МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

И.И. Кулешова

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Учебное пособие для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «Электроэнергетика и электротехника»

Рубцовск 2015

УДК 510.6
510.22
517.445

Кулешова И.И. Математические задачи энергетики: учебное пособие для студентов направления «Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. - 73 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения электротехнического факультета, изучающих курс по выбору «Математические задачи энергетики».

В работе кратко изложен материал по математической логике, операционному исчислению и теории графов, приведены примеры решения задач по данным темам, предложены варианты заданий для текущего контроля.

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцоского индустриального института.
Протокол № 8 от 26.11.15.

Рецензент: к.ф. – м.н. В.Г. Дудник

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Содержание настоящего курса составляет лишь часть обширной теории математических методов в энергетике. В данном курсе рассматриваются элементы алгебры логики с приложениями в электротехнике и методы операционного исчисления.

Аппарат математической логики в настоящее время нашел широкое применение в медицине, лингвистике, педагогике, психологии, экономике, технике. Цель данной работы – показать применение формул алгебры логики к описанию релейно-контактных схем и упрощению их.

Под операционным исчислением понимается совокупность методов прикладного анализа, позволяющих наиболее простыми и экономными средствами получать решения линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), разностных и некоторых видов интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

К уравнениям таких видов приводят задачи из различных разделов электротехники. Построение операционного исчисления базируется на идее функционального преобразования.

Преобразование обладает такими свойствами, что операциям анализа – дифференцированию и интегрированию над оригиналами – соответствуют операции алгебры – умножение и деление над изображениями. Путем такого преобразования дифференциальные и интегральные уравнения заменяются алгебраическими уравнениями.

1. ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

1.1. Понятие высказывания

Основным (неопределяемым) понятием математической логики является понятие «простого высказывания». Под *высказыванием* обычно понимают всякое повествовательное предложение, утверждающее что-либо о чем-либо, и при этом мы можем сказать, истинно оно или ложно в данных условиях места и времени. Логическими значениями высказываний являются «истина» и «ложь».

Приведем примеры высказываний.

1) Новгород стоит на Волхове.
2) Париж - столица Англии.
3) Карась не рыба.
4) Число 6 делится на 2 и на 3.
5) Если юноша окончил среднюю школу, то он получает аттестат зрелости.

Высказывания 1), 4), 5) истинны, а высказывания 2) и 3) ложны.

Очевидно, предложение «Да здравствуют наши спортсмены!» не является высказыванием.

Высказывание, представляющее собой одно утверждение, принято называть простым или элементарным. Примерами элементарных высказываний могут служить высказывания 1) и 2).

Высказывания, которые получаются из элементарных с помощью грамматических связок «не», «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда», принято называть сложными или составными. Так, высказывание 3) получается из простого высказывания «Карась - рыба» с помощью отрицания «не», высказывание 4) образовано из элементарных высказываний «Число 6 делится на 2», «Число 6 делится на 3», соединенных союзом «и». Высказывание 5) получается из простых высказываний «Юноша окончил среднюю школу», «Юноша получает аттестат зрелости» с помощью грамматической связки «если ..., то ...». Аналогично сложные высказывания могут быть получены из простых высказываний с помощью грамматических связок «или», «тогда и только тогда».

В алгебре логики все высказывания рассматриваются только с точки зрения их логического значения, а от их житейского содержания отвлекаются. Считается, что каждое высказывание либо истинно, либо ложно и ни одно высказывание не может быть одновременно истинным и ложным.

В дальнейшем будем элементарные высказывания обозначать малыми буквами латинского алфавита: *x, y, z, ... a, в, c, ...*; истинное значение высказывания - буквой «и» или цифрой 1, а ложное значение - буквой «л» или цифрой 0.

Если высказывание a истинно, то будем писать a=1, если a ложно, то a=0.

1.2. Логические операции над высказываниями

1. Отрицание. *Отрицанием* высказывания x называется новое высказывание, которое является истинным, если высказывание x ложно, и ложным, если высказывание x истинно. Отрицание высказывания x обозначается $\overline{x}$ и читается «не x» или «неверно, что x».

Логические значения высказывания $\overline{x}$ можно описать с помощью таблицы:

x	$\overline{x}$
1	0
0	1

Таблицы такого вида принято называть таблицами истинности.

Пусть x – высказывание. Так как $\overline{x}$ также является высказыванием, то можно образовать отрицание высказывания $\overline{x}$, то есть высказывание $\overline{\overline{x}}$, которое называется двойным отрицанием высказывания x. Ясно, что логические значения высказываний $\overline{\overline{x}}$ и x совпадают.

Например, для высказывания «Река Волхов вытекает из озера Ильмень» отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов вытекает из озера Ильмень» или «Река Волхов не вытекает из озера Ильмень», а двойным отрицанием будет высказывание «Неверно, что река Волхов не вытекает из озера Ильмень».

2. Конъюнкция (логическое умножение). *Конъюнкцией* двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, если оба высказывания x, y истинны, и ложным, если хотя бы одно из них ложно.

Конъюнкция высказываний x, y обозначается символом $x\&y$ или $(x \wedge y)$, читается «x и y». Высказывания x, y называются членами конъюнкции.

Логические значения конъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x\&y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Например, для высказываний «6 делится на 2», «6 делится на 3» их конъюнкцией будет высказывание «6 делится на 2 и 6 делится на 3», которое, очевидно, истинно.

Из определения операции конъюнкции видно, что союз «и» в алгебре логики употребляется в том же смысле, что и в повседневной речи. Но в обычной речи не принято соединять союзом «и» два высказывания, далеких друг от друга по содержанию, а в алгебре логики рассматривается конъюнкция двух любых высказываний.

Из определения операции конъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \& \bar{x}$ всегда ложно.

3. Дизъюнкция (логическое сложение). *Дизъюнкцией* двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается истинным, если хотя бы одно из высказываний *x, y* истинно, и ложным, если они оба ложны.

Дизъюнкция высказываний *x, y* обозначается символом $x \vee y$, читается «x или y». Высказывания *x, y* называются членами дизъюнкции.

Логические значения дизъюнкции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \vee y$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Например, высказывание «В треугольнике *DFE* угол D или угол *E* острый» истинно, так как обязательно истинно хотя бы одно из высказываний: «В треугольнике *DFE* угол D острый», «В треугольнике *DFE* угол *E* острый».

В повседневной речи союз «или» употребляется в различном смысле: исключающем и не исключающем. В алгебре логики союз «или» всегда употребляется в не исключающем смысле.

Из определения операции дизъюнкции и отрицания ясно, что высказывание $x \vee \bar{x}$ всегда истинно.

4. Импликация. *Импликацией* двух высказываний *x, y* называется новое высказывание, которое считается ложным, если *x* истинно, а *y* - ложно, и истинным во всех остальных случаях.

Импликация высказываний *x, y* обозначается символом $x \rightarrow y$, читается «если *x,* то y» или «из *x* следует *y*». Высказывание *x* называют условием или посылкой, высказывание *y* - следствием или заключением, высказывание $x \rightarrow y$ - следованием или импликацией.

Логические значения операции импликации описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \rightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Например, высказывание «Если число 12 делится на 6, то оно делится на 3», очевидно, истинно, так как здесь истинна посылка «Число 12 делится на 6» и истинно заключение «Число 12 делится на 3».

Употребление слов «если ..., то ...» в алгебре логики отличается от употребления их в обыденной речи, где мы, как правило, считаем, что если высказывание x ложно, то высказывание «Если x, то y» вообще не имеет смысла. Кроме того, строя предложение вида «если x, то y» в обыденной речи, мы всегда подразумеваем, что предложение y вытекает из предложения x. Употребление слов «если ..., то ...» в математической логике не требует этого, поскольку в ней смысл высказываний не рассматривается.

Импликация играет важную роль в математических доказательствах, так как многие теоремы формулируются в условной форме «Если x, то y». Если при этом известно, что x истинно и доказана истинность импликации $x \to y$, то мы вправе сделать вывод об истинности заключения y.

5. Эквиваленция. *Эквиваленцей* (или эквивалентностью) двух высказываний x, y называется новое высказывание, которое считается истинным, когда оба высказывания x, y либо одновременно истинны, либо одновременно ложны, и ложным во всех остальных случаях.

Эквиваленция высказываний x, y обозначается символом $x \leftrightarrow y$, читается «для того, чтобы x, необходимо и достаточно, чтобы y» или «x тогда и только тогда, когда y». Высказывания x, y называются членами эквиваленции.

Логические значения операции эквиваленции описываются следующей таблицей истинности:

x	y	$x \leftrightarrow y$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Например, эквиваленция «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный тогда и только тогда, когда $\angle P = \angle Q$ » является истинной, так как высказывания «Треугольник SPQ с вершиной S и основанием PQ равнобедренный» и «В треугольнике SPQ с вершиной S и основанием PQ $\angle P = \angle Q$» либо одновременно истинны, либо одновременно ложны.

Эквивалентность играет важную роль в математических доказательствах. Известно, что значительное число теорем формулируется в форме необходимых и достаточных условий, то есть в форме эквивалентности. В этом случае, зная об истинности или ложности одного из двух членов эквивалентности и доказав истинность самой эквивалентности, мы заключаем об истинности или ложности второго члена эквивалентности.

1.3. Формулы алгебры логики

С помощью логических операций над высказываниями из заданной совокупности высказываний можно строить различные сложные высказывания. При этом порядок выполнения операций указывается скобками. Например, из трех высказываний *x, y, z* можно построить высказывания: $(x\&y)\vee\bar{z}$ и $x\rightarrow\overline{(y\vee(x\&z))}$.

Первое из них есть дизъюнкция конъюнкции *x, y* и отрицания выказывания z, а второе высказывание есть импликация, посылкой которой является высказывание *x*, а заключением - отрицание дизъюнкции высказывания *y* и конъюнкции высказываний *x, z*.

Всякое сложное высказывание, которое может быть получено из элементарных высказываний посредством применения логических операций отрицания, конъюнкции, дизъюнкции, импликации и эквиваленции, называется *формулой алгебры логики.*

Формулы алгебры логики будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C, ...

Для упрощения записи формул принят ряд соглашений. Скобки можно опускать, придерживаясь следующего порядка действий: конъюнкция выполняется раньше, чем все остальные операции, дизъюнкция выполняется раньше, чем импликация и эквивалентность. Если над формулой стоит знак отрицания, то скобки тоже опускаются.

В связи с этим формулы:

$$(x\&y)\vee\bar{z} \text{ и } x\rightarrow\overline{(y\vee(x\&z))}$$

могут быть записаны так:

$$x\&y\vee\bar{z} \text{ и } x\rightarrow\overline{y\vee x\&z}.$$

Логическое значение формулы алгебры логики полностью определяется логическими значениями входящих в нее элементарных высказываний. Например, логическим значением формулы $\overline{x\&y}\vee\bar{z}$ в случае, если x = 1, *y* = 1, z = 0, будет истина, то есть $\overline{x\&y}\vee\bar{z}=1$.

Все возможные логические значения формулы, в зависимости от значений входящих в нее элементарных высказываний, могут быть описаны полностью с помощью таблицы истинности.

Например, для формулы $\bar{x}\vee y\rightarrow x\&\bar{y}$ таблица истинности имеет вид:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{x}\vee y$	$x\&\bar{y}$	$\bar{x}\vee y\rightarrow x\&\bar{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

Легко видеть, что если формула содержит *n* элементарных высказываний, то она принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц, или, что то же, таблица содержит 2^n строк.

1.4. Равносильные формулы алгебры логики

Определение. Две формулы алгебры логики А и В *называются равносильными,* если они принимают одинаковые логические значения на любом наборе значений входящих в формулы элементарных высказываний.

Равносильность формул будем обозначать знаком $\equiv$, а запись $A \equiv B$ означает, что формулы A и В равносильны.

Например, равносильны формулы:

$$\overline{\overline{x}} \equiv x,$$

$$x \vee x \equiv x,$$

$$\left(x \,\&\, \overline{x}\right) \vee y \equiv y.$$

Формула А называется *тождественно истинной* (или *тавтологией),* если она принимает значение 1 при всех значениях входящих в нее переменных.

Например, тождественно истинны формулы $x \vee \overline{x}$, $x \to \left(y \to x\right)$.

Формула A называется *тождественно ложной,* если она принимает значение 0 при всех значениях входящих в нее переменных. Например, тождественно ложна формула $x \& \overline{x}$.

Между понятиями равносильности и эквивалентности существует следующая связь: если формулы А и В равносильны, то формула А$\leftrightarrow$В - тавтология, и обратно, если формула А$\leftrightarrow$В - тавтология, то формулы А и В равносильны.

Важнейшие равносильности алгебры логики можно разбить на три группы.

I. Основные равносильности:

1. $x \,\&\, x \equiv x$
2. $x \vee x \equiv x$
3. $x \,\&\, u \equiv x$

-законы идемпотентности.

4. $x \vee u \equiv u$
5. $x \,\&\, л \equiv л$
6. $x \vee л \equiv x$
7. $x \,\&\, \overline{x} \equiv л$ - закон противоречия.
8. $x \vee \overline{x} \equiv u$ - закон исключенного третьего.
9. $\overline{\overline{x}} \equiv x$ - закон снятия двойного отрицания.

10. $x \,\&\, \left(y \vee x\right) \equiv x$
11. $x \vee \left(y \,\&\, x\right) \equiv x$

-законы поглощения.

Докажем один из законов поглощения. Рассмотрим формулу $A \equiv x \,\&\, \left(y \vee x\right)$. Если в этой формуле x = 1, то, очевидно, $y \vee x = 1$ и тогда $x \,\&\, \left(y \vee x\right) = 1$ как конъюнкция двух истинных высказываний. Пусть теперь в формуле A x = 0. Но тогда по определению операции конъюнкции будет ложной и конъюнкция $x \& (x \vee y)$. Итак, во всех случаях значения формулы A совпадают со значениями x, а поэтому $A \equiv x$.

II. Равносильности, выражающие одни логические операции через другие:

1. $x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \& (y \to x)$;
2. $x \to y \equiv \overline{x} \vee y$;
3. $\overline{x \& y} \equiv \overline{x} \vee \overline{y}$;
4. $\overline{x \vee y} \equiv \overline{x} \& \overline{y}$;
5. $x \& y \equiv \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$;
6. $x \vee y \equiv \overline{\overline{x} \& \overline{y}}$.

Ясно, что равносильности 5 и 6 получаются из равносильностей 3 и 4 соответственно, если от обеих частей последних взять отрицания и воспользоваться законом снятия двойного отрицания. Таким образом, в доказательстве нуждаются первые четыре равносильности. Докажем две из них: первую и третью.

Так как при одинаковых логических значениях x и y истинными являются формулы $x \leftrightarrow y, x \to y, y \to x$, то истинной будет и конъюнкция $(x \to y) \& (y \to x)$. Следовательно, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые истинные значения.

Пусть теперь x и y имеют различные логические значения. Тогда будут ложными эквивалентность $x \leftrightarrow y$ и одна из двух импликаций, $x \to y$ или $y \leftarrow x$. Но при этом будет ложной и конъюнкция $(x \to y) \& (y \to x)$. Таким образом, в этом случае обе части равносильности имеют одинаковые логические значения.

Рассмотрим равносильность 3. Если x и y принимают одновременно истинные значения, то будет истинной конъюнкция $x \& y$ и ложным отрицание конъюнкции $\overline{x \& y}$. В то же время будут ложными $\overline{x}$ и $\overline{y}$, а поэтому будет ложной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Пусть теперь хотя бы одна из переменных x или y принимает значение ложь. Тогда будет ложной конъюнкция $x \& y$ и истинной ее отрицание. В то же время отрицание хотя бы одной из переменных будет истинным, а поэтому будет истинной и дизъюнкция $\overline{x} \vee \overline{y}$.

Следовательно, во всех случаях обе части равносильности 3 принимают одинаковые логические значения.

Аналогично доказываются равносильности 2 и 4.

Из равносильностей этой группы следует, что всякую формулу алгебры логики можно заменить равносильной ей формулой, содержащей только две логические операции: конъюнкцию и отрицание или дизъюнкцию и отрицание.

Дальнейшее исключение логических операций невозможно. Так, если мы будем использовать только конъюнкцию, то уже такая формула, как отрицание *x,* не может быть выражена с помощью операции конъюнкции.

Однако существуют операции, с помощью которых может быть выражена любая из пяти логических операций, которыми мы пользуемся. Такой операцией является, например, операция «Штрих Шеффера». Эта операция обозначается символом $x|y$ и определяется следующей таблицей истинности:

x	y	$x\|y$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Очевидно, имеют место равносильности:

1) $\overline{x} \equiv x|x$.

2) $x \,\&\, y \equiv (x|y)|\,(x|y)$.

Из этих двух равносильностей следует, что всякая формула алгебры логики может быть заменена равносильной формулой, содержащей только операцию «Штрих Шеффера». Отметим, что $x|y \equiv \overline{x \,\&\, y}$.

Аналогично может быть введена операция $\varphi(x,y) \equiv \overline{x \vee y}$.

III. Равносильности, выражающие основные законы алгебры логики:

1. $x\&y \equiv y\&x$ - коммутативность конъюнкции.
2. $x \vee y \equiv y \vee x$ - коммутативность дизъюнкции.
3. $x \,\&\, (y \,\&\, z) \equiv (x \,\&\, y) \,\&\, z$ - ассоциативность конъюнкции.
4. $x \vee (y \vee z) \equiv (x \vee y) \vee z$ - ассоциативность дизъюнкции.
5. $x \,\&\, (y \vee z) \equiv (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ -дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции.
6. $x \vee (y \,\&\, z) \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$ -дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции.

Докажем последний из перечисленных законов. Если x = 1, то будут истинными формулы $x \vee (y \,\&\, z), x \vee y, x \vee z$.

Но тогда будет истинной и конъюнкция $(x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$. Таким образом, при x = 1 обе части равносильности 6 принимают одинаковые логические значения (истинные).

Пусть теперь x=0. Тогда $x \vee (y \,\&\, z) \equiv y \,\&\, z, x \vee y \equiv y$ и $x \vee z \equiv z$, а поэтому и конъюнкция $(x \vee y) \,\&\, (x \vee z) \equiv y \,\&\, z$. Следовательно, здесь обе части равносильности 6 равносильны одной и той же формуле $y\&\ z$ и поэтому принимают одинаковые логические значения.

