МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

И.И. КУЛЕШОВА

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Часть I

Методическое пособие для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» всех форм обучения

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлениям подготовки «Экономика»

Рубцовск 2023

УДК 510

Кулешова И.И. Математика для экономических расчетов: Методическое пособие для студентов направления подготовки 38.03.01 «Экономика» всех форм обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск. ИТО, 2023 г. - 98 с.

Методическое пособие содержит теоретический материал по линейной алгебре, векторной алгебре и аналитической геометрии, теории пределов, дифференциальному исчислению функции одной и нескольких переменных. Пособие рекомендуется для студентов, обучающихся по экономическим направлениям. Пособие содержит большое число разнообразных примеров и задач с решением. Каждое понятие, метод, теорема поясняются примерами. Пособие содержит весь материал, предусмотренный программой.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 1 от 02.02.2023 г.

Рецензент:
к.э.н., доцент Д.В. Ремизов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА

1.1. Определение определителя

Для того, чтобы дать определение (или понятие) определителя *n*-го (или любого другого) порядка, нам надо разобраться с понятием «перестановка». Сделаем это на примере трех чисел: 1, 2, 3. Запишем все возможные перестановки из этих чисел (т.е. будем менять их местами):

$$(1\ 2\ 3),\ (2\ 3\ 1),\ (3\ 1\ 2), \qquad (1.1.1)$$

$$(2\ 1\ 3),\ (3\ 2\ 1),\ (1\ 3\ 2). \qquad (1.1.2)$$

Их шесть, причем первую перестановку из чисел 1, 2, 3 (которая записана в порядке возрастания чисел) будем называть основной. Число перестановок равно произведению этих чисел $1\cdot 2\cdot 3=6$. Значит, число перестановок из чисел от 1 до *n* будет равно произведению *n* чисел: $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot \mathrm{n}=\mathrm{n}!$ (что называется «n» факториалом), $1\cdot 2\cdot 3=3!,\ 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4!$ и т.д. Вернемся к нашим перестановкам из трех первых чисел. Говорят, что в перестановке произведена транспозиция двух определенных ее элементов, если эти элементы поменяны местами. После транспозиции перестановка переходит в другую перестановку. В последней, в свою очередь, тоже можно сделать транспозицию, в результате получим третью перестановку (но не исключено, что и первую). Например: (1), (2). Обратите внимание, что перестановки (2) получены из основной перестановки при помощи одной транспозиции, а (1) – путем двух транспозиций, следовательно, число может быть как четным, так и нечетным.

Перестановка чисел называется четной (или нечетной), если она получена из основной при помощи четного (нечетного) числа транспозиций.

Обозначим через $j=(j_1,j_2,j_3,\ldots j_n)$ всевозможные различные перестановки из чисел *1, 2, 3, ..., n*. Число *t(j)* – число транспозиций, которые нужно сделать, чтобы перейти от основной перестановки *1, 2, 3, ..., n* к перестановке $j=(j_1,j_2,j_3,\ldots j_n)$, где $j_1,j_2,j_3,\ldots j_n$ - это числа *1, 2, 3, ..., n,* взятые в некотором порядке.

Определение. Определителем (детерминантом) n-го порядка называется число, записываемое в виде:

$$\Delta=\left|a_{ik}\right|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по данным числам a_{ij} (действительным), (которые называются элементами определителя) по следующему закону: $\Delta=\sum_j(-1)^{t(j)}a_{1j_1}a_{2j_2}\ldots a_{nj_n}$, где Δ- есть сумма членов определителя, распространенная на всевозможные различные перестановки $j=(j_1,\ldots,j_n)$ из чисел *1, 2, ..., n*. Элемент a_{ik} находится на пересечении i – строки и k – столбца. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ образуют главную диагональ, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{n1}$ - побочную диагональ.

Рассмотрим определитель третьего порядка, где 3 строки и 3 столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n},$$

где $j = (j_1, j_2, j_3)$ - всевозможные перестановки основной перестановки 1, 2, 3.

Четные $(1\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2)$, для которых $(-1)^{t(j)} = 1$, нечетные $(3\ 2\ 1)$, $(2\ 1\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, при этом $(-1)^{t(j)} = -1$.

$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

А теперь то, что мы получим, исходя из определения определителя, покажем на самом определителе (соединим черточками элементы в произведениях), тем самым получим правило, по которому можно вычислять определители 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

«+» «-»

Так называемое правило «звездочки», или правило «треугольников». То же самое получим, если к определению дописать первые два столбца, складывая произведения элементов, перемноженные по главной диагонали и параллельно ей, затем вычитая произведения элементов, стоящих по побочной диагонали и параллельно ей.

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & -+ & + & + \end{matrix}$$

Например, вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 0 - 15 - 20 - 4 = -45.$$

Рассмотрим определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_j (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$j = (j_1, j_2)$ из чисел 1,2;

1,2 – основная (четная);

(2,1) перестановка из основной при помощи одной транспозиции (нечетная).

1.2. Свойства определителей

Свойство 1. Величина определителя не меняется, если в определителе все строки заменить соответствующими столбцами (1-ю строку на 1-й столбец и т.д.). Доказательство всех свойств будем приводить для определителей 3-го порядка.

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{23}a_{12}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Свойство 2. При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\Delta.$$

Для доказательства этого свойства достаточно применить правило треугольников к левой и правой частям этого равенства.

Свойство 3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю. Пусть в определителе первая и вторая строки равны. Воспользуемся вторым свойством. При перестановке двух строк знак определителя поменяется на противоположный.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\Delta.$$

$\Delta=-\Delta \Rightarrow \Delta+\Delta=0,\ 2\Delta=0 \Rightarrow \Delta=0.$

Свойство 4. Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 5. Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен 0. Это свойство следует из свойств 3 и 4. В самом деле: $\frac{a_{21}}{a_{11}}=\frac{a_{22}}{a_{12}}=\frac{a_{23}}{a_{13}}=k$, тогда

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, где в 1-м определителе этой строки (столбца) только первые слагаемые, остальные все без изменений, а во втором определителе в той же строке (столбце) только вторые слагаемые, все остальные без изменений.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta + k0 = \Delta.$$

Это свойство является следствием 3, 4 и 6 свойств.

Свойство 8. Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

О п р е д е л е н и е. Минором элемента a_{ik} определителя n-го порядка называется определитель *(n-1)*, полученный вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых находится данный элемент (i-строка, k-столбец). Обозначается M_{ik}. Величина $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ называется алгебраическим дополнением к элементу a_{ik}.

Докажем 8-е свойство:

с одной стороны:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32};$$

с другой стороны:

$$a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{32}(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = -a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{22}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-$$

$$-a_{32}(a_{11}a_{23}-a_{13}a_{21}) = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{13}a_{21}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-$$

$$-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Следовательно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}.$$

Дополнения к 8-му свойству.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Например, для строк $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$, для столбцов $a_{12}A_{11}+a_{22}A_{21}+a_{32}A_{31}=0$.

Проверим: $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=a_{11}(-M_{21})+a_{12}(M_{22})+a_{13}(-M_{23})=$

$$=-a_{11}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{13}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=$$

$$=-a_{11}(a_{12}a_{33}-a_{13}a_{32})+a_{12}(a_{11}a_{33}-a_{13}a_{31})-$$

$$-a_{13}(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})=0.$$

Таким образом проверяются и другие равенства.

Пример 1.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 351.$$

Вычислить определитель четвертого порядка и выше можно, только используя 8-е свойство определителей.

Пример 1.2.

Для вычисления данного определителя преобразуем его, пользуясь свойствами определителей. Из первой строки вычтем соответствующие элементы третьей строки. Затем разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$=(-3)3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -117.$$

2. МАТРИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

2.1. Определение матрицы

При изучении определителей мы рассматривали таблицы, составленные из чисел: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Эти таблицы называются матрицами, а числа $a_{11}, a_{12} ..., a_{ij}$ - элементами матрицы. Если в матрице количество строк совпадает с количеством столбцов, то такую матрицу называют квадратной, причем число ее строк и столбцов называется порядком матрицы. Матрица, в которой число строк не совпадает с числом столбцов, называется прямоугольной. Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицы, имеющие только одну строку или столбец. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \end{pmatrix}$ называется матрицей - строкой. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ называется матрицей – столбцом.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется определителем матрицы.

Для краткости будем обозначать какой-либо буквой алфавита: *A, B* и т.д., а определитель $|A|$=det *A*. Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то матрица называется невырожденной, а если равен нулю, то вырожденной. Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 0$, значит, *A* – вырожденная матрица, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, |B| = 38$, значит, *B* – невырожденная матрица.

2.2. Равенство матриц. Действия над ними

Две матрицы *A* и *B* называются равными (*A*=*B*), если они имеют одинаковое число строк или одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны. Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то *A*=*B*, если $a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22}$.

Сложение матриц. Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то их суммой называется матрица

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется сумма прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и столбцов. Легко проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному закону: $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Умножение матриц на число. Произведением матрицы A на число μ называется матрица $\mu A=A\mu$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad \mu A=\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}.$$

Точно так же умножаются на число все остальные матрицы.

Произведение матриц. Рассмотрим умножение матриц на примере двух квадратных матриц A и B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C=AB$, элементы которой составлены следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, элемент матрицы–произведения, находящейся на пересечении i-й строки и j-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующий элемент j-го столбца второй матрицы. Эти правила сохраняются и для перемножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы множителя.

Пример 2.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

В результате умножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Пример 2.2.

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot1-1\cdot3 & 3\cdot1-1\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot3 & -1\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону $AB \neq BA$. Легко проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам: $A(BC)=(AB)C$, $(A+B)C=AC+BC$. Рассмотрим матрицу E.

Матрица $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & . & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & . & . & 1\end{pmatrix}$ называется единичной.

Для единичной матрицы выполняется переместительный закон умножения. Если матрица E квадратная, то |E|=1.

Если A и B - две квадратные матрицы одного порядка, то определитель матрицы $C=AB$ равен произведению матриц A и B.

$|C|=|A||B|$.

Пример 2.3.

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix},\quad C=AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},$$

$|A|=5$, $|B|=-2$, $|C|=-10$, $-10=5\cdot(-2)$.

2.3. Обратная матрица

Определение: если A – квадратная матрица, то обратной для нее называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A\cdot A^{-1}=E$ или $A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема. Для того, чтобы квадратная матрица А имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица А была невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Доказательство.

Необходимость. Предположим, что для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Покажем, что в этом случае $|A|\neq 0$.

От противного. Пусть $|A|=0$, то по определению произведения $|A\cdot A^{-1}|=|A||A|^{-1}=0$. А это невозможно в силу определения обратной матрицы: $|A\cdot A^{-1}|=|E|=1$. Следовательно, $|A|\neq 0$.

Достаточность. Для простоты приведем доказательство для случая матрицы третьего порядка. Пусть $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ - невырожденная матрица, т.е. $|A|\neq 0$.

Покажем, что в этом случае для нее существует обратная матрица.

Пусть A_{ik} - алгебраическое дополнение элемента a_{ik}. Матрица A^{-1}, обратная к A, получается следующим образом:

1. Составим матрицу B, заменяя в матрице A каждый ее элемент a_{ik} его алгебраическим дополнением A_{ik}, деленным на $|A|$.

$$B = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{12}/|A| & A_{13}/|A| \\ A_{21}/|A| & A_{22}/|A| & A_{23}/|A| \\ A_{31}/|A| & A_{32}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

2. Составим новую матрицу B^*, поменяв в B местами строки со столбцами (матрица B^* называется транспонированной по отношению к матрице B). Имеем:

$$B^* = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем произведение $A \cdot B^*$:

$$A \cdot B^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}}{|A|} \\ \dfrac{a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}}{|A|} & \dfrac{a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}}{|A|} \end{pmatrix}.$$

По свойству 8 определителей получаем: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$, т.е. $AB^*=E$, откуда $B^*=A^{-1}$, следовательно, если $|A| \neq 0$, обратная матрица существует.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример2.4. Найти A^{-1} к матрице A. Вычислим определитель матрицы и найдем алгебраические дополнения ко всем элементам:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\ |A|=-9.$$

$A_{11}=3,\ A_{21}=-4,\ A_{31}=2,$

$A_{12}=-6,\ A_{22}=2,\ A_{32}=-1,$ $\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}.$

$A_{13}=3,\ A_{23}=-1,\ A_{33}=-4,$

Проверка: по определению обратной матрицы $A\cdot A^{-1}=E.$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/3 & 4/9 & -2/9\\ 2/3 & -2/9 & 1/9\\ -1/3 & 1/9 & 4/9\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1/3+4/3+0 & 4/9-4/9+0 & -2/9+2/9+0\\ -1+4/3-1/3 & 4/3-4/9+1/9 & -2/3+2/9+4/9\\ 0+2/3-2/3 & 0-2/9+2/9 & 0+1/9+8/9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

3.1. Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = C_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = C_m. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

В коэффициенте a_{ik} первый индекс означает номер уравнения, а второй – номер неизвестного $x_{11}x_{21}\ldots$.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если не имеет решения. Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений. Две совместные системы линейных уравнений называются равносильными, если каждое решение первой системы является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой.

Следующие элементарные преобразования переводят систему линейных уравнений в равносильную ей систему:

1) перемена местами двух любых уравнений;

2) умножение обеих частей любого из уравнений на произвольное число, отличное от нуля;

3) прибавление к обеим частям одного из уравнений системы соответствующих частей другого уравнения, умноженных на любое действительное число.

В результате таких элементарных преобразований в системе может появиться уравнение, все коэффициенты которого при неизвестных и свободный член равны нулю. Поскольку такому уравнению удовлетворяют любые значения неизвестных, то это уравнение можно отбросить. А если в уравнении коэффициенты при неизвестных будут равны нулю, а свободный член – нет, то это уравнение не будет удовлетворять никаким значениям неизвестного и, следовательно, полученная система несовместна, а значит, несовместна первоначальная.

3.2. Метод Крамера

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = C_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = C_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = C_3. \end{cases} \tag{3.2.1}$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - будем называть его определителем системы.

Решим систему (3.2.1). Для этого умножим первое уравнение на алгебраическое дополнение A_{11} к элементу a_{11}, второе – на A_{21} к элементу a_{21} и третье уравнение – на A_{31} к элементу a_{31}:

$$a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + a_{13}A_{11}x_3 = A_{11}C_1,$$
$$a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + a_{23}A_{21}x_3 = A_{21}C_2,$$
$$a_{31}A_{31}x_1 + a_{32}A_{31}x_2 + a_{33}A_{31}x_3 = A_{31}C_1.$$

Сложим все эти уравнения:

$$x_1(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}) + x_2(a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31}) +$$
$$+ x_3(a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31}) = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31}.$$
$$x_1 \cdot \Delta = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31}.$$

Рассмотрим

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & a_{13} \\ C_2 & a_{22} & a_{23} \\ C_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31}, \; x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1} \Rightarrow x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta.$$

Аналогично получим для x_2 и x_3:

$x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta, \; x_3 = \Delta_{x_3} / \Delta$ - формулы Крамера, где

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 & a_{13} \\ a_{21} & C_2 & a_{23} \\ a_{31} & C_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \; \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & C_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$ и по крайней мере один из $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3} \neq 0$, то система (3.2.1) не имеет решения, т.е. несовместна. Действительно, пусть для примера $\Delta_{x_1} \neq 0$.

$x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, т.к. $\Delta = 0$, то $x_2 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, невозможно, т.к. $\Delta_{x_1} \neq 0$.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система либо имеет множество решений, либо несовместна.

3.3. Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений (3.2). Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрицу системы и $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрицу-столбец из неизвестных, $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ - матрицу-столбец из свободных членов. Найдем произведение матриц A и X.

$$A\cdot X=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Используя определения равенства матриц, систему линейных уравнений (3.2.1) можно записать в таком виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

или короче

$$A\cdot X=C \qquad (3.3.1)$$

- матричное уравнение.

Если A – невырождена, т.е. $|A|\neq 0$, то уравнение (3.3.1) решается следующим образом: $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot C$. Пользуясь сочетательным законом для перемножения матриц, получаем: $(A^{1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot C, E\cdot X=A^{-1}\cdot C, X=A^{-1}\cdot C$ - решение матричного уравнения.

Пример 3.1.

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x_1+2x_2=10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13. \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

Составим обратную матрицу к матрице системы

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = 4,\ x_2 = 3,\ x_3 = 5.$$

3.4. Метод Гаусса (метод последовательного исключения)

Вернемся к нашей первой системе линейных уравнений. Допустим, что в системе (3.1.1) коэффициент при $x_1 - a_{11} \neq 0$. Исключим сначала x_1 из всех уравнений, кроме первого. Для этого, прежде всего, разделим обе части первого уравнения на $a_{11} \neq 0$, тогда получаем новую систему, равносильную данной.

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}/a_{11}x_2 + ... + a_{1n}/a_{11}x_n = C_1/a_{11}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = C_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = C_m. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Умножим теперь первое уравнение на a_{21} и вычтем из второго уравнения. Затем умножим первое уравнение на a_{31} и вычтем из третьего уравнения и т.д. В результате получим равносильную систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{12}x_2 + ... + a'_{1n}x_n = c'_1, \\ a'_{22}x_2 + ... + a'_{2n}x_n = c'_2, \\ .... \\ a'_{m2}x_2 + ... + a'_{mn}x_n = c'_n. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Затем разделим второе уравнение на $a'_{22} \neq 0$, умножим его на a'_{32} и вычтем из третьего уравнения, затем на a'_{42} и вычтем его из четвертого уравнения и т.д., т.е. избавимся от x_2 в уравнениях, начиная с третьего.

Если, продолжая этот процесс, мы придем к системе, содержащей уравнение, в котором все коэффициенты в левой части равны 0, а свободный член отличен от 0, то эта система несовместна. В том случае, когда система совместна, мы придем либо к системе

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + ... + b_{1n}x_n = c''_1 \\ x_2 + b_{23}x_3 + ... + b_{2n}x_n = c_2'' \\ .... \\ x_p + ... + b_{pn}x_n = c''_p \end{array}\right\}, \tag{3.4.3}$$

$$p < n$$

либо к системе

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n = c_1'' \\ x_2 + b_{23}x_3 + \ldots + b_{2n}x_n = c_2'' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = c_n'' \end{array}\right\}. \qquad (3.4.4)$$

Система вида (3.4.3) называется ступенчатой, а система (3.4.4) – треугольной. В случае треугольной системы из последнего уравнения находим x_n, подставляем в предпоследнее, находим x_{n-1} и т.д. до x_1. Таким образом, если данная система после элементарных преобразований приводится к треугольной системе, то это означает, что система совместна и определена.

Если же данная система приводится к ступенчатой, то система совместна и не определена, т.к. имеет множество решений.

Все элементарные преобразования можно проверить и над матрицами, составленными из коэффициентов системы.

Системе (3.2.1) соответствуют две матрицы – A и B.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \ldots a_{3n} \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} C_1 \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} C_2 \\ a_{31} & a_{32} \ldots a_{3n} C_3 \end{pmatrix}.$$

A – матрица системы, B – расширенная матрица системы.

При решении системы методом Гаусса элементарные преобразования системы заменяются соответствующими элементарными преобразованиями, выполняемыми над расширенной матрицей B.

Например: $\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & -0,5 \\ 0 & -1,5 & 2,5 & 4,5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ & 1 & -1 & -1 \\ & -1,5 & 2,5 & 4,5 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Вернемся к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 0,5x_2 - 0,5x_3 = 0,5, \\ x_2 - x_3 = 1, \\ x_3 = 3, \end{cases} \to x_3 = 3,\ x_2 = -1 + 3 = 2,\ x_1 = 0,5 - 0,5x_2 + 0,5x_3 = 1.$$

4. ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

4.1. Вектор. Операции над векторами. Проекция вектора на ось. Независимость векторов. Базис. Разложение вектора по ортам

Вектором называется направленный отрезок прямой, имеющий определенную длину, т.е. отрезок определенной длины, у которого одна из ограничивающих его точек принимается за начало, а вторая – за конец: $\vec{AB}=\vec{a}$.

Длина вектора $\vec{AB}$ называется его модулем $|\vec{AB}|$ или $|\vec{a}|$. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенные на одной прямой или на параллельных прямых, называются коллинеарными. Два вектора равны, если они сонаправлены, коллинеарны и их модули равны: $\vec{a}=\vec{b}$.

Линейными операциями называются операции сложения и вычитания векторов и умножения вектора на число.

Сумма векторов: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ соединяет начало первого слагаемого с концом второго: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (рис. 4.1).

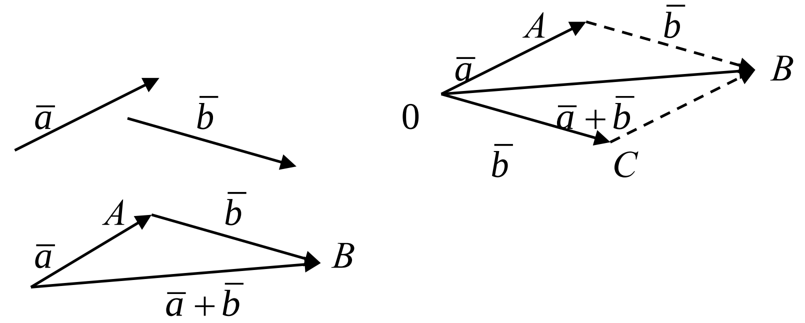


Рис. 4.1

Сумма векторов обладает сочетательным законом $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)+\overline{c}=\overline{a}+\left(\overline{b}+\overline{c}\right)$. Поэтому сумму трех векторов записывают просто $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$. Ее можно получить следующим образом. Из произвольной точки O откладывается вектор, равный первому слагаемому вектору. К концу первого вектора присоединяется начало второго, к концу второго – начало третьего. Вектор, соединяющий начало первого вектора с концом последнего, является суммой данных векторов. Подобным же образом строится сумма любого конечного числа векторов (рис. 4.2).

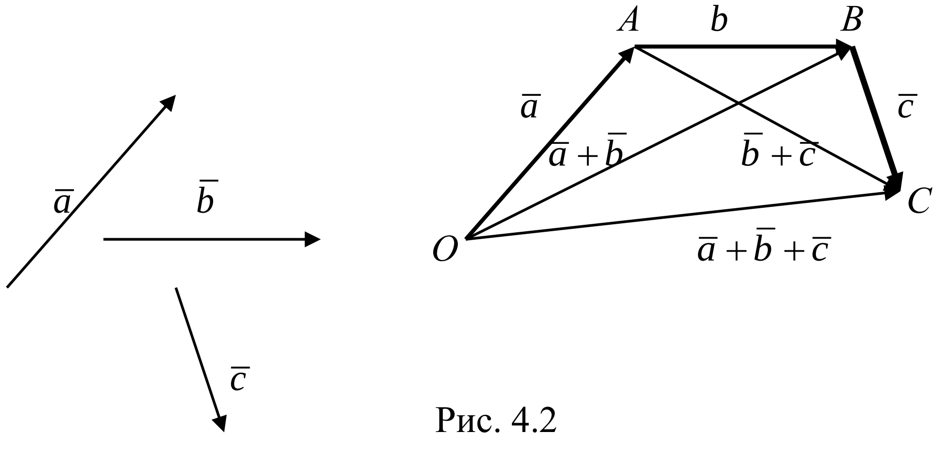


Рис. 4.2

Если при сложении нескольких векторов конец последнего вектора совпадает с началом первого, то сумма вектора равна нуль-вектору. Очевидно, что для любого вектора имеет место равенство $\bar{a} + 0 = \bar{a}$.

