 2;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

2.7 $\vec{p} = 4\vec{a} + \vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} - \vec{b};\ |\vec{a}| = 7;\ |\vec{b}| = 2;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

2.8 $\vec{p} = \vec{a} - 4\vec{b};\ \vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b};\ |\vec{a}| = 1;\ |\vec{b}| = 2;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$.

2.9 $\vec{p} = \vec{a} + 4\vec{b};\ \vec{q} = 2\vec{a} - \vec{b};\ |\vec{a}| = 7;\ |\vec{b}| = 2;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2.10 $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} - \vec{b};\ |\vec{a}| = 10;\ |\vec{b}| = 1;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$.

2.11 $\vec{p} = 4\vec{a} - \vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b};\ |\vec{a}| = 5;\ |\vec{b}| = 4;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

2.12 $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b};\ |\vec{a}| = 6;\ |\vec{b}| = 7;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2.13 $\vec{p} = 3\vec{a} - \vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b};\ |\vec{a}| = 3;\ |\vec{b}| = 4;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.

2.14 $\vec{p} = 2\vec{a} + 3\vec{b};\ \vec{q} = \vec{a} - \vec{b};\ |\vec{a}| = 2;\ |\vec{b}| = 3;\ (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

2.15 $\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b};\ \ \vec{q} = 3\vec{a} + \vec{b};\ \ |\vec{a}| = 4;\ \ |\vec{b}| = 1;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}.$

2.16 $\vec{p} = 5\vec{a} + \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 1;\ \ |\vec{b}| = 2;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}.$

2.17 $\vec{p} = 7\vec{a} - 2\vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b};\ \ |\vec{a}| = \dfrac{1}{2};\ \ |\vec{b}| = 2;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}.$

2.18 $\vec{p} = 6\vec{a} - \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} + \vec{b};\ \ |\vec{a}| = 3;\ \ |\vec{b}| = 4;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}.$

2.19 $\vec{p} = 10\vec{a} + \vec{b};\ \ \vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 4;\ \ |\vec{b}| = 1;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{6}.$

2.20 $\vec{p} = 6\vec{a} - \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 8;\ \ |\vec{b}| = \dfrac{1}{2};\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}.$

2.21 $\vec{p} = 3\vec{a} + 4\vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} - \vec{b};\ \ |\vec{a}| = \dfrac{5}{2};\ \ |\vec{b}| = 2;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{2}.$

2.22 $\vec{p} = \vec{a} - 3\vec{b};\ \ \vec{q} = 3\vec{a} - \vec{b};\ \ |\vec{a}| = 3;\ \ |\vec{b}| = 5;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}.$

2.23 $\vec{p} = 3\vec{a} + \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} - 3\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 7;\ \ |\vec{b}| = 2;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}.$

2.24 $\vec{p} = 5\vec{a} - \vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} + \vec{b};\ \ |\vec{a}| = 5;\ \ |\vec{b}| = 3;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{5\pi}{6}.$

2.25 $\vec{p} = 3\vec{a} - 4\vec{b};\ \ \vec{q} = \vec{a} + 3\vec{b};\ \ |\vec{a}| = 2;\ \ |\vec{b}| = 3;\ \ (\vec{a}\ \hat{}\ \vec{b}) = \dfrac{\pi}{4}.$

Задача 3.

Применяя соответствующий математический аппарат найти точку M', симметричную точке M относительно прямой или плоскости:

3.1 $M(1, 1, 1);\ \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-2} = \dfrac{z-1}{1}.$

3.2 $M(1, 2, 3);\ \dfrac{x-0.5}{1} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z-1{,}5}{1}.$

3.3 $M(1, 0, -1);\ \dfrac{x-3{,}5}{2} = \dfrac{y-1{,}5}{2} = \dfrac{z}{0}.$

3.4 $M(2, 1, 0);\ \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{1}.$

3.5 $M(2, 1, 0);\ \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y+1{,}5}{-1} = \dfrac{z+0{,}5}{1}.$

3.6 $M(-2, -3, 0);\ \dfrac{x+0{,}5}{2} = \dfrac{y+1{,}5}{0} = \dfrac{z-0{,}5}{1}.$

3.7 $M(0,2,1)$; $\dfrac{x-1{,}5}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$.

3.8 $M(3,-3,1)$; $\dfrac{x-6}{5}=\dfrac{y-3{,}5}{4}=\dfrac{z+0{,}5}{0}$.

3.9 $M(3,3,3)$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-1{,}5}{0}=\dfrac{z-3}{1}$.

3.10 $M(-1,2,0)$; $\dfrac{x+0{,}5}{1}=\dfrac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\dfrac{z-2}{2}$.

3.11 $M(2,-2,-3)$; $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+0{,}5}{0}=\dfrac{z+1{,}5}{0}$.

3.12 $M(-1,0,1)$; $\dfrac{x+0{,}5}{0}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z-4}{2}$.

3.13 $M(0,-3,-2)$; $\dfrac{x-0{,}5}{1}=\dfrac{y+1{,}5}{-1}=\dfrac{z-1{,}5}{1}$.

3.14 $M(1,0,1)$; $4x+6y+4z-25=0$.

3.15 $M(-1,0,-1)$; $2x+6y-2z+11=0$.

3.16 $M(0,2,1)$; $2x+4y-3=0$.

3.17 $M(2,1,0)$; $y+z+2=0$.

3.18 $M(-1,2,0)$; $4x-5y-z-7=0$.

3.19 $M(2,-1,1)$; $x-y+2z-2=0$.

3.20 $M(1,1,1)$; $x+4y+3z+5=0$.

3.21 $M(1,2,3)$; $2x+10y+10z-1=0$.

3.22 $M(0,-3,-2)$; $2x+10y+10z-1=0$.

3.23 $M(1,0,-1)$; $2y+4z-1=0$.

3.24 $M(3,-3,-1)$; $2x-4y-4z-13=0$.

3.25 $M(-2,3,0)$; $x+5y+4=0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры; учебник / Д. В. Беклемишев. – 16-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2019. – 448 с.

2. Карчевский, Е. М. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии : учебное пособие / Е. М. Карчевский, М. М. Карчевский. – 2-е изд., перераб. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 424 с.

3. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре : учебное пособие / Л. А. Беклемишева, Д. В. Беклемишев, А. Ю. Петрович, И. А. Чубаров. – 6-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2018. – 496 с.