1.5. Равносильные преобразования формул

Используя равносильности I, II и III групп, можно часть формулы или формулу заменить равносильной ей формулой. Такие преобразования формул называются *равносильными.*

Равносильные преобразования используются для доказательства равносильностей, для приведения формул к заданному виду, для упрощения формул.

Формула *A* считается проще равносильной ей формулы *B,* если она содержит меньше букв, меньше логических операций. При этом обычно операции эквивалентность и импликация заменяются операциями дизъюнкции и конъюнкции, а отрицание относят к элементарным высказываниям. Рассмотрим ряд примеров.

1. Доказать равносильность $x \leftrightarrow y \equiv \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee x \,\&\, y$.

Используя равносильности I, II и III групп, запишем цепочку равносильных формул:

$$x \leftrightarrow y \equiv (x \to y) \,\&\, (y \to x) \equiv \left(\overline{x} \vee y\right) \& \left(\overline{y} \vee x\right) \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee \overline{x} \,\&\, x \vee y \,\&\, \overline{y} \vee y \,\&\, x \equiv$$
$$\equiv \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee 0 \vee 0 \vee y \,\&\, x \equiv \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee y \,\&\, x \equiv \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee x \,\&\, y.$$

2. Упростить формулу $\left(\overline{x \vee y} \to x \vee y\right) \& \, y$.

Запишем цепочку равносильных формул:

$$\left(\overline{\overline{x \vee y}} \vee x \vee y\right) \& \, y \equiv (x \vee y \vee x \vee y) \,\&\, y \equiv (x \vee y) \,\&\, y \equiv y.$$

3. Доказать тождественную истинность формулы:
$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

Запишем цепочку равносильных формул:

$$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z)) \equiv$$
$$\equiv \overline{\left(\overline{x} \vee y\right)} \vee \left(\overline{\overline{y} \vee z} \vee \overline{x \vee y} \vee z\right) \equiv \overline{\overline{x}} \,\&\, \overline{y} \vee \overline{\overline{y}} \,\&\, \overline{z} \vee \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee z \equiv$$
$$\equiv x \,\&\, \overline{y} \vee y \,\&\, \overline{z} \vee \overline{x} \,\&\, \overline{y} \vee z \equiv \left(x \,\&\, \overline{y} \vee \overline{x} \,\&\, \overline{y}\right) \vee \left(y \,\&\, \overline{z} \vee z\right) \equiv$$
$$\equiv \overline{y} \,\&\, \left(x \vee \overline{x}\right) \vee (y \vee z) \,\&\, \left(\overline{\overline{z} \vee z}\right) \equiv \overline{y} \,\&\, 1 \vee (y \vee z) \,\&\, 1 \equiv$$
$$\equiv \overline{y} \vee y \vee z \equiv \left(\overline{y} \vee y\right) \vee z \equiv 1 \vee z \equiv 1.$$

1.6. Приложения алгебры логики высказываний к релейно-контактным схемам (РКС)

Релейно-контактные схемы (их часто называют переключательными схемами) широко используются в технике автоматического управления.

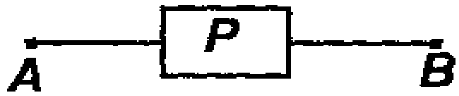
Под переключательной схемой понимают схематическое изображение некоторого устройства, состоящее из следующих элементов:

1) переключателей, которыми могут быть механические устройства, электромагнитные реле, полупроводники и т.д.;

2) соединяющие их проводники;

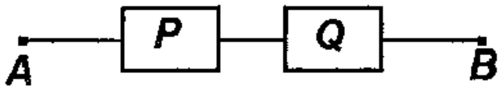
3) входы в схему и выходы из нее (клеммы, на которые подается электрическое напряжение). Они называются полюсами.

Простейшая схема содержит один переключатель P и имеет один вход A и один выход B. Переключателю P поставим в соответствие высказывание *p*, гласящее: «Переключатель P замкнут». Если *p* истинно, то импульс, поступающий на полюс A, может быть снят на полюсе B без потери напряжения, т.е. схема пропускает ток. Если *p* ложно, то переключатель разомкнут и схема тока не проводит. Таким образом, если принять во внимание не смысл высказывания, а только его значение, то можно считать, что любому высказыванию может быть поставлена в соответствие переключательная схема с двумя полюсами (двухполюсная схема).

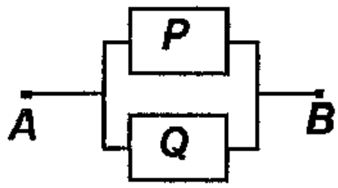


Формулам, включающим основные логические операции, также могут быть поставлены в соответствие переключательные схемы.

Так, конъюнкции двух высказываний *p&q* ставится в соответствие схема



а дизъюнкции *pvq* – схема:



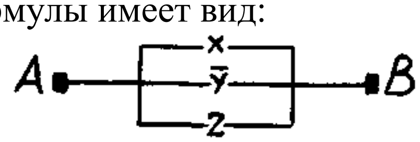
Каждой формуле алгебры логики можно поставить в соответствие некоторую РКС, а каждой РКС можно поставить в соответствие некоторую формулу алгебры логики. Поэтому возможности схемы можно выявить, изучая соответствующую ей формулу, а упрощение схемы можно свести к упрощению формулы.

Пример 1.1. Составить РКС для формулы $(\bar{x} \wedge y) \to (z \vee x)$.

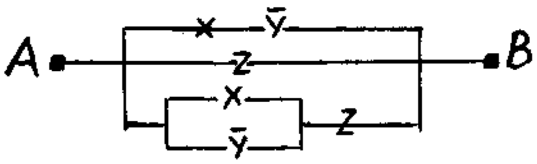
Решение. Упростим данную формулу с помощью равносильных преобразований:

$$\bar{x} \wedge y \to (z \vee x) \equiv \overline{\bar{x} \wedge y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z \vee x \equiv x \vee \bar{y} \vee z.$$

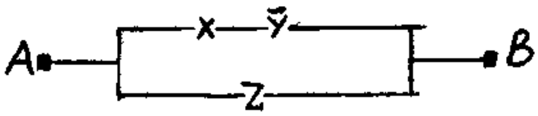
Тогда РКС для данной формулы имеет вид:



Пример 1.2. Упростить РКС:



Решение. Составим по данной РКС формулу (функцию проводимости) и упростим ее:
$\left(x \,\&\, \bar{y}\right) \vee z \vee \left(x \vee \bar{y}\right) \& \, z \equiv x \,\&\, \bar{y} \vee z$
(к последним двум слагаемым применили закон поглощения).
Тогда упрощенная схема выглядит так:



1.7. Функции алгебры логики

Как уже отмечалось, значение формулы алгебры логики полностью зависит от значений входящих в эту формулу высказываний. Поэтому формула алгебры логики является функцией входящих в нее элементарных высказываний.

Например, формула $(x\&y)\rightarrow\bar{z}$ является функцией трех переменных $f\left(x,\, y,\, z\right)$. Особенностью этой функции является то обстоятельство, что ее аргументы принимают одно из двух значений: ноль или единицу, и при этом функция также принимает одно из двух значений: ноль или единицу.

Определение. *Функцией алгебры логики n* переменных (или *функцией Буля)* называется функция *n* переменных, где каждая переменная принимает два значения: 0 и 1, и при этом функция может принимать только одно из двух значений: 0 или 1.

Ясно, что тождественно истинные и тождественно ложные формулы алгебры логики представляют собой постоянные функции, а две равносильные формулы выражают одну и ту же функцию.

Выясним, каково число функций *n* переменных. Очевидно, каждую функцию алгебры логики (как и формулу алгебры логики) можно задать с помощью таблицы истинности, которая будет содержать 2^n строк. Следовательно, каждая функция *n* переменных принимает 2^n значений, состоящих из нулей и единиц. Таким образом, функция *n* переменных полностью определяется набором значений из нулей и единиц длины 2^n. Общее же число наборов, состоящих из нулей и единиц, длины 2^n равно 2^{2^n}. Значит, число различных функций алгебры логики *n* переменных равно 2^{2^n}.

В частности, различных функций одной переменной четыре, а различных функций двух переменных шестнадцать. Выпишем все функции алгебры логики одной и двух переменных.

Рассмотрим таблицу истинности для различных функций одной переменной. Она, очевидно, имеет вид:

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Из этой таблицы следует, что две функции одной переменной будут постоянными: $f_1(x) \equiv 1$**,** $f_4(x) \equiv 0$**,** а $f_2(x) \equiv x$ и $f_3(x) \equiv \bar{x}$.

Таблица истинности для всевозможных функций двух переменных имеет вид:

$f_i \equiv f_i(x,\ y)$

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0

Ясно, что аналитические выражения этих функций могут быть записаны следующим образом:

$$
\begin{array}{llll}
f_1 \equiv 1, & f_5 \equiv \overline{x \,\&\, y}, & f_9 \equiv \overline{x \leftrightarrow y}, & f_{13} \equiv \overline{y \to x}, \\
f_2 \equiv x \vee y, & f_6 \equiv x, & f_{10} \equiv \bar{y}, & f_{14} \equiv \overline{x \to y}, \\
f_3 \equiv y \to x, & f_7 \equiv x \leftrightarrow y, & f_{11} \equiv y, & f_{15} \equiv x \,\&\, y, \\
f_4 \equiv x \to y, & f_8 \equiv \bar{x}, & f_{12} \equiv \overline{x \vee y}, & f_{16} \equiv 0.
\end{array}
$$

1.8. Представление произвольной функции алгебры логики в виде формулы алгебры логики

Пусть $F(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ - произвольная функция алгебры логики n переменных.

Рассмотрим формулу

$$
\begin{aligned}
&F(1,\ 1,\ \ldots,\ 1) \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \,\&\ldots\&\, x_n \vee \\
&\vee F(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0) \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \,\&\ldots\&\, x_{n-1} \,\&\, \bar{x}_n \vee \\
&\vee F(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ 1) \,\&\, x_1 \,\&\, x_2 \,\&\ldots\&\, x_{n-2} \,\&\, \bar{x}_{n-1} \,\&\, x_n \vee \ldots \vee \\
&\vee F(0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \,\&\, \bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2 \,\&\ldots\&\, \bar{x}_n,
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

которая составлена следующим образом: каждое слагаемое этой логической суммы представляет собой конъюнкцию, в которой первый член является значением функции F при некоторых определенных значениях переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$, остальные же члены конъюнкции представляют собой переменные или их отрицания. При этом под знаком отрицания находятся те и только те переменные, которые в первом члене конъюнкции имеют значение 0.

Вместе с тем формула (1.1) содержит в виде логических слагаемых всевозможные конъюнкции указанного вида.

Ясно, что формула (1.1) полностью определяет функцию $F\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$. Иначе говоря, значения функции F и формулы (1.1) совпадают на всех наборах значений переменных $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$.

Например, если x_1 принимает значение 0, а остальные переменные принимают значение 1, то функция F принимает значение $F\left(0,\ 1,\ 1,\ ...\ 1\right)$. При этом логическое слагаемое $F\left(0,\ 1,\ ...,\ 1\right)\&\,\overline{x}_1\,\&\,x_2\,\&\ldots\&\,x_n$, входящее в формулу (1.1), принимает также значение $F\left(0,\ 1,\ ...\ 1\right)$, все остальные логические слагаемые формулы (1.1) имеют значение 0. Действительно, в них знаки отрицания над переменными распределяются иначе, чем в рассмотренном слагаемом, но тогда при замене переменных теми же значениями в конъюнкцию войдет символ 0 без знака отрицания, символ 1 под знаком отрицания. В таком случае один из членов конъюнкции имеет значение 0, а поэтому вся конъюнкция имеет значение 0. В связи с этим на основании равносильности $x\vee 0\equiv x$ значением формулы (1.1) является $F\left(0,\ 1,\ ...,\ 1\right)$.

Ясно, что вид формулы (1.1) может быть значительно упрощен, если в ней отбросить те логические слагаемые, в которых первый член конъюнкции имеет значение 0 (и, следовательно, вся конъюнкция имеет значение 0). Если же в логическом слагаемом первый член конъюнкции имеет значение 1, то, пользуясь равносильностью $1\&x\ \equiv\ x,$ этот член конъюнкции можно не выписывать.

Таким образом, в результате получается формула (1.1), которая содержит только элементарные переменные высказывания и обладает следующими свойствами:

1) Каждое логическое слагаемое формулы содержит все переменные, входящие в функцию $F\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$.

2) Все логические слагаемые формулы различны.

3) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одновременно переменную и ее отрицание.

4) Ни одно логическое слагаемое формулы не содержит одну и ту же переменную дважды.

Перечисленные свойства будем называть *свойствами совершенства* или, коротко, свойствами (С).

Из приведенных рассуждений видно, что каждой не тождественно ложной функции соответствует единственная формула указанного вида.

Если функция $F\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ задана таблицей истинности, то соответствующая ей формула алгебры логики может быть получена просто. Действительно, для каждого набора значений переменных, на котором функция $F\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$ принимает значение 1, запишем конъюнкцию элементарных переменных высказываний, взяв за член конъюнкции x_k, если значение x_k на указанном наборе значений переменных есть 1, и отрицание x_k, если значение

x_k есть 0. Дизъюнкция всех записанных конъюнкций и будет искомой формулой.

Пусть, например, функция $F(x_1, x_2, x_3)$ имеет следующую таблицу истинности:

x_1	x_2	x_3	$F(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

Для наборов значений переменных (l,l,0), (l,0,l), (0,l,0), (0,0,0), на которых функция принимает значение 1, запишем конъюнкции $x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3$, $x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3$, $\overline{x}_1 \& x_2 \& x_3$, $\overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3$, а искомая формула, обладающая свойствами (С), имеет вид:

$$x_1 \& x_2 \& \overline{x}_3 \vee x_1 \& \overline{x}_2 \& x_3 \vee \overline{x}_1 \& x_2 \& x_3 \vee \overline{x}_1 \& \overline{x}_2 \& \overline{x}_3 .$$

Закон двойственности

Пусть формула *А* содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Будем называть операцию конъюнкции двойственной операции дизъюнкции, а операцию дизъюнкции двойственной операции конъюнкции.

Определение. Формулы *А* и *А** называются *двойственными,* если формула *А** получается из формулы *А* путем замены в ней каждой операции на двойственную.

Например, для формулы $A \equiv (x \vee y) \& z$ двойственной формулой будет формула $A^* \equiv (x \& y) \vee z$.

Теорема (без доказательства). *Если формулы А и В равносильны, то равносильны и им двойственные формулы, то есть* $A^* \equiv B^*$.

1.9. Дизъюнктивная нормальная форма и совершенная дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ и СДНФ)

Определение 1. *Элементарной конъюнкцией n* переменных называется конъюнкция переменных или их отрицаний.

Элементарная конъюнкция *n* переменных может быть записана в виде:

$$x_1^{\delta_1} \& x_2^{\delta_2} \& \ldots \& x_n^{\delta_n} ,$$

где $x_k^{\delta_k} = \begin{cases} x_k, \text{ если } \delta_k = 1, \\ \overline{x}_k, \text{ если } \delta_k = 0. \end{cases}$

О п р е д е л е н и е 2. *Дизъюнктивной нормальной формой* (ДНФ) формулы *A* называется равносильная ей формула, представляющая собой дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее ДНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A \equiv x \,\&\, (x \to y)$ имеем:

$A \equiv x \,\&\, (\overline{x} \vee y) \equiv (x \,\&\, \overline{x}) \vee (x \,\&\, y) \equiv x \,\&\, y$, то есть

ДНФ $A \equiv (x \,\&\, \overline{x}) \vee (x \,\&\, y)$,

ДНФ $A \equiv x \,\&\, y$

Среди многочисленных ДНФ *A* существует единственная ДНФ *A*, для которой выполняются перечисленные выше четыре свойства совершенства (свойства (С)).

Такая ДНФ *A* называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* формулы *A* (СДНФ *A*).

Как уже указывалось, СДНФ *A* может быть получена с помощью таблицы истинности.

Другой способ получения СДНФ формулы *A* основан на равносильных преобразованиях формулы и состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы *A* получают одну из ДНФ *A*.
2. Если в полученной ДНФ *A* входящая в нее элементарная конъюнкция *B* не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B \,\&\, (x_i \vee \overline{x}_i) \equiv B$, элементарную конъюнкцию В заменяют на две элементарных конъюнкции $(B \,\&\, x_i)$ и $(B \,\&\, \overline{x}_i)$, каждая из которых содержит переменную x_i.
3. Если в ДНФ *A* входят две одинаковых элементарных конъюнкции *B*, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \vee B \equiv B$.
4. Если некоторая элементарная конъюнкция *B*, входящая в ДНФ *A*, содержит переменную x_i и ее отрицание $\overline{x}_i$, то $B \equiv 0$ и *B* можно исключить из ДНФ *A*, как нулевой член дизъюнкции.
5. Если некоторая элементарная конъюнкция, входящая в ДНФ *A*, содержит переменную x_i дважды, то одну переменную можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \,\&\, x_i \equiv x_i$.

Ясно, что после выполнения описанной процедуры будет получена *СДНФ A*.

Например, для формулы $A \equiv x \vee y \,\&\, (x \vee \overline{y})$ ДНФ $A \equiv x \vee x \,\&\, y \vee y \,\&\, \overline{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $B \equiv x$, входящая в ДНФ *A*, не содержит переменной *y*, то, пользуясь равносильностью $B \equiv B \,\&\, (y \vee \overline{y}) \equiv x \,\&\, (y \vee \overline{y}) \equiv$ $\equiv x \,\&\, y \vee x \,\&\, \overline{y}$, заменим ее на две элементарных конъюнкции $x \,\&\, y$ и $x \,\&\, \overline{y}$. В результате получим ДНФ $A \equiv x \,\&\, y \vee x \,\&\, \overline{y} \vee x \,\&\, y \vee y \,\&\, \overline{y}$.

Так как теперь ДНФ A содержит две одинаковых элементарных конъюнкции $x\&y$, то лишнюю отбросим, пользуясь равносильностью $x\&y\vee x\&y\equiv x\&y$. В результате получим ДНФ $A\equiv x\&y\vee x\&\bar{y}\vee y\&\bar{y}$.