Разность векторов: $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$, $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$ (рис. 4.3).

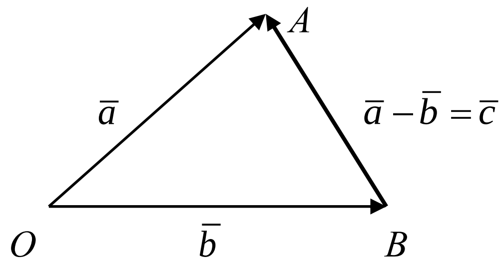


Рис. 4.3

Умножение вектора на число

Даны вектор $\vec{a}$ и число λ. Произведением вектора на число называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный $\vec{a}$ и имеющий длину $|\vec{c}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и сонаправленный $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно направленный, если $\lambda < 0$. Из определения умножения вектора на число следует, что если $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, то векторы $\vec{b}$ и $\vec{a}$ коллинеарны, очевидно, что и обратно, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Таким образом, два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

Распределительный закон

$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$; $(\lambda_1 + \lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{a}$.

Угол между двумя векторами

Пусть в пространстве даны два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим из произвольной точки C векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Углом между двумя векторами называется наименьший угол, на который надо повернуть один из векторов до его полного совпадения со вторым (рис. 4.4).

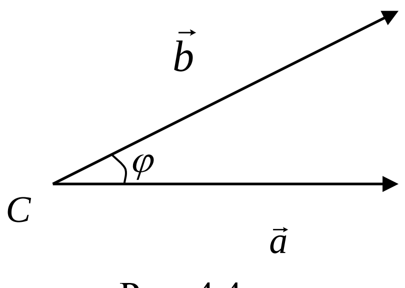


Рис. 4.4

Проекция вектора на ось

Пусть l - некоторая ось, $\vec{AB}$ - вектор, произвольно расположенный в пространстве.

A_1 – проекция точки A на l, B_1 – проекция точки В на l. Точка A_1 имеет координату x_1, точка B_1 – координату x_2 (рис. 4.5).

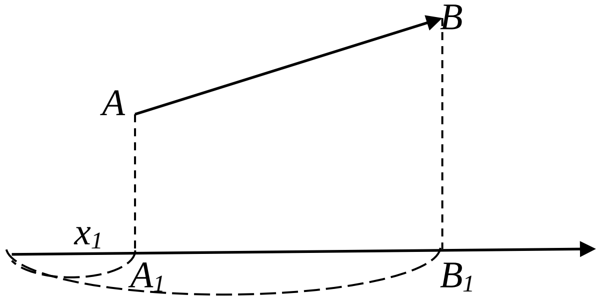


Рис. 4.5

Разность x_2-x_1 между координатами проекций конца и начала вектора $\vec{AB}$ на ось l называется проекцией вектора $\vec{AB}$ на эту ось (рис. 4.6).

Если $\vec{AB}$ образует с осью l острый угол, то $x_2-x_1>0$ ($x_2>x_1$), проекция положительная.

Если угол между $\vec{AB}$ и l – тупой, то $x_2<x_1$ и проекция x_2-x_1 – отрицательна.

Если $\vec{AB}$ перпендикулярен к l, то $x_2=x_1$ и проекция x_2-x_1 равна нулю. Обозначение $\text{пр}_l\vec{AB}$.

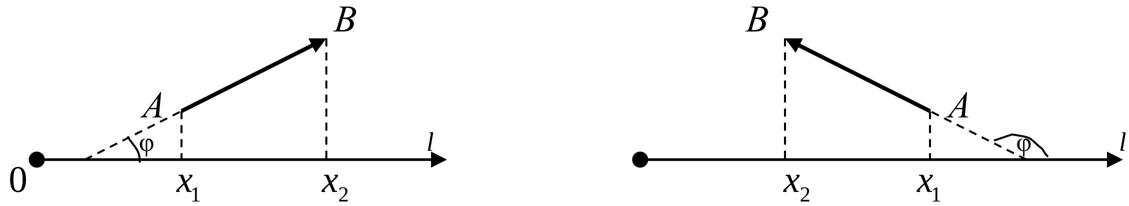


Рис. 4.6

Т е о р е м а 1 . Проекция вектора $\vec{a}$ на ось l равна модулю вектора а, умноженному на косинус угла φ между векторами и осью:

$$\text{пр}_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi;\ x=|AB|\cos\varphi.$$

Доказательство. Проекция вектора $x_2 - x_1$ не изменится при любом его переносе параллельно самому себе, так как при этом x_2 и x_1 изменяются на одну и ту же величину. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда начало вектора совпадает с началом O оси l. Так как координата начала равна нулю, то

$$\text{пр}_l\vec{a} = x - 0 = 0,$$

где x – координата проекции вектора. По определению косинуса $\cos\varphi = x/|a|$, откуда $x = |a|\cos\varphi$ или $\text{пр}_l\vec{a} = |a|\cos\varphi$, что и требовалось доказать (рис. 4.7).

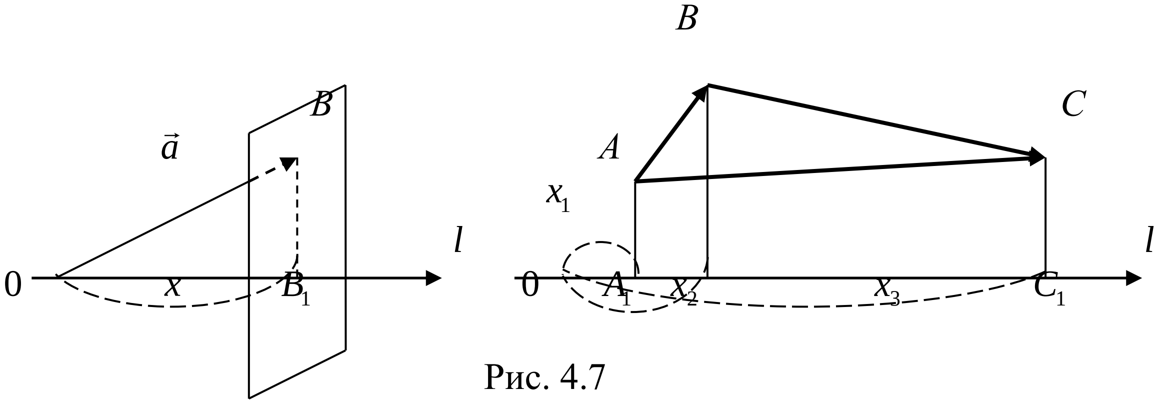


Рис. 4.7

Свойства:

1. пр$_l$($\vec{a}+\vec{b}$)=пр$_l\vec{a}$ +пр$_l\vec{b}$.
2. пр$_l$($\lambda\,\vec{a}$)=λ пр$_l\vec{a}$.

Линейная зависимость векторов. Базис

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ называются линейно зависимыми, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$, не равные нулю, такие, что выполняется равенство:

$$\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\,\vec{a}_2+\lambda_3\,\vec{a}_3+\ldots+\lambda_k\,\vec{a}_k=0. \qquad (4.1.1)$$

Векторы $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$ называются линейно независимыми, если выполняется равенство (4.1.1) только при $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$.

Предположим, что $\lambda_1\neq 0$, тогда из (4.1.1) получим:

$$\vec{a}_1=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\vec{a}_2-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\vec{a}_3-\ldots-\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\vec{a}_k.$$

Пусть $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}=\mu_2$, $\frac{\lambda_3}{\lambda_1}=\mu_3$ и т.д., тогда $\vec{a}_1=\mu_2\vec{a}_2+\mu_3\vec{a}_3+\ldots+\mu_k\vec{a}_k$.

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\ldots,\vec{a}_k$. Таким образом, если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них всегда можно представить в виде линейной комбинации остальных, и наоборот.

Теорема 2. (без доказательства). Всякие три вектора *a, b, c* на плоскости линейно зависимы.

Для двух векторов *a и b*, если они коллинеарны, то $a=\lambda b$, а значит, *a* является линейной комбинацией вектора *b*, т.е. *a* и *b* линейно зависимы, отсюда следует:

Теорема 3. Для того, чтобы *a* и *b* были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были неколлинеарны.

Теперь рассмотрим векторы в пространстве.

Три вектора называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или параллельны одной плоскости.

Как и в случае плоскости, можно показать, что:

а) 4 вектора и больше в пространстве линейно зависимы;

б) для того, чтобы 3 вектора были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы они были некомпланарны.

Базисом на плоскости называются два любых линейно независимых вектора. b и c – неколлинеарны, а значит, линейно независимы и образуют базис, тогда третий вектор $\vec{a}$ линейно выражается через векторы базиса: $\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c}$ - говорят, что вектор a разложен по базису, образованному векторами b и c. Числа λ_1 и λ_2 называются аффинными координатами $\vec{a}$ в этом базисе $\vec{a}_1 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

Базисом в пространстве называют 3 любых линейно независимых вектора: $\vec{a} = \lambda_1\vec{b} + \lambda_2\vec{c} + \lambda_3 d$.

Прямоугольный декартов базис. Разложение вектора по осям координат

Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве $oxyz$. На каждой из осей выберем единичный вектор, направления которых совпадают с направлением осей.

Эти три единичные взаимно перпендикулярные векторы называются ортами, т.к. i, j, k не компланарны, то они линейно независимы, а значит, образуют базис, который называется декартовым ортогональным базисом

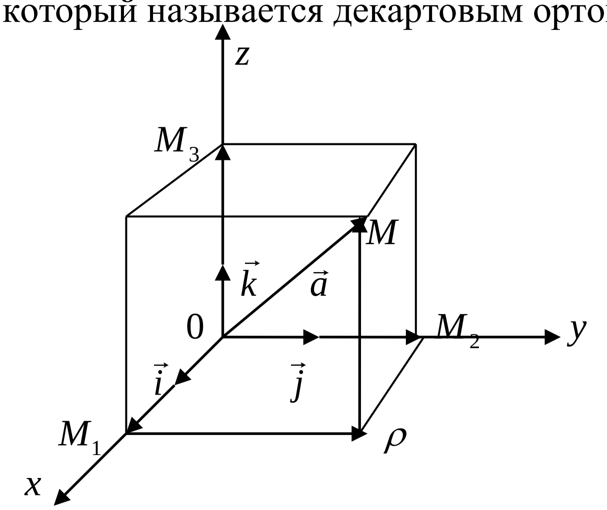


Рис. 4.8

Рассмотрим вектор $\vec{a}$ в пространстве, перенесем его в начало координат $\vec{OM} = \vec{a}$.

$\vec{OM} = \vec{OM}_1 + \vec{OM}_2 + \vec{PM}, \vec{PM} = \vec{OM}_3$.

$\vec{OM}_1 = a_{x\vec{i}} = np_{ox}\vec{OM} \cdot \vec{x},\ \vec{OM}_2 = a_{y\vec{j}} = np_{oy}\vec{OM} \cdot \vec{y}, \vec{OM}_3 = a_{z\vec{k}} = np_{oz}\vec{OM} \cdot \vec{k}.$

$a = a_{x\vec{i}} + a_{y\vec{j}} + a_{z\vec{k}}$ (*) – эта формула для разложения вектора по декартову базису.

Пусть точка М имеет координаты x, y, z, тогда $\vec{OM} = xi + yj + zk$. Проекции вектора a на оси координат называются прямоугольными координатами a_x, a_y, a_z. Так как $\vec{a}$ является диагональю параллелограмма, то $a^2 = |OM_1|^2 + |OM_2|^2 + |OM_3|^2, |\vec{a}|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2, |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

Рассмотрим теперь вектор $\vec{AB}$.

Координаты $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$. Из проекции вектора на ось следует, что

$$np_{ox}\vec{AB} = x_2 - x_1,\ np_{oy}\vec{AB} = y_2 - y_1,\ np_{oz}\vec{AB} = z_2 - z_1.$$

$$\vec{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k},$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

4.2. Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$ означает: найти на этом отрезке такую точку М, что имеет место равенство:

$$\frac{M_1M}{MM_2} = \lambda, \text{ или } M_1M = \lambda MM_2.$$

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$, а точка $M(x, y, z)$ – текущие координаты которой надо найти.

Рассмотрим $\overline{M_1M}$ и $\overline{MM_2}$. Так как $\lambda > 0$, то $\overline{M_1M} = \lambda\overline{MM_2}$ или $(x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k}, = \lambda(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}.$

Из равенств векторов следует равенство их проекций, значит:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x_1) \to x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y_1) \to y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z - z_1 = \lambda(z_2 - z_1) \to z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка М является серединой M_1M_2, то $M_1M = MM_2$ и, значит, $\lambda = 1$. Тогда координаты точки М – это среднее арифметическое соответствующих координат концов отрезков:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

4.3. Направляющие косинусы

Направление вектора в пространстве определяется углами, которые вектор составляет с осями координат. Косинусы этих углов $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называют направляющими косинусами вектора.

Пусть дан вектор $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Тогда $x = np_x a = |a|\cos\alpha$, $y = np_y a = |a|\cos\beta$, $z = np_z a = |a|\cos\gamma$.

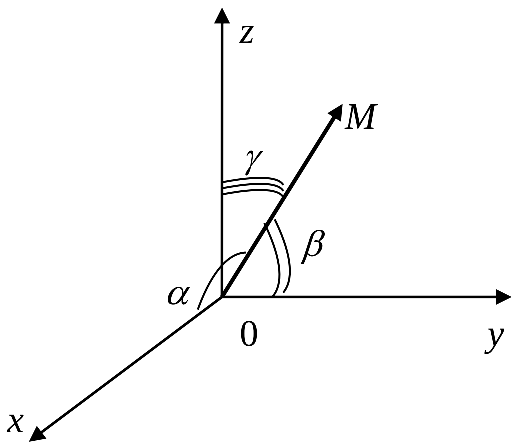


Рис. 4.9

$\cos\alpha = \dfrac{x}{|a|}, \cos\beta = \dfrac{y}{|a|}, \cos\gamma = \dfrac{z}{|a|}$, так как $|a| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Пример 4.1.

Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1,\ 2,\ 3)$, $B(2,\ 4{,}5)$, $\overrightarrow{AB} = (1,\ 2,\ 2)$.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3}, \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

Условие коллинеарности. Пусть векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ и $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ коллинеарны. Тогда если $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, то $x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} = \lambda x_2\vec{i} + \lambda y_2\vec{j} + \lambda z_2\vec{k}$, $x_1 = \lambda x_2,\ y_1 = \lambda y_2,\ z_1 = \lambda z_2,\ \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2} = \lambda$.

Таким образом, для того, чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их соответствующие координаты были пропорциональны.

4.4. Скалярное произведение и его свойства

О п р е д е л е н и е . Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha .$$

Рассмотрим $пр_{\vec{a}}\vec{b}$ и $пр_{\vec{b}}\vec{a}$.

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\alpha, \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\beta .$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{a}}\, \vec{b} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}|},$$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} \Rightarrow \text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}.$$

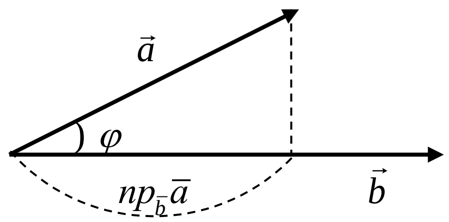


Рис. 4.10

В частном случае, если $|\vec{a}| = 1$, то $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$ проекция вектора на единичный вектор равна скалярному произведению векторов.

Рассмотрим некоторые свойства скалярного произведения.

1. Скалярное произведение обладает переместительным свойством:

$(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a}),\ (\vec{a}, \vec{b}) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\alpha = (\vec{b}, \vec{a})$.

2. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя:

$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \lambda\vec{b})$.

Пусть $\lambda > 0$,

$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = (\lambda\vec{a}, \vec{b}) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha,$

$\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\lambda\vec{a}, \vec{b})$ *и т.д.*

3. Скалярное произведение обладает распределительным свойством:

$((\vec{a}, \vec{b}), \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}),$

$((\vec{a}, \vec{b}), \vec{c}) = |\vec{c}|\, np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{c}|(np_{\vec{c}}\vec{a} + np_{\vec{c}}\vec{b}) = |\vec{c}|\, np_{\vec{c}}\vec{a} + |\vec{c}|\, np_{\vec{c}}\vec{b} =$

$= (\vec{c}, \vec{a}) + (\vec{c}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{c}) + (\vec{b}, \vec{c}).$

Если скалярное произведение равно нулю, то равен нулю либо один из векторов, либо $\cos\alpha$, а это означает, что $\alpha = 90^0$, или $\vec{a} \perp \vec{b}$. Таким образом, отсюда вытекает условие перпендикулярности двух векторов: для того, чтобы $\vec{a} \perp \vec{b}$, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение этих векторов равнялось нулю.

Теперь рассмотрим скалярное произведение вектора самого на себя: $(\vec{a}, \vec{a}) = |\vec{a}|^2 \cos 0 = |\vec{a}|^2$, т.о. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})} = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Пример 4.2. Дан вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}, |\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = 5, cos(\vec{a}, \vec{b}) = 60^0$. Найти $|\vec{c}|$.

$$|\vec{c}|=\sqrt{\vec{c}^{\,2}}=\sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b}\,)^2}=\sqrt{4\vec{a}^{\,2}+12(\vec{a},\vec{b}\,)+9\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{4|\vec{a}|^2+12|\vec{a}||\vec{b}|cos\varphi+9|\vec{b}|^2}=$$
$$=\sqrt{4\cdot16+12\cdot4\cdot5\cdot cos60^0+9\cdot25}=\sqrt{64+120+225}=\sqrt{409}=20{,}22.$$

Рассмотрим скалярное произведение векторов, если векторы разложены по ортам: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.

$$(\vec{a},\vec{b})=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2(\vec{i},\vec{i})+x_1y_2(\vec{i},\vec{j})+x_1z_2(\vec{i},\vec{k})+$$
$$+y_1z_2(\vec{j},\vec{i})+y_1y_2(\vec{j},\vec{j})+y_1z_2(\vec{j},\vec{k})+z_1x_2(\vec{k},\vec{i})+z_1y_2(\vec{k},\vec{j})+z_1z_2(\vec{k},\vec{k})=$$
$$=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Скалярное произведение двух векторов равно сумме парных произведений их соответствующих координат.

Условие перпендикулярности $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b}\,)=0\Rightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$

Пример 4.3. При каком m вектор $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$ перпендикулярен вектору $\vec{b}=\vec{i}-5\vec{j}+m\vec{k}$?

Из условия перпендикулярности: $(\vec{a},\vec{b}\,)=0,\ 2\cdot1+3\cdot(-5)-1\cdot m=0,$ $2-15-m=0,\ m=-13.$

Косинус угла между векторами: из определения скалярного произведения векторов $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, $\cos\varphi=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

Пример 4.4. Найти внутренние углы треугольника ΔABC, где $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(2, 0, 8)$.

$$\vec{AB}(-1,2,-1),\ \vec{AC}=(2,1,1),\ \vec{BA}=(1,-2,1),\ \vec{BC}=(3,-1,2).$$

$$\cos\alpha=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{\left|\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right|}=\frac{-2+2-1}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+1}}=-\frac{1}{6};$$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\left|\vec{BA}\cdot\vec{BC}\right|}=\frac{3+2+2}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9+1+4}}=\frac{7}{\sqrt{6\cdot14}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}};$$

$\varphi=\pi-\alpha-\beta$, где $\alpha=\arccos\left(-\dfrac{1}{6}\right)$, $\beta=\arccos\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

4.5. Векторное произведение. Площадь треугольника. Смешанное произведение. Объем. Компланарность

Определение. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который определяется следующим образом:

1. Модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|sin\alpha.$

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости этого параллелограмма, т.е. $\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$.

3. Направление вектора $\vec{c}$: если поворот по кратчайшему пути от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ совершается против часовой стрелки, то $\vec{c}$ направлен вверх перпендикулярно к плоскости параллелограмма. Если по часовой стрелке, то перпендикулярно вниз. Обозначается $[\vec{a}\times\vec{b}]$.

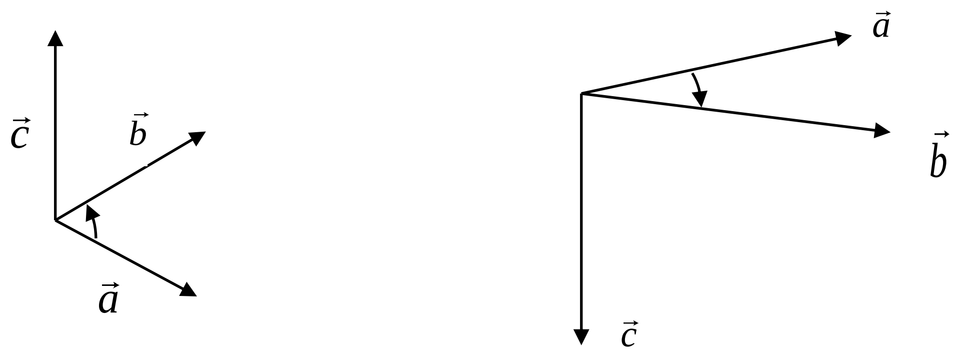


Рис. 4.11

Свойства векторного произведения

1. $[\vec{a}\times\vec{b}] = -[\vec{b}\times\vec{a}]$. Это следует из определения векторного произведения.

2. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т.е.

$$\lambda[\vec{a}\times\vec{b}] = [\lambda\vec{a}\times\vec{b}] = [\vec{a}\times\lambda\vec{b}],$$

$$\lambda > 0:\ |\lambda[\vec{a}\times\vec{b}]| = |\lambda||[\vec{a}\times\vec{b}]| = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha,$$

$$|[\lambda\vec{a}\times\vec{b}]| = \lambda\vec{a}\times|\vec{b}|\sin(\lambda\vec{a},\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha.$$

Вектор $\lambda[\vec{a}\times\vec{b}]$ перпендикулярен $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вектор $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}]$также перпендикулярен к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.к. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\lambda\vec{a}$ и $\vec{b}$ лежат в одной плоскости, следовательно, векторы $[\vec{a}\times\vec{b}]$ и $[\lambda\vec{a}\times\vec{b}]$ коллинеарны.

3. Векторное произведение обладает распределительным свойством, т.е. $[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})] = [\vec{a}\times\vec{b}] + [\vec{a}\times\vec{c}]$.

4. Если векторное произведение двух векторов равно нулевому вектору, то либо равен нулю один из перемножаемых векторов, либо векторы коллинеарны. В частности, $[\vec{a}\times\vec{a}] = 0$.

