МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

Е.В. Никитенко

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие
для студентов дневной формы обучения направления
«Информатика и вычислительная техника»

Рубцовск 2016

УДК 512.64, 514.123

Никитенко Е.В. Алгебра и геометрия. Учебное пособие для студентов дневной формы обучения направления «Информатика и вычислительная техника» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2016. – 57 с.

Учебное пособие посвящено изложению основ линейной алгебры и аналитической геометрии. Рассмотрены основные понятия, определения и свойства объектов линейной алгебры и аналитической геометрии, приведены формулировки основных утверждений.

Рассмотрено и одобрено на
заседании НМС РИИ
Протокол № 8 от 22.12. 2016 г.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Г.В. Демиденко

СОДЕРЖАНИЕ

РАЗДЕЛ 1. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ И МАТРИЦЫ

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Матрицы и основные операции над ними

Определение 1.1. *Матрицей* A размеров $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n}.$$

Числа a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$, составляющие матрицу, мы будем называть *элементами матрицы*. Первый индекс элемента указывает номер строки, второй – номер столбца, на пересечении которых стоит этот элемент.

Определение 1.2. Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$. При этом число $m = n$ называется порядком матрицы. У квадратной матрицы можно выделить *главную* и *побочную диагонали*, $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ и $a_{n1}a_{(n-1)2}\ldots a_{1n}$ соответственно.

Определение 1.3. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже или выше главной диагонали, равны нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

верхняя треугольная и нижняя треугольная матрицы соответственно.

Определение 1.4. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение 1.5. Диагональная матрица, у которой все $a_{ii} = 1$, называется *единичной* и обозначается E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.6. Любая матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается O:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение 1.7. Две матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и равны их элементы, стоящие на одинаковых местах.

Линейные действия с матрицами

Определение 1.8. Суммой $A+B$ двух матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, где $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Определение 1.9. Разностью $A-B$ двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ и $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, где $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Замечание. Из определений 1.8 и 1.9 следует, что действия сложения и вычитания можно производить только над теми матрицами, у которых одинаковое число строк и одинаковое число столбцов.

Определение 1.10. Произведением $\lambda\cdot A$ матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на число λ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, у которой $c_{ij}=\lambda\cdot a_{ij}$.

Свойства сложения матриц и умножения их на число:

1) $A+B=B+A$ коммутативность сложения;

2) $(A+B)+C=A+(B+C)$ ассоциативность сложения;

3) $\lambda\cdot(\mu A)=(\lambda\cdot\mu)A$ ассоциативность умножения на число;

4) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ дистрибутивность умножения на число;

5) $\lambda\cdot(A+B)=\lambda A+\mu A$ дистрибутивность умножения на число, где λ,μ- числа.

Определение 1.11. Произведением $A\cdot B$ матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ на матрицу $B=(b_{ij})_{n\times p}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times p}$, где

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj},$$

т.е. элемент c_{ij} равен сумме попарных произведений соответствующих элементов $i-$ й строки матрицы A и $j-$ го столбца матрицы B.

Замечание. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Свойства умножения матриц:

1) некоммутативно, т.е. в общем случае $AB \neq BA$;

2) ассоциативно $(AB)C = A(BC)$;

3) дистрибутивно $(A+B)C = AC + BC$;

4) для любой матрицы A справедливо $AE = EA = A$, где E - единичная матрица подходящего размера.

Определение 1.12. Транспонированием матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ называется замена строк данной матрицы на столбцы с сохранением порядка их следования. Полученная матрица обозначается $A^T=(a'_{ji})_{n\times m}$, т.е. $a'_{ji}=a_{ij}$. Так, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства операции транспонирования матрицы:

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;

3) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

4) $(AB)^T = B^T A^T$.

§2. Определители и их свойства

Для любой квадратной матрицы $n-$ го порядка A существует специальная числовая характеристика, называемая *определителем (или детерминантом)* матрицы A и обозначаемая как $\det A$ (или $|A|$, или Δ).

Определение 2.1. Определителем квадратной матрицы 1 – го порядка $A=(a_{11})$ называется число $\det A = a_{11}$.

Определение 2.2. Определителем квадратной матрицы 2 – го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

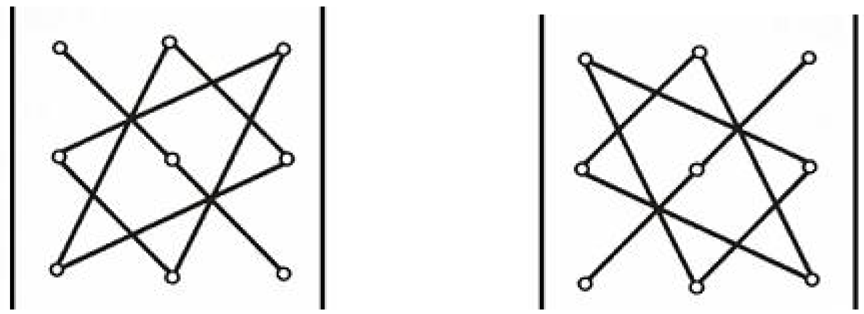
Определение 2.3. Определителем квадратной матрицы 3 – го порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ называется число $\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

В дальнейшем, если речь не идет об определители конкретной матрицы, мы будем просто говорить определитель порядка n.

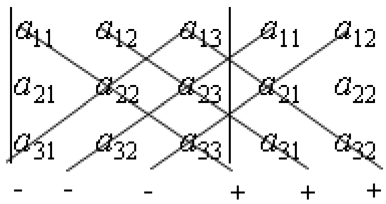
При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться либо *правилом треугольников,* изображенном на следующей схеме:

«+» «–»



,

либо правилом дополнения:



.

Теперь сформулируем несколько вспомогательных определений, чтобы можно было сформулировать понятие определителя n–го порядка.

Определение 2.4. Рассмотрим множество натуральных чисел $\{1,2,\ldots,n\}$. Последовательная их запись в определенном порядке без повторений называется *перестановкой* и обозначается $\{k_1,k_2,\ldots,k_n\}$. Полное число таких различных перестановок равно $n!$.

Определение 2.5. Будем говорить, что числа k_i и k_j образуют в перестановке *инверсию,* если при $i<j$ имеет место $k_i>k_j$, т.е. большее число этой пары предшествует меньшему. Число пар, образующих инверсию, называют *числом инверсий перестановки.*

Определение 2.6. Определителем квадратной матрицы A порядка n называется число $\det A$, получаемое по формуле

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\{k_1,\ldots,k_n\}} (-1)^s a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n} ,$$

где $\{k_1, k_2, \ldots, k_n\}$ - всевозможные различные перестановки, образованные из номеров столбцов матрицы A, а s – число инверсий в данной перестановке.

Определение 2.7. Квадратную матрицу, определитель которой равен нулю, называют *вырожденной (или особой)*, в противном случае — *невырожденной (или не особой)*.

Определение 2.8. Минором M_{ij}, соответствующим элементу a_{ij} определителя $n-$ го порядка, называется определитель $(n-1)-$ го порядка, получающийся из исходного вычеркиванием i –й строки и j – го столбца.

Определение 2.9. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} исходного определителя называется минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Теорема 2.1. Основные свойства определителей:

1. Определитель не меняется при транспонировании, т.е. $|A| = |A^T|$.

2. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет лишь знак.

3. Если все элементы некоторой строки (или столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.

4. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (или столбца), равен нулю.

5. Общий множитель всех элементов некоторой строки (или столбца) можно вынести за знак определителя.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (или столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число.

7. Определитель не изменится, если к некоторой строке (или столбцу) прибавить любую линейную комбинацию других строк (или столбцов).

8. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов ее главной диагонали.

9. Если в определителе каждый элемент строки (или столбца) представим в виде суммы двух слагаемых, то такой определитель равен сумме двух определителей, в первом из которых в качестве элементов данной строки используются первые слагаемые, во втором - вторые.

10. Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя Δ на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т.е.

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{ (или } \Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}\text{)}.$$

Данные соотношения называются соответственно *разложением определителя по элементам* i *–й строки* и *разложением определителя по элементам* j *– го столбца*.

11. Сумма произведений элементов любой строки столбца (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (или столбца) равна нулю.

§3. Обратная матрица

Определение 3.1. Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к матрице A, если $AA^{-1} = A^{-1}A = E$, где E – единичная матрица.

Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $|A| \neq 0$.

Обратная матрица определяется по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Для невырожденных матриц справедливы следующие соотношения:

1) $(A^{-1})^{-1} = A$;

2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

§4. Ранг матрицы

Определение 4.1. Минором k-го порядка матрицы A размеров $m \times n$ (не обязательно квадратной) называется определитель с элементами, лежащими на пересечении k любых строк и k любых столбцов матрицы A (k не превосходит наименьшего из чисел m и n).

Определение 4.2. Наивысший из порядков, отличных от нуля миноров матрицы A, называется рангом матрицы. Для ранга матрицы приняты следующие обозначения: $rank(A)$, $rang(A)$ или $r(A)$.

Определение 4.3. Любой ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется базисным минором.

Определение 4.4. Столбцы (строки) матрицы, входящие в матрицу базисного минора, называются базисными.

Определение 4.5. Угловым минором порядка k матрицы A называется определитель k-го порядка с элементами, лежащими на пересечении k первых строк и k первых столбцов матрицы A.

Под элементарными преобразованиями матрицы понимается:

1) перестановка двух строк (или столбцов) матрицы;

2) умножение строки (или столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (или столбцу) другой, умноженной на любое число.

Теорема 4.1. Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

Определение 4.6. Трапециевидной (частный случай ступенчатой) называется матрица следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0, i = 1, 2, \ldots, r$.

Теорема 4.2. Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований строк и перестановками столбцов может быть приведена к трапециевидной форме.

Теорема 4.3. В трапециевидной матрице число ненулевых строк равно ее рангу.