Так как элементарная конъюнкция $y\&\bar{y}$ содержит переменную y и ее отрицание $\bar{y}$, то $y\&\bar{y}\equiv 0$ и ее можно отбросить, как нулевой член дизъюнкции.

Таким образом, получаем

$$\text{СДНФ } A\equiv x\&y\vee x\&\bar{y}.$$

1.10. Конъюнктивная нормальная форма и совершенная конъюнктивная нормальная форма (КНФ и СКНФ)

Определение 1. *Элементарной дизъюнкцией n* переменных называется дизъюнкция переменных или их отрицаний.

Элементарная дизъюнкция *n* переменных может быть записана в виде:

Определение 2. *Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) формулы A называется равносильная ей формула, представляющая собой конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

Для любой формулы алгебры логики путем равносильных преобразований можно получить ее КНФ, причем не единственную.

Например, для формулы $A\equiv\overline{x\vee y}\leftrightarrow x\&y$ имеем:

$$A\equiv\left(\overline{x\vee y}\to x\&y\right)\&\left(x\&y\to\overline{x\vee y}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(x\vee y\vee x\&y\right)\&\left(\overline{x\&y}\vee\overline{x\vee y}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(x\vee x\vee y\right)\&\left(x\vee y\vee y\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{x}\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{y}\right),\text{ т.е.}$$

$$\text{КНФ } A\equiv\left(x\vee x\vee y\right)\&\left(x\vee y\vee y\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{x}\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{y}\right).$$

Но так как $x\vee x\equiv x$, $y\vee y\equiv y$, $\bar{x}\vee\bar{x}\equiv\bar{x}$, $\bar{y}\vee\bar{y}\equiv\bar{y}$, то КНФ $A\equiv\left(x\vee y\right)\&\left(x\vee y\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)$.

А так как $\left(x\vee y\right)\&\left(x\vee y\right)\equiv\left(x\vee y\right)$, $\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)\equiv\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)$, то КНФ $A\equiv\left(x\vee y\right)\&\left(\bar{x}\vee\bar{y}\right)$.

Определение 3. КНФ А называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* формулы A (СКНФ A), если для нее выполнены условия:

1. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, различны.
2. Все элементарные дизъюнкции, входящие в КНФ A, содержат все переменные.
3. Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A , не содержит двух одинаковых переменных.

Каждая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, не содержит переменную и ее отрицание.

Можно доказать, что каждая не тождественно истинная формула имеет единственную СКНФ.

Один из способов получения СКНФ состоит в использовании таблицы истинности для формулы $\overline{A}$.

Действительно, получив с помощью таблицы истинности СДНФ $\overline{A}$, мы получим СКНФ $\overline{A}$, взяв отрицание $\overline{\text{СДНФ}\,\overline{A}}$, то есть СКНФ A = $\overline{\text{СДНФ}\,\overline{A}}$.

Другой способ получения СКНФ, использующий равносильные преобразования, состоит в следующем:

1. Путем равносильных преобразований формулы A получают одну из КНФ A.
2. Если в полученной КНФ A входящая в нее элементарная дизъюнкция B не содержит переменную x_i, то, используя равносильность $B \vee (x_i \,\&\, \overline{x}_i) \equiv B$, элементарную дизъюнкцию B заменяют на две элементарные дизъюнкции $B \vee x_i$ и $B \vee \overline{x}_i$, каждая из которых содержит переменную x_i.
3. Если в КНФ A входят две одинаковых элементарных дизъюнкции B, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $B \,\&\, B \equiv B$.
4. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i дважды, то лишнюю можно отбросить, пользуясь равносильностью $x_i \vee x_i \equiv x_i$.
5. Если некоторая элементарная дизъюнкция, входящая в КНФ A, содержит переменную x_i и ее отрицание, то $x_i \vee \overline{x}_i \equiv 1$ и, следовательно, вся элементарная дизъюнкция имеет значение 1, а поэтому ее можно отбросить, как единичный член конъюнкции.

Ясно, что после описанной процедуры будет получена СКНФ A.

Например, для формулы $A \equiv x \vee y \,\&\, (x \vee \overline{y})$ КНФ $A \equiv (x \vee y) \,\&\, (x \vee x \vee \overline{y})$.

Так как обе элементарные дизъюнкции различны и содержат все переменные (x и y), то первое и второе условия СКНФ A выполнены.

Элементарная дизъюнкция $x \vee x \vee \overline{y}$ содержит переменную x дважды, но $x \vee x \equiv x$, и поэтому КНФ $A \equiv (x \vee \overline{y}) \,\&\, (x \vee y)$; причем ни одна из элементарных дизъюнкций не содержит переменную и ее отрицание. Значит, теперь выполнены все условия СКНФ A, и, следовательно, СКНФ $A \equiv (x \vee \overline{y}) \,\&\, (x \vee y)$.

Пример 1.3. Построить контактную схему для оценки результатов некоторого спортивного соревнования тремя судьями при следующих условиях: судья, засчитывающий результат, нажимает имеющуюся в его распоряжении кнопку, а судья, не засчитывающий результат, кнопки не нажимает. В случае, если кнопки нажали не менее двух судей, должна загореться лампочка (положительное решение судей принято простым большинством голосов).

Решение. Ясно, что работа нужной РКС описывается функцией Буля трех переменных $F(x,\, y,\, z)$, где переменные высказывания x, y, z означают:

x - судья x голосует «за»,

y — судья y голосует «за»,

z - судья z голосует «за».

Таблица истинности функции $F(x,\ y,\ z)$, очевидно, имеет вид:

x	y	z	$F(x,\ y,\ z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

В связи с этим СКНФ формулы (функции) $F(x,\ y,\ z)$ запишется в виде
$F(x,\ y,\ z) \equiv x \& y \& z \vee x \& y \& \bar{z} x \& \bar{y} \& z \vee \bar{x} \& y \& z$.

А этой формуле соответствует РКС, изображенная на схеме (см. рис. 1.1), которая содержит двенадцать переключателей.

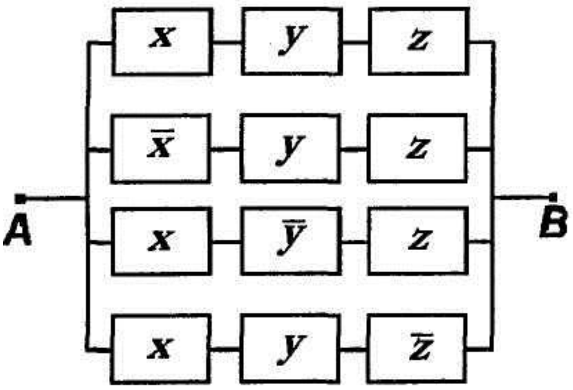


Рис. 1.1

Но, как было показано, в результате равносильных преобразований формула $F(x,\ y,\ z)$ может быть приведена к виду:

$$F(x,\ y,\ z) \equiv (x \vee y) \& z \vee (x \& y),$$

которому соответствует РКС, изображенная на схеме (рис. 1.2), содержащей пять переключателей.

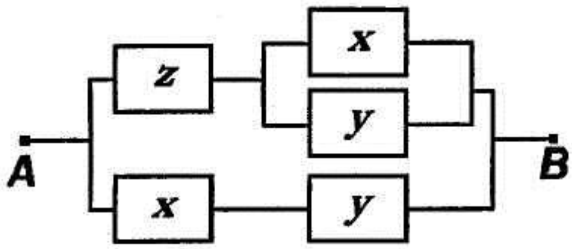


Рис. 1.2

2. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

2.1. Линейные операторы и действия над ними

Пусть имеются два множества функций M и N.

Определение 2.1. Оператором над множеством функций M называется такое преобразование, которое каждой функции из множества M ставит в соответствие функцию из множества N.

2.1.1. Примеры операторов

Пример 2.1. Пусть M – множество функций, дифференцируемых n раз.

Нахождение первой производной – оператор над множеством функций M, обозначают его D или $Df(x) = f'(x)$; $Dx^3 = 3x^2$.

Нахождение второй производной – также оператор, обозначают его D^2 или $D^2 f(x) = f''(x)$; $D^2 x^3 = 6x$.

Нахождение n-й производной – оператор, обозначают его D^n или

$$D^n f(x) = f^{(n)}(x).$$

Пример 2.2. Однократное, двукратное, n-кратное интегрирование – операторы, для которых употребляются символы D^{-1}, $D^{-2}, \dots, D^{-n}$ или

$$D^{-1} f(x) = \int_0^x f(x)dx;\ D^{-2} f(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x)dx; \dots;\ D^{-n} f(x) = \int_0^x dx \int_0^x dx \dots \int_0^x f(x)dx.$$

Пример 2.3. Пусть $f(t)$ – функция вещественного аргумента t, $t > 0$, p – комплексное число; $p = s + i\sigma$. Если сходится $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$, то он является некоторой функцией аргумента p: $\Phi(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$.

Интеграл, стоящий справа, называется интегралом Лапласа. Преобразование, по которому функции $f(t)$ ставится в соответствие функция $\Phi(p)$, называется преобразованием или интегральным оператором Лапласа.

Пример 2.4. Пусть $U(x, y)$ дважды дифференцируемая функция и

$$\Delta U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.$$

Преобразование, по которому функции U ставится в соответствие функция ΔU, называется дифференциальным оператором Лапласа.

2.1.2. Действия над операторами

Над операторами можно производить арифметические операции.

Сумма двух операторов K_1 и K_2 определяется соотношением

$$(K_1 + K_2) f = K_1 f + K_2 f.$$

Произведение операторов K_1 и K_2 определяется соотношением

$$(K_1 * K_2) f = K_1(K_2 f).$$

Если K_1 и K_2 - равные операторы, $K_1 = K_2 = K,$ то их произведение обозначают K^2.

Оператор, от применения которого функция не изменяется, называется единичным, обозначается символом E: $Ef(x) = f(x).$

Два оператора называются взаимно обратными, если их произведения дают единичный оператор, т.е. если $K_1 \cdot K_2 = E.$ Для взаимно обратных операторов приняты обозначения $K_1 = K_2^{-1};\ K_2 = K_1^{-1}.$

О п р е д е л е н и е 2.2. Оператор K называется линейным, если он обладает двумя свойствами:

1) аддитивности: $K(f_1 + f_2) = Kf_1 + Kf_2;$

2) однородности: $K(cf) = cKf.$

Все указанные в примерах операторы являются линейными.

2.2. Преобразование Лапласа и его свойства

2.2.1. Функции с ограниченным ростом

Пусть $f(t)$ – комплекснозначная функция вещественного аргумента t; т.е. $f(t) = f_1(t) + if_2(t),$ где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ - вещественнозначные функции вещественного аргумента $t,\ t > 0.$ Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt. \qquad (2.1)$$

Допустим, что есть такое вещественное число s, что интеграл $\int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt$ сходится. Тогда он сходится и при любом $s_1 > s$. Действительно, так как

$$e^{-s_1 t} < e^{-st};\ |f(t)| e^{-s_1 t} < |f(t)| e^{-st},\ \text{то} \int_0^\infty |f(t)| e^{-s_1 t} dt < \int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt.$$

Интеграл, стоящий справа, сходится по условию. Интеграл, стоящий слева, берется от неотрицательной функции и мажорируется сходящимся интегралом, поэтому он тоже сходится.

Исходя из этого логически возможны три случая:

1) Найдется такое число s_0, что при всех $s > s_0$ интеграл (2.1) сходится, а при $s < s_0$ расходится.

2) Интеграл сходится при всех s, т.е. $s_0 = -\infty$.

3) Интеграл расходится при всех s, т.е. $s_0 = +\infty$.

В первом и во втором случае говорят, что функция $f(t)$ имеет ограниченный рост, s_0 - показатель роста функции.

В третьем случае $f(t)$ называют функцией с неограниченным ростом.

Т е о р е м а 2 . 1

Если можно подобрать два такие положительные числа s_1 и M, что для любого $t > 0$ $|f(t)| \le Me^{s_1 t}$, т.е. если $|f(t)|$ растет медленнее, чем некоторая экспоненциальная функция, то функция $f(t)$ имеет ограниченный рост с показателем роста, меньшим s_1.

Доказательство

$$\int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt \le \int_0^\infty Me^{s_1 t} e^{-st} dt = M \int_0^\infty e^{(s_1 - s)} dt = \frac{M}{s_1 - s} [\lim_{t \to \infty} e^{(s_1 - s)t} - 1] = \frac{M}{s - s_1},$$

если $s > s_1$.

Итак, $\int_0^\infty |f(t)| e^{-st} dt$ сходится при всех $s > s_1$, следовательно, $f(t)$ имеет ограниченный рост с показателем s_0, $s_0 \le s_1$.

К функциям с ограниченным ростом относятся: $f(t) = c$; $f(t) = t^n$,

$n > 0$; $f(t) = e^{\alpha t}$; $f(t) = \sin(\alpha t)$; $f(t) = \cos(\alpha t)$; $f(t) = sh\alpha t$; $f(t) = ch\alpha t$.

Примерами функций с неограниченным ростом являются:

$$f(t) = tg\ t; \quad f(t) = ctg\ t.$$

2.2.2. Определение оператора Лапласа-Карсона

Пусть $f(t)$– комплекснозначная функция вещественной переменной t, удовлетворяющая условиям:

1) $f(t)$ определена для всех $t > 0$; $f(0) = \lim\limits_{t \to 0, t > 0} f(t)$;

2) $f(t) = 0$ при $t < 0$;

3) $f(t)$ однозначна и непрерывна или кусочно-непрерывна при $t > 0$.

Пусть p – комплексное число; $p = s + i\sigma$, s и σ - вещественные числа.

О п р е д е л е н и е 3 . 1 . Оператором Лапласа-Карсона называется преобразование

$$F(p)=p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt. \qquad (2.2)$$

Сокращенно это равенство записывают так: $F(p)\div f(t)$. Здесь $f(t)$ - оригинал, $F(p)$ - изображение. Интеграл Лапласа $\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ может быть сходящимся или расходящимся. Потому возникает вопрос: для каких функций $f(t)$ интеграл Лапласа сходится и преобразование Лапласа-Карсона имеет смысл?

Т е о р е м а 2 . 2

Если $f(t)$ – функция с ограниченным ростом, то при всех p таких, что $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$, интеграл Лапласа сходится.

Доказательство

Обозначим $p=s+i\sigma$. Тогда

$$\left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right|=\left|\int_0^\infty f(t)e^{-(s+i\sigma)t}dt\right|\le\int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt.$$

Этот интеграл по условию теоремы сходится при всех $s>s_0$. Следовательно, и первый интеграл при всех p, для которых $\operatorname{Re} p=s>s_0$, также сходится.

Во всех дальнейших рассуждениях, если не оговорено обратное, будем предполагать, что оригинал $f(t)$ имеет ограниченный рост.

2.2.3. Свойства оператора Лапласа-Карсона

Оператор Лапласа-Карсона – линейный оператор.

а) Проверим, что этот оператор обладает свойством аддитивности.

Обозначим $F_1(p)\div f_1(t);\ F_2(p)\div f_2(t)$. Найдем изображение функции $f_1(t)+f_2(t)$. Тогда имеем:

$$p\cdot\int_0^\infty [f_1(t)+f_2(t)]e^{-pt}dt=p\cdot\int_0^\infty f_1(t)e^{-pt}dt+p\cdot\int_0^\infty f_2(t)e^{-pt}dt=F_1(p)+F_2(p),$$

или $F_1(p)+F_2(p)\div f_1(t)+f_2(t)$.

б) Проверим, что оператор Лапласа-Карсона обладает свойством однородности. Обозначим $F(p)\div f(t)$. Найдем изображения функции $cf(t)$, где c – постоянная величина.

$$p\cdot\int_0^\infty cf(t)e^{-pt}dt=cp\cdot\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt=cF(p);\ cF(p)\div cf(t).$$

Так как оператор Лапласа-Карсона обладает свойствами аддитивности и однородности, то он является линейным оператором.

2.3. Правила операционного исчисления

2.3.1. Сложение

Так как преобразование Лапласа-Карсона – операция линейная, то очевидно, что из

$$F_1(p) \div f_1(t),\ F_2(p) \div f_2(t), \ldots, F_n(p) \div f_n(t)$$

следует

$$F_1(p) + F_2(p) + \ldots + F_n(p) \div f_1(t) + f_2(t) + \ldots + f_n(n).$$

Изображение суммы равно сумме изображений. Оригинал суммы равен сумме оригиналов.

2.3.2. Изображение постоянной

Изображение постоянной равно ей самой. Действительно, $f(t) = c$;

$F(p) \div f(t)$; $F(p) = p\int_0^\infty ce^{-pt}dt = -c \cdot (\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-pt} - 1) = c$ при $\operatorname{Re} p > 0$.

2.3.3. Изменение масштаба (теорема подобия)

Пусть $F(p) \div f(t)$. Как изменится изображение, если его аргумент умножится на число $\alpha > 0$? Обозначим $F_1(p) \div f(\alpha t)$. Тогда

$$F_1(p) = p\int_0^\infty f(\alpha t)e^{-pt}dt = \frac{p}{\alpha}\int_0^\infty f(\tau)e^{\frac{-p\tau}{\alpha}}d\tau = F(p/\alpha), \text{ где } \tau = \alpha t.$$

Итак, $F(p/\alpha) \div f(\alpha t)$.

Если $f(t)$ является аналитическим выражением некоторого колебательного процесса, то теорема подобия позволяет найти изображение при изменении частоты оригинала.

2.3.4. Дифференцирование оригинала

Пусть $F(p) \div f(t)$. Каково изображение $f'(t)$?

Обозначим $F_1(p) \div f'(t)$. Тогда

$$F_1(p)/p = \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = \lim_{t\to\infty} f(t)\cdot e^{-pt} - f(0) + p\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt.$$

Если $f(t)$ – функция с ограниченным ростом, то $\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ сходится при всех p, $\operatorname{Re} p > s_0$, где s_0 – показатель роста $f(t)$. Но это возможно, только если $f(t)e^{-pt} \to 0$ при $t \to \infty$, а тогда $F_1(p)/p = F(p) - f(0)$; $F_1(p) = p[F(p) - f(0)]$; $p[F(p) - f(0)] \div f'(t)$, где $f(0) = \lim\limits_{t\to 0, t>0} f(t)$.

Если $f(0) = 0$, то $pF(p) \div f'(t)$. Следовательно, если функция удовлетворяет нулевому начальному условию, то при её дифференцировании изображение умножается на *p*.