Пример 4.5. Найти

$$(2\vec{a}+3\vec{b})\times(\vec{a}-2\vec{b}) = [2\vec{a}\times\vec{a}] + [3\vec{b}\times\vec{a}] - [2\vec{a}\times 2\vec{b}] -$$

$$-[3\vec{b}\times 2\vec{a}] = 3[\vec{b}\times\vec{a}] - 4[\vec{a}\times\vec{b}] = 7[\vec{b}\times\vec{a}].$$

Пусть даны векторы $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Найдем $[\vec{a}\times\vec{b}]$, но предварительно рассмотрим попарные произведения векторов $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$$[\vec{i}\times\vec{j}]=\vec{k},\ [\vec{j}\times\vec{k}]=\vec{i},\ [\vec{k}\times\vec{i}]=\vec{j},\ \vec{i}\times\vec{i}=0,\ \vec{j}\times\vec{j}=0,\ \vec{k}\times\vec{k}=0.$$

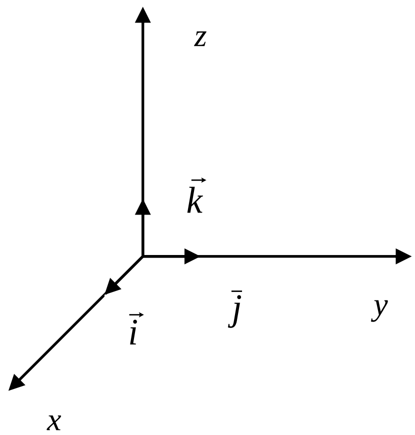


Рис. 4.12

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1y_2[\vec{i}\times\vec{j}]+x_1z_2[\vec{i}\times\vec{k}]+$$

$$+y_1x_2[\vec{j}\times\vec{i}]+y_1z_2[\vec{j}\times\vec{k}]+z_1x_2[\vec{k}\times\vec{i}]+z_1y_2[\vec{k}\times\vec{j}]=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+$$

$$+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=\vec{k}(x_1y_2-y_1x_2)-\vec{j}(x_1z_2-z_1x_2)+\vec{i}(y_1z_2-z_1y_2)=$$

$$=i\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Пример 4.6. Найти $[\vec{a}\times\vec{b}]$, если $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$.

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 2 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=11\vec{i}-11\vec{j}-11\vec{k}.$$

Площадь треугольника можно найти, используя векторное произведение векторов: $S_\Delta=\frac{1}{2}S_{\square}=\frac{1}{2}[\vec{a}\times\vec{b}]$.

Пример 4.7. (решить самостоятельно)

Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(2, 3, 1)$, $B(5, 6, 3)$, $C(7, 1, 10)$.

Смешанное произведение векторов.

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, составленное следующим образом: $([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})$. Такое произведение называется смешанным произведением трех векторов. Смешанное произведение – число. Найдем его:

$$[\vec{a}\times\vec{b}]=\vec{i}\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix},$$ так как $\vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, то

$$\left([\vec{a}\times\vec{b}],\ \vec{c}\right)=x_3\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}-y_3\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}+z_3\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения векторов.

1. $([\vec{b}\times\vec{a}],\vec{c})=-([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})$.

$$([\vec{b}\times\vec{a}],\vec{c})=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=-([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=([\vec{b}\times\vec{c}]\vec{a})=$$

$$=([\vec{c}\times\vec{a}]\vec{b})=-([\vec{b}\times\vec{a}]\vec{c})=-([\vec{a}\times\vec{c}]\vec{b})=-([\vec{c}\times\vec{b}]\vec{a}).$$

$$\overrightarrow{abc}=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c}).$$

Геометрический смысл смешанного произведения.

Рассмотрим три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, не лежащие в одной плоскости. Построим параллелепипед по этим трем векторам.

Найдем $[\vec{a}\times\vec{b}]=S_{\square}=\delta$, $\overrightarrow{abc}=([\vec{a}\times\vec{b}],\vec{c})=\delta|\vec{c}|\cos\varphi,\ \varphi<\pi/2$, и, обозначая высоту параллелепипеда через h, найдем ее: $h=|\vec{c}|\cos\varphi$.

$\overrightarrow{abc}=S_{осн}h=V$, если $\varphi>\pi/2$, то $\cos\varphi<0, |\vec{c}|\cos\varphi=-h,\ \vec{a}\vec{b}\vec{c}=\pm V$, или $V=\pm(\vec{a}\vec{b}\vec{c})=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

Условие компланарности двух векторов

Пусть три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны, т. е. лежат в одной плоскости, тогда $\vec{d}=[\vec{a}\times\vec{b}]\perp\vec{c}$ и, следовательно, $\overrightarrow{abc}=0$. Итак, для того, чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю, т. е. $(abc)=0$.

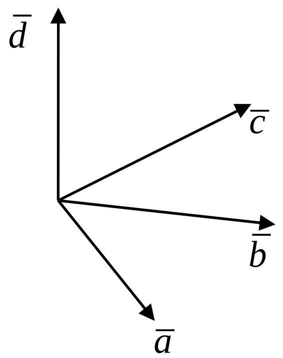


Рис. 4.13

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Пример 4.8. Показать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ - компланарны.

$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0$, следовательно, векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - компланарны.

5. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

5.1. Уравнение прямой с нормальным вектором. Общее уравнение прямой

Выведем уравнение прямой линии в декартовой системе координат, т.е. найдем такое уравнение, которому будут удовлетворять координаты любой точки, лежащей на этой прямой, и не удовлетворять координатам точек вне этой прямой.

Рассмотрим на плоскости *xoy* произвольную прямую *l* и перпендикулярно к ней вектор $N = A\vec{i} + B\vec{j}$.

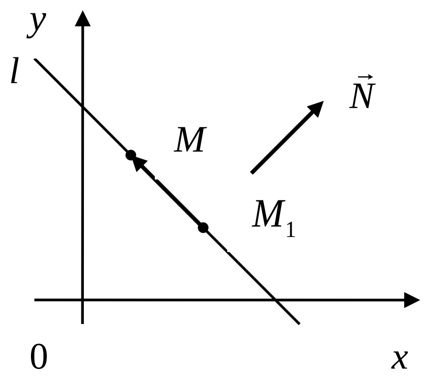


Рис. 5.1

Возьмем точку $M_1(x_1, y_1)$ на *l, M*(*x, y*) – любая точка на прямой *l*. По условию вектор *N* перпендикулярен $\overrightarrow{M_1M}$, а $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\bar{i} + (y - y_1)\bar{j}$, значит, их скалярное произведение равно нулю.

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0. \qquad (5.1.1)$$

Полученному уравнению удовлетворяют координаты любой точки *M(x,y)*, лежащей на этой прямой. Пусть $M_2(x_2, y_2) \notin l$, тогда M_1M_2 не перпендикулярна *N*, а значит, $\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{N} \neq 0$, т.е. ее координаты не удовлетворяют уравнению (5.1.1). Значит, полученное уравнение и есть уравнение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной данному вектору *N*, где $\vec{N}$ называется нормальным вектором прямой.

Пример 5.1. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(-1{,}3) \perp \vec{N}(2{,}1), 2(x+1) + 1(y-3) = 0, 2x + y - 1 = 0.$

Вернемся к уравнению (1): $Ax - Ax_1 + By - By_1 = 0.$

$Ax + By + (-Ax_1 - By_1) = 0,\ (-Ax_1 - By_1)$ обозначим С, тогда

$$Ax + By + C = 0. \qquad (5.1.2)$$

Уравнение (5.1.2) называется общим уравнением прямой. Исследуем общее уравнение прямой:

а) если C=0, то прямая проходит через начало координат ($x=0,\ y=0$), $Ax+By=0$;

б) $A=0, By+C=0,\ y=-C/B$ - прямая параллельна ox;

с) $B=0, Ax+C=0, x=-C/A$ - прямая параллельна oy.

5.2. Точка пересечения прямых. Построение прямой

Пусть даны две прямые $Ax+By+C=0,\ A_1x+B_1y+C_1=0$ и требуется найти их точки пересечения.

Так как точка принадлежит каждой из этих двух прямых, то ее координаты должны удовлетворять как уравнению первой прямой, так и уравнению второй прямой. Следовательно, для того, чтобы найти точку пересечения двух прямых, надо решить систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ A_1x+B_1y+C_1=0. \end{cases}$$

Как построить прямую? Пусть $A\neq 0,\ B\neq 0$, для построения прямой надо найти координаты двух любых точек, удовлетворяющих уравнению прямой, проще – найти точки пересечения с осями координат: $Ox \div y=0,\ \ x=-C/A,$ $Oy \div x=0,\ \ y=-C/B.$

5.3. Направляющий вектор прямой. Каноническое уравнение прямой, уравнение прямой, проходящей через две точки

Рассмотрим на плоскости XOY прямую l.

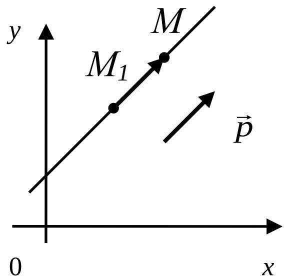


Рис. 5.2

Ее положение вполне можно определить заданием какой-либо точки $M_1(\,x_1,y_1\,)$ и вектора $\vec{p}=m\vec{i}+n\vec{j}$, параллельного l или лежащего на ней. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка, лежащая на l. Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{p}$, так как $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1)\bar{i}+(y-y_1)\bar{j}$ параллелен $\vec{p}$, то

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}. \qquad (5.3.1)$$

Это уравнение называется каноническим уравнением прямой.

З а м е ч а н и е . Если l параллельна Оy, то уравнение примет вид $x = x_1$, а вектор $\vec{p}(0, n)$, формально каноническое уравнение l будет такое: $\frac{x - x_1}{0} = \frac{y - y_1}{n}$. Аналогично для l, параллельной Оx: $\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{0} (y = y_1)$.

Пусть $M_2(x_2, y_2) \in l$. Рассмотрим $\overrightarrow{M_1M_2}$. Так как $\overrightarrow{M_1M_2} \in l$, то мы его можем принять за направляющий вектор $\vec{p}$, тогда каноническое уравнение прямой, проходящей через M_1 и параллельной $\vec{p}$, примет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{5.3.2}$$

Это уравнение называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

Пример 5.2. $A(1, 2)$, $B(-2, 3)$. Написать уравнение прямой AB.

$\frac{x - 1}{-3} = \frac{y - 2}{1}$, или $x - 1 = -3y + 6,\ x + 3y - 7 = 0.$

5.4. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Пучок прямых

Пусть на плоскости xoy дана прямая l, пересекающая ось Ox в точке M.

Углом α Ox и l будем называть наименьший угол, на который нужно повернуть Ох против часовой стрелки до совпадения с l. Если l параллельна Ox, то $\alpha = 0$. Пусть $M_1(x_1, y_1) \in l$. Тогда прямая l проходит через две точки M_1 и M_2 и ее уравнение:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \to y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1), \text{ но } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha,$$

Следовательно, $y - y_1 = tg\alpha(x - x_1)$. Обозначим $tg\alpha = k$, тогда $y - y_1 = k(x - x_1)$ - это уравнение пучка прямых, а k называется угловым коэффициентом прямой.

Множество всех прямых, проходящих через точку М плоскости, называется пучком прямых, а М – центром пучка.

Пусть прямая l составляет с осью Ox угол α, пересекает Oy в точке $B(0, b)$.

Тогда $y = k(x - 0)b,\ y = kx + b$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом, а b – отрезок, отсекаемый прямой на оси Oy.

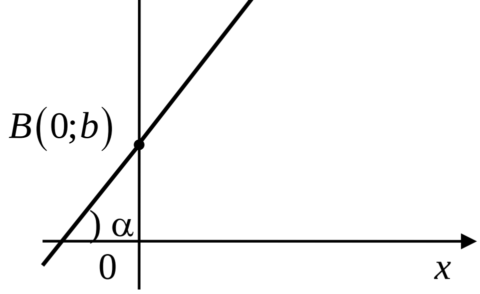


Рис. 5.3

Исследуем уравнение $y = kx + b$:

а) если $b = 0$, $y = kx$ - прямая проходит через начало координат;

б) если $k = 0$, $y = b$ - прямая, параллельна оси Ox;

в) если $x = 0, b = 0,\ y = 0$ - ось Ox.

Пример 5.3. $M(2, -1)$, $\alpha = \pi/3$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M под углом α к оси OX. (решить самостоятельно)

Вернемся к общему уравнению прямой на плоскости: разрешим уравнение $Ax + By + C = 0$ относительно y, $Ax + C = -By,\ y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$.

Следовательно, $k = -\dfrac{A}{B},\ b = -\dfrac{C}{B}$.

Пример 5.4. $2y-2x+3=0$, найти k, b.

$tg\alpha = k = -2/(-2) = 1,\ \alpha = \pi/4,\ b = -3/(-2) = 1{,}5.$

5.5. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности

Пусть две пересекающиеся в точке M прямые l_1 и l_2 определяются соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$.Найдем тангенс угла φ между ними. Мы должны предположить, что данные прямые не перпендикулярны, так как иначе $tg\varphi$ не существовал бы. Пусть прямая l_1 образует с осью абсцисс угол α_1, а прямая l_2 - угол α_2. Проведя через точку M, в которой пересекаются прямые l_1 и l_2, прямую, параллельную оси Ox, видим, что $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$.

Найдем

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 tg\alpha_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}. \qquad (*)$$

$\varphi = \alpha_2 - \alpha_1, l_1 : y = k_1x + b_1,\ l_2 : y = k_2x + b_2.$

Угол φ отсчитывается в направлении от l_1 к l_2.

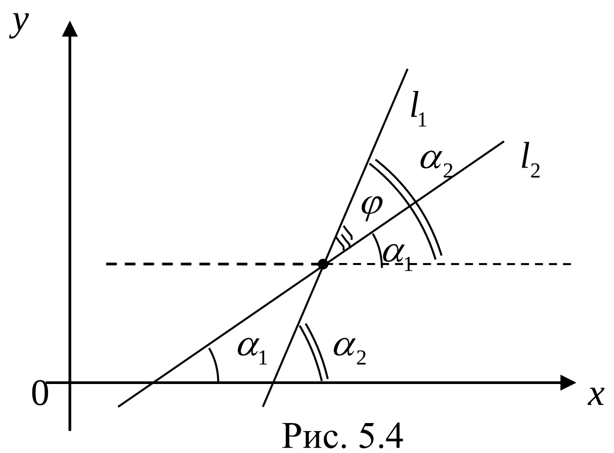


Рис. 5.4

1. l_1 параллельна l_2, тогда $tg\alpha_1 = tg\alpha_2$ и $k_1 = k_2$, значит необходимым и достаточным условием параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов.

2. Если l_1 перпендикулярна l_2, то (*) теряет смысл, но можем рассматривать $ctg\varphi = \dfrac{1+tg\alpha_2 tg\alpha_1}{tg\alpha_2 - tg\alpha_1} = \dfrac{1+k_2k_1}{k_2-k_1} = 0 \Rightarrow 1 + k_1k_2 = 0 \Rightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$ - условие перпендикулярности прямых.

5.6. Уравнение прямой в отрезках

Пусть дана прямая l на плоскости. Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0, A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0.$

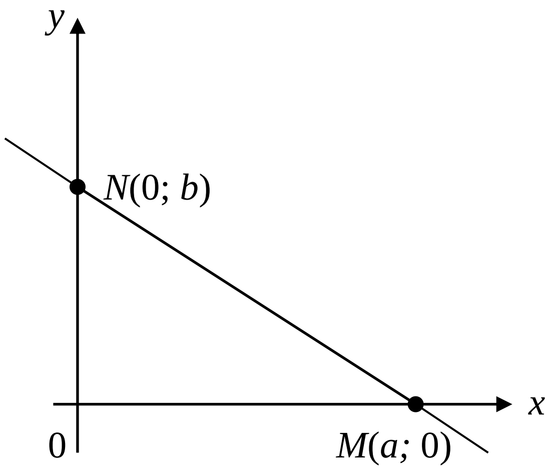


Рис. 5.5

$$Ax + By = -C \,/ : (-C), -\frac{Ax}{C} - \frac{By}{C} = 1, \; \frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1.$$

Обозначим $-C/A = a, \; -C/B = b$, получим уравнение прямой l:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \qquad (5.6.1)$$

где a и b - отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox и Oy.

Соответственно, чтобы убедиться в этом, найдем точки пересечения прямой с осями координат:

с осью Ox - $y = 0, \dfrac{x}{a} = 1 \Rightarrow x = a;$

с осью Oy - $x = 0, \dfrac{y}{b} = 1 \Rightarrow y = b.$

Действительно, a - величина отрезка, отсекаемого прямой по оси Ox, b - по оси Oy.

Уравнение вида (5.6.1) принято называть уравнением прямой «в отрезках». Эту форму уравнения, в частности, удобно использовать для построения прямой на плоскости.

Пример 5.5. Дана прямая 3*x*-5*y*+15=0. Составить уравнение этой прямой в отрезках и построить прямую.

3*x*-5*y*=-15. Разделим обе части этого уравнения на –15: $\frac{x}{-5}+\frac{y}{3}=1.$

Условие параллельности прямых: $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$.

Условие перпендикулярности прямых: $\vec{N}_1 \perp \vec{N}_2, (\vec{N}_1, \vec{N}_2)=0, A_1A_2+B_1B_2=0$.

Примеры

1. Прямые 3*x*+4*y*-1=0, 2*x*+3*y*-1=0 пересекаются, так как $3/2 \neq 4/3$, координаты точек пересечения *x*=-1, *y*=1.

2. Прямые 2*x*+3*y*=1=0, 4*x*+6*y*+3=0 – параллельны, так как $2/4=3/6 \neq 1/3$;

3. Прямые *x*+*y*+1=0, 2*x*+2*y*+2=0 совпадают друг с другом, так как 1/2=1/2=1/2.

4. Прямые *x*-*y*+3=0, 2*x*+2*y*-5=0 перпендикулярны, так как $2 \cdot 1+(-1) \cdot 2=0$.

5.7. Расстояние от точки до прямой

Рассмотрим на плоскости *xoy* прямую *l*: $Ax+By+C=0$, где $\vec{N}(A,B)$,

$B=A \cdot tg\alpha,\ PQ=OQ-OP,\ OQ=np_{\vec{N}}\overrightarrow{OM_1}=|OM_1|\cos\varphi=$

$=|OM_1| \cdot \frac{(\vec{N},\overrightarrow{OM_1})}{|\vec{N}||\overrightarrow{OM_1}|}=\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}.$

$$d=|PQ|-\left|\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}-OP\right|=\left|\frac{Ax_1+By_1}{\sqrt{A^2+B^2}}-\sqrt{A^2+B^2}\right|.$$

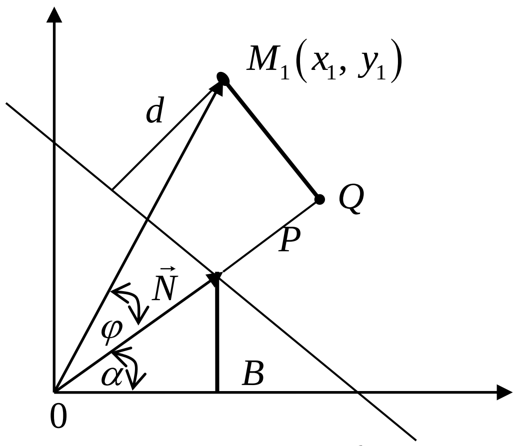


Рис. 5.6

Так как $P \in l$, то $AA+BB+C=0, A^2+B^2+C=0,$

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 - (A^2 + B^2)}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| = \frac{| Ax_1 + By_1 + C |}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (*)$$

При C=0.

$OQ = \frac{(\vec{N}, \overrightarrow{OM_1})}{|\vec{N}|} = \frac{| Ax_1 + By_1 |}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, т.е. эта формула верна и для уравнения, где C=0.

Пример 5.6. Найти расстояние от точки (1;1) до прямой $2x + \sqrt{5}y - \sqrt{5} = 0$.

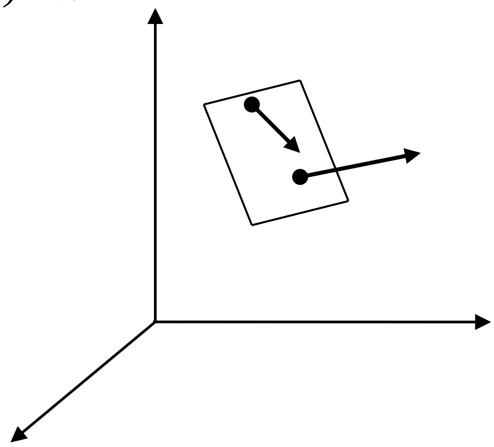
$$d = \frac{| 2 \cdot 1 + \sqrt{5} \cdot 1 - \sqrt{5} |}{\sqrt{2^2 + (\sqrt{5})^2}} = \frac{2}{3}.$$

6. ПЛОСКОСТЬ

6.1. Нормальный вектор плоскости. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку

Рассмотрим в пространстве плоскость Q. Ее положение в пространстве определяется заданием вектора $\vec{N}$, перпендикулярного этой плоскости, и конечной фиксированной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей в плоскости Q. Вектор $\vec{N} \perp Q$ называется нормальным вектором плоскости.

Пусть $\vec{N}(A, B, C)$, т.е. $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$. Выведем уравнение плоскости $Q \perp \vec{N}$ и проходящей через точку M_1. Возьмем точку М с текущими координатами x, y, z. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_1M}$. Так как $\overrightarrow{M_1M} \in Q$, а $Q \perp \vec{N}$, то $\overrightarrow{M_1M} \perp \vec{N}$, а значит, $(\overrightarrow{M_1M}, \vec{N}) = 0$.



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \qquad (6.1.1)$$

Координаты любой точки $M \in Q$ удовлетворяют этому уравнению, следовательно, (6.1.1) – уравнение плоскости, проходящей через данную точку. Итак, мы показали, что всякой плоскости соответствует уравнение первой степени относительно текущих координат.

Пример 6.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1, -2, 3)$ и перпендикулярной $\vec{N} = 2\vec{i} + 4\vec{k}$, A=2, B=0, C=4.

$$2(x-1)+0(y+2)+4(z-3)=0,\ 2x-2+4z-12=0,\ x+2z-7=0.$$

Придавая коэффициентам A, B, C уравнения (6.1.1) различные значения, мы можем получить уравнение любой плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Совокупность плоскостей, проходящих через данную точку, называется связкой плоскостей. Уравнение (6.1.1), где A, B, C могут принимать любые значения, называется уравнением связки плоскостей.

Пример 6.2. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки: $M_1(1,-1,0), M_2(2,1,-3), M_3(-1,0,1)$. Рассмотрим два вектора: $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} \in L$. Надо найти $\vec{N} \perp L$, т.к. и $\overrightarrow{M_1M_3} \in L$, то $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \vec{N}$, $\overrightarrow{M_1M_3} \perp \vec{N}$, а значит, $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3}$.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k} - \vec{j} + 3\vec{i} = 5\vec{i} + 5\vec{j} + 5\vec{k}.$$

$$L: 5(x-1) + 5(y+1) + 5(z-0) = 0,$$
$$5x + 5y + 5Z = 0,$$
$$x + y + z = 0.$$

6.2. Общее уравнение плоскости

Рассмотрим общее уравнение первой степени с тремя неизвестными:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{6.2.1}$$

По крайней мере один из *A, B, C* не равен нулю, и предположим, что $C \neq 0$.

Уравнение (6.2.1) представим в таком виде:

$A(x-0) + B(y-0) + C(z - D/C) = 0$ - уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{N}(A,B,C)$ и проходящей через точку $M(0,0,D/C)$. Итак, мы показали, что уравнение (6.2.1) есть уравнение некоторой плоскости и оно называется общим уравнением.

Если $D = 0$, то плоскости $Ax + By + Cz = 0$ удовлетворяют координаты точки $O(0, 0, 0)$, следовательно, эта плоскость проходит через начало координат.

x=0 – уравнение координатной плоскости Oyz;

y=0 – уравнение координатной плоскости Oxz;

z=0 – уравнение координатной плоскости Oxy.

6.3. Построение плоскости

Для построения плоскости по ее уравнению достаточно найти координаты трех точек, не лежащих на одной прямой, удовлетворяющих уравнению плоскости. Проще всего определять точки пересечения с осями координат.