ГЛАВА 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§1. Основные определения

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{1.1}$$

где числа a_{ij} $(i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n)$ называются *коэффициентами системы*, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – *свободными членами (или правыми частями)* системы уравнений.

Определение 1.1. *Решением системы* (1.1) называется упорядоченный набор чисел $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$, такой, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Определение 1.2. Система уравнений (1.1) называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае она называется *несовместной*.

Определение 1.3. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если она имеет более одного решения.

Определение 1.4. Две системы уравнений называются *эквивалентными,* если множества их решений совпадают, т.е. если каждое решение первой из них является решением второй и наоборот.

Определение 1.5. Если $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0$, то система (1.1) называется *однородной,* в противном случае *неоднородной*.

Заметим, что однородная система уравнений всегда совместна. Одно из ее решений очевидно: это так называемое нулевое, или тривиальное, решение

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Систему (1.1) можно записать в матричной форме:

$$AX = B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ – *матрица коэффициентов системы,*

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .. \\ x_n \end{pmatrix}$ *– столбец неизвестных и* $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .. \\ b_m \end{pmatrix}$ *– столбец свободных членов.*

Определение 1.6. Матрица A|B= $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$ называется *расширенной матрицей системы* (1.1).

Теорема 1.1 (Кронекера–Капелли). Система линейных уравнений (1.1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы:

$$rank(A) = rank(A \mid B).$$

При этом возможны три варианта:

1) если $rank(A) < rank(A \mid B)$, то система несовместна.

2) если $rank(A) = rank(A \mid B) = n$ (где n – число неизвестных), то система совместна и определенна.

3) если $rank(A) = rank(A \mid B) < n$, то система совместна и неопределенна.

§2. Матричный метод и формулы Крамера

Рассмотрим систему из n линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме:

$$AX = B, \qquad (2.1)$$

где $A = (a_{ij})_{n \times n}$ – матрица коэффициентов системы, $X = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T$ – столбец неизвестных и $B = (b_1\ b_2 \ldots b_n)^T$ – столбец свободных членов.

Теорема 2.1. Если $\det A \neq 0$, то система (2.1) совместна и определена, ее решение задается формулой: $X = A^{-1} \cdot B$.

Отсюда непосредственно следует теорема Крамера.

Теорема 2.2 (Крамер). Если $\Delta = \det A \neq 0$, то система (2.1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формулам:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, .., n),$$

где Δ_i – определитель, получающийся из Δ заменой i – го столбца на столбец свободных членов.

§3. Метод Гаусса

Рассмотренные ранее методы можно применять при решении только тех систем, в которых число уравнений совпадает с числом неизвестных, причём определитель системы должен быть отличен от нуля. Метод же Гаусса является более универсальным и может быть применен для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

С помощью элементарных преобразований над строками и перестановками столбцов (кроме последнего столбца) приводим расширенную матрицу системы $A|B$ к трапециевидному виду $A'|B'$:

$$A'|B'=\left(\begin{array}{ccccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1r} & a'_{1r+1} & \cdots & a'_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{21} & a'_{2r+1} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{rr} & a'_{rr+1} & \cdots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b'_m \end{array}\right)$$

где $a'_{ii}\neq 0,\ i=1,2,\ldots,r$.

Полученной расширенной матрице $A'|B'$ соответствует система линейных уравнений, эквивалентная системе (1.1). При этом $rank(A')=rank(A)$ и $rank(A'|B')=rank(A|B)$, и утверждения о том, что полученная система совместна (несовместна) и определенна (неопределенна), верны и для системы (1.1).

Возможны три варианта:

1) Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1},\ldots,b'_m$ не равно нулю, то $rank(A'|B')>rank(A')$ и, следовательно, система несовместна.

2) Если $b'_{r+1}=\ldots b'_m=0$ и $rank(A'|B')=rank(A')=n$, то система совместна и определенна. Из последнего уравнения $a'_{nn}\cdot x_{k_n}=b'_n$ находим неизвестную x_{k_n} , подставляем в предыдущее уравнение. Находим из него $x_{k_{n-1}}$ и т.д.

Замечание. Неизвестная x_{k_n} соответствует x_n, если мы не переставляли n-й столбец.

3) Если $b'_{r+1}=\ldots b'_m=0$ и $rank(A'|B')=rank(A')<n$, то система совместна и неопределенна. Объявляем первые r неизвестных $x_{k_1},x_{k_2},\ldots,x_{k_r}$ *базисными,* а остальные $n-r$ неизвестных $x_{k_{r+1}},\ldots,x_{k_n}$ – *свободными*. Переносим в правую часть свободные неизвестные и решаем систему относительно базисных

неизвестных. Записываем *общее решение* системы (1.1), т.е. выражения базисных неизвестных через свободные. При этом следим за тем, каким искомым неизвестным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответствуют найденные $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}, x_{k_{r+1}}, \ldots, x_{k_n}$.

Все *частные решения* системы (1.1) получаются из общего решения присвоением каких-то значений свободным неизвестным.

РАЗДЕЛ 2. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

ГЛАВА 1. ВЕКТОРЫ И ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

§1. Понятие вектора

Определение 1.1. Вектором называется направленный отрезок прямой. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или малыми латинскими буквами: $\vec{a}, \vec{b}$, ...) (рис. 1.1).

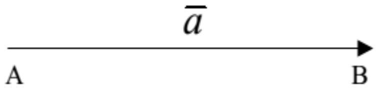


Рис. 1.1. Вектор AB

Определение 1.2. Пусть выбрана какая-либо система измерения длин прямолинейных отрезков, иначе говоря, масштаб. *Длиной* вектора $\overrightarrow{AB}$ или его *модулем* называется длина отрезка, образующего этот вектор. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $|\vec{a}|$.

Определение 1.3. *Связанным вектором* называется направленный отрезок, характеризующийся: длиной, направлением и точкой приложения. Примером связанного вектора может служить сила, приложенная к упругому телу.

Определение 1.4. Свободным вектором, соответствующим направленному отрезку $\overrightarrow{AB}$, называется множество всех направленных отрезков, характеризующихся одинаковой длиной и направлением.

Мы будем работать со свободными векторами.

Определение 1.5. Вектор, у которого начало и конец которого совпадают, называется *нулевым* вектором или *нуль-вектором*. Обозначается нулевой вектор символом $\vec{0}$.

Определение 1.6. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Для обозначения коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ используют запись вида $\vec{a} \,||\, \vec{b}$. При этом коллинеарные векторы могут быть одинаково направлены $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и противоположно направленными $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Определение 1.7. Два вектора называются равными, если они лежат на параллельных прямых (или на одной прямой), одинаково направлены и имеют равные длины, т.е. $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = \left|\vec{b}\right|$.

Определение 1.8. Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называются компланарными, если они расположены на прямых, параллельных одной и той же плоскости.

Определение 1.9. Множество свободных векторов на прямой, на плоскости и в пространстве мы будем обозначать V_1, V_2 и V_3 соответственно.

§2. Операции сложения векторов и умножения вектора на число

Действие сложение векторов определим с помощью так называемого *правила треугольника*.

Определение 2.1. Пусть даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Приложим вектор $\vec{b}$ к концу вектора $\vec{a}$. Тогда вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, называется *суммой* векторов и обозначается $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 2.1).

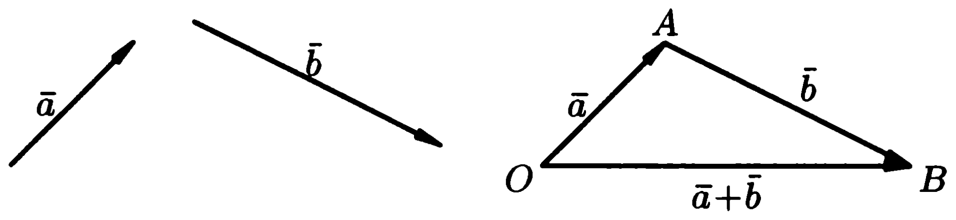


Рис. 2.1. Правило треугольника

Аналогичное правило сложения (правило многоугольника) действует и для нескольких векторов.

Вектор $\vec{a} + \vec{b}$ можно также получить по *правилу параллелограмма*, построив на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах параллелограмм (рис. 2.2).

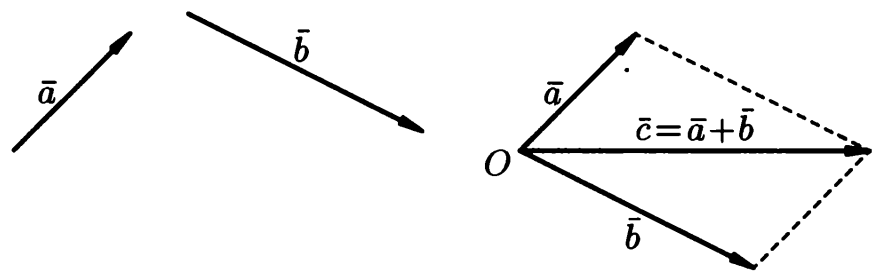


Рис. 2.2. Правило параллелограмма

Определение 2.2. Под разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимается вектор $\vec{c}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$. Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разность существует и выражается формулой

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Определение 2.3. Произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число λ называется новый вектор, обозначаемый $\lambda \cdot \vec{a}$, такой, что:

1) $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

2) вектор $\lambda \cdot \vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;

3) векторы $\lambda \cdot \vec{a}$ и $\vec{a}$ одинаково направлены при $\lambda > 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Теорема 2.1. Операции сложения векторов и умножения вектора на число обладают следующими свойствами:

1) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ – коммутативность;

2) $\forall\, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}:\ (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ – ассоциативность;

3) $\exists\ \vec{0}$, такой что $\forall\, \vec{a}:\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

4) $\forall \vec{a}\ \ \exists!\,(-\vec{a}):\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ – существование противоположного вектора;

5) $\forall \vec{a}, \vec{b}\quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}:\ \lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;

6) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;

7) $\forall \vec{a}\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda \mu) \cdot \vec{a} = \lambda(\mu \vec{a})$;

8) $\forall\, \vec{a}:\ 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

§3. Линейная зависимость и независимость векторов

Определение 3.1. Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ с действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется выражение следующего вида:

$$\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots \lambda_n \vec{a}_n. \tag{3.1}$$

Определение 3.2. Линейная комбинация (3.1) называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Определение 3.3. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой*, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому вектору. В противном случае векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называются *линейно независимыми,* т.е. $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0.$.