Пусть $F(p) \div f(t)$. Найдем изображение функции $f''(t)$, воспользовавшись свойством дифференцирования оригинала.

Обозначим $F_2(p) \div f''(t)$. Тогда

$$F_2(p) = p[F_1(p) - f'(0)] = p^2[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p}], \text{ или}$$

$$p^2[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p}] \div f(t).$$

Если при $t = 0$ $\quad f(0) = f'(0) = 0$, то $p^2F(p) \div f''(t)$.

Аналогично можно найти изображение производной любого порядка.

$$p^n\left[F(p) - f(o) - f'(0)/p - f''(0)/p^2 - \ldots - f^{(n-1)}0/p^{n-1}\right] \div f^{(n)}(t).$$

Если при $t = 0$ $\quad f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $p^nF(p) \div f^{(n)}(t)$.

Следовательно, если функция $f(t)$ удовлетворяет нулевым начальным условиям, то при *n*–кратном её дифференцировании изображение умножается на p^n.

2.3.5. Интегрирование оригинала

Пусть $F(p) \div f(t)$. Каково изображение $\int\limits_0^t f(\tau)d\tau$? Обозначим его через $\Phi(p)$, т.е. $\Phi(p) \div \int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \varphi(t)$. Продифференцируем $\varphi(t)$.

Пусть $\varphi'(t) = f(t)$. Но $p[\Phi(p) - \varphi(0)] \div \varphi'(t); F(p) \div f(t)$, поэтому $p[\Phi(p) - \varphi(0)] = F(p)$. Остаётся $p\Phi(p) = F(p)$; $\quad \Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$, при $\varphi(0) = 0$.

Итак, $\dfrac{F(p)}{p} \div \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$, т.е. при интегрировании оригинала от нуля до *t* изображение делится на *p*.

Найдем изображение для неопределенного интеграла (первообразной) $\int f(t)dt = f^{(-1)}(t)$. Определенный интеграл $\int_0^t f(\tau)d\tau$ также является первообразной для функции $f(t)$, поэтому $f^{(-1)}(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau + c$. Положив $t=0$, получим $f^{(-1)}(0)=c$.

Тогда $f^{(-1)}(t)=\int_0^t f(\tau)d\tau + f^{(-1)}(0)$, где $f^{(-1)}(0)$ – постоянная.

Изображение функции $\int_0^t f(\tau)d\tau$ найдено ранее, поэтому

$$\frac{F(p)}{p} - f^{(-1)}(0) \div \int f(t)dt.$$

2.3.6. Дифференцирование изображения

Пусть $F(p)\div f(t)$, т.е. $\dfrac{F(p)}{p}=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$. (2.3)

Продифференцируем обе части равенства (2.3) по параметру p.

$\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]'=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-t)dt$, или $p\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]'=-p\int_0^\infty tf(t)e^{-pt}dt$. Тогда

$$p\left[\frac{F(p)}{p}\right]' \div -tf(t).$$

Продифференцируем обе части равенства (2.3) дважды по параметру p.

$\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]''=\int_0^\infty (-t)^2 f(t)e^{-pt}dt$, или $p\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]''=p\int_0^\infty (-t)^2 f(t)e^{-pt}dt$.

Следовательно, $p\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]'' \div (-t)^2 f(t).$

Продифференцировав равенство (2.3) по параметру p n раз, получим:

$\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]^{(n)}=\int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt}dt$, или $p\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]^{(n)}=p\int_0^\infty (-t)^n f(t)e^{-pt}dt;$

$p\left[\dfrac{F(p)}{p}\right]^{(n)} \div (-t)^n f(t)$, где $n>0, n$ – целое.

Изучим поведение интеграла Лапласа при $p=\infty$.

Т е о р е м а 2 . 3

Если $f(t)$ – функция с ограниченным ростом, $F(p) \div f(t)$, то $\dfrac{F(p)}{p} \to 0$ при $\operatorname{Re} p \to +\infty$.

Доказательство

Пусть $p = s + i\xi$, тогда $\left|\dfrac{F(p)}{p}\right| = \left|\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty |f(t)|e^{-st}dt$.

Рассмотрим сколь угодно малое $\xi > 0$. Покажем, что можно указать такое *p*, с достаточно большой вещественной частью $\operatorname{Re} p = s$, для которого $\left|\dfrac{F(p)}{p}\right| < \xi$. В равенстве для $\left|\dfrac{F(p)}{p}\right|$ разобьём интеграл, стоящий справа, на два интеграла:

$$\left|\frac{F(p)}{p}\right| = \int_0^\eta |f(t)|e^{-st}dt + \int_\eta^\infty |f(t)|e^{-st}dt = I_1 + I_2.$$

Рассмотрим $I_1 = \int_0^\eta |f(t)|e^{-st}dt.$ Так как $t > 0$, то для тех *p*, для которых $\operatorname{Re} p = s > 0$, $e^{-st} < 1$, следовательно, $\int_0^\eta |f(t)|e^{-st}dt < \int_0^\eta |f(t)|dt.$ Подберём η так, чтобы интеграл $\int_0^\eta |f(t)|e^{-st}dt$ был меньше $\xi/2$. Это возможно, потому что функция $f(t)$ непрерывна или кусочно-непрерывна при $t > 0$ и $\int_0^\eta |f(t)|e^{-st}dt < \xi/2.$

Рассмотрим $I_2 = \int_\eta^\infty |f(t)|e^{-st}dt$, где $f(t)$ – функция с ограниченным ростом, s_0 – показатель роста. Рассмотрим $s_1 > s_0$, $\int_\eta^\infty |f(t)|e^{-st}dt = \int_\eta^\infty |f(t)|e^{-s_1 t} \cdot e^{-(s-s_1)t}dt$. Функция $e^{-(s-s_1)t}$ при $s > s_1$, наибольшее значение на промежутке (η, ∞) имеет при $t = \eta$. Интеграл

$\int\limits_0^\infty |f(t)|e^{-s_1 t}dt$ сходится, т.к. $f(t)$ – функция с ограниченным ростом, а $s_1 > s_0$,

$\int\limits_\eta^\infty |f(t)|e^{-s_1 t}dt = c;\ I_2 = \int\limits_\eta^\infty |f(t)|e^{-st}dt < c \cdot e^{-(s-s_1)\eta}$.

Здесь c, s_1 и η - фиксированные величины, а переменная s произвольная. Взяв $s > 0$ и достаточно большим, получим: $e^{-(s-s_1)\eta} < \xi/2c;\ I_2 < c \cdot e^{-(s-s_1)\eta} < \xi/2$, т.к. $e^{-(s-s_1)}$ - убывающая функция аргумента s.

Итак, при достаточно больших $s = \operatorname{Re} p$ $\left|\frac{F(p)}{p}\right| < \frac{\xi}{2} + \frac{\xi}{2} = \xi$. Рассуждения справедливы для любых $\xi > 0$, сколь угодно малых. Следовательно, выполняется неравенство: $\frac{F(p)}{p} \to 0$ при $s = \operatorname{Re} p \to +\infty$.

2.3.7. Теорема смещения

Т е о р е м а 2 . 4 (с м е щ е н и я)

Если $F(p) \div f(t)$, то $\frac{p}{p+\lambda} \cdot F(p+\lambda) \div f(t)e^{-\lambda t}$.

Доказательство

Пусть $F(p) \div f(t)$. Найдем изображение функции $f(t)e^{-\lambda t}$.

Обозначим $\psi(p) \div f(t)e^{-\lambda t}$, тогда

$$\psi(p) = p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-\lambda t} \cdot e^{-pt}dt = p\int\limits_0^\infty f(t)e^{-(\lambda+p)t}dt =$$

$$= \frac{p}{p+\lambda} \cdot (p+\lambda)\int\limits_0^\infty f(t)e^{-(p+\lambda)t}dt = \frac{p}{p+\lambda} \cdot F(p+\lambda).$$

Отсюда $\frac{p}{p+\lambda} \cdot F(p+\lambda) \div f(t) \cdot e^{-\lambda t}$. Предполагается, что $\operatorname{Re}(p+\lambda) > s_0$, т.е.

$$\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re}\lambda.$$

Название теоремы объясняется её геометрической интерпретацией.

Если p – вещественная переменная, то при умножении оригинала на $e^{-\lambda t}$ график изображения смещается на - λ по оси p. Ординаты графика при этом умножаются на $\frac{p}{p+\lambda}$.

2.4. Преобразование некоторых употребительных функций

2.4.1. Изображения основных элементарных функций

1. $f(t)=e^{\alpha t}$. Найдём $F(p)$.

$$F(p)=p\int_0^{\infty} e^{\alpha t}\cdot e^{-pt}dt=p\int_0^{\infty} e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{p}{\alpha-p}\left[\lim_{t\to\infty} e^{(\alpha-p)t}-1\right]=$$

$$=\frac{p}{\alpha-p}(0-1)=\frac{p}{p-\alpha}.$$

Таким образом, $\frac{p}{p-\alpha}\div e^{\alpha t}$, при условии, что $\alpha-\operatorname{Re}p<0$, или $\operatorname{Re}p>\alpha$.

2. $f(t)=ch\,\alpha t=\frac{1}{2}\left(e^{\alpha t}+e^{-\alpha t}\right)$. Найдём $F(p)$.

$$F(p)=\frac{1}{2}\left(\frac{p}{p-\alpha}+\frac{p}{p+\alpha}\right)=\frac{p^2}{p^2-\alpha^2};\quad \frac{p^2}{p^2-\alpha^2}\div ch\alpha t.$$

3. $f(t)=sh\alpha t$. Найти $F(p)$.

Изображение можно найти, выразив $sh\alpha t$ через показательную функцию или воспользовавшись свойством о дифференцировании оригинала. Так как $(ch\alpha t)'=\alpha\cdot sh\alpha t,$ а $sh\alpha t=\frac{1}{\alpha}(ch\alpha t)'$ и $ch0=1,$ то

$$F(p)=\frac{p}{\alpha}\left[\frac{p^2}{p^2-\alpha^2}-1\right]=\frac{p\alpha}{p^2-\alpha^2}\cdot$$ Таким образом, $\frac{p\alpha}{p^2-\alpha^2}\div sh\alpha t.$

4. $f(t)=\sin\alpha t=\frac{1}{2i}(e^{\alpha i t}-e^{-\alpha i t})$. Найти $F(p)$.

Воспользовавшись таблицей 2.1 (см. конец гл.2), получим:

$$F(p)=\frac{1}{2i}\left(\frac{p}{p-\alpha i}-\frac{p}{p+\alpha i}\right)=\frac{p\alpha}{p^2+\alpha^2}\cdot$$ Таким образом, $\frac{p\alpha}{p^2+\alpha^2}\div\sin\alpha t.$

5. $f(t)=\cos\alpha t$. Найти $F(p)$.

Воспользуемся свойством о дифференцировании оригинала:

Так как $(\sin\alpha t)'=\alpha\cos\alpha t,$ а $\cos\alpha t=\frac{1}{\alpha}(\sin\alpha t)'$ и $\sin 0=0,$ то

$$F(p)=\frac{1}{\alpha}\cdot p\cdot\frac{p\alpha}{p^2+\alpha^2}\cdot$$ Таким образом, $\frac{p^2}{p^2+\alpha^2}\div\cos\alpha t.$

6. $f(t)=t^n$, n – целое число, $n>0$. Найти $F(p)$.

Воспользуемся соотношением $1\div 1$ и свойством об интегрировании оригинала. Тогда имеем:

$$\frac{1}{p}\div\int_0^t 1\cdot d\tau=t,\ \text{т.е.}\ \frac{1}{p}\div t.$$

К полученному соотношению вновь применим свойство об интегрировании оригинала.

$$\frac{1}{p^2} \div \int_0^t \tau \cdot d\tau = \frac{t^2}{2}, \text{ т.е. } \frac{1}{p^2} \div \frac{t^2}{2!}.$$

Проинтегрировав правую часть соотношения $1 \div 1$ n раз, получим: $\dfrac{1}{p^n} \div \dfrac{t^n}{n!}$.

Следовательно, $F(p) = \dfrac{n!}{p^n}$.

7. $f(t) = e^{-\lambda t} \sin \alpha t$. Найти $F(p)$.

Воспользуемся теоремой смещения. Так как $\dfrac{p\alpha}{p^2 + \alpha^2} \div \sin \alpha t$, то

$$\frac{p}{p+\lambda} \cdot \frac{(p+\lambda)\cdot\alpha}{(p+\lambda)^2 + \alpha^2} \div e^{-\lambda t} \cdot \sin \alpha t, \text{ или } \frac{p\alpha}{(p+\lambda)^2 + \alpha^2} \div e^{-\lambda t} \cdot \sin \alpha t.$$

8. $f(t) = e^{-\lambda t} \cos \alpha t$. Найти $F(p)$.

Так как $\dfrac{p^2}{p^2 + \alpha^2} \div \cos \alpha t$, то по теореме смещения имеем

$$\frac{p}{p+\lambda} \cdot \frac{(p+\lambda)^2}{(p+\lambda)^2 + \alpha^2} \div e^{-\lambda t} \cos \alpha t, \text{ таким образом, } \frac{p(p+\lambda)}{(p+\lambda)^2 + \alpha^2} \div e^{-\lambda t} \cos \alpha t.$$

9. $f(t) = te^{-\lambda t}$. Найти $F(p)$.

Можно воспользоваться теоремой смещения или свойством о дифференцировании изображения. Воспользуемся последним свойством:

$$\frac{p}{p+\lambda} \div e^{-\lambda t}; \quad p\left[\frac{1}{p+\lambda}\right]' \div -te^{-\lambda t}; \quad \frac{p}{(p+\lambda)^2} \div te^{-\lambda t}.$$

10. $f(t) = t^2 e^{-\lambda t}$. Найдём $F(p)$.

Применим ещё раз свойство о дифференцировании изображения к соотношению $\dfrac{p}{p+\lambda} \div e^{-\lambda t}$. Тогда имеем:

$$p\left(\frac{1}{p+\lambda}\right)'' \div t^2 e^{-\lambda t}. \text{ Так как } \left(\frac{1}{p+\lambda}\right)'' = \frac{1\cdot 2}{(p+\lambda)^3}, \text{ то } \frac{2!\,p}{(p+\lambda)^3} \div t^2 e^{-\lambda t}.$$

11. $f(t) = t^n e^{-\lambda t}$. Найти $F(p)$.

Дифференцируя n раз изображение, получим:

$$(-1)^n \frac{n!\,p}{(p+\lambda)^{n+1}} \div (-t)^n e^{-\lambda t}, \text{ или } \frac{n!\,p}{(p+\lambda)^{n+1}} \div t^n e^{-\lambda t}.$$

2.4.2. Оригиналы некоторых дробно-рациональных функций

При решении дифференциальных уравнений операторным методом, после того, как будет найдено изображение решения, иногда следует по изображению найти оригинал.

В общем случае эта задача решается с помощью преобразования, обратного преобразованию Лапласа-Карсона.

В более простых случаях, если изображение есть правильная рациональная дробь, то, разложив её на элементарные дроби, оригинал можно найти, используя полученную таблицу.

Известно, что элементарными дробями I рода называются дроби вида $\frac{A}{p-\alpha}$, $\frac{A}{(p-\alpha)^n}$, а элементарными дробями II рода называются дроби вида $\frac{Mp+N}{p^2+ap+b}$ и $\frac{Mp+N}{\left(p^2+ap+b\right)^n}$.

Как найти для них оригиналы?

1. Для дроби $1/(p-\alpha)$ оригинал найдем, используя правило интегрирования оригинала $\frac{1}{p-\alpha} \div \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha\tau}\Big|_0^t = \frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right)$.

2. Для получения оригинала функции $\frac{1}{(p-\alpha)^2}$ воспользуемся изображением функции $f(t)=te^{\alpha t}$ и правилом интегрирования оригинала. Так как $\frac{p}{(p-\alpha)^2} \div te^{\alpha t}$, то $\frac{1}{(p-\alpha)^2} \div \int_0^t \tau e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{\tau}{\alpha} e^{\alpha\tau}\Big|_0^t - \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha t-1)e^{\alpha t}+1\right]$.

Аналогично можно найти оригиналы для функций $\frac{1}{(p-\alpha)^3}$ и $\frac{1}{(p-\alpha)^n}$.

3. Как найти оригинал для функции $\frac{Mp+N}{p^2+ap+b}$?

Корни знаменателя комплексные. Выделяя в знаменателе полный квадрат, можно его привести к виду $(p+\lambda)^2+\alpha^2$ или $p^2+\alpha^2$. Оригинал для функции $\frac{p}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}$ можно найти, используя формулу 11 из таблицы 2.1, а для функции $\frac{p}{p^2+\alpha^2}$ - по формуле 6. Оригинал для функции $\frac{1}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}$ можно найти, используя правило интегрирования оригинала. Так как

$$\frac{p}{(p+\lambda)^2+\alpha^2} \div \frac{1}{\alpha} e^{-\lambda t}\sin\alpha t, \text{ то } \frac{1}{(p+\lambda)^2+\alpha^2} \div \frac{1}{\alpha}\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau \cdot d\tau.$$

Вычислим определенный интеграл, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\cdot d\tau = -\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda\tau}\cos\alpha\tau\Big|_0^t - \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^t e^{-\lambda\tau}\cos\alpha\tau\cdot d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda t}\cos\alpha t + \frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\Big|_0^t + \frac{\lambda}{\alpha}\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\cdot d\tau\right) =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}e^{-\lambda t}\cos\alpha t + \frac{1}{\alpha} - \frac{\lambda}{\alpha^2}e^{-\lambda t}\sin\alpha t - \frac{\lambda^2}{\alpha^2}\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\cdot d\tau, \text{ тогда}$$

$$\left(1+\frac{\lambda^2}{\alpha^2}\right)\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\cdot d\tau = -\frac{1}{\alpha}\left[e^{-\lambda t}\left(\cos\alpha t + \frac{\lambda}{\alpha}\sin\alpha t\right) - 1\right];$$

$$\int_0^t e^{-\lambda\tau}\sin\alpha\tau\cdot d\tau = -\frac{1}{\alpha^2+\lambda^2}\left[e^{-\lambda t}(\alpha\cos\alpha t + \lambda\sin\alpha t) - \alpha\right].$$

Таким образом: $\dfrac{1}{(p+\lambda)^2+\alpha^2} \div \dfrac{1}{\alpha(\alpha^2+\lambda^2)}\left[\alpha - e^{-\lambda t}(\alpha\cos\alpha t + \lambda\sin\alpha t)\right].$

4. Найдём оригинал для элементарной дроби второго рода $\dfrac{1}{(p^2+\alpha^2)^2}$.