Пример 6.3. Построить плоскость $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

$OX: z = 0, y = 0, 2x = 6, x = 3;$

$OY: z = 0, x = 0, 3y = 6, y = 2;$

$OZ: x = 0, y = 0, 6z = 6, z = 1.$

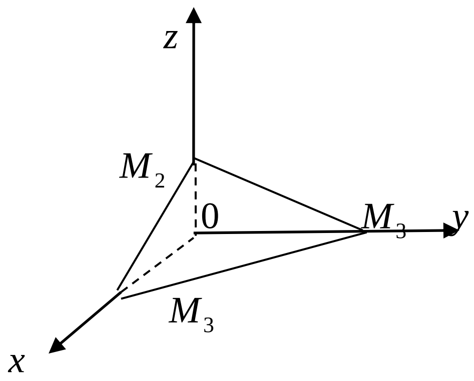


Рис. 6.2

Следовательно, плоскость проходит через точки: $M_1(3{,}0{,}0), M_2(0{,}0{,}1)$, $M_3(0{,}2{,}0)$.

Пример 6.4. Построить плоскость $2x+5y-10=0.$

Так как нормальный вектор $\vec{N}=2\vec{i}+5\vec{j}$ перпендикулярен оси Oz, то данная плоскость параллельна этой оси. Для построения плоскости достаточно найти точку пересечения с осями OX и $OУ$.

$OY: x=0;\ 5y-10=0,\ y=2,$ т.$M_1(0,2);$

$OX: y=0;\ 2x-10=0,\ x=5,$ т.$M_2(5,0).$

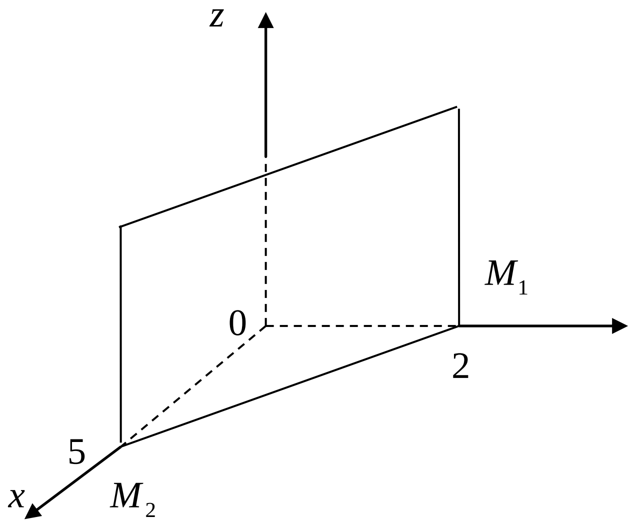


Рис. 6.3

6.4. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей

Рассмотрим две плоскости Q_1 и Q_2, заданные соответственно уравнениями:

$Q_1:\ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$

$Q_2:\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$

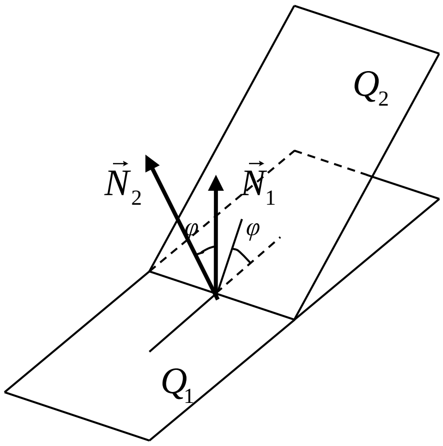


Рис. 6.4

Под углом между двумя плоскостями мы понимаем один из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Угол φ между векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ плоскостей Q_1 и Q_2 равен одному из указанных двугранных углов. Поэтому

$$cos\,\varphi = \frac{(\vec{N}_1, \vec{N}_2)}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|},$$

т.к. $\vec{N}_1 = A_1\vec{i} + B_1\vec{j} + C_1\vec{k}$, $\vec{N}_2 = A_2\vec{i} + B_2\vec{j} + C_2\vec{k}$, то

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Пример 6.5. Найти угол между плоскостями $x+2y-3z+4=0$ и $2x+3y+z+8=0$.

Решение. Так как $\vec{N}_1(1, 2, -3)$, $\vec{N}_2(2, 3, 1)$, то

$$cos\,\varphi = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 - 3\cdot 1}{\sqrt{1+4+9}\cdot\sqrt{4+9+1}} = \frac{5}{14},\ \varphi = arccos\frac{5}{14}.$$

Две плоскости Q_1 и Q_2:

1. Параллельны друг другу тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ коллинеарны, т.е. $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$.

2. Перпендикулярны друг другу тогда и только тогда, когда их нормальные векторы $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ перпендикулярны, т.е. $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$

Пример 6.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(-2, 1, 4)$ параллельно плоскости $3x + 2y - 7z + 8 = 0.$

Решение. Запишем уравнение связки плоскостей, проходящих через точку M_1(-2, 1, 4), $A(x+2)+B(y-1)+C(z-4)=0$. Так как искомая и данная плоскости параллельны, то за нормальный вектор $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ искомой плоскости можно принять нормальный вектор $\vec{N}=3\vec{i}+2\vec{j}-7\vec{k}$ данной плоскости. Следовательно, A=3, B=2, C=-7, тогда

$$3(x-2)+2(y-1)-7(z-4)=0, 3x+6+2y-2-7z+28=0,$$

$3x+2y+32-7z=0$ - уравнение искомой плоскости.

6.5. Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и плоскость Q: $Ax+By+Cz+D=0$, расстояние d между ними, т.е. длина перпендикуляра, опущенного из точки M_1 на плоскость Q, определяется по следующей формуле:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Пример 6.7. Найти расстояние от точки M(1, 0, -2) до плоскости $2x-2y+2z-4=0$.

Решение. $d=\dfrac{|2\cdot 1-1\cdot 0+2(-2)-4|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\dfrac{6}{3}=2.$

7. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

7.1. Общие уравнения прямой

Рассмотрим две непараллельные плоскости, заданные уравнениями: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\ \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ Система этих двух уравнений будет определять прямую, как линию пересечения двух плоскостей, т.к. множество всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы (7.1.1). Уравнения (7.1.1) называют общими уравнениями прямой.

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \qquad (7.1.1)$$

Пример 7.1. Построить прямую, заданную общими уравнениями:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 3y - z + 5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Для того, чтобы построить прямую, достаточно знать две ее точки. Проще всего выбрать точки пересечения прямой с координатными плоскостями. Точка пересечения прямой с координатной плоскостью называется следом прямой. Координаты следа M_1 на плоскости Oxy получим из уравнения прямой, полагая $z = 0$: $\begin{cases} x + y = 3, \\ x - 3y = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$

Итак, точка $M_1(1, 2, 0)$. Найдем след M_2 на плоскости Oyz.

$x = 0$: $\begin{cases} y + z = 3, \\ -3 - z = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1, \\ z = 2. \end{cases}$

$M_2(0, 1, 2)$.

7.2. Каноническое уравнение прямой. Параметрические уравнения

Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1)$ - точка, лежащая на прямой L, и $\vec{s} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ - направляющий вектор прямой. Вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, соединяющий точку M_1 с переменной точкой $M_2(x, y, z)$ прямой L, коллинеарен вектору $\vec{s}$. Поэтому проекции векторов $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\vec{s}$ пропорциональны. Так как

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} + (z - z_1)\vec{k},$$

$$\text{то } \frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}. \qquad (7.2.1)$$

Уравнения (7.2.1) называются каноническими уравнениями прямой.

Приравняем каждое из соотношений в уравнениях (7.2.1) к параметру t, тогда $\frac{x-x_1}{m}=t,\ \frac{y-y_1}{n}=t,\ \frac{z-z_1}{p}=t,\ x-x_1=mt,\ y-y_1=nt,\quad z-z_1=pt,$ следовательно, уравнения (7.2.2) называются параметрическими уравнениями прямой.

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+mt,\\ y&=y_1+nt,\\ z&=z_1+pt.\end{aligned}\right\} \tag{7.2.2}$$

Замечание. Пусть прямая перпендикулярна одной из координатных осей, например оси Ox, тогда m=0 и параметрические уравнения (7.2.2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1,\\ y&=y_1+nt,\\ z&=z_1+pt.\end{aligned}\right\}$$

Исключая из уравнений параметр t, получим уравнения прямой в виде:

$$\left.\begin{aligned} &x-x_1=0,\\ &\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}.\end{aligned}\right\}$$

Однако и в этом случае условимся формально записывать уравнение прямой в каноническом виде: $\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{p}$.

Рассмотрим вопрос о том, как перейти от общих уравнений прямой к ее каноническим уравнениям. Для этого нужно найти какую-либо точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ на прямой и направляющий вектор $\vec{s}$ прямой.

Пусть прямая задана общими уравнениями (7.2.1). Координаты точки M_1 на прямой L получим из системы (7.2.1), придав одной из координат произвольное значение. Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\vec{N}_1=A_1\vec{i}+B_1\vec{j}+C_1\vec{k}$ и $\vec{N}_2=A_2\vec{i}+B_2\vec{j}+C_2\vec{k}$, то за направляющий вектор $\vec{s}$ прямой L можно принять векторное произведение $[\vec{N}_1\times\vec{N}_2]$:

$$\vec{s}=[\vec{N}_1\times\vec{N}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ A_1&B_1&C_1\\ A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}.$$

Пример 7.2. Привести общие уравнения прямой к каноническому виду:

$$\begin{cases}2x+3y-z+8=0,\\ x-3y+2z+1=0.\end{cases}$$

$$\vec{N}_1=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k};\quad \vec{N}_2=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}.$$

$$\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-5\vec{j}-9\vec{k},\ \vec{s}=(3,-5,-9).$$

Точку M_1 на прямой найдем, положив в уравнениях прямой, например, z=0.

$$\begin{cases}2x+3y+8=0,\\ x-3y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3,\\ y=-2/3.\end{cases}$$

Итак, M_1(-3, -2/3, 0). Следовательно, канонические уравнения прямой имеют вид: $\dfrac{x+3}{3}=\dfrac{y+2/3}{-5}=\dfrac{z-0}{-9}$.

7.3. Уравнения прямой, проходящей через две точки

Пусть прямая L проходит через две точки, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$. Составим канонические уравнения этой прямой. За направляющий вектор $\vec{s}$ прямой примем вектор, соединяющий точки M_1 и M_2:

$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}.$

Следовательно, $m=x_2-x_1$ $n=y_2-y_1, p=z_2-z_1$ и поэтому из уравнений (7.2.2) имеем:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (7.3.1)$$

Уравнение (7.3.1) называется уравнением прямой, проходящей через две точки.

7.4. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых

Пусть в пространстве даны две прямые:

L_1: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1};$

L_2: $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}=\dfrac{z-z_2}{p_2}.$

За угол между двумя прямыми принимаем один из смежных углов, которые образуют прямые, проведенные параллельно данным через какую-либо точку пространства. Угол между прямыми есть угол φ между направляющими векторами $\vec{s}_1$ и $\vec{s}_2$ данных прямых. Так как $\vec{s}_1=m_1\vec{i}+n_1\vec{j}+p_1)\vec{k}$, то $\vec{s}_2=m_2\vec{i}+n_2\vec{j}+p_2)\vec{k}$, то $cos\,\varphi=\dfrac{(\vec{s}_1,\vec{s}_2)}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}$, или

$$cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Прямые L_1 и L_2 параллельны тогда, когда $\vec{s}_1$ параллелен $\vec{s}_2$, т.е. $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Прямая L_1 перпендикулярна L_2 тогда, когда $\vec{s}_1$ перпендикулярен $\vec{s}_2$, т.е. $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Пример 7.3. Найти угол между прямыми $\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5}$.

$$\vec{s}_1(5, 3, -2);\ \vec{s}_2(3, 2, 5).$$

$$cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5}{\sqrt{25+9+4}\cdot\sqrt{9+4+25}} = \frac{11}{38}, \varphi = arccos\frac{11}{38}.$$

Пример 7.4. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(1,2,3)$ параллельно прямой $\begin{cases} 2x+3y+5z-7=0, \\ 3x-4y+2z-8=0. \end{cases}$

Найдем канонические уравнения прямой $\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$, $\vec{N}_1 = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{N}_2 = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, тогда

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 15\vec{j} - 8\vec{k} - 9\vec{k} - 2\vec{j} + 20\vec{i} = 23\vec{i} + 13\vec{j} - 17\vec{k},$$

т.к. искомая прямая параллельна данной, то за направляющий вектор прямой примем вектор $\vec{s}$, тогда $\frac{x-1}{23} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-3}{-17}$ - каноническое уравнение искомой прямой.

8. ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

8.1. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Рассмотрим в пространстве прямую и плоскость:

L: $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}=\dfrac{z-z_1}{p_1}$; $Q: \ Ax+By+Cz+D=0.$

1. $L \perp Q \Rightarrow \vec{N} \,||\, \vec{s} \Rightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}.$

2. $L \,||\, Q \Rightarrow \vec{N} \perp \vec{s} \Rightarrow Am+Bn+Cp=0.$

Пример 8.1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(2, -3, 4)$ параллельно прямым L_1: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{8}$ и L_2: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z+5}{2}$.

Решение. Запишем уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, Q: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$. Так как Q параллельна L_1, Q параллельна L_2, то по условию параллельности прямой и плоскости следует, что вектор $\vec{N}=A\vec{i}+B\vec{j}+C\vec{k}$ должен быть перпендикулярен $\vec{a}_1=\vec{i}+2\vec{j}+8\vec{k}$ и $\vec{a}_2=4\vec{i}+2\vec{k}$, т. е. $\vec{N}=[\vec{a}_1\times\vec{a}_2]$.

$$\vec{N}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}=4\vec{i}+30\vec{j}-8\vec{k}.$$

$$Q: \begin{array}{l} 4(x-2)+30(y+3)-8(z-4)=4x+30y-8z+114=0, \\ 2x+15y-4z+57=0. \end{array}$$

8.2. Точка пересечения прямой с плоскостью. Угол между прямой и плоскостью

$$L: \ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \qquad (8.2.1)$$

$$Q: \ Ax+By+Cz+D=0. \qquad (8.2.2)$$

Требуется найти точку пересечения прямой L с плоскостью Q. Для этого нужно решить систему из двух уравнений (8.2.1) и (8.2.2). Проще это сделать, если перейти от канонического уравнения прямой к параметрическому:

$$\left.\begin{array}{l} x=x_1+mt, \\ y=y_1+nt, \\ z=z_1+pt, \end{array}\right\} \qquad (8.2.3)$$

где каждому значению параметра t соответствует точка прямой L. Нам надо найти такое значение t, при котором точка прямой L будет лежать на плоскости Q (это и есть точка пересечения L с Q). Для этого подставим в уравнение плоскости вместо *x, y, z* правую часть из соотношения (8.2.3), получим уравнение: $A(x_1+mt)+B(y_1+nt)+C(z_1+pt)+D=0.$

$Ax_1+Amt+By_1+Bnt+Cz_1+Cpt+D=0$ - линейное уравнение относительно неизвестного *t*.

$$-(Ax_1+By_1+Cz_1+D)=t(Am+Bn+Cp).$$

Предположим, что *L* не параллельна *Q*, следовательно, $\vec{s}$ не перпендикулярен $\vec{N}$, а значит, $Am+Bn+Cp\neq 0$.

$$t=-\frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{Am+Bn+Cp}.$$

Пример 8.2. Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{2}$ с плоскостью $2x+3y-2z+2=0.$

Запишем уравнение данной прямой в параметрической форме:

$$\left.\begin{array}{l} x=2t+1, \\ y=3t-1, \\ z=2t+5 \end{array}\right\},$$

подставим x, y, z в уравнение плоскости: $2(2t+1)+3(3t-1)-2(2t+5)+2=0,$ $4t+2+9t-3-4t-10+2=0, t=1.$

Подставляя вместо t единицу в параметрическое уравнение прямой, получим координаты точки пересечения прямой с плоскостью: x=3, y=2, z=7.

8.3. Пучок плоскостей

Определение. Совокупность всех плоскостей, проходящих через заданную прямую *L*, называется пучком плоскостей, а прямая *L* – осью пучка.

Пусть ось пучка задана уравнением:

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0, \\ Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0/\lambda, \end{cases} \tag{8.3.1}$$

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D_1+\lambda(Ax_2+By_2+Cz_2+D_2)=0. \tag{8.3.2}$$

Уравнение (8.3.2) имеет первую степень относительно *x, y, z* и, следовательно, определяет некоторую плоскость в пространстве. Так как уравнение (8.3.2) есть следствие системы (8.3.1), то координаты точки, удовлетворяющие уравнению (8.3.1), будут удовлетворять и уравнению (8.3.2). Следовательно, (8.3.2) – уравнение плоскости, проходящей через прямую *L*; так как λ - некоторая постоянная, то, меняя ее, мы будем получать каждый раз другую плоскость, проходящую через L, следовательно, (8.3.2) – уравнение пучка плоскостей.

Пример 8.3. Найти уравнение плоскости, проходящей через

прямую $L\begin{cases} 2x+3y-5z+1=0, \\ 3x-y+z+28=0 \end{cases}$ и точку M_1(1, -2, 3).

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через *L*: $2x+3y-5z+1+\lambda(3x-y+z+28)=0.$ Подставим в это уравнение координаты точки M_1: $2\cdot 1+3\cdot(-2)-5\cdot 3+1\lambda(3\cdot 1+2+3+28)=0{,}36\lambda=18,\ \lambda=1/2$. Подставляя вместо $\lambda=1/2$ в уравнение пучка плоскостей, получим искомую плоскость: $2x+3y-5z+1+1/2(3x-y+z+28)=0{,}7x+5y-9z+30=0.$

Пример 8.4. Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{1}$ перпендикулярно плоскости $3x+3y-z+1=0.$

Решение. Запишем уравнение прямой в общем виде как уравнение пересечения плоскостей:

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}, \\ \dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z}{1}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}3x-3-2y-2=0, \\ y+1-3z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x-2y-5=0, \\ y-3z+1=0.\end{cases}$$

Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$\begin{aligned}&3x-2y-5+\lambda(y-3z+1)=0,\\ &3x-2y+\lambda y-3\lambda z-5+\lambda=0,\\ &3x+y(\lambda-2)-3\lambda z+\lambda-5=0.\end{aligned} \qquad (*)$$

Так как плоскость (*) и данная плоскость перпендикулярны, то

$$\vec{N}_1\perp\vec{N}_2\Rightarrow(\vec{N}_1,\vec{N}_2)=0;\ \vec{N}_1=(3,\lambda-2,-3\lambda);\ \vec{N}_2=(3,3,-1).$$

$$9+3\lambda-6+3\lambda=0\Rightarrow\lambda=-1/2;$$

подставляя в (*) $\lambda=-1/2$, получаем $6x-5y+3z-11=0.$

9. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

9.1. Определение кривой второго порядка

Кривой второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени относительно текущих декартовых координат. В общем случае это уравнение имеет следующий вид:

$$Ax^2 + 2Byx + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, $2B$, C, $2D$, $2E$, F – действительные числа, и по крайней мере один из A, B, C отличен от нуля.

Мы будем рассматривать четыре кривые второго порядка: окружность, эллипс, гиперболу и параболу.

9.2. Окружность

Определение. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Выведем уравнение окружности.

Пусть на плоскости дана точка $O_1(a, b)$.

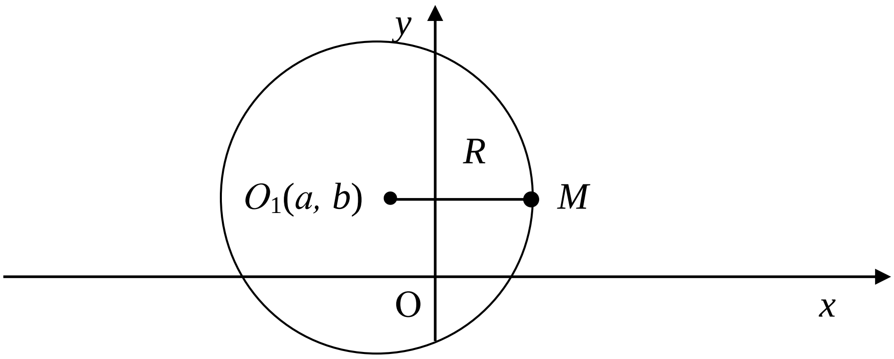


Рис. 9.1

$$M_1O_1 = |\overrightarrow{M_1O_1}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2},$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 - \qquad (9.2.1)$$

уравнение окружности с центром в точке O_1 и радиусом R. В частности, если O_1 – начало координат, то уравнение окружности имеет вид: $x^2 + y^2 = R^2$.

Вернемся к (9.2.1). Раскроем скобки в этом уравнении:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - R^2 = 0.$$

Сравним это уравнение с общим уравнением кривой второго порядка. Коэффициенты A и C равны 1, $2B$=0,

$$x^2 + y^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$x^2 + 2Dx + D^2 - D^2 + y^2 + 2Ey + E^2 - E^2 + F = 0,$$

$$(x+D)^2 + (y+E)^2 = E^2 + D^2 - F. \qquad (9.2.2)$$

1. Если $E^2+D^2-F>0$, то (9.2.2) – уравнение окружности с центром в точке $O_1(-D, -E)$ и радиусом $R=\sqrt{E^2+D^2-F}$.

2. Если $E^2+D^2-F<0$, то уравнение (9.2.2) не определяет никакую линию, так как правая часть этого уравнения отрицательна, а левая – положительна – противоречие.

Пример 9.1. Найти центр и радиус окружности, заданной уравнением: $x^2+y^2-2x+4y-11=0.$

Решение.

$(x^2-2x+1)-1+(y^2+4y+4)-4-11=0, (x-1)^2+(y+2)^2=16.$

Центр в точке $O_1(1, -2)$ и R=4.

9.3. Эллипс

Определение. Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний каждой из которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная 2*a* $(2a>2c)$.

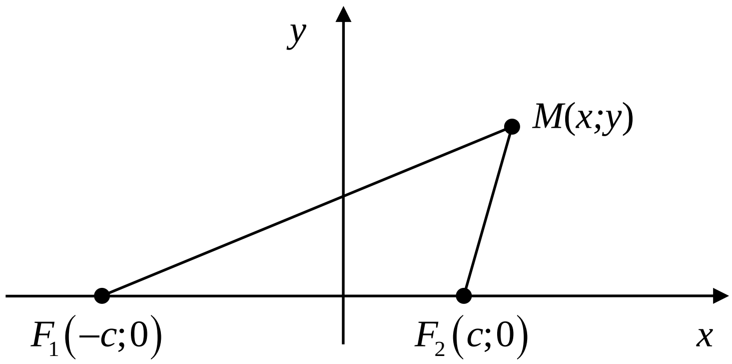


Рис. 9.2

Построим декартову систему координат так, чтобы фокусы оказались на оси абсцисс, симметрично относительно начала координат: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Выведем уравнение эллипса. Для этого рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$ эллипса. По определению эллипса $MF_1+MF_2=2a.$

$$MF_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2},\ MF_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

следовательно,

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a, \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$$

$$x^2+c^2+2xc+y^2-x^2+2xc-c^2-y^2-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$4xc-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ :4,$$

$$xc-a^2=-a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Опять возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$(xc-a^2)^2 = a^2[(x-c)^2 + y^2],$

$x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = ax^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + y^2a^2,$

$x^2c^2 - a^2x^2 - 2xca^2 + 2a^2xc - y^2a^2 = a^2c^2 - a^4,$

$x^2(c^2-a^2) - y^2a^2 = a^2(c^2-a^2) / \cdot (-1),$

$x^2(a^2-c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2-c^2).$

Так как $(2a > 2c)$, то $a^2 - c^2 > 0$ и обозначим $a^2 - c^2 = b^2$, тогда получим $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Разделим обе части этого уравнения на a^2b^2.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \text{ каноническое уравнение эллипса.}$$

Построим этот эллипс. Так как уравнение содержит только четные степени x и y, то эта кривая второго порядка будет симметрична относительно оси *Ox* и *Oy*, т.е. эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, а точка пересечения этих осей является центром эллипса. Та ось, на которой расположены фокусы, называется фокальной осью. Найдем точки пересечения с осями координат:

$Ox: y = 0, \frac{x^2}{a^2} = 1, x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a,$

$Oy: x = 0, \frac{y^2}{b^2} = 1, y^2 = b^2 \Rightarrow y = \pm b, a > c.$

Точки пересечения с осями координат называют вершинами эллипса. Отрезки, соединяющие вершины эллипса A_1A_2, B_1B_2, а также их длины $2a$ и $2b$, называются большой и малой осями эллипса, числа a и b – полуосями эллипса.