§4. Геометрический смысл линейной зависимости векторов

Теорема 4.1. Два произвольных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Следствие. Для того чтобы два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теорема 4.2. Любые три вектора на плоскости являются линейно зависимыми.

Следствие. Любой вектор на плоскости $\vec{c}$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2 \in R.$$

Теорема 4.3. Три произвольных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Следствие. Для того чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были линейно независимыми, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Теорема 4.4. Любые четыре вектора в пространстве являются линейно зависимыми.

Следствие. Любой вектор $\vec{d}$ в пространстве V_3 можно единственным образом представить в виде линейной комбинации трех некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R.$$

§5. Базис и координаты вектора

Определение 5.1. Пусть V – векторное пространство и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ – некоторая система его векторов. Данная система называется *полной,* если любой вектор из V можно представить в виде линейной комбинации векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Определение 5.2. Система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется базисом пространства V, если она является линейно независимой и полной.

Теорема 5.1. Любые два неколлинеарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2 \in V_2$ образуют базис в пространстве V_2, а любые три некомпланарных вектора $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in V_3$ образуют базис в пространстве V_3.

Таким образом, любой вектор $\vec{a} \in V_3$ можно представить единственным образом в виде

$$\vec{a} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + \lambda_3\vec{e}_3, \text{ где } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in R. \quad (5.1)$$

Числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а равенство (5.1) называется разложением вектора $\vec{a}$ по данному базису.

Выбор базиса в V_3 устанавливает взаимно однозначное соответствие между векторами из V_3 и упорядоченными тройками $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ действительных чисел. Поэтому наряду с записью (5.1) пишут

$$\vec{a} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Определение 5.3. Базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ называется *ортонормированным, если* векторы попарно перпендикулярны и имеют единичную длину.

§6. Прямоугольная декартовая система координат

Особую роль в аналитической геометрии играет так называемый прямоугольный базис, состоящий из ортонормированных векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, называемых *ортами*. С прямоугольным базисом связано понятие о прямоугольной декартовой системе координат.

Определение 6.1. Прямоугольной декартовой системой координат $Oxyz$ в пространстве V_3 называется совокупность некоторой точки O, называемой началом координат, и прямоугольного базиса. Прямые Ox, Oy, Oz, проходящие через начало координат в направлении ортов базиса, называются координатными осями – *абсцисс, ординат и аппликат* соответственно (рис. 6.1).

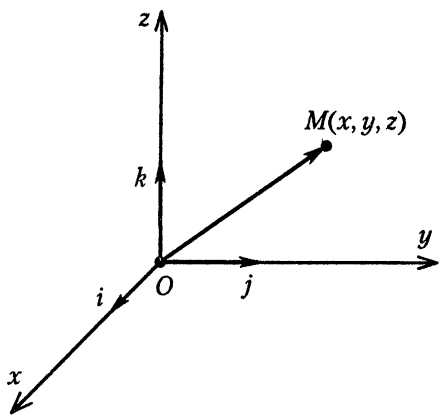


Рис. 6.1. Прямоугольная декартовая система координат в пространстве

Определение 6.2. Плоскости, проходящие через любые две координатные оси, называются *координатными плоскостями* и обозначаются Oxy, Oyz, Oxz соответственно.

Определение 6.3. *Прямоугольными координатами* произвольной точки M пространства V_3 называют координаты ее радиуса вектора $\overrightarrow{OM}$ в данном прямоугольном базисе и пишут $M(x, y, z)$, при этом x называется *абсциссой*, y – *ординатой*, а z – *аппликатой* точки M.

Пусть заданы две точки: $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда для вектора $\overrightarrow{AB}$ имеем: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Определение 6.4. Преобразование прямоугольных декартовых координат на плоскости при параллельном переносе осей (без изменения их направлений) определяется формулами

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \end{cases}$$

где (x, y)– координаты произвольной точки M плоскости в старой системе координат Oxy, (x', y')– координаты той же точки в новой системе координат $O'x'y'$, (a, b) – координаты начала O' в системе Oxy (рис. 6.2) .

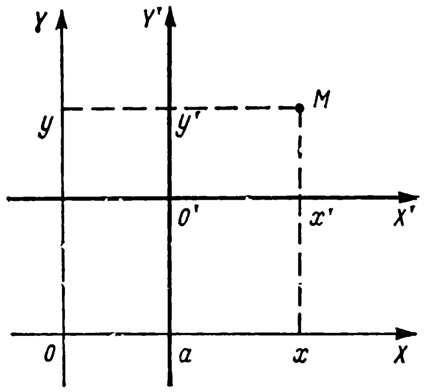


Рис. 6.2. Параллельный перенос осей

§7. Задача о делении отрезка в заданном отношении

Определение 7.1. Говорят, что точка $C \neq B$ делит невырожденный отрезок AB в отношении λ, если

$$\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}, \ (\lambda \neq 0, \lambda \neq -1).$$

Рис. 7.1. Деление отрезка в отношении $\lambda = 2$.

Заметим, что если $\lambda < 0$, то точка C не принадлежит отрезку AB (рис 7.2).

Рис. 7.2. Деление отрезка в отношении $\lambda = -2$.

Теорема 7.1. Рассмотрим в прямоугольной декартовой системе координат отрезок, концами которого являются точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Тогда координаты точки $C(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, делящей отрезок AB в отношении λ, определяются по следующим формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

В частности, координаты середины отрезка определяются по формулам:

$$\tilde{x} = \frac{x_1 + x_2}{2}, \ \tilde{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}, \ \tilde{z} = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

ГЛАВА 2. ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§1. Проекция вектора на ось и ее свойства

Пусть в пространстве задана некоторая ось l, то есть прямая, на которой отмечена фиксированная точка O и заданы направление и единица длины. Тогда каждой точке оси соответствует некоторое число.

Определение 1.1. *Проекцией точки A на ось l* называется число, соответствующее основанию перпендикуляра AB, опущенного из точки A на ось l.

Определение 1.2. *Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l* называется разность проекций конца вектора и его начала.

Проекция обозначается: $np_l\overrightarrow{AB}$.

Определение 1.3. *Углом* между двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, приведенными к общему началу, называется наименьший из углов, на который надо повернуть один из этих векторов так, чтобы его направление совпало с направлением второго вектора. Обозначение: $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})$.

Угол между векторами не зависит от направления поворота и принимает любое значение от 0 до π.

Свойства проекции:

1) $np_l(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$;

2) $np_l(\lambda\cdot\vec{a}) = \lambda\cdot np_l\vec{a}$;

3) $np_l\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между вектором $\vec{a}$ и осью l.

Определение 1.4. *Проекцией вектора* $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ называется проекция вектора $\vec{a}$ на любую ось, параллельную вектору $\vec{b}$ и имеющую направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{b}$.

Проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ обозначается $np_{\vec{b}}\vec{a}$. Очевидно, что $np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Координаты a_x, a_y, a_z вектора $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ (разложенного по ортам $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ координатных осей прямоугольной системы координат $Oxyz$) равны его проекциям на соответствующие координатные оси:

$$np_{OX}\vec{a} = a_x,\ np_{OY}\vec{a} = a_y,\ np_{OZ}\vec{a} = a_z.$$

§2. Скалярное произведение двух векторов

Определение 2.1. *Скалярным произведением* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi. \qquad (2.1)$$

Иногда скалярное произведение обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

Формулу (2.1) можно записать в виде:

$$\left(\vec{a},\vec{b}\right)=|\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b} \quad \text{или} \quad \left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left|\vec{b}\right|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Определение 2.2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{a})\geq 0$, причем $(\vec{a},\vec{a})=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\vec{0}$;

2) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$;

3) $\left(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\right)=(\vec{a},\vec{c})+\left(\vec{b},\vec{c}\right)$;

4) $\left(\lambda\cdot\vec{a},\vec{b}\right)=\lambda\cdot\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тогда:

1) $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$;

2) $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$;

3) $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\left(\vec{a},\vec{b}\right)}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Определение 2.3. Косинусы углов, образованных вектором с осями координат, называются *направляющими косинусами вектора* и вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}})=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\quad \cos\beta=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}})=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},$$

$$\cos\gamma=\cos(\widehat{\vec{a},\vec{k}})=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

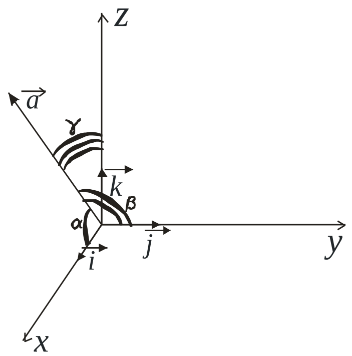


Рис. 2.1 Направляющие косинусы

Направляющие косинусы вектора связаны соотношением:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Теорема 2.1 (Неравенство Коши-Буняковского)

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно неравенство

$$\left|\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right| \le |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|.$$

§3. Векторное произведение двух векторов

Определение 3.1. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, приведенных к общему началу, называется *правоориентированной*, или *правой (левой)*, если поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший угол виден из конца вектора $\vec{c}$ происходящим против хода часовой стрелки (соответственно по часовой стрелке).

Определение 3.2. *Векторным произведением* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется третий вектор $\vec{c} = \left[\vec{a},\vec{b}\right]$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Иногда векторное произведение обозначают $\vec{a} \times \vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (в частности, один из этих векторов нулевой), то по определению $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = \vec{0}$.