Воспользуемся изображением $\sin\alpha t$ и правилом дифференцирования изображения. Так как $\dfrac{p\alpha}{p^2+\alpha^2} \div \sin\alpha t,$ то $p\left[\dfrac{1}{p^2+\alpha^2}\right]' \div -\dfrac{t}{\alpha}\sin\alpha t$, или

$$\frac{p^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2} \div \frac{t}{2\alpha}\sin\alpha t. \tag{2.4}$$

Найдем оригинал для функции $\dfrac{1}{p^2+\alpha^2}$. Так как $\dfrac{p^2}{p^2+\alpha^2} \div \cos\alpha t$ и $1 \div 1,$ то $1 - \dfrac{p^2}{p^2+\alpha^2} \div 1 - \cos\alpha t.$ Таким образом: $\dfrac{1}{p^2+\alpha^2} \div \dfrac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t)$. (2.5)

Из соотношений (2.4) и (2.5) и свойства линейности оператора Лапласа-Карсона получим:

$$\frac{1}{p^2+\alpha^2} - \frac{p^2}{(p^2+\alpha^2)^2} \div \frac{1}{\alpha^2}(1-\cos\alpha t) - \frac{t}{2\alpha}\sin\alpha t, \text{ или}$$

$$\frac{1}{(p^2+\alpha^2)^2} \div \frac{1}{\alpha^4}\left(1-\cos\alpha t - \frac{\alpha t}{2}\sin\alpha t\right).$$

Аналогичными преобразованиями можно получить оригиналы для других элементарных дробей II рода.

2.5. Операционный метод решения некоторых дифференциальных уравнений

2.5.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами.

$$Y^{(n)} + a_1 Y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} Y' + a_n Y = f(t). \qquad (2.6)$$

Найдем его частное решение $Y(t)$ при $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям:

$$Y(0) = Y_0,\ Y'(0) = Y_0',\ \ldots,\ Y^{(n-1)}(0) = Y_0^{(n-1)}. \qquad (2.7)$$

Применим к соотношению (2.6) оператор Лапласа-Карсона, т.е. умножим все члены равенства на e^{-pt} и проинтегрируем в пределах от 0 до ∞, затем результат умножим на p.

Обозначим $Y(p) \div Y(t)$. Изображение производных найдем на основании правил дифференцирования и интегрирования оригинала. Изображение функции найдем по таблице 2.1. Таким образом, используя условия (2.7), получим: $p[Y(p) - Y_0] \div Y'(t)$; $p^2\left[Y(p) - Y_0 - \dfrac{Y_0'}{p}\right] \div Y''(t)$;

$$p^3\left[Y(p) - Y_0 - \frac{Y_0'}{p} - \frac{Y_0''}{p^2}\right] \div Y'''(t);\ \ldots;\ p^n\left[Y(p) - Y_0 - \frac{Y_0'}{p} - \ldots - \frac{Y_0^{(n-1)}}{p^{n-1}}\right] \div Y^{(n)}(t).$$

Запишем уравнение (2.6) в операторной форме.

$$Y(p)\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) - Y_0\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n\right) -$$
$$- Y_0'\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-2} p\right) - \ldots - Y_0^{(n-1)} p = f(p).$$

Обозначим через $\Phi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$ и

$F(p) = f(p) + Y_0\left(p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n\right) + Y_0'\left(p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \ldots + a_{n-2} p\right) +$
$+ \ldots + Y_0^{(n-1)} p$. Тогда $Y(p) = \dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$. Это есть изображение искомого частного решения. Оригинал находим или по таблице 2.1, или по формуле обращения, которая будет получена ниже.

Если $f(t)$ является линейной комбинацией функций вида $t^n \cdot e^{-\lambda t}$, то ее изображение есть рациональная дробь, показатель степени числителя которой не превышает показателя степени знаменателя. Такого же типа будет дробь $\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$. Выделив целую часть и разложив оставшуюся элементарную дробь на простейшие, найдем оригинал $Y(t)$ по таблице 2.1.

Решение дифференциального уравнения свелось к решению алгебраического уравнения, линейного относительно неизвестной функции $Y(p)$, и нахождению по изображению оригинала.

Пример 2.5. Постоянное напряжение, равное E, включено в цепь с последовательно включенным постоянным сопротивлением R и самоиндукцией L. Определить ток I в цепи как функцию времени при $t > 0$, если $I(0) = 0$ (рис. 2.1).

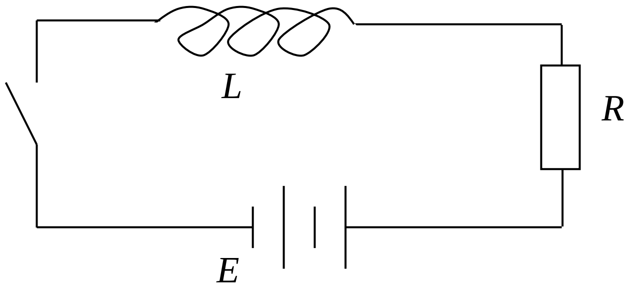


Рис. 2.1

При последовательном соединении элементов падение напряжения в цепи складывается из падений напряжения на отдельных участках цепи. Поэтому

$$E = RI + L\frac{dI}{dt}. \qquad (2.8)$$

Обозначим $I(p) \div I(t)$, тогда $pI(p) \div \frac{dI(t)}{dt}$ и $E \div E$. В операторной форме дифференциальное уравнение (2.8) примет вид:

$$E = RI(p) + LpI(p), \text{ тогда } I(p) = \frac{E}{L} \cdot \frac{1}{p + R/L}.$$

По формуле 3 таблицы 2.1 найдем $I(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{\frac{-Rt}{\alpha}}\right)$.

Пример 2.6.

Дано $Y'' + Y = te^t$; $Y(0) = -1$; $Y'(0) = 0$.

Найти $Y(t)$ при $t > 0$. Пусть $Y(p) \div Y(t)$, тогда $p[Y(p) + 1] \div Y'(t)$ и $p^2[Y(p) + 1] \div Y''(t)$. Применяя формулу 13 из таблицы 2.1, получим:

$$\frac{p}{(p-1)^2} \div te^t.$$

Запишем дифференциальное уравнение в операторной форме:

$$Y(p)(p^2 + 1) = \frac{p}{(p-1)^2} - p^2, \text{ или } Y(p) = \frac{p}{(p-1)^2(p^2+1)} - \frac{p^2}{p^2+1}.$$

Разложив дробь на элементарные дроби, получим:

$Y(p) = -\frac{1}{2}\frac{p}{p-1} + \frac{1}{2}\frac{p}{(p-1)^2} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{p^2+1}$. Тогда $Y(t) = -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}te^t - \frac{1}{2}\cos t$.

Пример 2.7.

$Y'' - 2Y' - 3Y = 2t;\ Y(0) = 1;\ Y'(0) = -1$.

Найти $Y(t)$ при $t > 0$. Пусть $Y(p) \div Y(t)$, тогда

$$p[Y(p) - 1] \div Y'(t);\ p^2[Y(p) - 1 + 1/p] \div Y''(t);\ 1/p \div t.$$

В операторной форме уравнение примет вид:

$$Y(p)(p^2 - 2p - 3) = 2/p + p^2 - 3p. \text{ Отсюда}$$

$$Y(p) = \frac{p^3 - 3p^2 + 2}{p(p^2 - 2p - 3)} = \frac{(p^3 - 2p^2 - 3p) - (p^2 - 3p - 2)}{p(p^2 - 2p - 3)} = 1 - \frac{p^2 - 3p - 2}{p(p^2 - 2p - 3)};$$

$$Y(p) = 1 - \frac{2}{3}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{1}{p+1} + \frac{1}{6}\frac{1}{p-3}. \text{ Тогда}$$

$$Y(t) = 1 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{2}(e^{-t} - 1) + \frac{1}{18}(e^{3t} - 1) = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{18}e^{3t} + \frac{4}{9}.$$

2.5.2. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Дана система линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} Y_1' + a_{11}Y_1 + a_{12}Y_2 + \ldots + a_{1n}Y_n = f_1(t), \\ Y_2' + a_{21}Y_1 + a_{22}Y_2 + \ldots + a_{2n}Y_n = f_2(t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n' + a_{n1}Y_1 + a_{n2}Y_2 + \ldots + a_{nn}Y_n = f_n(t). \end{cases} \tag{2.9}$$

Найдем частное решение системы (2.9) при $t > 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $Y_1(0) = C_1,\ Y_2(0) = C_2,\ \ldots,\ Y_n(0) = C_n$.

Обозначим:

$$\begin{array}{lll} Y_1(p) \div Y_1(t); & p[Y_1(p) - C_1] \div Y_1'(t); & f_1(p) \div f_1(t). \\ Y_2(p) \div Y_2(t); & p[Y_2(p) - C_2] \div Y_2'(t); & f_2(p) \div f_2(t). \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_n(p) \div Y_n(t); & p[Y_n(p) - C_n] \div Y_n'(t); & f_n(p) \div f_n(t). \end{array}$$

Перепишем систему дифференциальных уравнений (2.9) в операторной форме:

$$\begin{cases} p[Y_1(p) - C_1] + a_{11}Y_1(p) + a_{12}Y_2(p) + \ldots + a_{1n}Y_n(p) = f_1(p), \\ p[Y_2(p) - C_2] + a_{21}Y_1(p) + a_{22}Y_2(p) + \ldots + a_{2n}Y_n(p) = f_2(p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p[Y_n(p) - C_n] + a_{n1}Y_1(p) + a_{n2}Y_2(p) + \ldots + a_{nn}Y_n(p) = f_n(p) \end{cases}$$

или следующим образом:

$$\begin{cases} (a_{11}+p)Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)+\ldots+a_{1n}Y_n(p)=f_1(p)+C_1p, \\ a_{21}Y_1(p)+(a_{22}+p)Y_2(p)+\ldots+a_{2n}Y_n(p)=f_2(p)+C_2p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}Y_1(p)+a_{n2}Y_2(p)+\ldots+(a_{nn}+p)Y_n(p)=f_n(p)+C_np. \end{cases} \tag{2.10}$$

Пришли к системе алгебраических уравнений, линейных относительно неизвестных функций $Y_1(p)$, $Y_2(p)$, …, $Y_n(p)$. Решим систему (2.10) методом Крамера. По формулам Крамера получим:

$$Y_k(p)=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f_i(p)+C_ip\right]A_{ik}(p)}{A(p)}, \text{ где } A(p)=\begin{vmatrix} a_{11}+p & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22}+p & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn}+p \end{vmatrix}$$

$k=1, 2, 3, \ldots, n$.

Здесь A_{ik} – алгебраическое дополнение, соответствующее k-му столбцу и i-й строке матрицы $A(p)$.

Оригинал $Y(t)$ найдем по таблице 2.1 или по формуле обращения.

Пример 1. $Y'+4Y+4Z=0;\ Z'+2Y+6Z=0$.

Найти $Y(t)$ и $Z(t)$ при $t>0$, если $Y(0)=3;\ Z(0)=15$.

Записывая уравнения в операторной форме, получим:

$$Y(p)(p+4)+4Z(p)=3p,\ 2Y(p)+Z(p)(p+6)=15p,$$

$$Y(p)=\frac{\begin{vmatrix} 3p & 4 \\ 15p & p+6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+4 & 4 \\ 2 & p+6 \end{vmatrix}};\quad Z(p)=\frac{\begin{vmatrix} p+4 & 3p \\ 2 & 15p \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} p+4 & 4 \\ 2 & p+6 \end{vmatrix}};$$

$$Y(p)=\frac{3p(p-14)}{(p+2)(p+8)}=-\frac{8p}{p+2}+\frac{11p}{p+8};\ Y(t)=-8e^{-2t}+11e^{-8t};$$

$$Z(p)=\frac{p(15p+54)}{(p+2)(p+8)}=\frac{4p}{p+2}+\frac{11p}{p+8};\ Z(t)=4e^{-2t}+11e^{-8t}.$$

2.5.3. Интегродифференциальные уравнения

Рассмотрим задачу из электротехники.

Электрическая цепь состоит из последовательно включенных сопротивления R, емкости C, индуктивности L и ЭДС, меняющейся по некоторому закону $E=E(t)$ (рис. 2.2).

К моменту включения рубильника запас энергии в цепи равнялся нулю. Найти ток в цепи как функцию времени t. Элементы включены последовательно, поэтому падение напряжения в цепи складывается из падений напряжения на отдельных участках цепи.

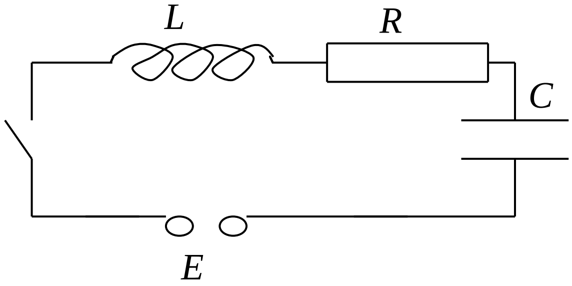


Рис. 2.2

Падение напряжения на сопротивлении есть IR; падение напряжения на емкости равно отношению количества электричества к емкости, т.е. $\frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau$; падение напряжения на индуктивности $L\frac{dI}{dt}$. Таким образом, $I \cdot R + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)d\tau + L\frac{dI}{dt} = E(t)$. Начальные условия $I(0) = 0$.

Решение задачи привелось к решению интегродифференциального уравнения вида: $Y' + a_1 Y + a_2\int_0^t Y(\tau)d\tau = f(t)$. Начальные условия: $Y(0) = Y_0$.

Обозначим $Y(p) \div Y(t)$; $p[Y(p) - Y_0] \div Y'(t)$; $\frac{1}{p}Y(p) \div \int_0^t Y(\tau)d\tau$.

Запишем уравнение в операторной форме:

$(p + a_1 + a_2/p)Y(p) = Y_0 p + f(p)$. Найдем изображение $Y(p) = \frac{Y_0 p^2 + pf(p)}{p^2 + a_1 p + a_2}$.

Оригинал находим по таблице или по формуле обращения. Аналогично может быть найдено решение уравнения, в которое входит неопределенный интеграл искомой функции, но в этом случае в начальных условиях нужно задать значение $Y^{(-1)}(p)$. Порядок интегродифференциального уравнения также может быть повышен.

Пример 2.8. $Y' - 3Y + 2\int_0^t Y(\tau)d\tau = \sin t$; $Y(0) = 0$.

Данное уравнение в операторной форме имеет вид:

$$pY(p) - 3Y(p) + \frac{2}{p}Y(p) = \frac{p}{p^2+1}, \text{ тогда } Y(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)(p^2-3p+2)}.$$

Разложив дробь на элементарные дроби

$\dfrac{p}{\left(p^2+1\right)\left(p^2-3p+2\right)}=\dfrac{A}{p-1}+\dfrac{B}{p-2}+\dfrac{Cp+D}{p^2+1}$, находим по методу неопределенных коэффициентов $A=\dfrac{1}{10}$; $B=-\dfrac{1}{5}$; $C=\dfrac{1}{10}$; $D=-\dfrac{3}{10}$.

Тогда $Y(p)=\dfrac{1}{10}\dfrac{p}{p-1}-\dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p-2}+\dfrac{\frac{1}{10}p^2-\frac{3}{10}p}{p^2+1}$, соответственно

$$Y(t)=\frac{1}{10}e^t-\frac{1}{5}e^{2t}+\frac{1}{10}\cos t-\frac{3}{10}\sin t=\frac{1}{10}\left(e^t-2e^{2t}+\cos t-3\sin t\right).$$

2.6. Формула Хевисайда (вторая теорема разложения)

2.6.1. Вывод формулы Хевисайда

Если изображение есть дробно-рациональная функция, удовлетворяющая некоторым условиям, то нахождение оригинала можно упростить, воспользовавшись формулой Хевисайда.

Пусть $Y(p)=\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ есть рациональная дробь.

Формулу выведем при некоторых ограничениях:

1. Если показатель степени многочлена $\Phi(p)$ есть n, то показатель степени $F(p)$ не больше n.

2. Все корни многочлена $\Phi(p)$ – простые.

3. Среди корней многочлена $\Phi(p)$ нет нуля.

4. Числитель и знаменатель не имеют общих множителей, в противном случае их надо на этот множитель сократить (корни знаменателя не являются корнями числителя).

З а м е ч а н и е 1. Если $p=a$ является корнем кратности k многочлена $\Phi(p)$, то для многочлена $\Phi'(p)$ $p=a$ – корень кратности $k-1$.

Пусть $p=a$ – корень кратности k для многочлена $\Phi(p)$, тогда $\Phi(p)=(p-a)^k Y(p)$, где $Y(a)\neq 0$. Найдем производную от $\Phi(p)$ по переменной p:

$$\Phi'(p)=k(p-a)^{k-1}Y(p)+(p-a)^k Y'(p)=(p-a)^{k-1}\left[kY(p)+(p-a)Y'(p)\right].$$

Выражение, стоящие в квадратных скобках, при $p=a$ в нуль не обращается, потому для многочлена $\Phi'(p)$ $p=a$ является корнем кратности $k-1$. Если $p=a$ - простой корень многочлена $\Phi(p)$, то для $\Phi'(p)$ $p=a$ корнем не является.

Вывод формулы Хевисайда.

Пусть $\Phi(p)=p^n+a_1p^{n-1}+a_2p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}p+a_n$; где p_1, p_2, …, p_n - корни $\Phi(p)$, тогда $\Phi(p)=(p-p_1)\cdots(p-p_n)$.

Показатель степени числителя дроби $\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ не превышает показателя степени знаменателя. Разделим $\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ на p, чтобы гарантировать правильность дроби, и разложим получившуюся дробь на элементарные:

$$\frac{1}{p}\frac{F(p)}{\Phi(p)}=\frac{A_0}{p}+\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{A_k}{p-p_k}+\ldots+\frac{A_n}{p-p_n}. \qquad (2.11)$$

Определим коэффициенты A_0, A_1, …, A_n. Для этого умножим левую и правую части равенства (2.11) на p и, положив $p=0$, найдем A_0; $A_0=F(0)/\Phi(0)$.