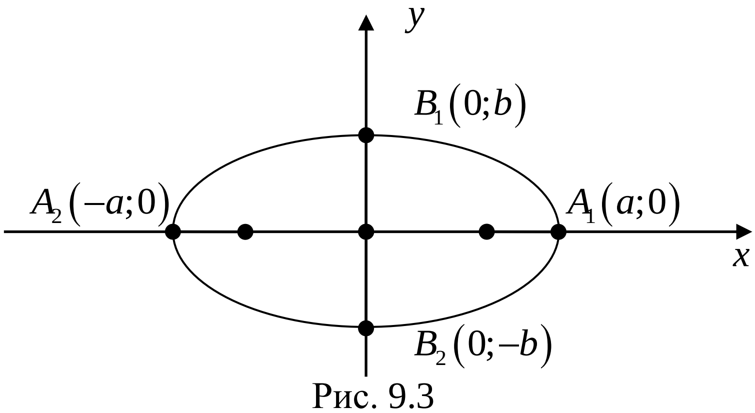


Рис. 9.3

Отношение *c/a*, половины расстояния между фокусами к большой полуоси, называется эксцентриситетом эллипса и обозначается $\varepsilon, \varepsilon = c/a,$ так как $c < a,$ то $\varepsilon < 1$.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем меньше ε, тем меньше b отличается от a, т.е. меньше вытянут эллипс вдоль фокальной оси. Если a=b, то получится окружность радиуса a:

$x^2 + y^2 = a^2$, при этом $C = 0 = \sqrt{a^2 - a^2}$, $\varepsilon = c / a = 0.$

Пример 9.2. Найти каноническое уравнение эллипса, зная его большую полуось а=5, $\varepsilon = 0{,}6.$

Решение. $\varepsilon = c / a = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = 0{,}6,\ \sqrt{25 - b^2} = 0{,}6 \cdot 5 \Rightarrow \sqrt{25 - b^2} = 3,$

$25 - b^2 = 9 \Rightarrow 25 - 9 = 16,\ b = 4.$

$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ - уравнение эллипса.

Пример 9.3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точку $M_1(2,-3)$ и a=4.

$\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение эллипса.

$\dfrac{4}{16} + \dfrac{9}{b^2} = 1,\ \dfrac{9}{b^2} = 1 - \dfrac{1}{4},\ \dfrac{9}{b^2} = \dfrac{3}{4},\ 3b^2 = 36,\ b^2 = 12,\ \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1.$

9.4. Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, абсолютная величина разности расстояний каждой из которых от двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина, равная $2a$ ($2a > 0$, меньше расстояния между фокусами).

Обозначим расстояние между фокусами F_1 и F_2 через $2a$. Как и в случае эллипса, ось абсцисс проведем через фокусы, а за начало координат примем середину отрезка $F_1 F_2$.

Выведем уравнение гиперболы. Возьмем точку $M(x, y)$. По определению гиперболы имеем: $|MF_1 - MF_2| = 2a.$ Раскроем модуль $MF_1 - MF_2 = \pm 2a,$ $MF_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2},\ MF_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2,$$

$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$

$4xc-4a^2=\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}:4,$

$(xc-a^2)^2=\left(\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2,$

$(cx-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2],$

$x^2c^2-2xca^2+a^4=a^2(x-c)^2+y^2a^2,$

$x^2(c^2-a^2)-y^2a^2=a^2c^2-a^4,\ т.к.\ 2a<2c\Rightarrow a<0,\ то\ c^2-a^2>0,$

Обозначим $c^2-a^2=b^2;\ x^2b^2-a^2y^2=a^2b^2\ /:a^2b^2.$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ - каноническое уравнение гиперболы.

Установим формулу гиперболы, пользуясь ее каноническим уравнением. Это уравнение содержит только четные степени текущих координат, следовательно, гипербола имеет две оси симметрии, в данном случае совпадающие с координатными осями. Точку пересечения осей будем называть центром гиперболы. Ось гиперболы, на которой расположены фокусы, будем называть фокальной осью. Исследуем формулу гиперболы в первой четверти, где $y>0$:

$$\frac{x^2}{a^2}-1=\frac{y^2}{b^2}\Big/b^2,$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),\ \ y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},\ \text{т.к. } x^2-a^2\ge 0,$$

если $x\to a,$ то $y\to 0, x\to+\infty,\ y\to+\infty,$ так как гипербола симметрична относительно осей координат, то достраиваем точки A_1 и A_2 симметрично вершине гиперболы.

Действительной осью называется отрезок $A_1A_2=2a$, отрезок $B_1B_2=2b$ - мнимой осью, a – действительная ось, b – мнимая полуось.

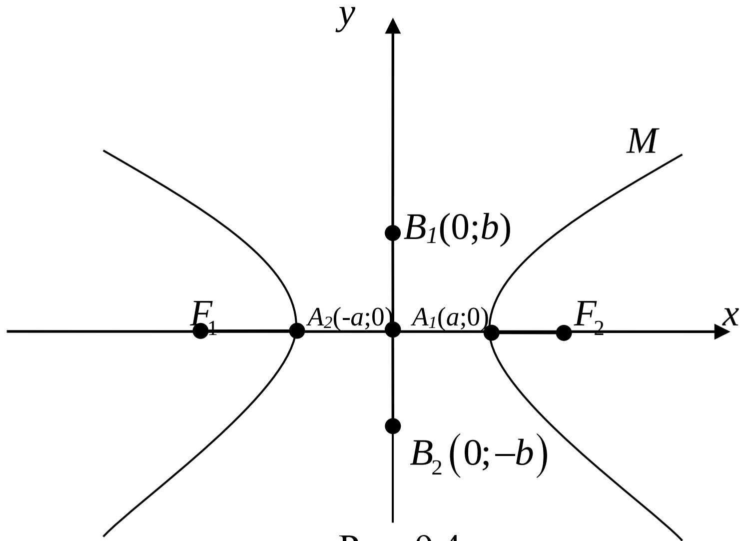


Рис. 9.4

Вернемся к части гиперболы, расположенной в первой четверти и являющейся графиком функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. Покажем, что точки этого графика, расположенные на достаточно большом расстоянии от начала координат, сколь угодно близки к прямой $y = \frac{b}{a}x$, проходящей через точку O (0, 0) и $k = \frac{b}{a}$.

Рассмотрим точку M(x, y) и N (x, $У$). Найдем разность координат этих двух точек ($У$-y).

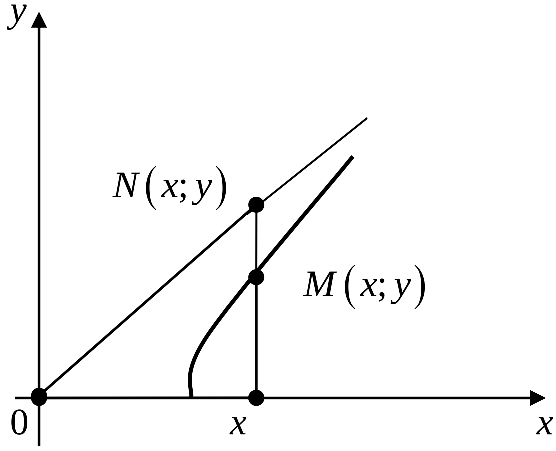


Рис. 9.5

$$Y - y = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})((x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} =$$

$$= \frac{b}{a} \cdot \frac{x^2 - x^2 + a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

В числителе этой дроби величина ab – постоянная, а знаменатель при неограниченном возрастании x неограниченно возрастает, поэтому сама дробь будет стремиться к нулю, а значит, $Y - y \to 0$, т.е. точки M и N сближаются при неограниченном возрастании абсцисс.

Из симметрии гиперболы относительно осей координат следует, что имеется еще одна прямая $y = -\frac{b}{a}x$, к которой сколь угодно близки точки гиперболы при неограниченном удалении от начала координат. Прямые $y = \frac{a}{b}x$ и $y = -\frac{a}{b}x$ называются асимптотами гиперболы.

Построим гиперболу, учитывая ее свойства:

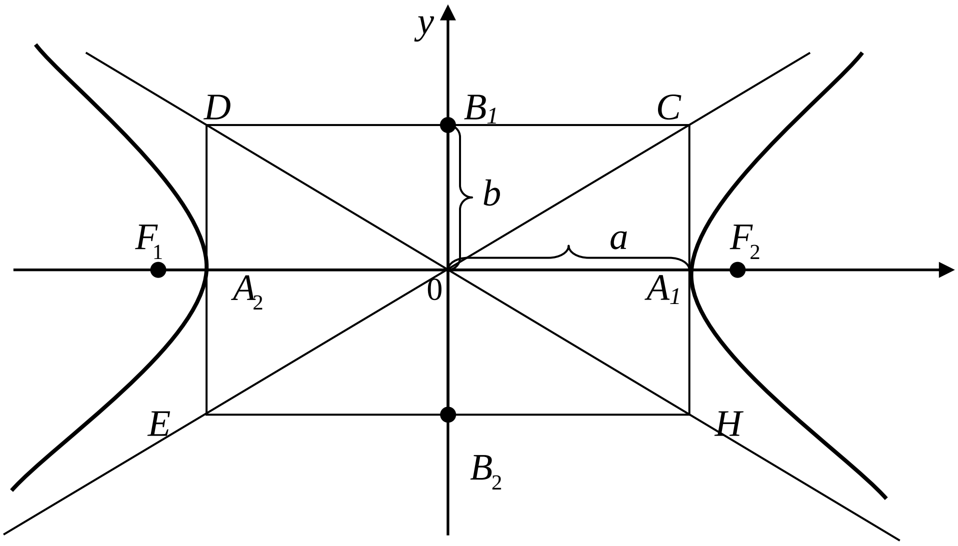


Рис. 9.6

$\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - эксцентриситет гиперболы, $c^2 - a^2 = b^2$, т.к. $c > a$, то $\varepsilon > 1$, $c = \pm\sqrt{b^2 + a^2}$.

Эксцентриситет определяет форму гиперболы. Чем меньше ε, тем более вытянут прямоугольник вдоль фокальной оси.

Гипербола называется равносторонней, если ее действительная полуось равна мнимой: a=b.

Каноническое уравнение равносторонней гиперболы:

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \cdot / a^2 \Rightarrow x^2 - y^2 = a^2$, ее асимптоты: y=x, y=-x, $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}}{a} = 2$.

Пример 9.4. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что 2с=26, $\varepsilon = 13/12$.

Решение. с=13, а=12$\Rightarrow 13 = \sqrt{b^2 + a^2} \Rightarrow 169 = b^2 + 144 \Rightarrow b^2 = 25$, $\dfrac{x^2}{144} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Пример 9.5. Гипербола проходит через точки $M_1(-3, \sqrt{2}/2)$ и $M_2(4, -2)$. Найти каноническое уравнение гиперболы.

$\dfrac{9}{a^2} - \dfrac{1}{2b^2} = 1, \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 8, b^2 = 4,$ $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ - каноническое уравнение гиперболы.

9.5. Парабола

9.5.1. Определение. Вывод канонического уравнения параболы

Параболой называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от точки F, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой.

Выведем уравнение параболы. Расположим ось абсцисс так, чтобы она проходила через фокус перпендикулярно директрисе и имела положительное направление от директрисы к фокусу. Обозначим расстояние от директрисы до фокуса через p. Эта величина называется параметром параболы. За начало координат выберем середину перпендикуляра FR, опущенного из фокуса на директрису. В выбранной таким образом системе фокус имеет координаты $F(p/2;\,0)$, уравнение директрисы: $x=-p/2$.

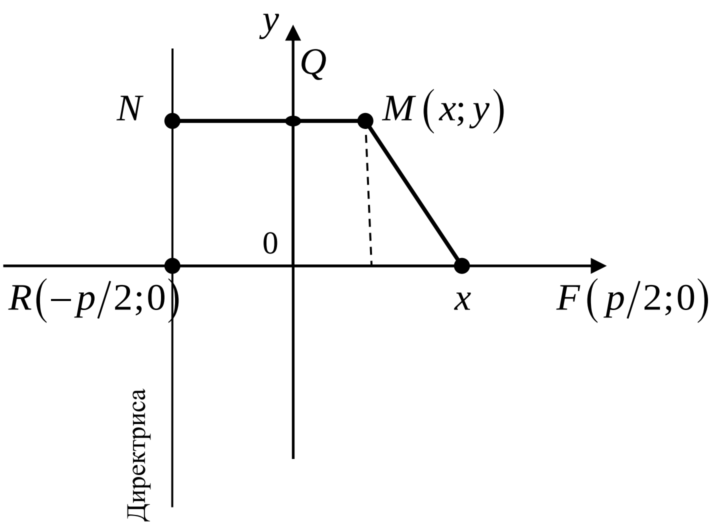


Рис. 9.7

Пусть $M(x,\, y)$ – точка параболы. По определению параболы:

$$N=MF,\ MN=d,\ MF=r,\ MN=MQ+QN=x+p/2,\ r=x+p/2,$$

$$MF=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2},\ \left(\sqrt{(x-p/2)^2+y^2}\right)^2=$$

$$=(x+p/2)^2 \Rightarrow x^2-px+y^2+p^2/4=$$

$$=\frac{p^2}{4}+px+x^2,$$

$$y^2=2px. \qquad (*)$$

Уравнение (*) называется каноническим уравнением параболы. Это уравнение является уравнением второй степени, т.е. парабола есть кривая второго порядка.

9.5.2. Исследование формы параболы

Проанализируем каноническое уравнение параболы $y^2 = 2px$. Так как уравнение включает в себя y только в четной степени, то парабола симметрична относительно оси OX, и поэтому нам достаточно рассмотреть ее часть лишь в первой четверти.

Так как $y \geq 0$, то эта часть параболы определяется формулой: $y = \sqrt{2px}$. Найдем область определения этой функции: $2px \geq 0$, т.к. $p > 0 \Rightarrow x \geq 0$. При x=0, y=0.

Пусть x возрастает и стремится к $+\infty$, из уравнения видно, что y также будет возрастать и стремиться к $+\infty$, т.е. переменная точка $M(x,\ y)$, описывающая верхнюю часть параболы, исходит из начала координат и движется вправо и вверх.

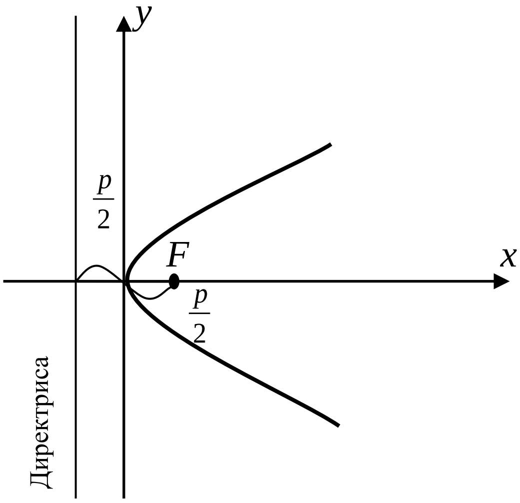


Рис. 9.8

Ось симметрии параболы называется фокальной осью. Расстояние от точки M до F называется фокальным радиусом. Точка пересечения параболы с осью симметрии называется вершиной.

Уравнение $y = -2px$ при $p > 0$ сводится к уравнению $y^2 = 2px$ заменой x на (-x), т.е. путем преобразования координат, которое соответствует изменению направления оси OX на противоположное.

Уравнения $x^2 = 2gy,\ x^2 = -2gy$ также определяют параболы с вершиной в начале координат, но симметричные оси OY. $y + g/2 = r$ - фокальный радиус.

$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ определяет уравнение параболы с вершиной в точке $O_1(x_0, y_0)$.

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0).$$

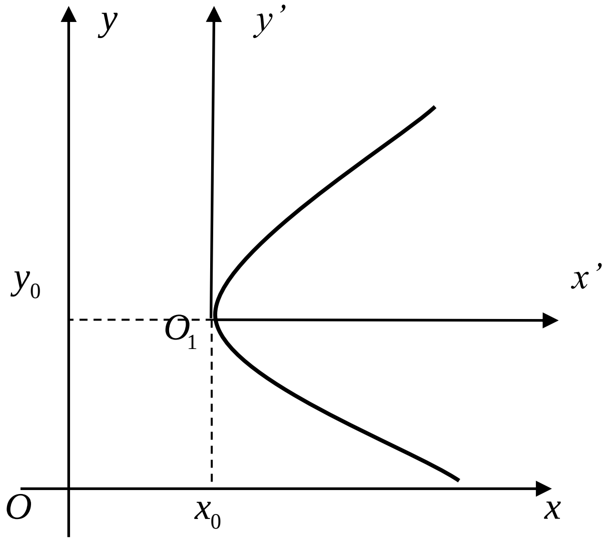


Рис. 9.9

Вернемся к параболе $y^2 = 2px$. Найдем уравнение касательной к параболе в точке $M_1(x_0, y_0)$. Точка M_1 принадлежит параболе, значит, $y_0^2 = 2px_0$. Так как точка M_1 - точка пересечения прямой с параболой, то ее координаты должны удовлетворять системе (*).

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0, \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y^2}{2p};$$

$$\frac{Ay^2}{2p} + By + C = 0;\ D = \sqrt{B^2 - 4c \cdot \frac{A}{2p}} = 0;\ B^2 = \frac{2Ac}{p} \Rightarrow PB^2 = 2AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-Bp}{A} = y_0;\ B/A = -y_0/p \Rightarrow y_0 = B, A = p, C = x_0 p \Rightarrow px - yy_0 + x_0 p = 0.$$

$yy_0 = p(x + x_0)$ - уравнение касательной к параболе, проведенной в точке $M_1(x_0, y_0)$.

Пример 9.6. Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси *OY*, с центром в начале координат, проходящей через точку *B*(1, -2).

$x^2 = 2gy$, так как точка *B* лежит на параболе, то $1^2 = 2g(-2), g = -1/4,$ $x^2 = -y/2$ - уравнение параболы.

Пример 9.7. Через точку *M*(5, -7) провести касательную к параболе $y^2 = 8x$.

Решение. Так как точка *M* не лежит на параболе, а значит, не является общей точкой прямой и параболы, то пользоваться известной формулой нельзя.

Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку:

$k(x - x_0) = y - y_0,$

$y + 7 = k(x - 5).$

Найдем точку пересечения прямой с параболой (точку касания):

$$\begin{cases} y+7=k(x-5), \\ y^2=8x \end{cases} \Rightarrow y+7=k\left(\frac{y^2}{8}-5\right),\ \frac{k}{8}y^2-y-5k-7=0.$$

$D=\sqrt{1+4\dfrac{k}{8}(5k+7)}=0,$ так как существует только одна точка пересечения.

$$1+\frac{k}{2}(5k+7)=0,$$

$$5k^2+7k+2=0,$$

$$D=49-40=9,\ k_{1,2}=\frac{-7\pm 3}{10},\ k_1=1,\ k_2=-2/5,$$

значит, условию задачи удовлетворяют две прямые:

1) $\begin{array}{l} y+7=-x+5, \\ y+x+2=0; \end{array}$ 2) $\begin{array}{l} y+7=-2/5(x-5)/\cdot 5, \\ 5y+2x+25=0. \end{array}$

10. ПОЛЯРНЫЕ КООРДИНАТЫ. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМОЙ КООРДИНАТ И ДЕКАРТОВОЙ

10.1. Полярная система координат

Пусть на плоскости даны некоторая точка *O* (назовем ее полюсом) и проходящая через нее ось *OP* (назовем ее полярной осью). Будем определять положение точки М на плоскости по отношению к полюсу и полярной оси.

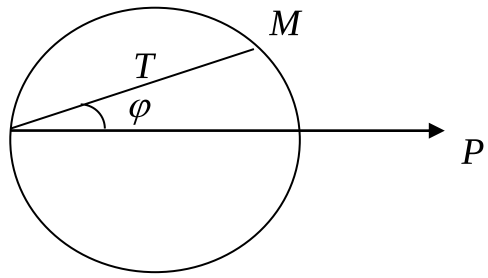


Рис. 10.1

Назовем полярным радиусом точки *M* ее расстояние *r*=*OM* от полюса, а полярным углом точки *M* – угол φ между остью и вектором $\overrightarrow{OM}, -\pi \le \varphi \le \pi.$

Тогда каждой точке *M* на плоскости соответствует единственная пара чисел $r;\varphi\,(r \ge 0, -\pi \le \varphi \le \pi).$ Полярный радиус и полярный угол будем называть полярными координатами точки *M* на плоскости: $M(r;\varphi)$.

Пример 10.1. Построить точку $A(2;3/4\pi)$.

Можно установить связь между декартовыми и полярными координатами точки *M*. Проведем через полюс прямую, перпендикулярную *l,* - ось ОУ, начало координат совпадает с полюсом, а ось *OX* - с *l*.

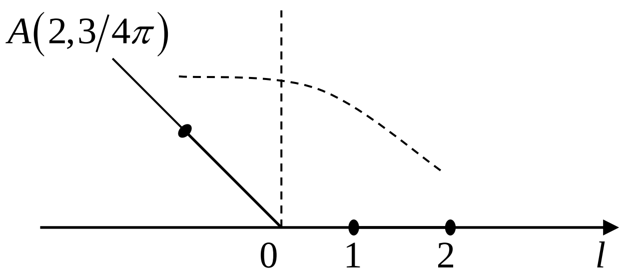


Рис. 10.2

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ x^2 + y^2 = r^2, r = \sqrt{x^2 + y^2}, tg\varphi = y/x.$$

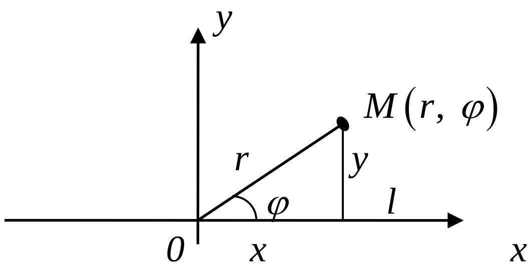


Рис. 10.3

З а м е ч а н и е . Для выведенных нами полярных координат $r \geq 0, -\pi \leq \varphi \leq \pi$. Однако, такое ограничение не позволяет определить кривую в третьей и четвертой четвертях. В дальнейшем будем предполагать, что r, φ будут принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$. Тогда построение будем проводить следующим образом: $M_1(2, \pi/6), M_2(-2, \pi/6), M_3(2, -\pi/6), M_4(-2, -\pi/6)$.