Свойства векторного произведения:

1) $\left[\vec{a},\vec{b}\right] = -\left[\vec{b},\vec{a}\right]$ – антикоммутативность;

2) $\left[\lambda \cdot \vec{a},\vec{b}\right] = \lambda \cdot \left[\vec{a},\vec{b}\right]$, где λ – число;

3) $\left[\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\right]=\left[\vec{a},\vec{b}\right]+\left[\vec{a},\vec{c}\right]$ – распределительное свойство.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ и $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$. Тогда

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Для нахождения площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, применяется формула $S=\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|$.

§4. Смешанное произведение векторов

Определение 4.1. *Смешанным произведением* трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ на вектор $\vec{c}$, т.е. $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)$.

Иногда смешанное произведение обозначают $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b},\vec{c}\right],\vec{a}\right)=\left(\left[\vec{c},\vec{a}\right],\vec{b}\right)$, т.е. смешанное произведение не изменится при циклической перестановке векторов;

2) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\left(\vec{a},\left[\vec{b},\vec{c}\right]\right)$, т.е. смешанное произведение не изменится при перестановке знаков векторного и скалярного умножения;

3) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{b},\vec{a}\right],\vec{c}\right)=-\left(\left[\vec{a},\vec{c}\right],\vec{b}\right)=-\left(\left[\vec{c},\vec{b}\right],\vec{a}\right)$, т.е. при перестановке любых двух векторов смешанное произведение изменяет только знак;

4) $\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=0$, если:

а) хотя бы один из векторов нулевой;

б) векторы компланарны (в частности, два из перемножаемых векторов коллинеарны).

Пусть векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы разложениями в ортонормированном базисе: $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$ и $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$. Тогда

$$\left(\left[\vec{a},\vec{b}\right],\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Объем $V_{пар}$ параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, и объем $V_{пир}$ образованной ими треугольной пирамиды вычисляются по формулам:

$$V_{пар} = \left| \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) \right|, \; V_{пир} = \frac{1}{6} V_{пар} = \frac{1}{6} \left| \left(\left[\vec{a}, \vec{b} \right], \vec{c} \right) \right|.$$

ГЛАВА 3. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§1. Линейные пространства

Фундаментальным математическим понятием, обобщающим понятие множества векторов, является линейное пространство.

Определение 1.1. Множество L элементов $x, y, z, \ldots$ называется *линейным пространством* над числовым полем R, если

1) каждым двум элементам x, y из L поставлен в соответствие элемент z из L, называемый их суммой $z = x + y$;

2) каждому элементу x из L и каждому числу $\alpha \in R$ поставлен в соответствие элемент αx из L, называемый произведением элемента на число.

Операция сложения и умножения на число удовлетворяют следующим свойствам (аксиомам):

1) $\forall\, a, b:\ a + b = b + a$ – коммутативность;

2) $\forall\, a, b, c:\ (a + b) + c = a + (b + c)$ – ассоциативность;

3) $\exists\ \theta$, такой что $\forall\, a:\quad a + \theta = a$;

4) $\forall a\ \ \exists!(-a):\ \ a + (-a) = \theta$ – существование противоположного элемента;

5) $\forall a, b\quad \forall \lambda \in \boldsymbol{R}:\ \lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

6) $\forall a\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

7) $\forall a\quad \forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}:\ (\lambda \mu) \cdot a = \lambda(\mu a)$;

8) $\forall\, a: 1 \cdot a = a$.

Элементы линейного пространства L часто будем называть *векторами*, а само пространство — *векторным*. Следует подчеркнуть, что "векторы" таких абстрактных линейных пространств, как правило, не имеют ничего общего с геометрическими векторами. Элементами пространств могут быть функции, полиномы, матрицы и т.д., а в частном случае и геометрические векторы.

Теорема 1.1. Простейшие свойства линейных пространств.

1) В каждом линейном пространстве нулевой элемент единственный, т.е. $\theta!$;

2) Для любого элемента x существует только один противоположный, т.е. $(-x)!$;

3) Произведение любого элемента x на число 0 равно нулевому элементу, т.е. $0x = \theta$;

4) Произведение любого элемента x на число -1 равно элементу, противоположному x, т.е. $(-1)x = -x$;

5) Произведение нулевого элемента θ на любое число λ равно нулевому элементу, т.е. $\lambda\theta = \theta$.

Примеры

1) Множество свободных векторов на прямой, на плоскости, в пространстве с операциями сложения векторов и умножения вектора на число образуют линейные пространства над полем действительных чисел. Мы будем называть пространства V_1, V_2 и V_3 геометрическими (векторными) пространствами.

При изучении операций над векторами на плоскости или в пространстве было показано, что, фиксируя некоторый базис, можно установить взаимнооднозначное соответствие между векторами и упорядоченными наборами вещественных чисел (координатами вектора в этом базисе). При этом операции над векторами могут быть фактически заменены операциями над их координатами.

2) Арифметическое пространство R^n – множество всех упорядоченных наборов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ вещественных чисел $(n \geq 1)$. Элементы данного пространства будем называть точками или векторами, числа x_k – компонентами вектора x.

Операции сложения векторов и умножения вектора на число вводятся по правилам:

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),\ \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Нетрудно проверить, что введенные операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Вектор, у которого все компоненты равны нулю, будем называть *нулевым* и обозначать символом θ.

§2. Линейная зависимость и независимость элементов

Понятия линейной зависимости, линейной независимости и линейной комбинации элементов любого линейного пространства определяются точно так же, как и для обычных векторов.

Определение 2.1. Линейной комбинацией элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ с действительными коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ называется выражение следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Линейная комбинация (2.1) называется *тривиальной,* если все ее коэффициенты равны нулю. В противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*.

Определение 2.3. Система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{n} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ называется *линейно зависимой,* если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулевому элементу. В противном случае система элементов $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ называется *линейно независимой,* т.е. $\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n = \theta \Leftrightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0.$

Примеры:

1) в пространстве $P(x)$ многочленов одной действительной переменной x линейно независимой является система элементов $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad \forall\, n$;

2) в пространстве $C[-\pi, \pi]$ непрерывных функций линейно независимая следующая система: $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$.

§3. Размерность и базис линейного пространства

Определение 3.1. Линейное пространство L называется $n-$ мерным, если в нем существует n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ вектора линейно зависимы. Обозначается: $\dim L = n$ или L^n.

Определение 3.2. Система любых n линейно независимых векторов в $n-$ мерном линейном пространстве L называется *базисом* в L.

Определение 3.3. Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{n}$ базис в $n-$ мерном линейном пространстве L. Представление произвольного вектора $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$ из L называется *разложением* вектора x по базису $\{e_k\}_{k=1}^{n}$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются *координатами* вектора x в базисе $\{e_k\}_{k=1}^{n}$.

Определение 3.4. Линейное пространство называется *конечномерным*, если его базис состоит из конечного числа элементов. Если же существует бесконечно много линейно независимых векторов, то такое линейное пространство называется *бесконечномерным*.

Например, пространство $C[a,b]$ – бесконечномерное.

Заметим, что в курсе линейной алгебры изучаются только конечномерные пространства.

§4. Изоморфизм линейных пространств

Определение 4.1. Рассмотрим два линейных пространства L и M. Говорят, что эти пространства *изоморфны,* если существует взаимно однозначное отображение $\varphi : L \to M$ такое, что $\forall\, x, y \in L, \lambda \in R$ выполняются равенства

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

Само отображение φ называется *изоморфизмом*.

Теорема 4.1. Для того, чтобы пространства L и M были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы $\dim L = \dim M$.

§5. Преобразование координат при переходе к новому базису

Пусть в $n-$ мерном векторном пространстве L имеются два базиса: $\{e_k\}_{k=1}^{n} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ (старый) и $\{e'_k\}_{k=1}^{n} = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ (новый). Даны зависимости, выражающие каждый вектор нового базиса через векторы старого базиса

$$\begin{cases} e'_1 = s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + \ldots + s_{n1}e_n, \\ e'_2 = s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + \ldots + s_{n2}e_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e'_n = s_{1n}e_1 + s_{2n}e_2 + \ldots + s_{nn}e_n. \end{cases}$$

Определение 5.1. Матрицу $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix}$ называют *матрицей перехода* от старого базиса к новому. Заметим, что матрица перехода является невырожденной.

Найдем связь координат произвольного вектора x в этих базисах. Пусть $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_ne_n = x'_1e'_1 + x'_2e'_2 + \cdots + x'_ne'_n$, или

$$[x]_e = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } [x]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы преобразования координат при изменении базиса пространства в матричной форме имеют следующий вид:

$$[x]_e = S[x]_{e'} \text{ и } [x]_{e'} = S^{-1}[x]_e.$$

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР

§1. Линейный оператор

Рассмотрим обобщение понятия функции на случай, когда областью определения и областью значений являются произвольные линейные пространства.

Определение 1.1. Рассмотрим два линейных пространства L и M. Отображением $\varphi: L \to M$ называется правило, согласно которому каждому вектору $x \in L$ поставлен однозначно в соответствие вектор $\varphi(x) \in M$.

Определение 1.2. Отображение φ называется *линейным,* если для $\forall\, x, y \in L$ и $\forall\, \lambda \in R$ выполняются следующие два условия (условия линейности):

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;

2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$.

Определение 1.3. Линейное отображение $\varphi: L \to L$ (линейного пространства в себя) называется *линейным преобразованием* пространства L.

В курсе линейной алгебры линейные преобразования обычно называют *линейными операторами* и обозначают большими латинским буквами. Скобки в обозначениях действия оператора на вектор, если это не приводит к недоразумениям, не пишут.