Умножив левую и правую части равенства (2.11) на $(p-p_k)$ и положив $p=p_k$, найдем A_k.

$$A_k=\frac{p-p_k}{p}\frac{F(p)}{\Phi(p)}\bigg|_{p=p_k}=\lim_{p\to p_k}\frac{(p-p_k)F(p)}{p\Phi(p)}=\lim_{p\to p_k}\frac{F(p)+(p-p_k)F'(p)}{\Phi(p)+p\Phi'(p)}=$$

$$=\frac{F(p_k)}{p_k\Phi'(p_k)},\ \text{где } F(p_k)\neq 0,\ \Phi(p_k)=0,\ \Phi'(p_k)\neq 0.$$

Тогда изображение есть $Y(p)=\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}=\dfrac{F(0)}{\Phi(0)}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{F(p_k)}{p_k\Phi'(p_k)}\dfrac{p}{p-p_k}$,

соответственно, оригинал $Y(t)=\dfrac{F(0)}{\Phi(0)}+\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{F(p_k)}{p_k\Phi'(p_k)}e^{p_k t}$.

Пример 2.9. $Y''-3Y'+2Y=e^{-2t}$. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям: при $t=0$ $Y_0=1;\ Y_0'=2$.

Запишем уравнение в операторной форме:

$$Y(p)\left(p^2-3p+2\right)=\frac{p}{p+2}+p^2-p,\ \text{или}\ Y(p)=\frac{p^3+p^2-p}{(p+2)(p-1)(p-2)}.$$

Применим формулу Хевисайда к функции $Y(p)$, где $F(p)=p^3+p^2-p$, $\Phi(p)=(p+2)(p-1)(p-2)$. Найдем $\Phi'(p)$.

$\Phi'(p)=(p-1)(p-2)+\left(p^2-4\right)+(p+2)(p-1)$.

При этом $F(0)=0,\ \Phi(0)=4$. Тогда оригинал

$Y(t)=\dfrac{1}{12}e^{-2t}-\dfrac{1}{3}e^{t}+\dfrac{5}{4}e^{2t}$.

№	p_k	$F(p_k)$	$\Phi'(p_k)$
1	-2	-2	12
2	1	1	-3
3	2	10	4

Замечание 2. Если корни знаменателя $\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ простые, но среди них есть нулевой корень, то оригинал можно получить, применяя к дроби $p\dfrac{F(p)}{\Phi(p)}$ формулу Хевисайда и свойство об интегрировании оригинала.

Пример 2.10. Найти частное решение дифференциального уравнения $Y''' - 5Y'' + 6Y' = 1$, удовлетворяющее начальным условиям: при $t = 0$ $Y(0) = Y'(0) = Y''(0) = 0$. Запишем уравнение в операторной форме:

$Y(p)(p^3 - 5p^2 + 6p) = 1$. Отсюда $Y(p) = \dfrac{1}{p(p^2 - 5p + 6)}$.

Применим формулу Хевисайда к функции $Y_1(p) = \dfrac{1}{p^2 - 5p + 6}$, где

$F(p) = 1$ и $\Phi(p) = p^2 - 5p + 6$, $\Phi(0) = 6$.

Найдем $\Phi'(p)$.

$\Phi'(p) = 2p - 5$, $\Phi(0) = 6$.

№	p_k	$F(p_k)$	$\Phi'(p_k)$
1	2	1	-1
2	3	1	2

Тогда $Y_1(t) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}e^{2t} + \dfrac{1}{3}e^{3t}$, следовательно, $Y(t) = \displaystyle\int_0^t \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{2\tau} + \frac{1}{3}e^{3\tau}\right)d\tau =$

$= \dfrac{1}{9}e^{3t} - \dfrac{1}{4}e^{2t} + \dfrac{1}{6}t + \dfrac{5}{36}$.

Замечание 3. В том случае, если среди корней $\Phi(p)$ есть кратные, тоже можно составить формулу разложения. Но нахождение коэффициентов этой формулы сильно усложняется.

Рассмотрим пример на применение формулы Хевисайда, если многочлен $\Phi(p)$ имеет мнимые корни.

Пример 2.11. $Y'' - 4Y' + 3Y = \sin 2t$; $Y(0) = Y'(0) = 0$.

Запишем уравнение в операторной форме:

$Y(p)(p^2-4p+3)=\dfrac{2p}{p^2+4}$. Отсюда $Y(p)=\dfrac{2p}{(p^2+4)(p^2-4p+3)}$, где $F(p)=2p$ и $\Phi(p)=(p^2+4)(p^2-4p+3)$. При этом $F(0)=0;\ \Phi(0)=12$. Найдем $\Phi'(p)$.
$\Phi'(p)=2p(p^2-4p+3)+2(p-2)(p^2+4)$.

№	p_k	$F(p_k)$	$\Phi'(p_k)$
1	1	2	-10
2	3	6	26
3	2i	4i	32-4i
4	-2i	-4i	32+4i

Тогда $Y(t)=-\dfrac{1}{5}e^t+\dfrac{1}{13}e^{3t}+\dfrac{e^{2it}}{2(8-i)}+\dfrac{e^{-2it}}{2(8+i)}$,

или $Y(t)=-\dfrac{1}{5}e^t+\dfrac{1}{13}e^{3t}-\dfrac{1}{65}\sin 2t+\dfrac{8}{65}\cos 2t$.

2.6.2. Применение формулы Хевисайда к решению задач по электротехнике

К линейным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами или к системам таких уравнений приводится решение многих задач электротехники. Остановимся на рассмотрении некоторых из них.

Задача 1. Включение постоянной электродвижущей силы в контур, состоящий из индуктивности и емкости, шунтированной сопротивлением. Пусть постоянная ЭДС, индуктивность, емкость и сопротивление включены по приведенной схеме (рис. 2.3).

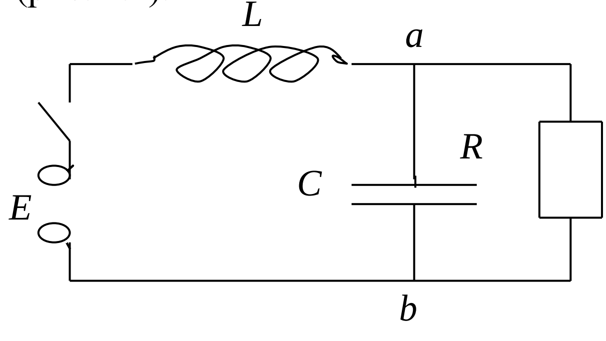


Рис. 2.3

До замыкания рубильника зарядов в цепи не было, т.е. при $t=0$ $I=0$. Определить ток в катушке самоиндукции как функцию времени.

Падение напряжения в цепи складывается из падений напряжения на индуктивности и на участке цепи ab. Падение напряжения на участке ab равно разности потенциалов на обкладках конденсатора. Обозначим его через U_C. Ток в катушке самоиндукции обозначим через $I(t)$.

$$E = L\frac{dI}{dt} + U_C.$$

В этом уравнении две неизвестные – I и U_C. Составим еще одно уравнение, используя закон Кирхгофа для случая параллельного включения элементов в цепь. Так как $I = I_R + I_C$, $I_R = \frac{U_C}{R}$ и $I_C = C\frac{dU_C}{dt}$, то $I = C\frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{R}$. В итоге получили систему уравнений: $L\frac{dI}{dt} + U_C = E$; $I - C\frac{dU_C}{dt} - \frac{1}{R}U_C = 0$, относительно двух неизвестных I и U_C. Начальные условия: $I(0) = U_C(0) = 0$.

По условию задачи нужно найти только ток, так что решим эту систему относительно $I(t)$. Запишем систему в операторной форме. Пусть $I(p) \div I(t)$; $U_C(p) \div U_C(t)$; $pI(p) \div I'(t)$; $pU_C(p) \div U'_C(t)$, тогда $LpI(p) + U_C(p) = E$; $I(p) - (Cp + 1/R)U_C(p) = 0$. Найдем $I(p)$ по формулам Крамера:

$$I(p) = \frac{\begin{vmatrix} E & 1 \\ 0 & -(Cp + 1/R) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Lp & 1 \\ 1 & -(Cp + 1/R) \end{vmatrix}} = \frac{E(CRp + 1)}{LCRp^2 + Lp + R} = \frac{E}{LCR}\frac{CRp + 1}{p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC}}.$$

Корни уравнения $p^2 + \frac{1}{CR}p + \frac{1}{LC} = 0$ равны $p_{1,2} = -\frac{1}{2CR} \pm \sqrt{\frac{1}{4C^2R^2} - \frac{1}{LC}}$.

Обозначим $p_1 = -\alpha + \beta$; $p_2 = -\alpha - \beta$, где $\alpha = \frac{1}{2CR}$; $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \frac{1}{LC}}$, тогда

$$I(p) = \frac{E(CRp + 1)}{LCp(p - p_1)(p - p_2)}.$$

Найдем оригинал по формуле Хевисайда.

Если $F(p) = CRp + 1$ и $\Phi(p) = (p - p_1)(p - p_2)$, $\Phi'(p) = 2p - p_1 - p_2$, при этом $F(0) = 1$, $\Phi(0) = p_1p_2$, то

$$I(t) = \frac{E}{LCR}\left[\frac{1}{p_1p_2} + \frac{CRp_1 + 1}{p_1(p_1 - p_2)}e^{p_1t} + \frac{CRp_2 + 1}{p_2(p_2 - p_1)}e^{p_2t}\right].$$

Произведем некоторые упрощения, пользуясь тем, что $p_1p_2 = 1/LC$; $p_1 - p_2 = 2\beta$; $p_1 + p_2 = -2\alpha$. Получим:

$$\frac{(CRp_1+1)}{p_1(p_1-p_2)}e^{p_1t}+\frac{(CRp_2+1)}{p_2(p_2-p_1)}e^{p_2t}=\frac{1}{2\beta}\left[\left(CR+\frac{1}{p_1}\right)e^{(-\alpha+\beta)t}-\left(CR+\frac{1}{p_2}\right)e^{-(\alpha+\beta)t}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\beta}e^{-\alpha t}\left\{2CR\cdot sh\beta t+\frac{1}{p_1p_2}\left[p_2(ch\beta t+sh\beta t)-p_1(ch\beta t-sh\beta t)\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\beta}e^{-2t}\{2CR\cdot sh\beta t+LC[(p_2-p_1)ch\beta t+(p_1+p_2)sh\beta t]\}=$$

$$=\frac{1}{2\beta}\left[2CR\cdot sh\beta t-2\beta LC\cdot ch\beta t-2\alpha LC\cdot sh\beta t\right].$$

Итак, $I(t)=\dfrac{E}{R}\left[1-e^{-\alpha t}\left(\dfrac{R}{\beta\alpha}sh\beta t+ch\beta t+\dfrac{\alpha}{\beta}sh\beta t\right)\right].$

Если β величина мнимая, то $sh\beta t$ и $ch\beta t$ выражаются через тригонометрические функции по формулам $ch\varphi i=\cos\varphi;\ sh\varphi i=i\sin\varphi$.

Задача 2. Включение постоянной электродвижущей силы в цепь, состоящую из двух индуктивно связанных контуров, не содержащих емкости.

В контур, состоящий из сопротивления R_1 и индуктивности L_1, включается постоянная ЭДС E. Первый контур связан со вторым, состоящим из сопротивления R_2 и индуктивности L_2, взаимной индуктивностью M (рис. 2.4).

Включение производится при нулевых начальных условиях. Найти ток в первом контуре.

При включении рубильника электромагнитное поле первого контура индуцирует ток во втором контуре. Электромагнитное поле второго контура оказывает влияние на ток первого контура, коэффициент взаимной индукции M известен.

Составим дифференциальное уравнение для каждого контура:

$$\boldsymbol{E=I_1R_1+L_1\frac{dI_1}{dt}+M\frac{dI_2}{dt}};\quad 0=I_2R_2+L_2\frac{dI_2}{dt}+M\frac{dI_1}{dt}.$$

Начальные условия: при $t=0\quad I_1=I_2=0$.

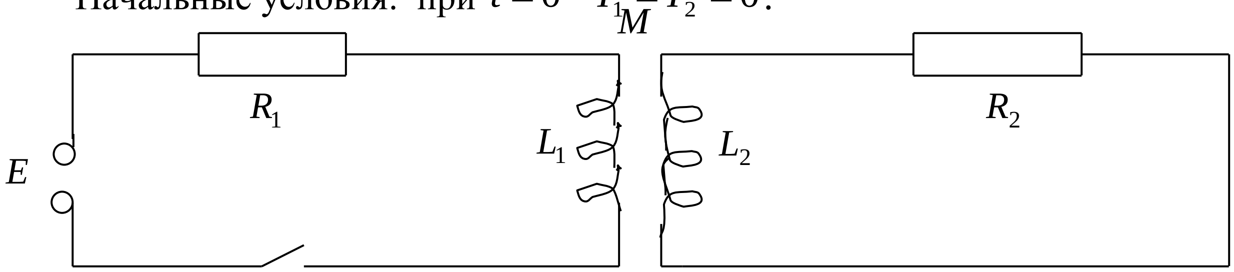


Рис. 2.4

Если каждый контур содержит емкость, то в правых частях уравнений появятся слагаемые вида $\dfrac{1}{C_1}\int_0^t I_1(t)dt$ и $\dfrac{1}{C_2}\int_0^t I_2(t)dt$, что приведет к некоторому усложнению выкладок. Запишем уравнения в операторной форме.

$$\begin{cases} MpI_2(p)+(L_1p+R_1)I_1(p)=E, \\ MpI_1(p)+(L_2p+R_2)I_2(p)=0. \end{cases}$$

Найдем $I_1(p)$ по формулам Крамера.

$$I_1(p)=\frac{\begin{vmatrix} Mp & E \\ R_2+L_2p & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Mp & L_1p+R_1 \\ R_2+L_2p & Mp \end{vmatrix}}=\frac{E}{L_1L_2}\frac{L_2p+R_2}{\left(1-\frac{M^2}{L_1L_2}\right)p^2+\left(\frac{R_1}{L_1}+\frac{R_2}{L_2}\right)p+\frac{R_1R_2}{L_1L_2}}.$$

Введем обозначения: $\frac{M^2}{L_1L_2}=K^2;\quad \frac{L_1}{2R_1}=\alpha_1;\quad \frac{L_2}{2R_2}=\alpha_2.$

Найдем корни знаменателя $I_1(p)$.

$$(1-K^2)p^2+2(\alpha_1+\alpha_2)p+4\alpha_1\alpha_2=0;\quad p^2+\frac{2(\alpha_1+\alpha_2)}{1-K^2}p+\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-K^2}=0;$$

$$p_{1,2}=-\sigma\pm\beta,\ \text{где}\ \sigma=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{1-K^2};\quad \beta=\sqrt{\sigma^2-\frac{4\alpha_1\alpha_2}{1-K^2}}.$$

Тогда $I_1(p)=\frac{E}{L_1(1-K^2)}\frac{p+2\alpha_2}{(p-p_1)(p-p_2)}.$

Найдем оригинал по формуле Хевисайда.

Если $F(p)=p+2\alpha_2,\quad \Phi(p)=(p-p_1)(p-p_2)$ и $F(0)=2\alpha_2,\quad \Phi(0)=p_1p_2,$ то

$$I_1(t)=\left[\frac{E}{L_1(1-K^2)}\frac{2\alpha_2}{p_1p_2}+\frac{(p_2+2\alpha_2)}{p_2(p_2-p_1)}e^{p_2t}+\frac{(p_1+2\alpha_2)}{p_2(p_1-p_2)}e^{p_1t}\right].$$

Выражение $I_1(t)$ можно упростить и выразить через гиперболические функции, проделав преобразования. Подобные преобразования выполнены в прошлом примере. $I_1(t)=E+Ee^{-\sigma t}\left[\frac{L_1-L_2}{\beta(1-K^2)}sh\beta t\right].$

Таблица 2.1

Таблица некоторых оригиналов и изображений

№	Оригинал	Изображение
1	2	3
1	C	C
2	$e^{\alpha t}$	$p/p-a$
3	$\frac{1}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
4	$ch\alpha t$	$\frac{p^2}{p^2-\alpha^2}$

Продолжение таблицы 2.1

1	2	3
5	$sh\alpha t$	$\dfrac{p\alpha}{p^2-\alpha^2}$
6	$\cos\alpha t$	$\dfrac{p^2}{p^2+\alpha^2}$
7	$\sin\alpha t$	$\dfrac{p\alpha}{p^2+\alpha^2}$
8	t	$1/p$
9	$\dfrac{t^2}{2!}$	$\dfrac{1}{p^2}$
10	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^n}$
	$e^{-\lambda t}\sin\alpha t$	$\dfrac{p\alpha}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}$
11	$e^{-\lambda t}\cos\alpha t$	$\dfrac{p(p+\lambda)}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}$
12	$te^{-\lambda t}$	$\dfrac{p}{(p+\lambda)^2}$
13	$t^2e^{-\lambda t}$	$\dfrac{2!\,p}{(p+\lambda)^3}$
15	$t^ne^{-\lambda t}$	$\dfrac{n!\,p}{(p+\lambda)^{n+1}}$
16	$\dfrac{1}{\alpha^2}\left[(\alpha t-1)e^{\alpha t}+1\right]$	$\dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$
17	$\dfrac{1}{\alpha(\alpha^2+\lambda^2)}\left[\alpha-e^{-\lambda t}(\alpha\cos\alpha t+\lambda\sin\alpha t)\right]$	$\dfrac{1}{(p+\lambda)^2+\alpha^2}$

3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графические представления в широком смысле - любые наглядные отображения исследуемой системы, процесса, явления на плоскости. К ним могут быть отнесены *рисунки, чертежи, графики* зависимостей характеристик, *планы-карты* местностей, *блок-схемы* процессов, *диаграммы* и т.п. Такие изображения наглядно представляют различные взаимосвязи, взаимообусловленности: топологическое (пространственное) расположение объектов, хронологические (временные) зависимости процессов и явлений, логические, структурные, причинно-следственные (каузальные) и другие взаимосвязи.

3.1. Основные понятия

Графические представления - удобный *способ иллюстрации* содержания различных понятий, относящихся к другим способам формализованных представлений (см., например, диаграммы Венна и другие графические иллюстрации основных теоретико-множественных и логических представлений).