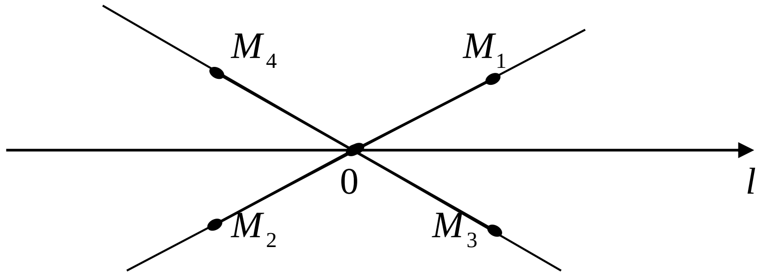


Рис. 10.4

10.2. Построение кривых в полярной системе координат

Пример 10.2. Построить $r = 2(1 - \cos\varphi)$ и перейти к декартовым координатам:

φ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	π
r	0	0,6	1	2	3	3,4	4

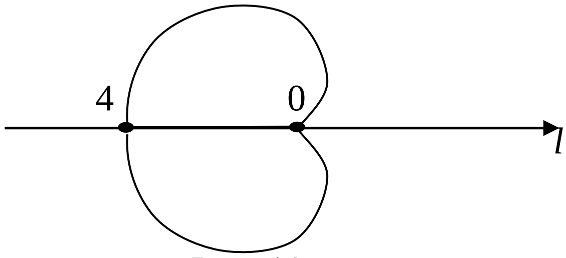


Рис. 10.5

$$x^2+y^2=2\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),$$

$$\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2, 1+x^2+y^2+\frac{(x^2+y^2)^2}{4}=\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Пример 10.3. Построить кривую в полярной системе координат и найти ее уравнение в декартовой системе: $r=a(1+2cos\varphi)$.

Строим кривую по точкам: составим таблицу значений угла φ и соответствующих значений r.

φ	0	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
r	$3a$	$2{,}4a$	$2a$	a	0	$-0{,}4a$	$-0{,}7a$	$-a$

Так как $cos\varphi$ - четная функция, то при отрицательных значениях φ получаем те же самые значения r, что и при положительных φ, значит, кривая симметрична относительно полярной оси.

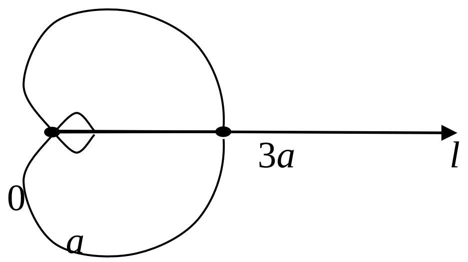


Рис. 10.6

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sqrt{x^2+y^2}=a\left(1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=a\left(\sqrt{x^2+y^2}+2x\right), (x^2-2ax+y^2)=a\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left((x-a)^2+y^2-a^2\right)^2=a^2(x^2+y^2),$$

$$(x-a)^4+y^4+a^4+2y^2(x-a)^2-2a^2(x-a)^2-3a^2y^2-a^2x^2=0.$$

Пример 10.4. $r=\dfrac{2}{sin\varphi}$.

φ	$-\pi/2$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$
r	-2	-3	-4	Не сущ.	4	3	2

$$r = \frac{2}{y/r} \Rightarrow r = \frac{2r}{y} / :r,\ y = 2.$$

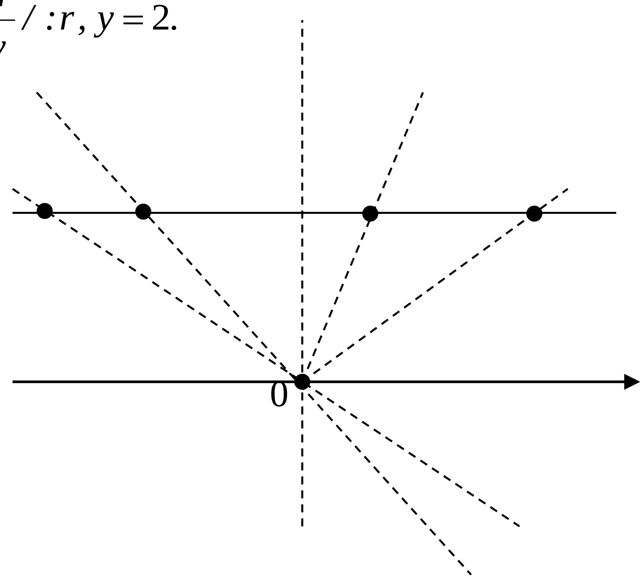


Рис. 10.7

11. ФУНКЦИИ. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛЫ

11.1. Последовательности

11.1.1. Числовые последовательности

Бесконечной числовой последовательностью называется числовая функция f, определенная на множестве всех натуральных чисел N. Значения такой функции обозначают a_n (или b_n, c_n, ...). Число n называют номером члена a_n. Последовательность обозначают

$$\{a_n\}, \text{ или } a_n,\ n\in N, \text{ или } a_1, a_2, ..., a_n\ ... \tag{11.1}$$

Другими словами, если каждому натуральному числу n сопоставлено число a_n, то говорят, что задана последовательность $\{a_n\}$. Число a_1 называется первым членом последовательности, a_2 — вторым, ..., a_n — n-м (общим) членом последовательности. Напомним основные способы задания бесконечной последовательности.

Прямым способом задания последовательности является задание функции f, порождающей последовательность:

$$a_n = f\left(n\right),\ n\in N. \tag{11.2}$$

Формула (11.2) позволяет вычислить общий член последовательности a_n через номер n, например:

$$a_n = 5^n,\ n\in N, \tag{11.3}$$

$$a_n = \frac{1+\left(-1\right)^n}{2},\ n\in N. \tag{11.4}$$

Поэтому формулу (11.2) называют формулой общего члена последовательности. По этой формуле можно вычислить любой член последовательности. Первые несколько членов последовательности часто выписывают в виде строки наряду с формулой общего члена для большей наглядности. Например, для последовательности (11.4) имеем:

$$a_1 = \frac{1+\left(-1\right)^1}{2} = \frac{1-1}{2} = 0,\ a_2 = \frac{1+\left(-1\right)^2}{2} = 1,\ a_3 = \frac{1+\left(-1\right)^3}{2} = 0.$$

и т. д. Следовательно, данная последовательность имеет вид:

$$0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, ...$$

Условимся вместо слов «рассмотрим последовательность $\{a_n\}$, заданную формулой $a_n = f(n)$, $n\in N$» говорить короче: «рассмотрим последовательность $a_n=f(n)$, $n\in N$» или еще короче: «пусть $a_n = f(n)$».

Пример 11.1. Пусть $a_n = \frac{\left(-1\right)^n}{n^3}$. Вычислить первые пять членов этой последовательности.

Вычисляем по формуле общего члена последовательности:

$$a_1 = \frac{\left(-1\right)^1}{1^3} = -1,\ a_2 = \frac{\left(-1\right)^2}{2^3} = \frac{1}{8},\ a_3 = \frac{\left(-1\right)^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$$

и т. д. Эта последовательность имеет вид:

$$-1,\ \frac{1}{8},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{64},\ -\frac{1}{125},\ \dots .$$

Последовательность, у которой все члены принимают равные между собой значения, называется постоянной последовательностью.

Другим распространенным способом задания последовательности является рекуррентный способ. Этот способ задания последовательности состоит в том, что указывается правило (обычно это формула), позволяющее вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, а также задаются несколько начальных членов последовательности. Формула, позволяющая вычислить общий член последовательности через предыдущие члены, носит название рекуррентного соотношения. Примером рекуррентного соотношения может служить формула

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}. \tag{11.5}$$

Отметим, что заданием рекуррентного соотношения последовательность полностью не определяется. Все дело в том, что первые члены последовательности нельзя вычислить по рекуррентному соотношению. Например, формула (11.5) не имеет смысла при $n = 1$ и $n = 2$, так как члены a_0 и a_{-1} с номерами 0 и —1 не существуют, поэтому значения a_1 и a_2 надо задавать дополнительно. Такие значения a_1 и a_2 для данной последовательности называются начальными. Далее, начиная с a_3, рекуррентное соотношение и начальные члены a_1 и a_2 позволят вычислить любой член рассматриваемой последовательности.

Пусть, например, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Тогда

$$a_3 = 2a_2 - a_1 = -1,\ a_4 = 2a_3 - a_2 = -2,\ a_5 = 2a_4 - a_3 = -3$$

и т. д. Таким образом, заданная рекуррентным соотношением (11.5) и начальными членами $a_1 = 1$ и $a_2 = 0$ последовательность имеет вид:

1, 0, —1, —2, —3, —4, —5, ...

Иногда последовательность задают словесно, т. е. описанием ее членов.

11.1.2. Ограниченные и монотонные последовательности

Определение 1. Последовательность $\{a_n\}$ называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что для любого $n \in N$ выполняется неравенство

$$|a_n| \le M.$$

В противном случае последовательность называется неограниченной. Например, последовательности $a_n = \frac{1}{n^4}$ и $a_n = (-1)^n$ ограниченные, так как $0 < \frac{1}{n^4} \le 1$, т. е. $\left|\frac{1}{n^4}\right| \le 1$, и $-1 \le (-1)^n \le 1$, т.е. $\left|(-1)^n\right| \le 1$.

Определение 2. Последовательность $\{a_n\}$ называется возрастающей (убывающей), если для любого *n* выполняется неравенство

$$a_{n+1} \geq a_n \ \left(a_{n+1} \leq a_n\right).$$

Если же $a_{n+1} > a_n \ \left(a_{n+1} < a_n\right)$, то последовательность называется строго возрастающей (убывающей).

Все эти последовательности называются монотонными последовательностями. Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ строго убывающая, так как для любого *n* имеем $\frac{1}{\left(n+1\right)^3} < \frac{1}{n^3}$. Последовательность $a_n = \frac{n-1}{n}$, $n \in N$, строго возрастающая, так как

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n\left(n+1\right)} > 0,$$

и, следовательно, $a_{n+1} > a_n$ для любого *n.* Очевидно, что не всякая последовательность является монотонной. Например, последовательности 1, 2, $\frac{1}{3}$, 4, $\frac{1}{5}$, 6, $\frac{1}{7}$, … и 0, 1, 0, 1, 0, 1, …
не являются монотонными.

11.2. Предел последовательности

11.2.1. Предел числовой последовательности. Сходящиеся и расходящиеся числовые последовательности

Определение 1. Пусть задана числовая последовательность $\{a_n\}$. Число *a* называется пределом этой последовательности, если для каждого заданного числа ε>0 найдется такое натуральное число *N*, что для любого номера *n*>*N* выполняется неравенство

$$\left|a_n - a\right| < \varepsilon .$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ или } a_n \to a \text{ при } n \to \infty$$

и говорят: «Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный числу *a*» или «Последовательность $\{a_n\}$ сходится к числу *a*».

Выбор натурального числа *N* зависит от заданного положительного числа е. Чтобы отметить эту зависимость, пишут: $N = N(\varepsilon)$ или $N = N_\varepsilon$.

Определение 2. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, а не имеющая предела — расходящейся.

Рассмотрим пример на вычисление предела последовательности, используя определение предела.

Пример 11.2. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n+1}{3n-1}=\frac{4}{3}. \qquad (11.6)$$

По определению число $\frac{4}{3}$ будет пределом этой последовательности, если для каждого числа ε>0 найдется натуральное число $N=N(\varepsilon)$, такое, что для всех номеров $n>N$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{4n+1}{3n-1}-\frac{4}{3}\right|=\frac{7}{3(3n-1)}<\varepsilon .$$

Оно справедливо для всех $n>\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}$, т. е. для всех $n>N(\varepsilon)$, где $N(\varepsilon)=\left[\frac{7+3\varepsilon}{9\varepsilon}\right]$. Это и доказывает равенство (11.6).

Теорема 1. *Если последовательность имеет предел, то она ограничена.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет пределом число a. Докажем, что она ограничена. Возьмем некоторое число $\varepsilon>0$. Тогда найдется номер N, такой, что вне интервала $(a—\varepsilon;\ a+\varepsilon)$ могут оказаться лишь N первых членов последовательности: $a_1, a_2, ..., a_N$. Среди чисел $a_1, a_2, ..., a_N, a—\varepsilon, a+\varepsilon$ найдем наименьшее и наибольшее и обозначим их соответственно через m и M. Тогда $m\le a_n\le M$ для всех n, а это и означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Теорема 2. *Всякая сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Доказательство. Используем при доказательстве метод от противного. Предположим, что сходящаяся последовательность $\{a_n\}$ имеет два различных предела a и b. Пусть для определенности $a<b$. Положив $\varepsilon=\frac{b-a}{3}>0$, получим:

$$a+\varepsilon<b-\varepsilon. \qquad (11.7)$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то согласно определению предела для выбранного $\varepsilon=\frac{b-a}{3}$ существует такой номер N_1, что для всех $n>N_1$ будет выполняться неравенство $|a_n-a|<\varepsilon$ и, в частности, $a_n<a+\varepsilon$. С другой стороны, так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=b$, то существует такой номер N_2, что для всех $n>N_2$ будет $|a_n-b|<\varepsilon$ и, в частности, $b-\varepsilon<a_n$. Положив $N=\max\{N_1, N_2\}$ (т. е. выбрав максимальное из двух чисел N_1 и N_2), получим, что $b-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$ для $n>N$, но это противоречит неравенству (11.7). Следовательно, последовательность не может иметь двух различных пределов.

11.2.2. Бесконечно малые последовательности

Вычисление пределов и доказательства теорем о пределах упрощаются, если использовать понятие бесконечно малой последовательности.

Определение. Последовательность называется бесконечно малой, если ее предел равен нулю.

Например, последовательность $a_n = \dfrac{1}{n}$ является бесконечно малой, так как ее предел равен нулю. Последовательность $a_n = \dfrac{1}{10^n}$ также бесконечно малая, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{10^n} = 0$.

Теорема 3. Для того чтобы a было пределом последовательности $\{a_n\}$, необходимо и достаточно, чтобы a_n могло быть предоставлено в виде $a_n = a + \alpha_n$, где $\{\alpha_n\}$ - бесконечно малая последовательность, т.е. $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$.

По условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что

$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad (11.8)$$

для всех *n*>*N*. Пусть $\alpha_n = a_n - a$, тогда

$$|\alpha_n| < \varepsilon \qquad (11.9)$$

для всех *n*>*N*, откуда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Итак, если число *a* – предел последовательности $\{a_n\}$, то $a_n = a + \alpha_n$, где $\{a_n\}$ - бесконечно малая последовательность. Аналогично доказывается и обратное утверждение, так как из (11.8) следует (11.9).

11.2.3. Теоремы о пределах последовательностей, связанные с арифметическими действиями

При вычислении пределов часть приходится использовать теоремы о пределе суммы, разности, произведения и частного. Рассмотрим их без доказательства.

Теорема 1 (о пределе суммы). *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их сумма $\{a_n + b_n\}$ также сходится и предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Теорема 2 (о пределе произведения). *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их произведение $\{a_n b_n\}$ сходится и предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right).$$

С л е д с т в и е 1. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n) = c\lim_{n\to\infty} a_n.$$

По теореме 2 имеем $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = \left(\lim_{n\to\infty} c\right)\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) = c\lim_{n\to\infty} a_n$, так как $\lim_{n\to\infty} c = c$.

С л е д с т в и е 2. Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, то их разности $\{a_n - b_n\}$ сходится и предел разности равен разности пределов:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n.$$

По теореме 1 и следствию 1 имеем $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_n + (-1)b_n) =$ $= \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty}((-1)b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 3 (о пределе частного). *Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся, причем $b_n \neq 0$ и $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, то их частное $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ сходится и предел частного равен частному пределов:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.$$

Рассмотрим примеры вычисления пределов с помощью доказанных теорем.

Пример 11.3. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n}$.

Числитель и знаменатель представляют собой расходящиеся последовательности (так как они не ограничены), поэтому нельзя непосредственно применить теорему о пределе частного. Однако, можно сначала поделить и числитель, и знаменатель на n (от этого дробь не изменится), а потом уже применить теоремы о пределе частного и разности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7-5n}{3-4n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n}-5}{\frac{3}{n}-4} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{n}-5\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-4\right)} = \frac{5}{4}.$$

Пример 11.4. Найти предел $\lim_{n\to\infty}\frac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2}$.

Имеем: $\lim_{n\to\infty}\frac{5(n^2+2n+1)}{1-n-n^2} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{1-n-n^2} = 5\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}-1} = 5\cdot\frac{1}{(-1)} = -5$.

11.3. Предел функции

11.3.1. Предел функции при $x \to +\infty$

Дадим определение предела функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, предполагая при этом, что функция $y = f(x)$ определена или на всей числовой оси, или для всех *x*, больших некоторого числа.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если каково бы ни было положительное число ε, можно найти такое число *N*, что для всех *x*, больших *N*, выполняется неравенство

$$\left| f(x) - b \right| < \varepsilon. \tag{11.10}$$

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет следующий вид:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \exists\, N \;\; \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon.$$

Иными словами, если функция имеет число *b* своим пределом (при $x \to +\infty$), то при неограниченном возрастании аргумента *x* значения этой функции сколь угодно мало отличаются от числа *b*, т.е. разность между значением функции и числом *b* становится сколь угодно близкой к нулю.

То, что функция имеет число *b* своим пределом при $x \to +\infty$, записывается следующим образом*: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Это читается так: «предел эф от *x* при *x*, стремящемся к плюс бесконечности, равен *b*». Возвращаясь к нашему примеру, имеем: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x} \right) = 2$.

Пример 11.5. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x} = 5$.

Решение. В данном случае $f(x) = \dfrac{5x+3}{x}$, а *b*=5. Зададим произвольное положительное число ε и рассмотрим абсолютную величину разности $f(x) - b$:

$$\left| f(x) - b \right| = \left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \left| \frac{3}{x} \right| = \frac{3}{|x|}.$$

Для того, чтобы разность была меньше ε, т.е. чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{5x+3}{x} - 5 \right| = \frac{3}{|x|} < \varepsilon,$$

(*)

достаточно, чтобы $|x| > 3/\varepsilon$. Так как мы рассматриваем предел функции при $x \to +\infty$, то *x* можно считать положительным. Поэтому неравенство (*)

* lim – первые три буквы латинского слова limes, которое в переводе на русский язык означает предел.

выполняется для всех $|x| > 3/\varepsilon$. В данном случае указанное в определении предела число *N* равно $3/\varepsilon$. Итак,

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \ \underset{\mathrm{N}}{\exists}(N = 3/\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{5x+3}{x} - 5\right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x+3}{x} = 5$.

Установим г е о м е т р и ч е с к и й с м ы с л предела функции при $x \to +\infty$. Как мы знаем, если функция $y = f(x)$ имеем пределом число *b*, то это значит, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число *N*, что для всех $x > N$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. На основании свойств абсолютных величин это неравенство равносильно следующим неравенствам:

$$-\varepsilon < f(x) - b < \varepsilon, \qquad (11.11)$$

или*

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon. \qquad (11.11')$$

Неравенства (11.11’) показывают, что ординаты всех точек графика функции $y = f(x)$, абсциссы которых превосходят число *N*, заключены между числами $b - \varepsilon$ и $b + \varepsilon$. Это значит, что график функции $y = f(x)$ для всех *x*, превосходящих число *N*, содержится в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 11.1,а). Число *N*, фигурирующее в определении предела, вообще говоря, зависит от ε. Чем меньше ε, т.е. чем у́же полоса между прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$, тем бо́льшим будет *N*.

11.3.2. Предел функции при $x \to -\infty$

Теперь рассмотрим определение предела функции при *x*, стремящемся к минус бесконечности ($x \to -\infty$).

Число b *называется пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$*, если каково бы ни было положительное число* ε*, можно найти такое число M, что для всех x, меньших M, выполняется неравенство* $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \ \exists M \ \underset{x}{\forall}(x < M) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Если функция $f(x)$ имеет пределом число *b* при $x \to -\infty$, то это записывают так: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$.

---

* Так как неравенство $|z| < \varepsilon$ равносильно неравенствам $-\varepsilon < z < \varepsilon$, то, полагая $z = f(x) - b$, придем к неравенствам

Геометрический смысл предела функции при $x \to -\infty$ аналогичен геометрическому смыслу предела при $x \to +\infty$. Если $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$, то каково бы ни было положительное число $\varepsilon > 0$, найдется такое число *M*, что при всех $x < M$ график функции $y = f(x)$ находится в полосе, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$ (рис. 11.1,б).

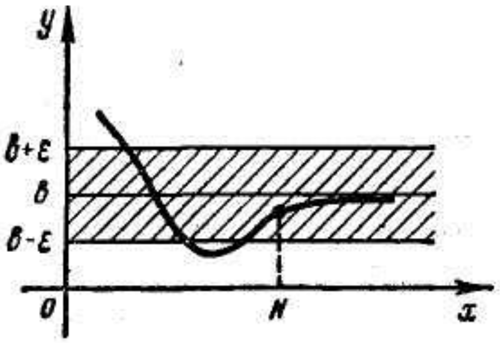


Рис. 11.1, а

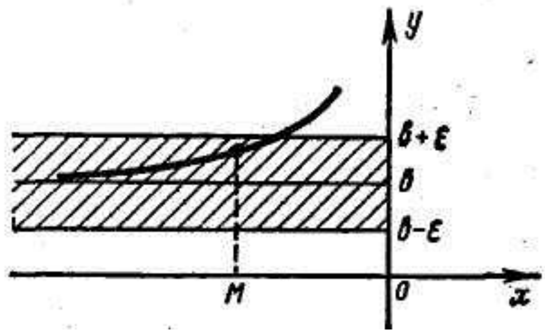


Рис. 11.1, б

11.3.3. Предел функции при $x \to x_0$

Мы ввели понятия предела функции при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Введем теперь понятие предела при $x \to x_0$. Рассмотрим сперва случай, когда независимая переменная *x* приближается к x_0 слева.

Число b называется пределом функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$ слева, если каково бы ни было положительное число ε, найдется такое число N (меньшее x_0), что для всех x, лежащих между N и x_0 $(N < x < x_0)$, выполняется неравенство $\left| f(x) - b \right| < \varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$ слева:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\ \underset{N}{\exists}(N < x_0)\underset{x}{\forall}(N < x < x_0) \Rightarrow \left| f(x) - b \right| < \varepsilon .$$

Понятие предела функции при $x \to x_0$ слева сходно с понятием предела функции при $x \to +\infty$ и отличается от него лишь тем, что в случае предела функции при $x \to +\infty$ неравенство (1.12) выполняется для всех *x*, превосходящих *N*, а в случае предела функции при $x \to x_0$ слева – для всех *x*, превосходящих *N*, но меньших, чем x_0. Предел функции при $x \to x_0$ слева обозначают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b$. Символ $x \to x_0 - 0$ означает, что *x* стремится к x_0 слева.

Геометрический смысл предела функции при $x \to x_0 - 0$ заключается в следующем: каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число

$N\left(N<x_0\right)$, что для всех x, заключенных между N и x_0, график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ (рис. 11.2, а)

Аналогично предел функции при $x\to x_0$ слева вводится понятие предела при $x\to x_0$ справа.