§2. Матрица линейного оператора

Рассмотрим в L^n произвольный вектор $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Так как элемент $y = \tilde{A}x$ принадлежит L^n, то его можно разложить по базису:

$$y = \tilde{A}x = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n.$$

Координаты $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ вектора $y = \tilde{A}x$ выражаются через координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектора x по формулам:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Или в матричном виде $Y = AX$, где $Y = (y_1\ y_2 \ldots y_n)^T$ и $X = (x_1\ x_2 \ldots x_n)^T$ столбцы координат векторов x и y, а $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Определение 2.1. Матрица A называется *матрицей линейного оператора* $\tilde{A}$ в базисе $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$.

Определение 2.2. Если координаты вектора рассматривать как упорядоченный набор переменных, то система соотношений (2.1) называется *линейным преобразованием* переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Особо отметим разницу между выражениями $y = \tilde{A}x$ и $Y = AX$. Первое из них означает символическую запись правила, согласно которому вектор x преобразуется в вектор y (независимо от выбора базиса), а второе устанавливает соответствие между координатами векторов x и y в выбранном базисе.

Пример. Найдем матрицу преобразования поворота плоскости V_2 на угол α в ортонормированном базисе $\{e_1, e_2\}$.

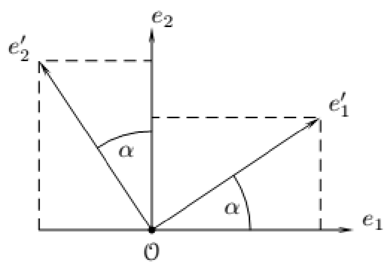


Рис. 1

Так как $e_1' = \tilde{A}e_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + \sin\alpha \cdot e_2$ и $e_2' = \tilde{A}e_2 = -\sin\alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2$, то

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей поворота.* При повороте вектор $\vec{x}$ с координатами (x_1, x_2) переходит в вектор $\vec{y}$ с координатами (y_1, y_2):

$$\begin{cases} y_1 = \cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot x_2 \\ y_2 = \sin\alpha \cdot x_1 + \cos\alpha \cdot x_2 \end{cases}.$$

§3. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Рассмотрим линейное преобразование $y = \tilde{A}x$ в пространстве L^n. Выберем базис $\{e_k\}_{k=1}^n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. В этом базисе оператору соответствует линейное преобразование

$$Y = AX. \tag{3.1}$$

Рассмотрим новый базис $\{e'_k\}_{k=1}^n = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$, и пусть $S = (s_{ij})$ - матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда координаты векторов x и y в старом и новом базисах связаны соотношениями:

$$X = SX' \text{ и } Y = SY'. \tag{3.2}$$

Подставляя X и Y из (3.2) в формулу (3.1), получим:

$$SY' = ASX' \text{ или } Y' = S^{-1}ASX'.$$

Обозначив $A' = S^{-1}AS$, получим $Y' = A'X'$ – линейное преобразование, соответствующее оператору $\tilde{A}$ в новом базисе.

Определение 3.1. Матрицы A и $A' = S^{-1}AS$ называются *подобными*. Они описывают действие одного и того же оператора $\tilde{A}$ в разных базисах.

Теорема 3.1. Свойства подобных матриц:

1) равенство рангов;

2) равенство определителей;

3) равенство характеристических полиномов и собственных значений.

§4. Собственные числа и собственные векторы линейного оператора

Рассмотрим векторное пространство L^n.

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in L^n$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\tilde{A}$, если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство: $\tilde{A}x = \lambda x$. При этом само число λ называется *собственным значением* (*числом*) линейного оператора $\tilde{A}$, соответствующим вектору x.

Замечание. В вещественном векторном пространстве L^n не у всякого оператора есть собственные векторы.

Теорема 4.1. Любой линейный оператор $\tilde{A}$, действующий в комплексном векторном пространстве L^n, имеет собственные векторы.

Пусть линейный оператор $\widetilde{A}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ задан матрицей
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$
и пусть матрица-столбец $X = (x_1\ x_2\ \dots x_n)^T$ соответствует вектору $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тогда из определения $AX = \lambda X = \lambda EX \Rightarrow (A - \lambda E)X = O$. Эта система имеет ненулевое решение, если
$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Уравнение (4.1) называется *характеристическим уравнением*, а его левая часть – *характеристическим многочленом* матрицы A. Корни характеристического уравнения называются *характеристическими числами* или *собственными значениями* матрицы A.

Определение 4.3. Множество всех характеристических чисел матрицы A называется ее спектром и обозначается через $\sigma(A)$.

Так как матрицы оператора $\widetilde{A}$ в различных базисах подобны, то характеристический многочлен матрицы A оператора $\widetilde{A}$ и его корни не зависят от выбора базиса в пространстве L^n. Поэтому характеристический многочлен матрицы A оператора $\widetilde{A}$ и его корни естественно называть характеристическим многочленом и характеристическими числами оператора $\widetilde{A}$. Они являются инвариантами оператора.

Определение 4.4. Собственным вектором x_k, соответствующим собственному числу λ_k, является любой вектор $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$, координаты которого удовлетворяют следующей системе:
$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \dots + a_{1n}\alpha_n = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_k)\alpha_2 + \dots + a_{2n}\alpha_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_k)\alpha_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 4.2. Если матрица A линейного оператора $\widetilde{A}$ является симметричной, то:

1) все собственные значения являются действительными числами;

2) собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны;

3) если все собственные значения различны, то соответствующие единичные собственные векторы образуют ортонормированный базис;

4) в базисе из единичных собственных векторов матрица A линейного оператора $\tilde{A}$ является диагональной, причем элементами главной диагонали являются ее собственные числа.

ГЛАВА 3. ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО И ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§1. Евклидово пространство

Определение 1.1. Векторное пространство L^n называется евклидовым, если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым двум векторам x и y из L^n число, называемое скалярным произведением векторов x и y, обозначаемое (x, y) и удовлетворяющее следующим условиям:

1) $(x, y) \geq 0$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$;

2) $(x, y) = (y, x)$;

3) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

4) $(\lambda \cdot x, y) = \lambda \cdot (x, y)$.

Понятие скалярного произведения естественным образом обобщает понятие скалярного произведения геометрических векторов.

Евклидово пространство размерности n обозначают E^n. Заметим, что существуют как конечномерные, так и бесконечномерные евклидовы пространства.

Любое конечномерное линейное пространство L^n всегда можно превратить в евклидово пространство. Действительно, пусть $\{e_k\}_{k=1}^n$– базис пространства L^n, а $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ и $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$ его элементы. Рассмотрим в качестве скалярного произведения элементов x и y величину $(x, y) = \sum_{k=1}^{n} x_k \bar{y}_k$. Нетрудно убедиться, что все аксиомы скалярного произведения при этом будут выполнены.

Определение 1.2. *Длиной* вектора x в евклидовом пространстве называют $\sqrt{(x, x)}$ и обозначают $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Определение 1.3. Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Умножая любой ненулевой вектор $x \in E^n$ на число $\lambda = \dfrac{1}{|x|}$, мы получим вектор $x_0 = \dfrac{x}{|x|}$ единичной длины. Эта операция называется *нормированием* вектора x.

Теорема 1.1. Неравенство Коши-Буняковского. Для любых векторов x и y из E^n справедливо

$$|(x,y)| \le |x| \cdot |y|,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y пропорциональны.

Примеры

1) в пространствах V_2 и V_3 скалярное произведение вводится обычным образом $(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{x}| \cdot |\vec{y}| \cdot \cos(\vec{x}\,\hat{,}\,\vec{y})$;

2) в пространстве $C[a,b]$ непрерывных функций на отрезке $[a,b]$ можно ввести скалярное произведение равенством: $(x(t),y(t)) = \int\limits_a^b x(t)y(t)dx$.

§2. Матрица Грама

Определение 2.1. *Матрицей Грама,* построенной по системе векторов $\{e_k\}_{k=1}^n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, называется следующая матрица:

$$\Gamma(e_1,e_2,\ldots,e_n) = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \cdots & (e_1,e_n) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \cdots & (e_2,e_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & \cdots & (e_n,e_n) \end{pmatrix}.$$

Теорема 2.1. Свойство определителя Грама

1) Система векторов $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ линейно независима тогда и только тогда, когда

$$\det\Gamma(e_1,e_2,\ldots,e_n) > 0.$$

2) Система векторов $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ линейно зависима тогда и только тогда, когда

$$\det\Gamma(e_1,e_2,\ldots,e_n) = 0.$$

§3. Ортогональные линейные операторы и матрицы

Определение 2.1. Линейный оператор $\tilde{A}$ в евклидовом пространстве E^n называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. если для любых двух векторов x и y из E^n имеем:

$$(\tilde{A}x,\tilde{A}y) = (x,y).$$

Из определения вытекает, что ортогональное преобразование $\tilde{A}$ не изменяет длин векторов, так как $|\tilde{A}x|^2 = (\tilde{A}x, \tilde{A}x) = (x, x) = |x|^2$, и углов между ними, так как $\frac{(x, y)}{|x||y|} = \frac{(\tilde{A}x, \tilde{A}y)}{|\tilde{A}x||\tilde{A}y|}$.

Определение 2.2. Матрица A называется ортогональной, если $A^T = A^{-1}$.

Свойства

1) Из определения следует, что ортогональная матрица всегда невырожденная. Так как $\det(AA^T) = \det(A)\det(A^T) = \det(E) = 1$, а $\det(A^T) = \det(A)$, то $\det(A) = \pm 1$.

2) Сумма квадратов элементов любой строки равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов любых разных строк равна 0, т.е.:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 1, \ \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = 0 \quad (i \neq j).$$

Теорема 2.1. Ортогональное преобразование $\tilde{A}$ пространства E^n в ортонормированном базисе задается ортогональной матрицей.

Следствие. Матрица S перехода от одного ортонормированного базиса $\{e\}$ к другому ортонормированному базису $\{e'\}$ является ортогональной, т.е. матрица поворота является ортогональной.