Все более распространенными становятся представления количественных характеристик, взаимосвязей между объектами в виде разного рода одно-, двух- и более мерных *гистограмм* (рис. 3.1), *круговых диаграмм* (рис. 3.2), других анало-

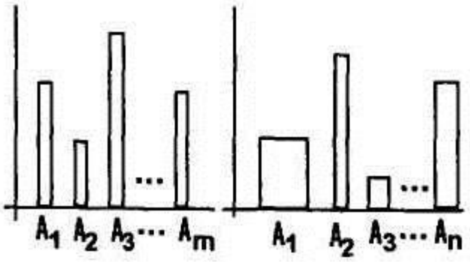


Рис. 3.1

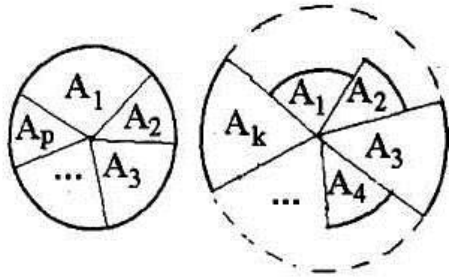


Рис. 3.2

гичных способов представления в виде тех или иных геометрических фигур, по наглядным характеристикам которых (высоте, ширине, площади, радиусу и пр.) можно судить о количественных соотношениях сравниваемых объектов, значительно упрощая их анализ.

Мощным и наиболее исследованным классом объектов, относящихся к графическим представлениям, являются так называемые *графы,* изучаемые в *теории графов.* Теория графов имеет огромные приложения, так как ее язык, с одной стороны, нагляден и понятен, а с другой - удобен в формальном исследовании. На языке теории графов формулируются и решаются многие задачи управления, в том числе задачи сетевого планирования и управления, анализа и проектирования организационных структур управления, анализа процессов функционирования и целеполагания, многие задачи принятия решений в условиях неопределенности и др.

Следует иметь в виду, что при изображении графа не все детали рисунка одинаково важны; в частности, несущественны геометрические свойства ребер (длина, кривизна и т.д.) и взаимное расположение вершин на плоскости.

Графические представления в узком смысле - это описание исследуемой системы, процесса, явления средствами теории графов в виде совокупности двух классов объектов: *вершин* и соединяющих их линий -*ребер* или *дуг.* Графы и их составляющие характеризуются определенными свойствами и набором допустимых преобразований (операций) над ними.

Графом G называется совокупность двух множеств: *вершин V и ребер E,* между элементами которых определено *отношение инцидентности* - каждое ребро $e \in E$ инцидентно ровно двум вершинам $v', v'' \in V$, которые оно соединяет. При этом вершина $v'(v'')$ и ребро e называются *инцидентными* друг другу, а вершины v' и v'', являющиеся для ребра e концевыми точками, называются *смежными.* Часто вместо $v \in V$ и $e \in E$ пишут соответственно $v \in G$, $e \in G$.

Ребро, соединяющее две вершины, может иметь направление от одной вершины к другой; в этом случае оно называется *направленным,* или *ориентированным,* или *дугой* и изображается стрелкой, направленной от вершины, называемой *началом,* к вершине, именуемой *концом.*

Граф, содержащий направленные ребра (дуги) с началом v' и концом v'', называется *ориентированным* (орграфом), а ненаправленные - *неориентированным* (назовем *н-графом).*

Ребра, инцидентные одной и той же паре вершин, называются *параллельными,* или *кратными.* Граф, содержащий кратные ребра, именуется *мультиграфом.* Ребро, концевые вершины которого совпадают, называется *петлей.*

Граф называется *конечным,* если множество его элементов (вершин и ребер) конечно, и *пустым,* если его множество вершин V (а значит, и ребер E) пусто. Граф без петель и кратных ребер именуется *полным,* если каждая пара вершин соединена ребром.

Дополнением графа G называется граф $\overline{G}$, имеющий те же вершины, что и граф G, и содержащий только те ребра, которые нужно добавить к графу G, чтобы получить полный граф.

Каждому неориентированному графу *канонически соответствует* ориентированный граф с тем же множеством вершин, в котором каждое ребро заменено двумя ориентированными ребрами, инцидентными тем же вершинам и имеющими противоположные направления.

Локальной степенью (или просто *степенью*) *вершины* $v \in V$ н-графа G называется количество ребер $\rho(v)$, инцидентных вершине v. В н-графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер m графа, т.е. четна (предполагается, что в графе с петлями петля дает вклад 2 в степень вершины):

$$\sum_{v \in G} \rho(v) = 2m.$$

Отсюда следует, что в н-графе число вершин нечетной степени четно.

Для вершин орграфа определяются две локальные степени:

$\rho_1(v)$ - число ребер с началом в вершине v или количество выходящих из v ребер;

$\rho_2(v)$ - количество входящих в v ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени.

В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(v)$ и $\rho_2(v)$ равны количеству ребер m этого графа, а значит, и равны между собой:

$$\sum_{v \in G} \rho_1(v) = \sum_{v \in G} \rho_2(v) = m.$$

Графы G_1 и G_2 равны, т.е. $G_1 = G_2$, если их множества вершин и ребер (выраженных через пары инцидентных им вершин) совпадают: $V_1 = V_2$ и

$E_1 = E_2$. Графы G_1 и G_2 на рис. 3.3 равны. Граф G считается *полностью заданным* в строгом смысле, если нумерация его вершин и ребер зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин ребер, называются *изоморфными.*

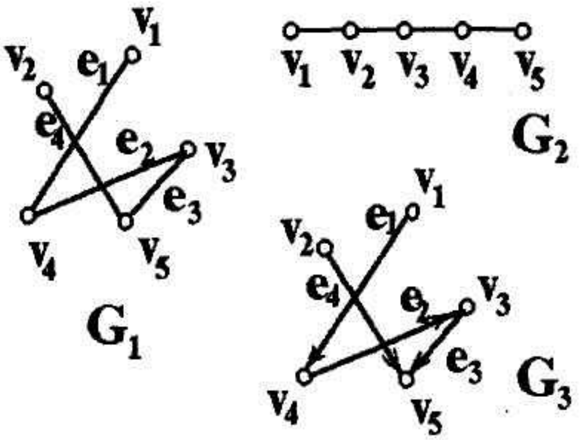


Рис. 3.3

Пример 3.1. Задать граф G_1, представленный на рисунке 3.3, через множества вершин V_1 и ребер E_1.

Решение. Граф G_1 может быть полностью определен:

Двумя множествами – поименованных вершин $V_1 = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5\}$ и поименованных ребер $E_1 = \{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4\}$ (в строгом смысле требуется установление отношения инцидентности ребер соответствующим вершинам);

Множеством ребер, каждое из которых представлено парой своих концевых вершин: $E_1 = \{(v_1,\ v_4),\ (v_4,\ v_3),\ (v_3,\ v_5),\ (v_5,\ v_2)\}$.

Порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, так как все ребра в графе G неориентированные.

3.2. Способы задания графов

Выше мы познакомились с двумя способами описания графов: графическим и в виде двух множеств вершин V и ребер E, когда каждое ребро $e \in E$ определено парой инцидентных ему концевых вершин $(v',\ v'')$. Рассмотрим другие способы, используемые в теории графов.

В общем виде задать граф - значит описать множества его вершин и ребер, а также отношение инцидентности. Для описания вершин и ребер достаточно их занумеровать. Пусть $v_1,\ v_2,\ ...,\ v_j,\ ...,\ v_n$ - вершины графа G; $e_1,\ e_2,\ ...,\ e_i,...,\ e_m$ - ребра. Отношение инцидентности задается:

• *матрицей инцидентности* $\|\varepsilon_{ij}\|$ размера $m \times n$: по вертикали и горизонтали указываются вершины и ребра соответственно, а на пересечении i-й вершины и j-го ребра в случае неориентированного графа проставляется 1, если они инцидентны, и 0 - в противном случае, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если ребро } e_i \text{ инцидентно вершине } v_j, \\ 0 \text{ - в противном случае,} \end{cases}$$

а в случае орграфа: -1, если вершина является началом ребра, 1 - если вершина является концом ребра, и 0 - если вершина и ребро не инцидентны; если некоторая вершина является для ребра и началом, и концом (т.е. ребро - петля), проставляется любое другое число, например 2, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} -1, \text{ если вершина } v_j \text{ - начало ребра } e_1; \\ 1, \text{ если вершина } v_j - \text{ конец ребра } e_1; \\ \alpha \text{ (любое число, отличное от -1, 1, 0),если} \\ \qquad e_i \text{ - петля, а } v_j \text{ - инцидентная ей вершина;} \\ 0 \text{ - в остальных случаях;} \end{cases}$$

• *списком ребер* графа, представленным двумя столбцами: в левом перечисляются все ребра $e_i \in E$, а в правом - инцидентные ему вершины $v_{j'}$, $v_{j''}$; для н-графа порядок вершин в строке произволен, для орграфа первым стоит номер начала ребра;

• *матрицей смежности* $\|\delta_{kl}\|$ - квадратной матрицей размера $n \times n$: по вертикали и горизонтали перечисляются все вершины $v_j \in V$, а на пересечении *k-й* и *l-й* вершин в случае н-графа проставляется число, равное числу ребер, соединяющих эти вершины; для орграфа δ_{kl} равно числу ребер с началом в *k-й* вершине и концом в *l*-й.

Если два графа равны, то их матрицы совпадают. Если в графе поменять нумерацию вершин, матрицы (и список ребер) в общем случае изменяются, т.е. вид матриц и списка ребер зависит от нумерации вершин и ребер графа. Строго говоря, граф считается *полностью заданным,* если нумерация его вершин зафиксирована. Графы, отличающиеся только нумерацией вершин, являются *изоморфными.* Проверка изоморфности графов - в общем случае трудоемкая задача.

Пример 3.2. Задать матрицами инцидентности и смежности, а также списком ребер графы G_1, G_3 (рис. 3.4).

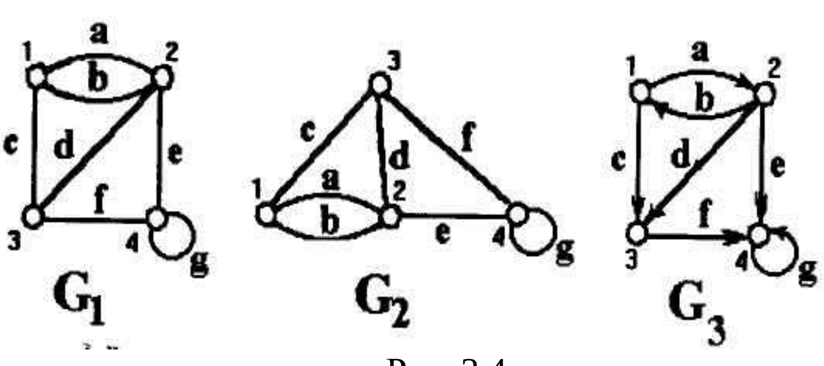


Рис. 3.4

Матрицы инцидентности графов G_1 и G_3 приведены в табл. 3.1. В матрице инцидентности в каждом столбце только два элемента, отличных от 0 (или один, если ребро – петля). Список ребер является более компактным описанием графа.

Таблица 3.1

G_1	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0
4	0	0	0	0	1	1	1

G_3	a	b	c	d	e	f	g
1	-1	1	-1	0	0	0	0
2	1	-1	0	-1	-1	0	0
3	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	0	1	1	2

Список ребер графа G_3 приведен в таблице 3.3, для н-графа G_1 он аналогичен, однако последовательность указания вершин здесь безразлична. Матрицы смежности графов G_1, G_3 даны в табл. 3.2.

Таблица 3.2

G_1	1	2	3	4
1	0	2	1	0
2	2	0	1	1
3	1	1	0	1
4	0	1	1	1

G_3	1	2	3	4
1	0	1	1	0
2	1	0	1	1
3	0	0	0	1
4	0	0	0	1

Таблица 3.3

Ребро	Вершины
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
t	2 4
f	3 4
g	4 4

Пример 3.3. На рис. 3.5 изображен сетевой граф (сетевая модель) выполнения комплекса операций (работ) некоторой программы. В нем стрелки обозначают операции, вершины – события, характеризующие окончание одних работ и начало других. Направленность стрелок отражает последовательность наступления этих событий. Задать сетевой граф различными способами.

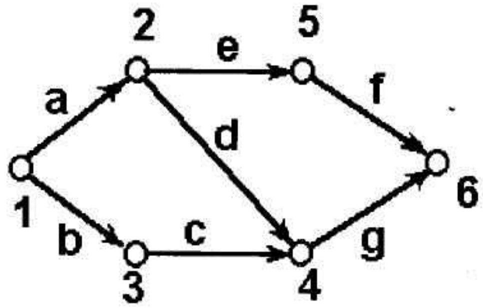


Рис. 3.5

Изображенная сетевая модель представляет собой ориентированный граф, который может быть полностью задан различными способами:

1) графически (рис. 3.5);

2) с помощью задания двух множеств: $V=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ и $E=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 6),\ (5,\ 6)\}$;

3) матрицей инцидентности (табл. 3.4). Особенностью сетевой модели является то, что из начального события 1 стрелки только выходят, а в конечное 6 - только входят. Поэтому в первой строке матрицы инцидентности имеются единицы только со знаком "минус", а в последней – только со знаком "плюс";

4) матрицей смежности (табл. 3.5). В последней строке матрицы смежности проставлены только нули;

5) списком ребер сетевой граф задается очевидным образом, поскольку ребра графа обозначены через свои концевые вершины. В таком случае в столбце

Таблица 3.4

	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(4,6)	(5,6)
1	-1	-1	0	0	0	0	0
2	1	0	-1	-1	0	0	0
3	0	1	0	0	-1	0	0
4	0	0	1	0	1	-1	0
5	0	0	0	1	0	0	-1
6	0	0	0	0	0	1	1

Таблица 3.5

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	0	0	0
2	0	0	0	1	1	0
3	0	0	0	1	0	0
4	0	0	0	0	0	1
5	0	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0

"вершины" списка будут повторяться номера вершин, указанных в столбце «ребра», причем в той последовательности, в какой в данном случае стрелки-ребра обозначены.

Построение матрицы инцидентности по списку ребер. Каждая строка списка соответствует строке матрицы с тем же номером. Для н-графа в строке списка указаны номера элементов строки матрицы инцидентности, равные I. Для орграфа в этой строке первым стоит номер элемента строки матрицы, равного -1, а вторым - номер элемента, равного 1. При совпадении номеров в строке списка ребер в названном элементе строки матрицы инцидентности проставляется, например, 2 (табл. 3.6).

Таблица 3.6

G_1	I	II	III	IV	V	VI	VII
1	1	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	1	1	0	0	0
6	0	0	1	1	0	0	0
7	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	1	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	1
10	0	0	0	0	1	1	0
11	0	0	0	0	0	1	1

G_2	I	II	III	IV	V	VI	VII
1	-1	1	0	0	0	0	0
2	-1	0	1	0	0	0	0
3	0	-1	0	1	0	0	0
4	0	1	0	-1	0	0	0
5	0	0	0	2	0	0	0
6	0	0	-1	0	1	0	0
7	0	0	-1	0	1	0	0
8	0	0	-1	0	0	1	0
9	0	0	-1	0	0	0	1
10	0	0	0	0	0	0	2

Построение по матрице смежности списка ребер. Элементу матрицы, расположенному в i-й строке и j-м столбце, соответствует δ_{ij} строк списка ребер (при $\delta_{ij} = 0$ - ни одной строки), в каждой из которых записаны номера i, j. Для н-графа эти строки соответствуют только элементам верхнего правого треугольника матрицы смежности, т.е. элементам δ_{ij} с $j \geq i$, а для орграфа нужно рассматривать все элементы δ_{ij}.

4. МАРШРУТЫ И ДЕРЕВЬЯ

4.1. Маршруты, пути, цепи, циклы

Пусть G - неориентированный граф.

Маршрутом в G называется такая последовательность ребер $M\left(e_1, e_2, ..., e_i, ..., e_n\right)$, в которой каждые два соседних ребра e_{i-1} и e_i имеют общую вершину. В маршруте одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Начало маршрута* - вершина v_0, инцидентная ребру e_1 и не инцидентная e_2; *конец маршрута* v_n инцидентен e_n и не инцидентен e_{n-1}. Если $e_1, e_2\left(e_{n-1}, e_n\right)$ - кратные, требуется дополнительное указание, какую из двух инцидентных вершин считать началом (концом) маршрута.

Маршрут, в котором совпадают его начало и конец $v_0 = v_n$, (т.е замкнутый), называется *циклическим.* Маршрут, в котором все ребра разные, называется *цепью.* Цепь, не пересекающая себя, т.е. не содержащая повторяющихся вершин, именуется *простой цепью.*

Циклический маршрут называется *циклом,* если он является цепью, и *простым циклом,* когда это - простая цепь.

Вершины $v', v'' \in G$ называются *связанными,* если существует маршрут M с началом v' и концом v''. Связанные маршрутом вершины связаны также и простой цепью. Отношение связанности вершин обладает свойствами эквивалентности и определяет разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества *V*., *i* = 1, 2,..., *k*. *Граф G* называется *связным,* если все его вершины связаны между собой. Поэтому все подграфы $G(V_i)$ связны и называются *связными компонентами графа.* Каждый н-граф распадается единственным образом в прямую сумму своих связных компонент $G = \bigcup_i G(V_i)$.

Пусть *G* - ориентированный граф.

Последовательность ребер, в которой конец каждого предыдущего ребра e_{i-1} совпадает с началом следующего e_i, называется *путем* (в нем все ребра проходят по их ориентации). В пути одно и то же ребро может встречаться несколько раз. *Началом пути* является начало v_0 ребра e_1*, концом пути* - конец v_n ребра e_n.

Путь называется *ориентированной цепью* (или просто *цепью),* если каждое ребро встречается в нем не более одного раза, и *простой цепью,* если любая вершина графа *G* инцидентна не более чем двум его ребрам.

Контур - путь, в котором $v_0 = v_n$. Контур называется *циклом,* если он является цепью, и *простым циклом,* когда это - простая цепь. Если граф содержит циклы, то он содержит и простые циклы. *Граф,* не содержащий циклов, называется *ациклическим.*

Вершина $v'' \in G$ называется *достижимой* из вершины $v' \in G$, если существует путь $L(v', \ldots, v'')$ с началом v' и концом v''.