Число b *называется пределом функции* $f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ *справа, если каково бы ни было положительное число* ε*, найдется такое число* M *(большее* x_0*), что для всех* x*, лежащих между* x_0 *и* M $\left(x_0<x<M\right)$*, выполняется неравенство* $\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ справа:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}\left(\varepsilon>0\right)\ \underset{N}{\exists}\left(M>x_0\right)\underset{x}{\forall}\left(x_0<x<M\right)\Rightarrow\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon.$$

Предел функции при $x\to x_0$ справа обозначают так: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=b$. Если функция $y=f\left(x\right)$ при $x\to x_0$ справа имеет пределом число b, то геометрически это означает, что график функции лежит в полосе, ограниченной прямыми $y=b-\varepsilon$ и $y=b+\varepsilon$ для всех x, заключенных между x_0 и M (рис. 11.2, б).

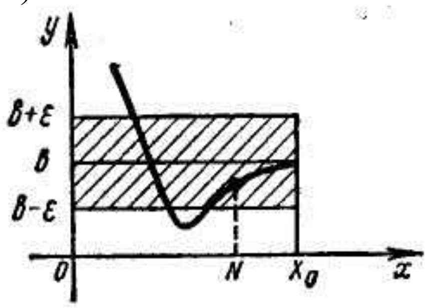


Рис. 11.2, а

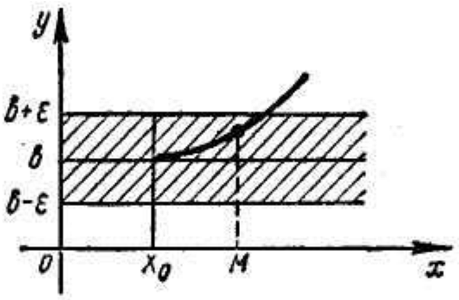


Рис. 11.2, б

Пределы функции при $x\to x_0$ слева $\left(x\to x_0-0\right)$ и при $x\to x_0$ справа называются *односторонними* пределами.

Если оба односторонних предела существуют и равны между собой, то говорят, что функция $f\left(x\right)$ имеет *двусторонний предел* при $x\to x_0$, или просто предел при $x\to x_0$.

Таким образом, *число* b *является пределом функции* $y=f\left(x\right)$ *при* $x\to x_0$*, если каково бы ни было* $\varepsilon>0$*, можно найти такие числа* M *и* $N\left(N<x_0<M\right)$*, что для всех* x*, лежащих в интервале* $\left(N,\ M\right)$ *(за исключением, быть может, точки* x_0*), выполняется неравенство* $\left|f\left(x\right)-b\right|<\varepsilon$.

Символическая запись определения предела функции $f(x)$ при $x \to x_0$: $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0)\underset{M,N}{\exists}(N < x_0 < M)\underset{x}{\forall}(x \in (N, M))$ (за исключением, быть может, точки x_0) $\Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Назовем *окрестностью* точки x_0 любой интервал, содержащий эту точку. Легко видеть, что если b есть предел функции $y = f(x)$ при $x \to x_0$, то неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ выполняется для всех точек некоторой окрестности точки x_0 (за исключением, быть может, точки x_0).

Если при $x \to x_0$ функция $f(x)$ имеет предел, равный b, то это записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$. Геометрический смысл предела при $x \to x_0$ ясен из рисунка 11.3.

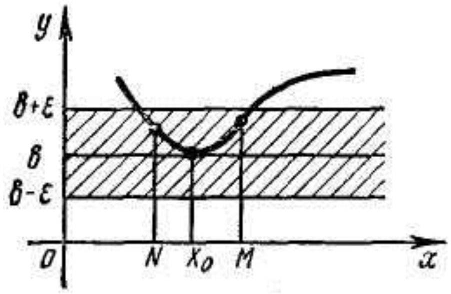


Рис. 11.3

З а м е ч а н и е 1. В определении предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 + 0$, или $x \to x_0 - 0$) рассматривались значения $x \neq x_0$. В самой точке x_0 функция может быть и не определена. В дальнейшем это замечание будет неоднократно использовано.

З а м е ч а н и е 2. Числа *M* и *N*, фигурирующие в определениях предела при $x \to x_0$ (или $x \to x_0 - 0$, или $x \to x_0 + 0$), зависят от ε и x_0.

Пример 11.6. Рассмотрим функцию $y = 2x + 1$. Ее значение при $x = 4$ равно 9. покажем, что при приближении независимой переменной *x* слева и справа к числу 4 значения функции неограниченно приближаются к числу 9, т.е. что $\lim\limits_{x \to 4}(2x + 1) = 9$.

Для этого возьмем произвольное положительной число ε и убедимся в том, что для значений *x*, близких к $x_0 = 4$, разность между функцией и числом 9 по абсолютной величине может быть сделана меньше ε, т.е. что $|(2x + 1) - 9| < \varepsilon$. Очевидно,

$$\left\{|2x+1| - 9 < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{-\varepsilon < (2x+1) - 9 < \varepsilon\right\} \Leftrightarrow \left\{4 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 4 + \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Итак, разность между функцией и числом 9 становится (по абсолютной величине) меньше ε для всех x, лежащих между числами $N=4-\frac{\varepsilon}{2}$ и $M=4+\frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому функция $y=2x+1$ имеет предел $\lim\limits_{x\to 4}(2x+1)=9$.

Пример 11.7. Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на сегменте $[0,\ 4]$ следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases} x-1, \text{ если } 0\le x<3, \\ 3-x, \text{ если } 3\le x\le 4. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке 11.4. Очевидно, $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3-0}(x-1)=2$, $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 3+0}(3-x)=0$, что наглядно видно из графика. Здесь предел справа и предел слева не равны друг другу. Поэтому функция $y=f(x)$ не имеет предела (двустороннего) при $x\to 3$.

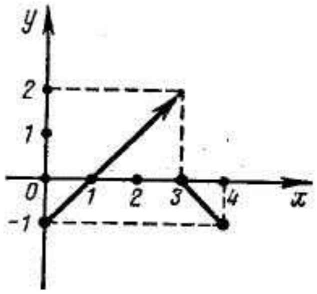


Рис. 11.4

Покажем теперь, что если функция имеет предел, то он единственный. Это легко установить геометрически. В самом деле, допустим противное, т.е. что функция $y=f(x)$, например, при $x\to+\infty$, имеет два предела b_1 и b_2. Рассмотрим две полосы, одна из которых ограничена прямыми $y=b_1-\varepsilon$, $y=b_1+\varepsilon$, а другая – прямыми $y=b_2-\varepsilon$, $y=b_2+\varepsilon$. При этом ε возьмем столь малым, чтобы обе полосы не имели общих точек. Тогда при достаточно больших x график функции не может находиться одновременно в каждой из этих полос. Таким образом, всякая функция либо совсем не имеет предела, либо имеет только один предел.

11.3.4. Бесконечно малые функции. Ограниченные функции

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to+\infty$, если ее предел при $x\to+\infty$ равен нулю. Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to-\infty$, $x\to x_0-0$, $x\to x_0+0$, $x\to x_0$. Так как для бесконечно малой функции предел $b=0$, а $|f(x)-b|=|f(x)-0|=|f(x)|$, то на основании понятия предела, например при $x\to+\infty$, можно дать следующее определение бесконечно малой функции, равносильное только данному.

Функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* (при $x\to+\infty$), если каково бы ни было $\varepsilon>0$, можно найти такое число *N*, что при всех $x>N$ выполняется неравенство*

$$\left|f(x)\right|<\varepsilon. \qquad (11.12)$$

Символическая запись определения бесконечно малой при $x\to+\infty$:

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\exists N\underset{x}{\forall}(x>N)\Rightarrow\left|f(x)\right|<\varepsilon.$$

Пример 11.8. Покажем, что функция $y=1/x^2$ является бесконечно малой при $x\to+\infty$. Для этого надо показать, что при $x\to+\infty$ ее предел $b=0$, т.е. что для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое *N*, что для $x>N$ выполняется неравенство (1.12):

$$\left|f(x)\right|=\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{x^2}<\varepsilon.$$

Но это неравенство осуществляется при $x>1/\sqrt{\varepsilon}=N$.

Вообще, можно показать, что функция $y=1/x^{\alpha}$ (где α - любое положительное число) есть бесконечно малая при $x\to+\infty$.

Пример 11.9. Покажем, что функция $y=x^3$ является бесконечно малой при $x\to0$. Зададим $\varepsilon>0$. Неравенство $\left|f(x)\right|=\left|x^3\right|<\varepsilon$, очевидно, выполняется для всех тех значений аргумента *x*, для которых $|x|<\sqrt[3]{\varepsilon}$, $-\sqrt[3]{\varepsilon}<x<\sqrt[3]{\varepsilon}$. Таким образом, неравенство $\left|x^3\right|<\varepsilon$ выполняется для всех *x*, лежащих между $N=-\sqrt[3]{\varepsilon}$ и $M=\sqrt[3]{\varepsilon}$. Это значит, что $\lim\limits_{x\to0}x^3=0$, т.е. функция $y=x^3$ бесконечно малая при $x\to0$.

Вообще, можно показать, что функция $y=x^m$ (где $m>0$) бесконечно малая при $x\to0$.

Докажем теперь несколько теорем о бесконечно малых функциях. Для определенности все формулировки и доказательства теорем будем проводить для случая бесконечно малых функций при $x\to+\infty$, так как для всех остальных случаев формулировки и доказательства аналогичны. Рекомендуем самостоятельно сформулировать и доказать эти теоремы для $x\to-\infty$, $x\to x_0-0$, $x\to x_0$ и $x\to x_0+0$.

Теорема 1. *Если функция* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *являются бесконечно малыми функциями (при* $x\to+\infty$*)*, то и их сумма $\varphi(x)$ + $\psi(x)$ *также является бесконечно малой функцией (при* $x\to+\infty$*).*

Доказательство. Пусть $f(x)$ = $\varphi(x)$ + $\psi(x)$. Требуется доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$, т.е. установить, что

---

* Рекомендуем сформулировать второе определение бесконечно малой функции для случаев $x\to-\infty$, $x\to x_0$, $x\to x_0-0$ и $x\to x_0+0$.

$$\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon>0)\exists N\underset{x}{\forall}(x>N)\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon.$$

Итак, пусть ε - любое положительное число. Так как $\varphi(x)$ по условию является бесконечно малой функцией, то для положительного числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_1\underset{x}{\forall}(x>N_1)\Rightarrow|\varphi(x)|<\varepsilon/2. \tag{11.13}$$

Аналогично, для того же числа $\varepsilon/2$

$$\exists N_2\underset{x}{\forall}(x>N_2)\Rightarrow|\psi(x)|<\varepsilon/2. \tag{11.14}$$

Пусть N – наибольшее из чисел N_1 и N_2. Тогда для $x>N$ выполняются одновременной оба неравенства (1.13) и (1.14). Но в таком случае*

$$\underset{x}{\forall}(x>N)\Rightarrow\left\{|f(x)|=|\varphi(x)+\psi(x)|\le|\varphi(x)|+|\psi(x)|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\right\}.$$

Следовательно, $\underset{x}{\forall}(x>N)\Rightarrow|f(x)|<\varepsilon$, а это значит, что функция $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ является бесконечно малой функцией при $x\to+\infty$.

Эта теорема может быть легко обобщена на любое конечное число бесконечно малых функций. Кратко ее читают так: *сумма нескольких бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Пример 11.10. Функция $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}$ является бесконечно малой функцией при $x\to+\infty$, так как каждое слагаемое $1/\sqrt{x}$, $1/x$ и $1/x^2$ есть бесконечно малая функция при $x\to+\infty$.

Прежде чем переходить к дальнейшим теоремам о бесконечно малых функциях, введем понятие ограниченной функции.

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* на некотором множестве М значений аргумента *x*, если существует такое положительное число *C*, что для всех $x\in M$ выполняется неравенство $|f(x)|\le C$. Таким множеством может быть, например, интервал, сегмент или даже вся числовая прямая.

Пример 11.11. Функция $y=\sin x$ и $y=\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, так как для любого значения *x* имеем $|\sin x|\le 1$, $|\cos x|\le 1$.

Пример 11.12. Функция $y=1/x$ не является ограниченной на интервале $(0,\ 1)$, так как нельзя указать такое число *C*, чтобы для всех $x\in(0,\ 1)$ выполнялось неравенство $|1/x|\le C$.

Следующие две теоремы устанавливают связь между понятиями ограниченной функции и функции, имеющей предел. Для определенности рассмотрим случай предела функции при $x\to+\infty$ и приведем их без доказательств.

Теорема 2. *Если функция* $y=f(x)$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *то она ограничена на некотором бесконечном интервале* $(N,\ +\infty)$.

* Здесь мы используем следующее свойство абсолютных величин: $|a+b|\le|a|+|b|$.

Замечание. Функцию, ограниченную на бесконечном интервале $]N,\ +\infty[$, будем называть ограниченной при $x \to +\infty$.

Следствие. *Бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$) ограничена (при $x \to +\infty$).*

Теорема 3. *Если функция $y = f(x)$ имеет предел, отличный от нуля (при $x \to +\infty$), то функция $y = 1/f(x)$ ограничена (на некотором бесконечном интервале).*

Теорема 4. *Произведение бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$) на функцию ограниченную (при $x \to +\infty$) является функцией бесконечно малой.*

Пример 11.13. Функция $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$, так как она является произведением ограниченной функции $\sin x$ на бесконечно малую (при $x \to +\infty$) функцию $y = 1/x^2$.

Пример 11.14. Функция $y = x^2(1 + \sin x)$ является бесконечно малой при $x \to 0$, так как она является произведением ограниченной функции $(1 + \sin x)$ на функцию x^2, бесконечно малую при $x \to 0$.

Следствие 1. Так как всякая бесконечно малая функция ограничена, то из только что доказанной теоремы вытекает, что *произведение двух бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.*

Следствие 2. *Произведение бесконечно малой функции на число есть функция бесконечно малая.*

Теорема 5. *Частное от деления функции $f(x)$, бесконечно малой при $x \to +\infty$, на функцию $\varphi(x)$, предел которой (при $x \to +\infty$) отличен от нуля, является функцией бесконечно малой.*

11.3.5. Основные теоремы о пределах

В этом пункте мы приведем некоторые теоремы о правилах предельного перехода, которые, как мы видим в дальнейшем, облегчает нахождение пределов. При этом, заметим, что как формулировки, так и доказательства этих теорем для случаев $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to x_0 - 0$, $x \to x_0$, $x \to x_0 + 0$ совершенно аналогичны. Поэтому, для определенности, мы приведем их только для случая $x \to +\infty$.

Прежде всего, установим связь между функцией, имеющей предел, и бесконечно малой функцией. Эта связь отражена в содержании следующих двух теорем.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ имеет предел (при $x \to +\infty$), равный b, то ее можно представить как сумму числа b и бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Рассмотрим разность

$$f(x) - b = \alpha(x) \qquad (11.15)$$

и покажем, что $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Так как $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Но тогда и $|\alpha(x)| < \varepsilon$ для $x > N$. Это значит, что $\alpha(x)$ бесконечно малая функция. Из равенства (11.15) находим $f(x) = b + \alpha(x)$. Таки образом, теорема доказана.

Теорема 2 (обратная)**.** *Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа* b *и некоторой бесконечно малой функции (при $x \to +\infty$), то число* b *является пределом функции $f(x)$ (при $x \to +\infty$).*

Доказательство. По условию $f(x) = b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция (при $x \to +\infty$). Покажем, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$. Действительно, $f(x) - b = \alpha(x)$. Так как $\alpha(x)$ бесконечно малая функция, то $\underset{\varepsilon}{\forall}(\varepsilon > 0) \exists N \underset{x}{\forall}(x > N) \Rightarrow \{\alpha(x) < \varepsilon\}$. Но так как $|f(x) - b| = |\alpha(x)|$, то при $x > N$ имеем $|f(x) - b| < \varepsilon$. Это и означает, на основании определения предела, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Пример 11.56. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5$.

Решение. Так как функции $6/x$ и $1/x^2$ бесконечно малые при $x \to +\infty$, $\frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$, как сумма бесконечно малых функций, есть функция бесконечно малая. Функция $5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}$ есть сумма числа 5 и бесконечно малой функции. Следовательно, по теореме 2

$$\lim_{x \to +\infty}\left(5 + \frac{6}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 5.$$

Перейдем теперь к выводу правил предельного перехода.

Теорема 3. *Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = c$, то функции $f(x) + \varphi(x)$ и $f(x) - \varphi(x)$ тоже имеют пределы при $x \to +\infty$, причем*

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \pm \lim_{x \to +\infty} \varphi(x),$$

т.е. предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов.

Замечание. Теорема 3 справедлива для алгебраической суммы любого конечного числа функций.

Теорема 4. *Если $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = c$, то функция $f(x)\varphi(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$, причем*

$$\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)\varphi(x)\right] = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} \varphi(x),$$

т.е. предел произведения двух функций равен произведению их пределов.

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.*

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=k\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

где k – постоянный множитель.

Доказательство. В самом деле,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[k\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=k\cdot\lim_{x\to+\infty}\varphi(x),$$

так как $\lim\limits_{x\to+\infty}k=k$.

Теорема 4 справедлива для любого конечного числа сомножителей, в частности, если эти сомножители равны между собой, то имеем:

$$\lim_{x\to+\infty}\left\{\left[f(x)\right]^n\right\}=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot f(x)\ldots f(x)\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}f(x)\cdot\lim_{x\to+\infty}f(x)\ldots\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[\lim_{x\to+\infty}f(x)\right]^n.$$

Это кратко формулируют так: *предел степени равен степени предела.*

Теорема 5. *Если* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=c$ и $c\neq0$, то $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ *имеет предел при* $x\to+\infty$, *причем* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)}$, *т.е. предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.*

Теорема о пределах суммы, произведения и частного облегчают нахождение пределов.

Пример 11.16. Найти предел функции $y=x^4+3x^2+4$ при $x\to2$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to2}\left(x^4+3x^2+4\right)=\lim_{x\to2}x^4+\lim_{x\to2}3x^2+\lim_{x\to2}4.$$

Здесь мы воспользовались теоремой о пределе суммы.

Далее, так как предел степени равен степени предела, то

$$\lim_{x\to2}x^4=\left[\lim_{x\to2}x\right]^4=2^4=16;\ \lim_{x\to2}3x^2=3\lim_{x\to2}x^2=3\left[\lim_{x\to2}x\right]^2=3\cdot2^2=12.$$

Замечая, наконец, что $\lim\limits_{x\to2}4=4$, получим

$$\lim_{x\to2}\left(x^4+3x^2+4\right)=16+12+4=32.$$

Пример 1.18. Найти $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$.

Решение. Здесь непосредственно теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя при $x\to4$ равен нулю:

$$\lim_{x\to4}\left(x^2-6x+8\right)=\lim_{x\to4}x^2-6\lim_{x\to4}x+8=4^2-6\cdot4+8=0.$$

Кроме того, числитель дроби имеет предел, также равный нулю. Поэтому нахождение предела этой дроби сводится, как говорят, к раскрытию неопределенности $^{*}0/0$. Для этого преобразуем дробь, разложив числитель и знаменатель на множители:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}=\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби на $x-4$. Это сокращение допустимо, так как при разыскании предела рассматриваются значения $x\neq 4$.

Итак, для всех значений $x\neq 4$ имеет место тождество

$$\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\frac{x-1}{x-2}.$$

Поэтому пределы этих функций равны между собой:

$$\lim_{x\to 4}\frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1}{x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x-1)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-2)}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}.$$

Пример 11.17. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

Решение. Здесь непосредственно применить теорему о пределе дроби нельзя, так как ни числитель, ни знаменатель дроби не имеют предела при $x\to+\infty$, одновременно стремясь к бесконечности. Таким образом, мы здесь имеем дело с неопределенностью вида ∞/∞. Для того чтобы найти предел данной дроби, предварительно преобразуем ее, разделив числитель и знаменатель на x^2; дробь от этого не изменит своей величины, а следовательно, и своего предела. После этого преобразования предел уже найти легко:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(5+6/x+1/x^2\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(6+4/x+2/x^2\right)}=\frac{5}{6}.$$

Обобщая разобранные примеры, можно сделать следующий вывод: *При $x\to\pm\infty$ предел отношения двух многочленов одинаковых степеней равен отношению коэффициентов при старших степенях x. Если же степени многочленов не равны, то предел их отношения равен нулю, если степень числителя меньше степени знаменателя, и равен бесконечности, если степень числителя больше степени знаменателя.*

В заключение этого пункта приведем еще две теоремы о пределах без доказательств.

Теорема 6. *Пусть даны три функции $\varphi(x)$, $f(x)$, $g(x)$, удовлетворяющие неравенствам $\varphi(x)\le f(x)\le g(x)$ для достаточно больших*

---

* Если при отыскании предела дроби $f(x)/\varphi(x)$ числитель и знаменатель стремятся одновременно к нулю или бесконечности, то будем говорить, что эта дробь представляет *неопределенность* вида $0/0$ или соответственно ∞/∞. Нахождение предела такой дроби условимся называть $0/0$ раскрытием вида $0/0$ или ∞/∞.

значений x. Если функции $\varphi(x)$ и $g(x)$ *имеют один и тот же предел при* $x \to +\infty$, *то и функция* $f(x)$, *заключенная между ними, имеет предел, равный пределу функций* $\varphi(x)$ и $g(x)$.

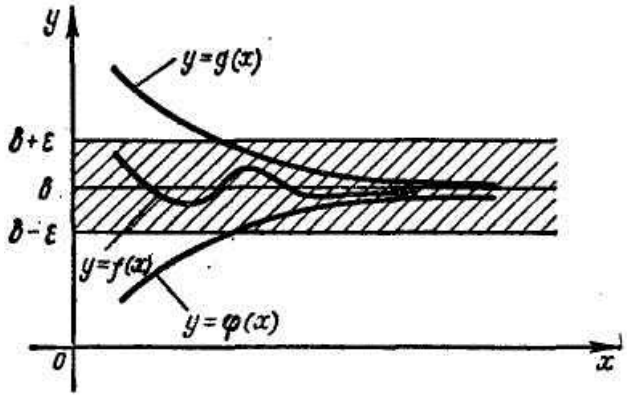


Рис. 11.5

Теорема 7. *Если функция* $y = f(x) \geq 0$ *для всех достаточно больших значений x и при* $x \to +\infty$ *имеет предел, то этот предел не может быть отрицательным.*

11.3.6. Первый замечательный предел

Часто приходится иметь дело с пределом функции $\dfrac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Как мы увидим, он равен 1. Предварительно докажем, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$, а $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Пусть $0 < x < \pi/2$. Рассмотрим окружность единичного радиуса (рис.1.6). Дуга $\overset{\cup}{AC}$ численно равна центральному углу *x*, выраженному в радианах, а отрезок *AB* численно равен $\sin x$. Так как $0 < AB < AC$ (рис. 1.6), то

$$0 < \sin x < x \qquad (11.18)$$

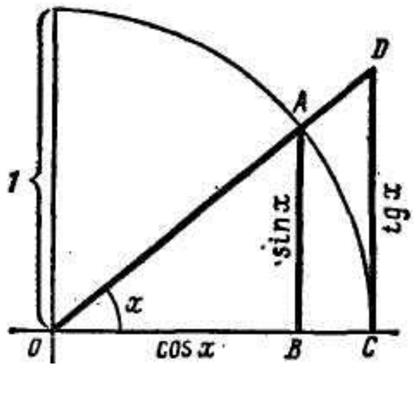


Рис. 1.6

Из неравенства (11.18) и теоремы 6 п. 11.3.6 следует, что при $x \to 0$*.