ГЛАВА 4. КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§1. Квадратичные формы

Определение 1.1. Квадратичной формой будем называть вещественную функцию f от n вещественных переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j ,$$

где a_{ij}– заданные вещественные числа, называемые *коэффициентами квадратичной формы*, удовлетворяющие условию $a_{ij} = a_{ji}$.

Определение 1.2. Квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n \times n}$, состоящая из коэффициентов квадратичной формы, называется *матрицей квадратичной формы* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Из определения следует, что A– симметрическая матрица, т.е. $A = A^T$.

Определение 1.3. Рангом квадратичной формы называется ранг её матрицы.

Квадратичная форма может быть записана в матричном виде $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X A X^T$, где A– матрица квадратичной формы, а $X = (x_1 \ x_2 \ \ldots x_n)$– матрица строка.

Определение 1.4. Квадратичная форма называется *канонической* (имеет канонический вид), если ее матрица диагональная, т.е. все коэффициенты $a_{ij} = 0$ при $i \neq j$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + \ldots + a_{nn} x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 .$$

Теорема 1.1 (Лагранж). Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду при помощи некоторый линейной невырожденной замены переменных.

§2. Алгоритм приведения к каноническому виду

Рассмотрим алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования. Пусть

$$\begin{cases} e_1' = b_{11} e_1 + b_{21} e_2 + b_{31} e_3, \\ e_2' = b_{12} e_1 + b_{22} e_2 + b_{32} e_3, \\ e_3' = b_{13} e_1 + b_{23} e_2 + b_{33} e_3, \end{cases}$$

– найденные нормированные собственные векторы, соответствующие характеристическим числам $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в ортонормированном базисе e_1, e_2, e_3. Как было сказано ранее, векторы e_1', e_2', e_3' образуют ортонормированный базис.

Матрица $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ является матрицей перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'.

Таким образом, формулы преобразования координат при переходе к новому ортонормированному базису имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}x_1' + b_{12}x_2' + b_{13}x_3', \\ x_2 = b_{21}x_1' + b_{22}x_2' + b_{23}x_3', \\ x_3 = b_{31}x_1' + b_{32}x_2' + b_{33}x_3'. \end{cases}$$

Преобразовав с помощью этих формул квадратичную форму $f(x_1, x_2, x_3)$, получим ее канонический вид: $f(x_1, x_2, x_3) = f(x_1', x_2', x_3') = \lambda_1 {x_1'}^2 + \lambda_2 {x_2'}^2 + \lambda_3 {x_3'}^2$.

§3. Знакоопределенность квадратичной формы

Определение 3.1. Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется положительно (отрицательно) определённой, если для любого ненулевого набора действительных значений переменных $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ число $f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) > 0$ $\left(f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) < 0\right)$.

Теорема 3.1 (критерий Сильвестра). Для того, чтобы квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры матрицы квадратичной формы были положительны, то есть чтобы $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$, где $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ – угловые миноры матрицы квадратичной формы.

Следствие. Для того, чтобы квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы знаки угловых миноров матрицы квадратичной формы чередовались следующим образом: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots, (-1)^n \Delta_n > 0.$

РАЗДЕЛ 4. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этом разделе все построения будут вестись в прямоугольной системе координат: Oxy на плоскости или $Oxyz$ в пространстве.

ГЛАВА 1. ГЕОМЕТРИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

§1. Различные виды задания прямой на плоскости

Определение 1.1. Углом наклона φ прямой L к оси Ox называется наименьший угол поворота этой оси, производимого вокруг пересечения Ox и L в направлении против часовой стрелки до совмещения Ox с L (рис. 1.1).

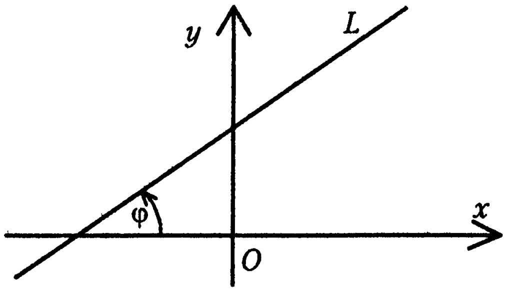


Рис. 1.1. Угол наклона

Определение 1.2. Уравнение прямой L с угловым коэффициентом имеет следующий вид:

$$y = kx + b,$$

где k - угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла наклона φ прямой L к оси Ox, а b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

Определение 1.3. Общим уравнением прямой L называется уравнение вида

$$Ax + By + D = 0,$$

где A, B и D - постоянные коэффициенты, причем $A^2 + B^2 \neq 0$. Заметим, что вектор $\vec{n} = (A, B)$ является нормальным вектором прямой L, т.е. $\vec{n}$ перпендикулярен прямой L.

Определение 1.4. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m)$, определяется *каноническими уравнениями:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \tag{1.1}$$

Приравняв каждое из равных отношений в (1.1) параметру t и выразив x и y, получим следующую систему:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad t \in R. \tag{1.2}$$

Определение 1.5. Система уравнений (1.2) называется *параметрическими уравнениями* прямой на плоскости.

Определение 1.6. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, где $x_1 \neq x_2$ и $y_1 \neq y_2$, имеет следующий вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

§2. Расстояние от точки до прямой.

Теорема 2.1. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L, заданной уравнением $Ax + By + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

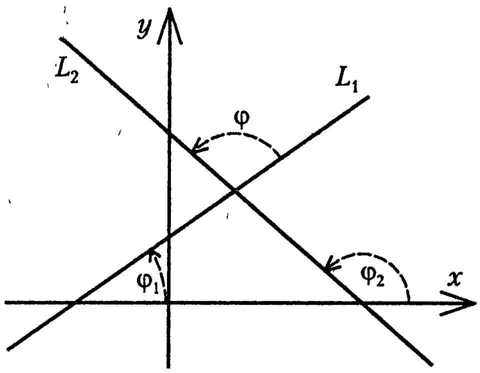


Рис 3.1

Определение 3.1. Под углом между прямыми L_1 и L_2 будем понимать угол поворота в направлении против часовой стрелки прямой L_1 до совмещения с прямой L_2.

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы следующими уравнениями с угловыми коэффициентами: $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Тогда величина угла φ между ними определяется из формулы

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_1 \cdot tg\varphi_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Прямые L_1 и L_2 будут параллельны, если $k_1 = k_2$. Условие их перпендикулярности имеет вид: $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$.

§4. Уравнение плоскости в пространстве

Определение 4.1. Уравнение плоскости P, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (A, B, C)$, имеет следующий вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Определение 4.2. *Общее уравнение* плоскости P имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{, причем } A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

Определение 4.3. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется *нормальным вектором* этой плоскости. В частности, вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ - нормальный вектор плоскости P.

Определение 4.4. Уравнение плоскости P, проходящей через три данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, имеет следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

§5. Расстояние от точки до плоскости

Теорема 5.1. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости P, заданной уравнением $Ax + By + Cx + D = 0$, определяется уравнением

$$d = \frac{| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

§6. Различные виды задания прямой в пространстве

Определение 6.1. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_{0,} y_{0,} z_0)$, параллельно вектору $\vec{q} = (l, m, n)$, который называется *направляющим*, определяется каноническими уравнениями

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Определение 6.2. Система уравнений $\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \ t \in R, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$ называется *параметрическими уравнениями* прямой в пространстве.

Определение 6.3. Прямая может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

двух плоскостей, пересекающихся по этой прямой (система (6.1)). Эта система называется *общим* уравнением прямой. Направляющий вектор может быть найден по формуле

$$\vec{q} = \left(\begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} A & C \\ A_1 & C_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix} \right).$$

§7. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1} \text{ и } \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Определение 7.1. Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами $\vec{q}_1 = (l_1, m_1, n_1)$ и $\vec{q}_2 = (l_2, m_2, n_2)$. Величина угла между прямыми L_1 и L_2 определяется из формулы

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2 имеет вид

$$(\vec{q}_1, \vec{q}_2) = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0.$$

Условие параллельности (или совпадения) прямых L_1 и L_2 сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

§8. Взаимное расположение прямой и плоскости

Величина угла φ между прямой L: $\dfrac{x - x_0}{l} = \dfrac{y - y_0}{m} = \dfrac{z - z_0}{n}$ и плоскостью P: $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется из формулы

$$\sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Условие параллельности прямой L и плоскости P имеет вид

$$(\vec{q},\vec{n}) = A\cdot l + B\cdot m + C\cdot n = 0\,.$$

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости P сводится к условиям коллинеарности векторов $\vec{q}$ и $\vec{n}$, заключающимся в пропорциональности их координат:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}\,.$$

Для нахождения координат точки пересечения прямой L и плоскости P удобно воспользоваться параметрическими уравнениями прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

подставив их в уравнение плоскости.

ГЛАВА 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Общее уравнение кривой второго порядка

Определение 1.1. Кривой второго порядка называется линия, определяемая в произвольной прямоугольной системе координат алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x и y, т.е. уравнением вида

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{1.1}$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема 1.1. Для любой кривой второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой линии имеет один из следующих видов, называемых *каноническим уравнением*:

Таблица 1.1

№ п/п	Каноническое уравнение	Название кривой
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мнимый эллипс
3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара мнимых пересекающихся прямых
4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	гипербола
5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	пара пересекающихся кривых
6	$y^2 = 2px$	парабола
7	$y^2 - a^2 = 0$	пара параллельных прямых
8	$y^2 + a^2 = 0$	пара мнимых параллельных кривых
9	$y^2 = 0$	пара совпадающих прямых

Переименовывая в случае необходимости названия осей координат или меняя их направления, можно считать, что

1) $a^2 \geq b^2 > 0$ в уравнениях 1-3;

2) $p > 0$ в уравнении 6;

3) $a^2 \neq 0$ в уравнениях 7 и 8.

Уравнения 2 и 8 не задают никакого множества точек. Говорят, что они определяют *мнимые линии второго порядка.* Уравнение 3 задает одну точку - начало координат. Пары прямых уравнений 5, 7 и 9 называются *вырожденными линиями второго порядка.* Уравнения 1, 4 и 6 определяют *невырожденные линии (кривые) второго порядка.*

Рассмотрим далее невырожденные кривые второго порядка.