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0 \tag{11.19}$$

Докажем теперь, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Замечая, что $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, получим

$$\lim_{x\to 0}\cos x = \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right) = 1 - 2\lim_{x\to 0}\sin^2\frac{x}{2} = 1 - 2\cdot 0 = 1.$$

Теперь перейдем к рассмотрению према функции $\frac{\sin x}{x}$ при $x \to 0$. Так как предел знаменателя дроби равен нулю, то теорема о пределе дроби здесь не применима **.

Из рисунка 11.5 непосредственно видно:

$$\text{пл. } \Delta OAB < \text{пл. сектора } OAC < \text{пл. } \Delta ODC; \tag{11.20}$$

$$\text{пл. } \Delta OAB = \frac{\mathrm{OB}\cdot\mathrm{BA}}{2} = \frac{\cos x\cdot\sin x}{2}; \text{ пл. сектора } OAC =$$

$$= \frac{1}{2}R^2x = \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x = \frac{x}{2}; \quad \text{пл. } \Delta ODC = \frac{OC\cdot CD}{2} = \frac{1\cdot tgx}{2} = \frac{tgx}{2}.$$

Подставим найденные выражения для площадей в неравенства (1.20):

$$\frac{\cos x\cdot\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{tgx}{2}. \tag{11.21}$$

Неравенства (11.21) справедливы для всех значений x, заключенных между нулем и $\pi/2$. Разделив все члены этих неравенств на $\frac{1}{2}\sin x$, получим

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{11.22}$$

Неравенства (11.22) были выведены в предположении, что $x > 0$. Но они верны и при $x < 0$, так как $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$.

Выше мы видели, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Применив к частному $1/\cos x$ теорему о пределе дроби, получим $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x} = \frac{1}{1} = 1$.

---

* Можно доказать, что формула (1.21) справедлива и в том случае, когда $x \to 0$, оставаясь отрицательным.

** поскольку при $x \to 0$ числитель дроби $\sin x$ тоже стремится к нулю, здесь имеет место неопределенность вида $0/0$.

Обе крайние функции $\cos x$ и $1/\cos x$ неравенство (11.22) при $x \to 0$ имеют одинаковый предел, равный единице. Но тогда функция $\dfrac{\sin x}{x}$, заключенная между функциями $\cos x$ и $1/\cos x$, согласно теореме 6, п. 1.3.6, имеет тот же предел при $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \tag{11.23}$$

С помощью этого предела находятся другие пределы.

Пример 11.18. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{tgx}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби при $x \to 0$ одновременно стремятся к нулю. Теорема о пределе дроби здесь неприменима. Для нахождения предела преобразуем данную дробь:

$$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Пример 11.19. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{2} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \frac{\sin(x/2)}{x/2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

11.3.7. Второй замечательный предел

Рассмотрим последовательность, общий член которой $y_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

Покажем, что эта последовательность возрастает и ограничена.

Полагая $a = 1$, $b = 1/n$, по формуле бинома Ньютона имеем

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} \frac{1}{n^n}.$$

Замечая, что

$$\frac{n(n-1)}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right), \ \ldots, \quad \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots 2 \cdot 1}{n^n} =$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdot\frac{n-3}{n}\dots\frac{\left[n-(n-1)\right]}{n}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+\dots,$$

получим

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\dots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

С увеличением n дроби $1/n,\ 2/n,\ 3/n,\ \dots$ уменьшаются, а разности $1-\frac{1}{n},\ 1-\frac{2}{n},\ 1-\frac{3}{n},\ \dots\ 1-\frac{n-1}{n}$ увеличиваются. Поэтому с увеличением n 3-й, 4-й и т.д. члены разложения увеличиваются; кроме того, при этом добавляются новые положительные слагаемые. Следовательно, $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ с увеличением n возрастает. Итак, последовательность $\left\{y_n\right\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ - возрастающая. Покажем, что она ограничена.

Если в разложении для y_n отбросить в скобках дроби $\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \dots$, то каждое слагаемое, начиная с третьего, увеличится, и мы получим сумму, большую первоначальной:

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}$$

Но

$$\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 2}=\frac{1}{2^2},\quad \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}=\frac{1}{2^3},\ \dots$$

$$\dots,\ \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\dots n}<\frac{1}{\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\dots 2}_{n-1\text{ множитель}}}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Поэтому

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}$ найдем по формуле суммы членов убывающей геометрической прогрессии:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

Поэтому $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 2 = 3$. Итак, данная последовательность ограничена.

Следовательно, на основании признака существования предела возрастающей ограниченной последовательности заключаем, что последовательность с общим членом $y_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ имеет предел. Этот предел играет большую роль в математике. Его называют числом *e*. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e. \qquad (11.24)$$

Число e иррационально. Его приближенное значение с точностью до 10^{-6}: $e \approx 2{,}718282$.

Рассмотрим функцию $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Можно доказать, что эта функция при непрерывном изменении x и стремлении его к $+\infty$ также имеет пределом число e:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (1.25)$$

Доказательства этого факта мы не приводим.

С помощью формулы (1.25) вычисляются многие пределы.

Пример 11.20. Показать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Решение. Сделаем, как говорят, замену переменной, положив $x = -(t+1)$. Тогда очевидно, что $t \to +\infty$ при $x \to -\infty$. Поэтому

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t\to+\infty}\left[1 + \frac{1}{-(t+1)}\right]^{-(t+1)} = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t\to+\infty}\left[\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right)\right] =$$

$$= \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Итак,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Так как функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ имеет один и тот же предел как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$, то часто пишут просто

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 11.21. Найти предел функции $y=(1+\alpha)^{1/\alpha}$ при $\alpha\to 0$.

Решение. Для отыскания предела сделаем замену переменной, полагая $1/\alpha = x$. Тогда $x\to\infty$ при $\alpha\to 0$. Поэтому

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Пример 11.22. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Положим $x=2t$. При $x\to\infty$ и $t\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} = \lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right] =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

В заключение отметим, что часто приходится рассматривать показательную функцию с основанием *e*, т.е. $y=e^x$.

К числу *e* приводят решения многих прикладных задач статистики, физики, биологии, химии и др., анализ таких процессов, как рост народонаселения, распад радия, размножение бактерий и т.п.

Рассмотрим **задачу о непрерывном начислении процентов.** Первоначальный вклад в банк составил Q_0 денежных единиц. Банк выплачивает ежегодно *p*% годовых. Необходимо найти размер вклада Q_t через *t* лет.

При использовании *простых процентов* размер вклада ежегодно будет увеличиваться на одну и ту же величину $\dfrac{p}{100}Q_0$, т.е. $Q_1 = Q_0\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$, $Q_2 = Q_0\left(1+\dfrac{2p}{100}\right)$, …, $Q_t\left(1+\dfrac{pt}{100}\right)$. На практике значительно чаще применяются *сложные проценты*. В этом случае размер вклада ежегодно будет увеличиваться в одно и то же число $\left(1+\dfrac{p}{100}\right)$ раз, т.е.

$$Q_1 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right),\ Q_2 = Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2,\ \ldots,\ Q_t\left(1+\frac{p}{100}\right)^t.$$

Если начислять проценты по вкладам не один раз в году, а *n* раз, то при том же ежегодном приросте *p*% процент начисления за $\dfrac{1}{n}$ - ю часть года составит $\dfrac{p}{n}$%, а размер вклада за *t* лет при *nt* начислениях составит

$$Q_t = Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}. \qquad (11.26)$$

Будем полагать, что проценты по вкладу начисляются каждое полугодие (n=2), ежеквартально (n=4), ежемесячно (n=12), каждый день (n=365), каждый час (n=8760) и т.д., непрерывно $(n \to \infty)$. Тогда размер вклада за t лет составит

$$Q_t = \lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right] = Q_0\lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$

или при $x=\dfrac{100n}{p}\to\infty$

$$Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{e100}}. \qquad (11.27)$$

Формула (1.27) выражает *показательный (экспоненциальный)* закон роста (при p>0). Она может быть использована при непрерывном начислении процентов.

Чтобы почувствовать результаты расчетов в зависимости от способа начисления процентов, в таблице в качестве примера приводятся размеры вкладов Q_t, вычисленные при $Q_0=1$ ден. ед., p=5%, t=20 лет.

	Формула простых процентов	*Формула сложных процентов*					*Формула непрерывного начисления процентов*
		n=1	n=2	n=4	n=12	n=365	
Размер вклада, ден. ед.	2,0000	2,6355	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Как видим, погрешность вычисления суммы вклада по формуле (11.30) непрерывного начисления процентов по сравнению с формулой (11.29) сложных процентов, начисляемых ежегодно (n=1), при одной и той же процентной ставке (p=5%)оказалась незначительной (около 2,5%).

З а м е ч а н и е. Хотя в практических финансово-кредитных операциях непрерывное начисление процентов применяется крайне редко, оно оказывается весьма эффективным при анализе сложных финансовых проблем, в частности при обосновании и выборе инвестиционных решений.

11.3.8. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются бесконечно малыми при $x\to+\infty$. Рассмотрим предел отношения этих функций при $x\to+\infty$ и введем следующие определения *.

---

* Аналогичные определения вводятся при $x\to-\infty$, при $x\to x_0$ справа и слева, а также при $x\to x_0$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен нулю.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более высокого порядка малости,* чем функция $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой более низкого порядка малости,* чем $\psi(x)$ при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \infty$.

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми* при $x \to +\infty$, если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ существует и не равен ∞.

Пример 11.23. Функция $y = x^2$ является бесконечно малой при $x \to 0$ более высокого порядка малости, чем функция $y = 5x$, так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{5x} = \dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to0} x = 0$. При приближении x к нулю функция $y = x^2$ стремится к нулю быстрее, чем функция $y = 5x$.

Пример 11.24. Функции $y = x^2 - 4$ и $y = x^2 - 5x + 6$ являются бесконечно малыми одного порядка малости при $x \to 2$, так как

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to2}\frac{x+2}{x-3} = \frac{4}{-1} = -4 \neq 0.$$

Пример 11.25. Функции $\varphi(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ и $\psi(x) = \dfrac{1}{x}$ являются несравнимыми бесконечно малыми при $x \to +\infty$, так как не существует предела их отношения $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \cos x$.

Введем теперь понятие эквивалентных бесконечно малых функций.

Две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, бесконечно малые при $x \to +\infty$, называются *эквивалентными* (или *равносильными*), если предел их отношения при $x \to +\infty$ равен единице *.

Из определения следует, что эквивалентные бесконечно малые функции имеют одинаковый порядок малости.

Например, функции x, $\sin x$, tgx являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx}{x} = 1$ (см. п. 1.3.7).

---

* См. сноску на с. 99.

Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции при $x \to x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$. Тогда для значений *x*, близких к x_0, имеет место приближенное равенство $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\approx 1$, или $\varphi(x)\approx\psi(x)$, точность которого возрастает с приближением *x* к x_0.

Так как $\sin x$ и x –эквивалентные бесконечно малые при $x \to 0$, то для *x*, близких к нулю, $\sin x \approx x$. Эти обстоятельством широко пользуются, заменяя при малых *x* величину $\sin x$ аргументом *x*.

Так, например, если $x = 0{,}1$, то $\sin x = \sin 0{,}1 = 0{,}0998 \approx 0{,}1$.

Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - эквивалентные бесконечно малые функции, то это обозначают так: $\varphi(x) \sim \psi(x)$.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x) \sim \varphi_1(x)$ *и* $\psi(x) \sim \psi_1(x)$ *при* $x\to+\infty$. *Если существует* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}$, *то существует и* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, *и оба эти предела равны между собой.*

Кратко эта теорема формулируется следующим образом: *предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функции.*

Доказательство. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\psi_1(x)}{\psi(x)}=1\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}\cdot 1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi_1(x)}{\psi_1(x)}.$$

Доказанная теорема позволяет во многих случаях упрощать отыскание предела.

Пример 11.26. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{tg 3x}$.

Решение. Так как $\sin 5x \sim 5x$, $tg 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}=\frac{5}{3}.$$

В заключение этого параграфа приведем признак эквивалентности двух бесконечно малых функций.

Теорема 2. *Бесконечно малые функции* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда их разность есть бесконечно малая функция более высокого порядка малости, чем* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$.

Теорема 3. *Сумма конечного числа бесконечно малых функций различных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка.*

Пример 11.27. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2 x}.$$

Решение. Так как при $x\to 0$ по теореме 3 имеем $5x+6x^2 \sim 5x$, а $\sin x+tg^2 x \sim \sin x$, то, применяя теорему 1, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{5x+6x^2}{\sin x+tg^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{\sin x}=5.$$

11.4. Непрерывные функции

11.4.1. Непрерывность функции в точке. Точка разрыва

Представление о непрерывности функции интуитивно связано у нас с тем, что ее графиком является плавная, нигде не прерывающаяся линия. При рассмотрении графика такой функции $y=f\left(x\right)$ мы видим, что близким значениям аргумента соответствуют близкие значения функции; если независимая переменная x приближается к точке x_0, то значение функции $y=f\left(x\right)$ неограниченной приближается к значению функции в точке x_0 (рис. 11.7).

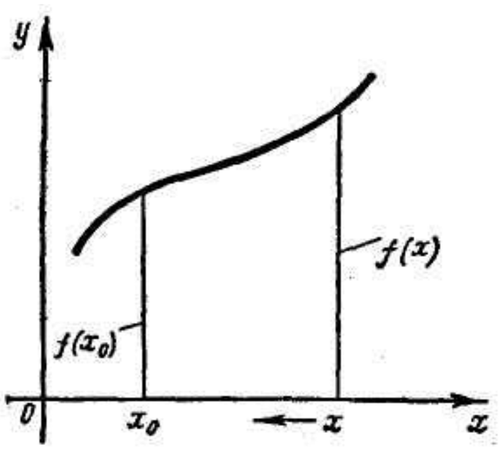


Рис. 11.7

Дадим теперь строгое определение непрерывности функции.

Функция $y=f\left(x\right)$ *называется непрерывной в точке* x_0*, если:*

1) *функция определена в точке* x_0 *и в некоторой ее окрестности, содержащей эту точку;*

2) *функция имеет предел при* $x\to x_0$*;*

3) *предел функции при* $x\to x_0$ *равен значению функции в точке* x_0*:*

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=f\left(x_0\right). \qquad (11.28)$$

Если в точке x_0 функция непрерывна, то точка x_0 называется *точка непрерывности* данной функции.

З а м е ч а н и е 1 . Формулу (1.31) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right), \qquad (11.29)$$

так как $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$. Формула (1.29) означает, что при нахождении предела непрерывной функции можно переходить к пределу под знаком функции.

З а м е ч а н и е 2 . Часто приходится рассматривать непрерывность функции в точке x_0 справа или слева (т.е. одностороннюю непрерывность). Пусть функция $y = f\left(x\right)$ определена в точке x_0. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$, то говорят, что функция $y = f\left(x\right)$ *непрерывна* в точке x_0 *справа*; если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$, то функция называется *непрерывной* в точке x_0 *слева.*

Введем теперь понятие точки разрыва.

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $y = f\left(x\right)$, если она принадлежит области определения функции или ее границе и не является точкой непрерывности*

В этом случае говорят, что при $x = x_0$ функция разрывна. Это может произойти, если в точке x_0 функция не определена, или не существует предел функции при $x \to x_0$, или, наконец, если предел функции существует, но не равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right) \neq f\left(x_0\right).$$

Пример 11.28. Рассмотрим функцию $y = 5x^3$. Докажем, что она непрерывна в точке $x = 2$. Для этого надо показать, что в точке $x = 2$ выполнены все три условия, входящие в определение непрерывной функции, т.е. что: 1) функция определена в точке $x = 2$ и в некоторой ее окрестности; 2) существует $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right)$ и 3) этот предел равен значению функции в точке $x = 2$. Так как функция $f\left(x\right) = 5x^3$ определена на всей числовой оси, то первое условие автоматически выполняется. Далее, $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) = \lim\limits_{x\to 2} 5x^3 = 40$. Итак, второе условие выполнено. Замечая, наконец, что $f\left(2\right) = 40$, мы видим, что $\lim\limits_{x\to 2} f\left(x\right) = f\left(2\right)$, т.е. и третье условие, определяющее непрерывность функции в точке $x = 2$, выполнено. Таким образом, функция $y = 5x^3$ непрерывна в точке $x = 2$. Аналогично можно показать, что эта функция непрерывна в любой точке числовой оси.

Пример 11.29. Рассмотрим функцию

---

* Точка x_0 называется *граничной точкой* области определения функции, если любая окрестность этой точки содержит как точки области определения функции, так и точки, не принадлежащие области определения. Совокупность всех граничных точек называется *границей* области. Так, например, для функции $y = 1\big/\sqrt{1-x^2}$ областью определения является интервал $\left[-1,\ 1\right]$, а ее граница состоит из двух точек $x = -1$ и $x = 1$.

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & \text{если } 0\le x<3; \\ 3-x, & \text{если } 3\le x\le 4, \end{cases}$$

приведенную в примере 1.7 п. 1.3.3. Эта функция определена во всех точках сегмента $[0,\ 4]$ и ее значение при $x=3$ равно 0 (см. график функции на рисунке 1.3). Однако в точке $x=3$ функция претерпевает разрыв, так как она не имеет предела при $x\to 3$: $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x)=2$, а $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x)=0$. Следует заметить, что функция $f(x)$ непрерывна во всех точках сегмента $[0,\ 4]$, за исключением точки $x=3$. При этом в точке $x=0$ она непрерывна справа, а в точке $x=4$ - непрерывна слева (см. замечание 2 п. 1.7.1), так как

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)=f(0)=-1,$$

$$\lim_{x\to 4-0} f(x)=\lim_{x\to 4-0}(3-x)=f(x)=-1.$$

Пример 11.30. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ (рис. 1.8) разрывны в граничной точке области определения $x=0$, так как они не определены в этой точке. Функции $y=1/x$ и $y=1/x^2$ являются бесконечно большими функциями при $x\to 0$. Поэтому говорят, что в точке $x=0$ эти функции имеют бесконечный разрыв.

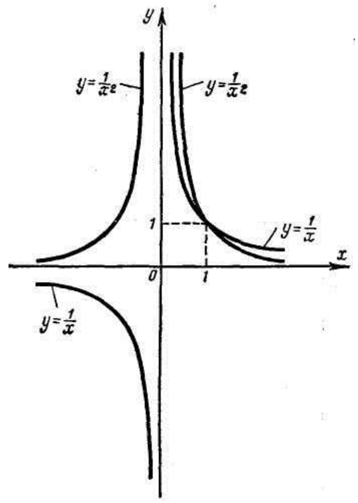


Рис. 11.8

Точки разрыва функции можно разбить на два типа.

Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется *точкой разрыва* I *рода,* если существуют оба односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$. Точка разрыва, не являющаяся точкой I рода, называется *точкой разрыва* II *рода.*

Функция $f(x)$, приведенная в примере 11.30, имеет в точке $x=3$ разрыв I рода, так как для нее существуют пределы при $x\to 3$ справа и слева.

Функция $y=1/x$ и $y=1/x^2$, рассмотренные в примере 3, в точке $x=0$ имеют разрыв II рода, так как эти функции при $x\to 0$ не имеют предела ни справа, ни слева.

Пример 11.31. Функция $y=\sin\frac{1}{x}$ определена для всех значений x, кроме $x=0$. В этой точке она имеет разрыв. Точка $x=0$ есть точка разрыва II рода, так как при $x\to 0$ как справа, так и слева, функция $\sin\frac{1}{x}$, колеблясь между -1 и 1, не приближается ни к какому значению. График ее приведен на рисунке 11.9.

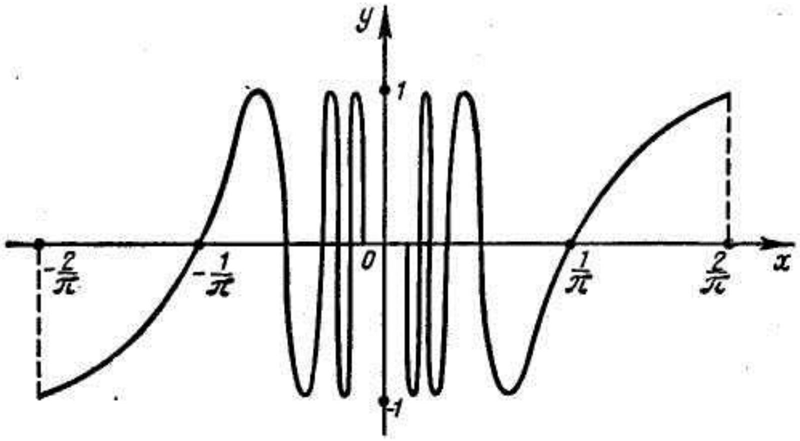


Рис. 11.9

Пример 11.32. Функция $\frac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$. Точка $x=0$ является точкой разрыва I рода, так как при $x\to 0$ существуют пределы справа и слева:

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1, \qquad \lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Если доопределить функцию $\frac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, полагая $f(0)=1$, то получим уже непрерывную функцию, определенную так:

$$f(x)=\frac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0;\ f(0)=1.$$

Доопределив функцию в точке $x=0$, мы устранили разрыв.

Точка x_0 разрыва I рода, в которой $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, называется *точкой устранимого разрыва.*

Пусть x_0 - точка разрыва I рода. *Скачком* функции в точке x_0 называют разность $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)-\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Так функция, рассмотренная в примере 11.32, имеет в точке $x_0=3$ скачок, равный $0-2=-2$.

В заключение этого пункта отметим одно свойство функции, непрерывной в точке. *Если непрерывная в точке x_0 функция $f(x)$ имеет в точке x_0 положительное (отрицательное) значение, то она остается положительной (отрицательной) во всех точках некоторой окрестности точки x_0.*

В самом деле, пусть, например, $f(x_0)>0$ возьмем такое $\varepsilon>0$, что $f(x_0)-\varepsilon>0$. Так как $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ (в силу непрерывности функции в точке x_0), то на основании определения предела функции при $x\to x_0$ (см. п. 11.6.3)

$$\underset{N,M}{\exists}(N<x_0<M)\underset{x}{\forall}(x\in[N,M])\Rightarrow\{|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\}\Leftrightarrow\{f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon\}$$

Но так как $f(x_0)-\varepsilon>0$, то и $f(x)>0$ для всех точек интервала $[N,\ M]$. Итак, функция $f(x)$ положительна в некоторой окрестности точки x_0.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бараненков Г.С., Демидович Б.П. и др. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов /Под ред. Б.П. Демидовича. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1966.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1969.
3. Дюбюк П.Е., Кручкович Г.И. и др. Сборник задач по курсу высшей математики. М.: Высшая школа, 1965.
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. М.: Высшая школа, 1966.
5. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т. и др. Сборник задач по высшей математике. Ч. 1, 2. М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.
6. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.
7. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.
8. Фильчаков П.Ф. Справочник по высшей математике. Киев: Наукова думка, 1972.
9. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1,2. - М.: Высшая школа, 1978. - 712 с.

Кулешова Ирина Ивановна

МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ. Часть I

Методическое пособие для студентов направления подготовки
38.03.01 «Экономика» всех форм обучения

Подписано к печати 06.02.23. Формат 60х84/16.
Усл. печ. л. 6,12. Тираж 25 экз. Зак. 231901. Рег. № 2.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.