§2. Эллипс и его свойства

Определение 2.1. Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний которых от двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная. Это число обозначается через $2 \cdot a$. Число a называется большей полуосью эллипса.

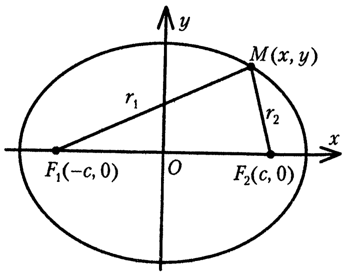


Рис. 2.1. Эллипс

Определение 2.2. Точки F_1 и F_2 называются *фокусами* эллипса (левым и правым соответственно). Расстояние между ними обозначается через $2 \cdot c$ и называется *фокусным расстоянием*.

Определение 2.3. Числа $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$, равные расстоянию произвольной точки эллипса $M(x, y)$ до фокусов F_1 и F_2, называются фокальными радиусами точки M. Имеем $r_1 + r_2 = 2 \cdot a$.

Так как $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, а $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2 \cdot a. \qquad (2.1)$$

Это и есть уравнение эллипса в выбранной системе координат. Преобразуем (2.1). Перенесем второй радикал в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$. После очевидных преобразований получим: $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$.

Так как $a>c$, то величина $b^2=a^2-c^2>0$. Имеем $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется *каноническим уравнением* эллипса, а число $b=+\sqrt{a^2-c^2}$ - *малой полуосью* эллипса.

Определение 2.4. Величина $\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}<1$, равная отношению фокусного расстояния к большой оси, называется *эксцентриситетом эллипса*.

Эксцентриситет эллипса говорит о его форме (степени вытянутости). При уменьшении ε фокусы эллипса F_1 и F_2 сближаются, а малая полуось приближается к большой. При $\varepsilon=0$, т.е. когда фокусы эллипса совпадают, эллипс превращается в окружность. Если же эксцентриситет увеличивается, приближаясь к 1, то эллипс становится всё более вытянутым.

Определение 2.5. Пара параллельных малой оси эллипса прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами эллипса*.

§3. Гипербола и ее свойства

Определение 3.1. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, модуль разности расстояний каждой из которых до двух фиксированных точек F_1 и F_2, называемых *фокусами*, есть положительная постоянная. Эту величину обозначают через $2\cdot a$. Число a будем называть *действительной полуосью* гиперболы. Расстояние между фокусами F_1 и F_2 обозначается через $2\cdot c$ и называется *фокусным расстоянием*.

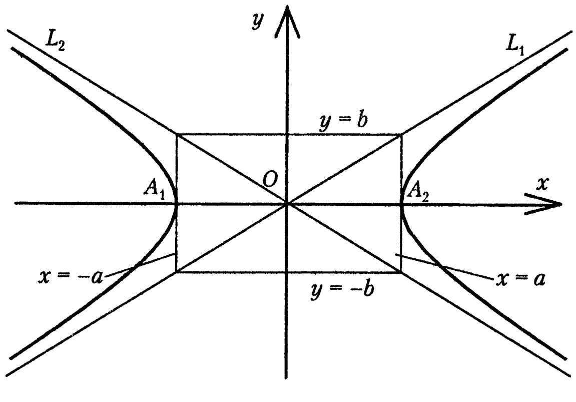


Рис. 3.1. Гипербола

Определение 3.2. Числа $r_1 = \rho(F_1, M)$ и $r_2 = \rho(F_2, M)$, равные расстоянию произвольной точки гиперболы $M(x, y)$ до фокусов F_1 и F_2, называются *фокальными радиусами* точки M.

Имеем $|r_1 - r_2| = 2a$, или $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Так как $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, а $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, получаем

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2 \cdot a. \qquad (3.1)$$

Это и есть уравнение гиперболы в выбранной системе координат. Преобразуем (3.1). Перенесем второй радикал в правую часть и возведем обе части уравнения в квадрат: $(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$. После простых преобразований получим: $(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

Так как $c > a$, то величина $b^2 = c^2 - a^2 > 0$. Имеем $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$, или

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (3.2)$$

Уравнение (3.2) называется *каноническим уравнением* гиперболы, а число $b = +\sqrt{c^2 - a^2}$ - *мнимой полуосью* гиперболы.

Определение 3.3. Если у гиперболы действительная и мнимая полуоси равны, т.е. $a = b$, то гипербола называется *равнобочной* или *равносторонней*.

Определение 3.4. Прямоугольник, ограниченный прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$, называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Определение 3.5. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых $L_1 : y = \frac{b}{a} x$ и $L_2 : y = -\frac{b}{a} x$, называемых *асимптотами гиперболы*. Данные прямые играют важную роль при построении и исследовании гиперболы.

Определение 3.6. Величина $\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}} > 1$, равная отношению фокусного расстояния к действительной оси, называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Определение 3.7. Пара параллельных мнимой оси гиперболы прямых l_1 и l_2, заданных уравнениями $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы*.

§4. Парабола и ее свойства

Определение 4.1. Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки F, называемой *фокусом,* и заданной прямой L, называемой *директрисой*.

Каноническое уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px, \quad p > 0.$$

Определение 4.2. Величина p, равная расстоянию от фокуса F до директрисы L, называется *параметром* параболы.

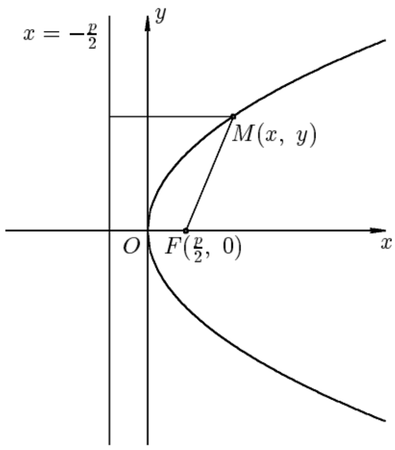


Рис. 4.1. Парабола

ГЛАВА 3. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§1. Общее уравнение поверхности второго порядка

Определение 1.1. Поверхностью второго порядка называется всякое множество S точек пространства, которое в некоторой прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задано алгебраическим уравнением второй степени относительно переменных x, y и z, т.е. уравнением вида

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0, \quad (1.1)$$

где $a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + a_{33}{}^2 + a_{12}{}^2 + a_{13}{}^2 + a_{23}{}^2 \neq 0$.

Теорема 1.1. Для любой поверхности второго порядка существует прямоугольная система координат, в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов, называемых *каноническим уравнением*:

Таблица 1.1

Каноническое уравнение	Название поверхности
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мнимый эллипсоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	однополостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	двуполостный гиперболоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	конус
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	мнимый конус
$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$ $(p,q>0)$	эллиптический параболоид

$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ $(p,q>0)$	гиперболический параболоид
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллиптический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболический цилиндр
$y^2=2px$	параболический цилиндр
$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	пара пересекающихся плоскостей
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	пара мнимых пересекающихся плоскостей
$y^2=a^2\ (a\neq 0)$	пара параллельных плоскостей
$y^2+a^2=0\ (a\neq 0)$	пара мнимых параллельных плоскостей
$y^2=0$	пара совпадающих плоскостей

§2. Эллипсоиды

Определение 2.1. Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Определение 2.2. Положительные числа a,b,c называются *полуосями* эллипсоида, а точки $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$, $B_1(-b,0,0)$, $B_2(b,0,0)$, $C_1(-c,0,0)$, $C_2(c,0,0)$ - его *вершинами*.

Меняя, если нужно, оси координат, можно считать, что в каноническом уравнении $a \ge b \ge c > 0$.

Эллипсоид обладает центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей.

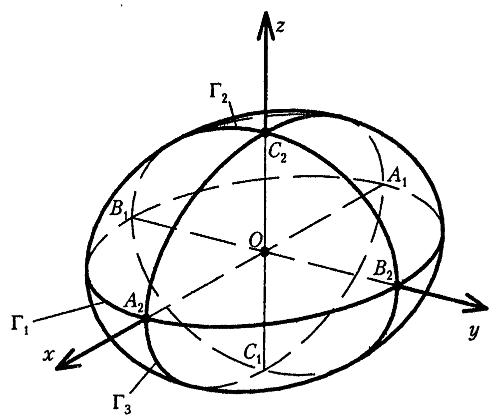


Рис. 2.1. Эллипсоид

В сечении эллипсоида плоскостью $z=0$ получается эллипс Γ_1 с полуосями a и b. Если $a=b$, то сечения эллипсоида плоскостями $z=h$ при $h\in(-c,c)$ есть окружности. Такой эллипсоид называется *эллипсоидом вращения*, так как его можно получить, например, вращением эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Oz.

При $a=b=c$ эллипсоид является сферой радиуса a.

§3. Гиперболоиды

Определение 3.1. Поверхности второго порядка, заданные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\ (a\ge b>0, c>0),$$

называются *однополостным* и *двуполостным* гиперболоидами соответственно.

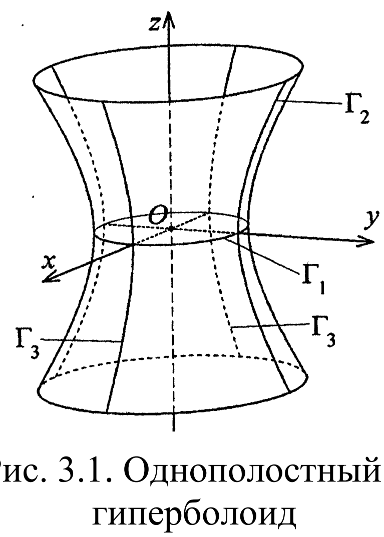


Рис. 3.1. Однополостный гиперболоид

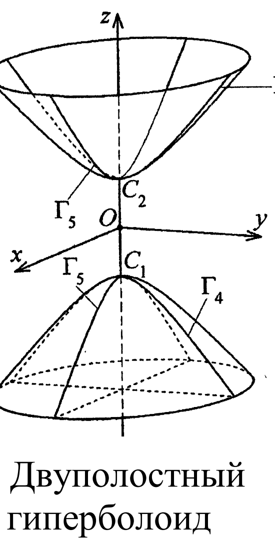


Рис. 3.2. Двуполостный гиперболоид

Гиперболоиды обладают центральной симметрией относительно начала координат и симметрией относительно координатных плоскостей. Положительные числа a, b, c называются *полуосями*.

В сечении однополостного гиперболоида плоскостью $z = 0$ получаем так называемый *горловой эллипс* $\Gamma_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, а в сечениях плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ имеем гиперболы $\Gamma_2 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и $\Gamma_3 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ соответственно (рис 3.1).

Точки $C_1(0,0,-c)$ и $C_2(0,0,c)$ называются *вершинам* двуполостного гиперболоида. Сечения данной поверхности плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ являются гиперболами $\Gamma_4 : \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ и $\Gamma_5 : \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ соответственно (рис 3.2).

§4. Конусы второго порядка

Определение 4.1. Поверхность второго порядка, заданная в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ (a, b, c > 0), \tag{4.1}$$

называется *конусом второго порядка*.

Начало системы координат $O(0,0,0)$ принадлежит конусу и называется его *вершиной*. Сечение конуса плоскостью $P : z = z_0$ представляет собой эллипс Γ (рис. 4.1).

Определение 4.2. *Образующими* конуса второго порядка, заданного уравнением (4.1), являются прямые, проходящие через его вершину и пересекающие эллипс Γ, называемый его *направляющей*.

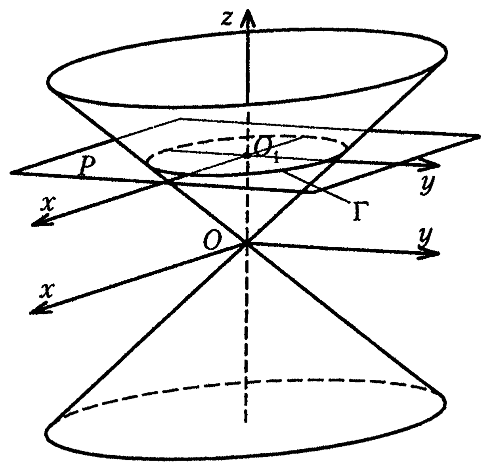


Рис. 4.1. Конус

§5. Параболоиды

Определение 5.1. Поверхности второго порядка, заданные в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнениями

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z,\ \frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\ \ (p,q>0),$$

называются *эллиптическим* и *гиперболическим* параболоидами соответственно.

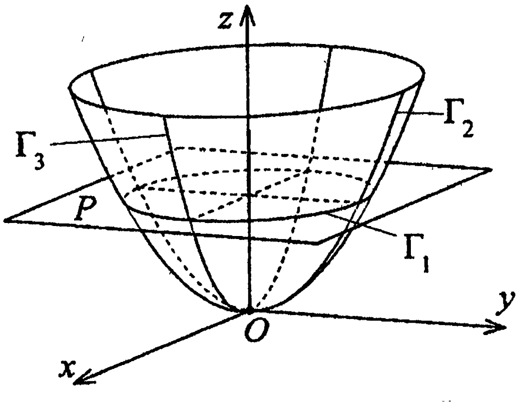


Рис. 5.1. Эллиптический параболоид

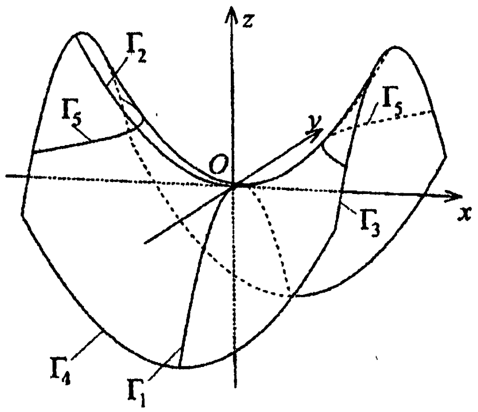


Рис. 5.2. Гиперболический параболоид

Данные поверхности симметричны относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.

Начало системы координат $O(0,0,0)$ принадлежит эллиптическому параболоиду и называется его *вершиной* (рис. 5.1).

В сечении эллиптического параболоида плоскостью $P: z=z_0$ $(z_0>0)$ получается эллипс Γ_1 с полуосями $\sqrt{2pz_0}$ и $\sqrt{2qz_0}$, а в сечении координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ имеем так называемые *главные параболы параболоида* $\Gamma_2: y^2=2qz$ и $\Gamma_3: x^2=2pz$ соответственно (см. рис. 5.1).

Если $p=q$, то сечения эллиптического параболоида плоскостями $z=z_0>0$ являются окружностями. Такой параболоид есть *параболоид вращения*, так как его можно получить, например, вращением параболы $x^2=2pz$ вокруг оси Oz.

Название «гиперболический параболоид» объясняется тем, что в его сечении плоскостью $P: z=z_0$ $(z_0\neq 0)$ получается гипербола Γ_5 (рис. 5.2). Сечениями гиперболического параболоида с координатными плоскостями $x=0$ и $y=0$ снова имеем *главные* параболы $\Gamma_1: y^2=-2qz$ и $\Gamma_2: x^2=2pz$ соответственно (см. рис. 5.2).

§6. Цилиндры второго порядка

Определение 6.1. *Цилиндрическая поверхность второго порядка* (или *цилиндр*) в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ задается уравнением вида

$$F(x,y)=0, \tag{6.1}$$

где $F(x,y)$ - многочлен второй степени от переменных x и y.

Определение 6.2. Кривая Γ, определяемая уравнением (6.1) в плоскости Oxy, называется *направляющей (или основанием)* цилиндрической поверхности (рис. 6.1).

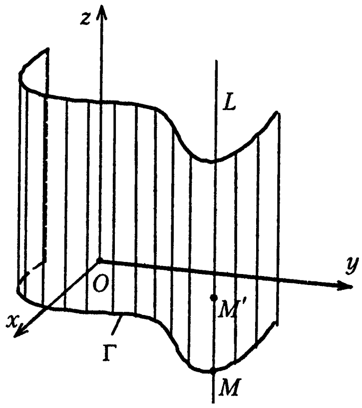


Рис. 6.1. Направляющая и образующая

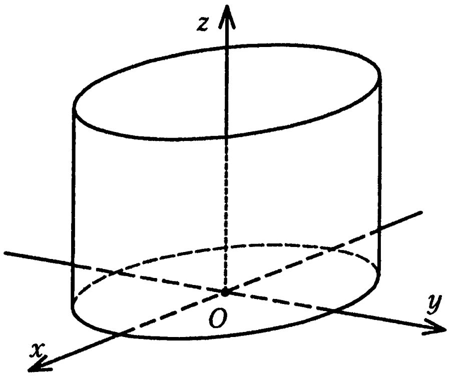


Рис.6.2. Эллиптический цилиндр

Если через любую точку $M(x,y,0)$ кривой Γ провести прямую L, параллельную оси Oz, то все точки $M'(x,y,z)$ на этой прямой будут принадлежать цилиндру, так как их координаты будут удовлетворять уравнению (6.1). Итак, можно сказать следующее, что цилиндр образован прямыми, параллельными оси Oz и пересекающими его направляющую Γ. Эти прямые называются *образующими* цилиндра.

В зависимости от вида направляющей кривой Γ различают: эллиптические (рис. 6.2), гиперболические (рис. 6.3), параболические (рис. 6.4) цилиндры. Если направляющая Γ, определяемая уравнением (6.1), есть пара прямых, то цилиндрическая поверхность вырождается в пару плоскостей: пересекающихся (действительных или мнимых), параллельных (действительных или мнимых) или совпадающих.

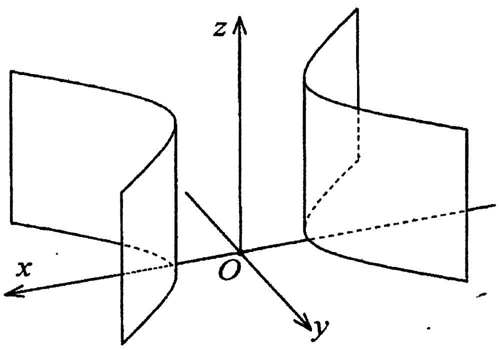


Рис. 6.3. Гиперболический цилиндр

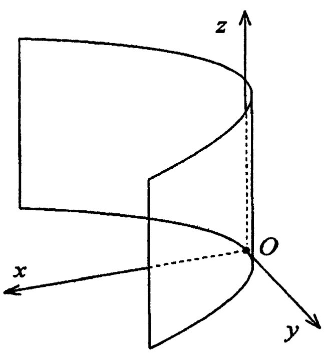


Рис.6.4. Параболический цилиндр

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров, П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 512 с.

2. Антонов, В.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект: учебное пособие / В.И. Антонов, М.В. Лягунова, Н.И. Лобкова и др. – М. : Проспект, 2011. – 144 с.

3. Винберг, Э.Б. Курс алгебры. – 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2013. – 592 с.: ил.

4. Кострикин, А.И. Введение в алгебру. Часть I: Основы алгебры. – М.: МЦНМО, 2009. – 272 с.

5. Садовничий, Ю.В. Аналитическая геометрия. Курс лекций с задачами / Ю.В. Садовничий, В.В. Федорчук. – М.: Экзамен, 2009. – 350 [2] с.

Евгений Витальевич Никитенко

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для студентов дневной формы обучения направления «Информатика и вычислительная техника»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 30.12.16. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 3,56. Тираж 15 экз. Заказ 161610. Рег. № 63.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.