Орграф *G* именуется *связным,* если он связен без учета ориентации дуг, и *сильно связен,* если из любой вершины v' в любую v'' существует путь.

Число ребер маршрута (пути) называется его *длиной.*

Расстоянием $d(v', v'')$ между вершинами v' и v'' н-графа *G* называется минимальная длина простой цепи с началом v' и концом v''. *Центром* называется вершина н-графа, от которой максимальное из расстояний до других вершин являлось бы минимальным. Максимальное расстояние от центра *G* до его вершин называется *радиусом* графа $r(G)$.

Эйлеров цикл - цикл графа, содержащий все ребра графа. *Эйлеров граф* - граф, имеющий эйлеров цикл (эйлеров цикл можно считать следом пера, вычерчивающего этот граф, не отрываясь от бумаги).

Теорема Эйлера: конечный неориентированный граф *G* эйлеров тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Эйлерова цепь - цепь, включающая все ребра данного конечного н-графа *G*, но имеющая различные начало v' и конец v''. Чтобы в конечном н-графе *G* существовала эйлерова цепь, необходимы и достаточны его связность и четность степеней всех вершин, кроме начальной v' и конечной v'' (v' и v'' должны иметь нечетные степени). Чтобы в конечном орграфе существовал эйлеров цикл, необходимы и достаточны его связность, а также равенство степеней вершин этого графа по входящим и выходящим ребрам, т.е. $\rho_1(v) = \rho_2(v),\ \forall v \in G$.

Гамильтонов цикл - простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа. *Гамильтонова цепь* — простая цепь, проходящая через все вершины графа, с началом и концом в разных вершинах $v_1,\ v_2 \in G$.

Пример 4.1. Для вершин v_1 и v_6 графа G (рис. 4.1) привести примеры маршрута, цепи, простой цепи; определить в графе циклический маршрут, цикл, простой цикл, приняв вершину v_1 за их начало и конец.

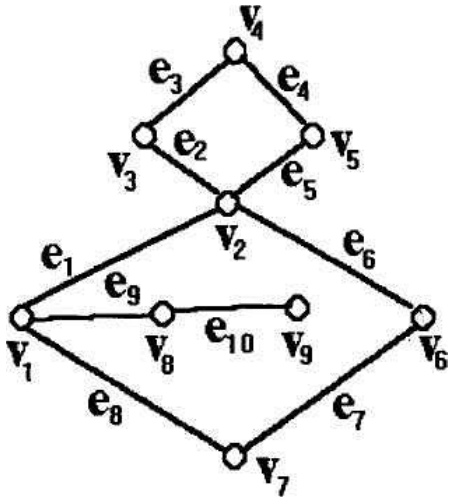


Рис. 4.1

Для вершин v_1, v_6 $\in G$:

• маршрут, не являющийся цепью, - $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_1,\ e_8,\ e_7,\ e_6,\ e_1,\ e_8,\ e_7)$ или $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_1,\ e_8,\ e_7)$ и т.п.;

•цепь, не являющаяся простой цепью, - $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6)$;

•простая цепь - $(e_1,\ e_6)$ или $(e_8,\ e_7)$.

Для вершины v_1:

•циклический маршрут, не являющийся циклом, - $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8,\ e_1,\ e_6,\ e_7,\ e_8)$;

•цикл, не являющийся простым циклом, - $(e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_4,\ e_5,\ e_6,\ e_7,\ e_8)$;

• простой цикл $(e_1,\ e_6,\ e_7,\ e_8)$.

При описании цикла в качестве его начала и конца может быть выбрана любая вершина, поэтому последовательности $(e_1,\ e_6,\ e_7,\ e_8)$, $(e_6,\ e_7,\ e_8,\ e_1)$, $(e_7,\ e_8,\ e_1,\ e_6)$, $(e_8,\ e_1,\ e_6,\ e_7)$ представляют один и тот же цикл. Более того, часто считается, что можно менять порядок ребер цикла на противоположный, т.е. последовательность $(e_8,\ e_7,\ e_6,\ e_1)$ представляет тот же цикл.

4.2. Дерево и лес

Н-граф называется *неориентированным деревом* (или просто *деревом),* если он связен и не содержит циклов, а значит, петель и кратных ребер. Дерево - это минимальный связный граф в том смысле, что при удалении хотя бы одного ребра он теряет связность. Наличие этих двух свойств (связности и отсутствия циклов) позволяет жестко связать число вершин и число ребер: в дереве с n вершинами всегда n-1 ребро.

Лес — несвязный н-граф без циклов; связные компоненты леса являются деревьями. Любая часть леса или дерева также не имеет циклов, т.е. является лесом или деревом. Любая цепь в таком графе - простая, иначе она содержала бы цикл.

В неориентированном дереве между любыми двумя вершинами существует цепь и притом только одна. Верно и обратное: если любые две вершины графа связаны единственной цепью, то граф является деревом.

Вершина v графа G называется *концевой,* или висячей, если ее степень $\rho(v)=1$. Ребро, инцидентное концевой вершине, называется *концевым.* Если конечное дерево состоит более чем из одной вершины, оно имеет хотя бы две концевые вершины и хотя бы одно концевое ребро.

Ориентация неориентированного дерева осуществляется следующим образом. В дереве G отмечается (выбирается) вершина v_0 — так называемый *корень дерева G,* и все ребра такого *дерева с корнем* ориентируются от этой вершины-корня. Вершину v' ребра $(v',\ v'')$ можно соединить единственной цепью L с корнем v_0. Если эта цепь не содержит ребра $(v',\ v'')$, в это ребро вводится ориентация от v' к v'', в противном случае - от v'' к v'. Такая ориентация согласована с ориентацией того же ребра, определенной через вершину v''. Данная ориентация дерева с корнем v_0 единственна. Ориентированное таким образом дерево с корнем называется *ориентированным деревом.* В нем все ребра имеют направление от корня. При выборе другой вершины-корня получаем другой орграф-дерево.

Пусть v - вершина дерева G с корнем v_0; $B(v)$ - множество всех вершин, связанных с корнем цепями, проходящими через вершину v. Это множество порождает подграф $G(v)$, называемый *ветвью вершины* v в дереве с корнем v_0. Если дерево имеет более двух вершин, то среди них есть неконцевые вершины.

Пусть дано конечное дерево G. *Вершинами типа* 1 называют его концевые вершины. Если из дерева G удалить все вершины типа 1 и инцидентные им концевые ребра, то в оставшемся дереве G' концевые вершины называют *вершинами типа* 2 в дереве G. Аналогично определяются вершины типов 3,4 и т.д. Конечное дерево имеет вершины лишь конечного числа типов, причем число *вершин максимального типа* равно единице или двум.

Цикломатическим числом конечного н-графа G называется

$$v(G)=v_c+v_e-v_v,$$

где v_c - число связных компонент графа; v_e - число его ребер; v_v - число вершин. Цикломатическое число любого конечного н-графа неотрицательно.

Пример 4.2. Пусть граф типа дерева - G_7 (рис. 4.2). Сколько вершин максимального типа имеется в данном графе? Каково цикломатическое число графа? Чему равно цикломатическое число графа G', являющегося лесом и представленного двумя одинаковыми деревьями G_7? Построить ориентированное дерево с корнем v_0, являющимся вершиной максимального типа.

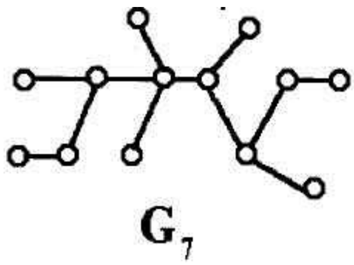
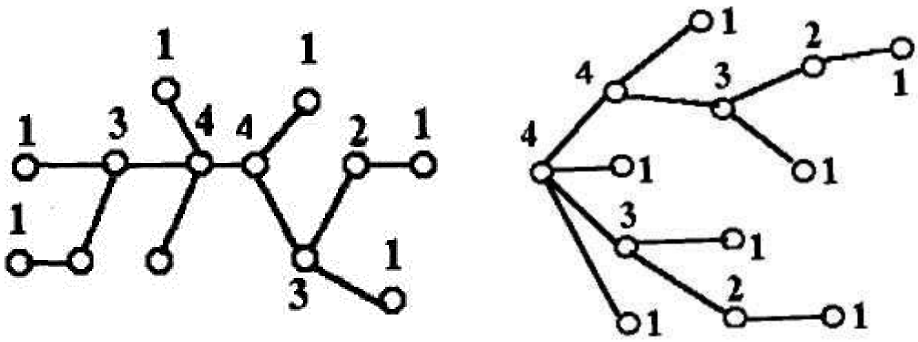


Рис. 4.2

Типы вершин графа G_7 отмечены на рис. 4.3, а, граф содержит две вершины максимального (4-го) типа.



а) б)

Рис. 4.3

Цикломатическое число любого дерева $\nu(G) = \nu_c + \nu_e - \nu_v = 0$. Действительно, число вершин ν_v в дереве на единицу больше числа ребер ν_e (см. выше), т.е. $\nu_e - \nu_v = -1$, а число связных компонент графа типа дерева $\nu_c = 1$. Таким образом, цикломатическое число любого дерева, в том числе графа G_7, $\nu = 0$.

Цикломатическое число леса равно сумме цикломатических чисел своих связных компонент - деревьев, т.е. также равно нулю; таким образом, $\nu(G') = \nu(G) + \nu(G) = 0$, где G' -граф, представленный двумя одинаковыми деревьями G.

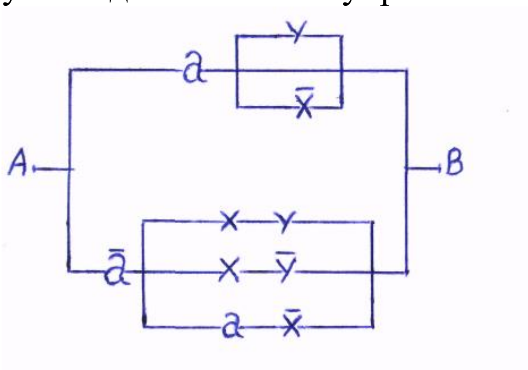
Построенное из н-графа G ориентированное дерево с корнем, являющимся вершиной максимального типа 4 (левая вершина - на рис. 4.3, а, изображено на рис. 4.3, б.

5. КОНТРОЛИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ» (ОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ)

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности

$xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \leftrightarrow x \vee y \vee z.$

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \to y)(x \to \bar{y}) \to \bar{x}.$

4. Упростить с помощью равносильностей

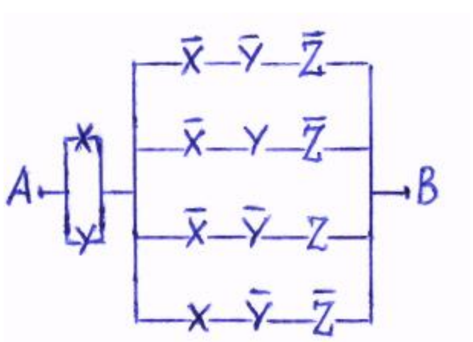
$(x \to y)(y \to \bar{z}) \to (\bar{x} \to z).$

5. Составить СКНФ

$(x \to \overline{yz})(y \to \overline{xz}) \vee x \vee \bar{y}.$

Вариант 2

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности

$(x \to y) \leftrightarrow \overline{(y \to z)}.$

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to xy)).$

4. Упростить с помощью равносильностей

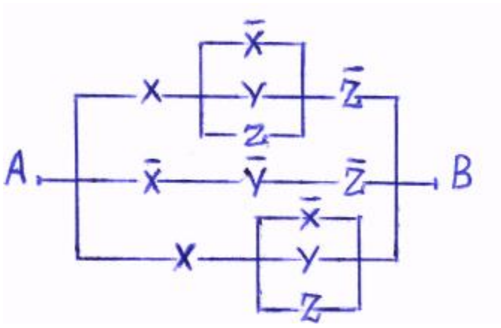
$(x \to y)(y \to \bar{z}) \to (\bar{x} \to \bar{z}).$

5. Составить СДНФ

$(xy \vee \bar{x}y \vee xz) \to \overline{xy}.$

Вариант 3

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности

$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \vee x\bar{y} \vee \overline{xy}.$

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$\overline{x(x \to y)(x \to \bar{y})} \vee ((\bar{y} \to \bar{x}) \to (x \to y)).$

4. Упростить с помощью равносильностей

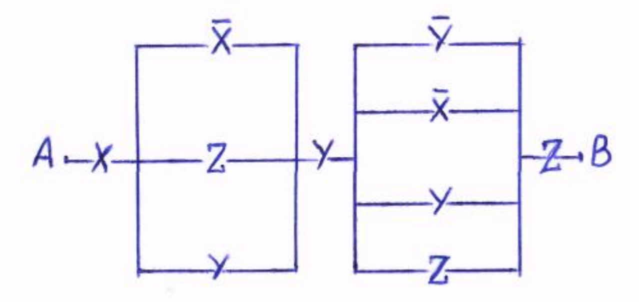
$(xyz \vee \bar{x}yz)(yz \vee \bar{y}z)(\bar{x}y \vee x\bar{y}).$

5. Составить СКНФ

$(\overline{xy \to \bar{x}})(\overline{xy} \to x)(xz \to \bar{z}).$

Вариант 4

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(x \vee yz \vee \bar{x}z) \leftrightarrow (\bar{x} \vee xz \vee \bar{z})$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$\overline{x \to (x \vee y)} \vee (x \to y)(\bar{y} \to \bar{x})$.

4. Упростить с помощью равносильностей

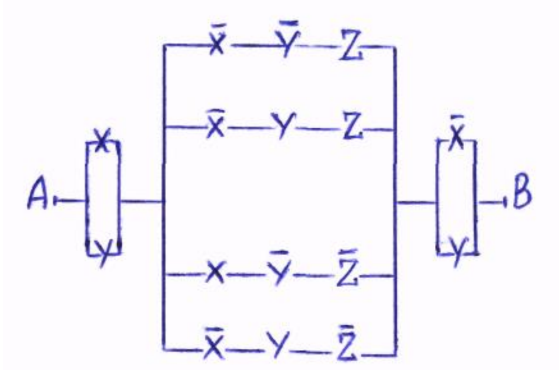
$(\overline{xy} \leftrightarrow \overline{xz}) \to (\bar{x}y \to \bar{x}\bar{z})$.

5. Составить СДНФ

$(x \to y) \to (\bar{x}(y \vee z)) \wedge xy \wedge x\bar{z}$.

Вариант 5

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(\overline{\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}}) \leftrightarrow (xy \vee xz)$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y)$.

4. Упростить с помощью равносильностей

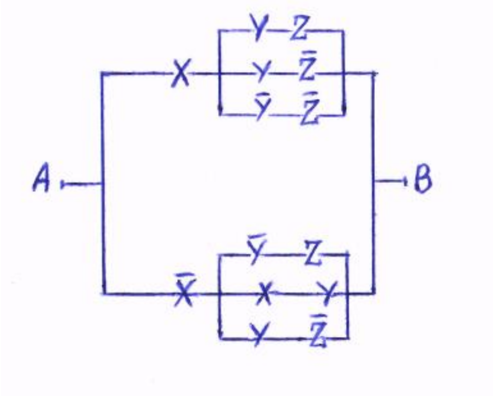
$(\overline{ab \to bc}) \leftrightarrow ((a \to b) \to (c \to b))$.

5. Составить СКНФ

$(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

Вариант 6

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y \vee \bar{x}y)$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \wedge y \to x) \vee (\overline{x \to (x \vee y)})$.

4. Упростить с помощью равносильностей

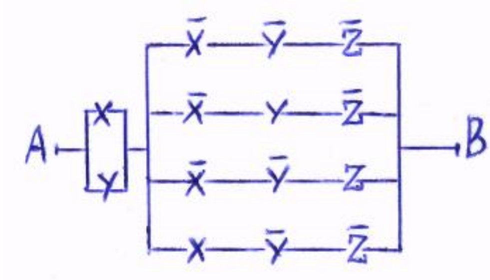
$x(y \vee z \to y \vee z) \vee yx\bar{y} \vee x \vee y\overline{x\bar{x}}$.

5. Составить СДНФ

$(ab \to \bar{c}) \to (\overline{\bar{b} \to \bar{a}}) \wedge ba \wedge ac$.

Вариант 7

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y \to z})$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \to z) \to ((z \to y) \to (z \to xy))$.

4. Упростить с помощью равносильностей

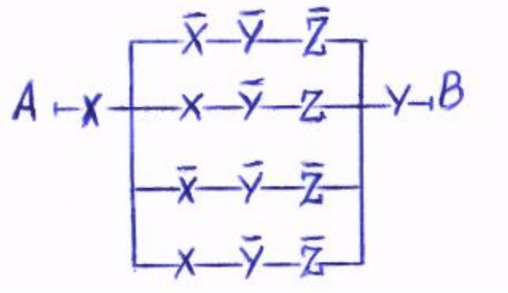
$(x \to y)(y \to z) \to (\bar{x} \to \bar{z})$.

5. Составить СКНФ

$(xy \vee \bar{x}y \vee xz \vee \bar{y}\bar{z}) \to \bar{x}\bar{y}$.

Вариант 8

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(x \vee y \vee \bar{x}) \leftrightarrow (xy \vee yz \vee xz)$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \to (y \to z) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

4. Упростить с помощью равносильностей

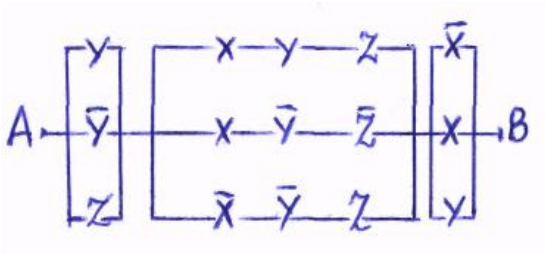
$\overline{xy\bar{x} \to y\bar{y} \to z} \vee x \vee yz \vee \bar{y}z$.

5. Составить СДНФ

$(x \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) \to (\bar{x} \vee y)$.

Вариант 9

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности
$(xyz \to \bar{x}y\bar{z}) \leftrightarrow (x \vee y \vee z)$.

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$\overline{\overline{x\bar{y}} \leftrightarrow x \vee xy}$.

4. Упростить с помощью равносильностей

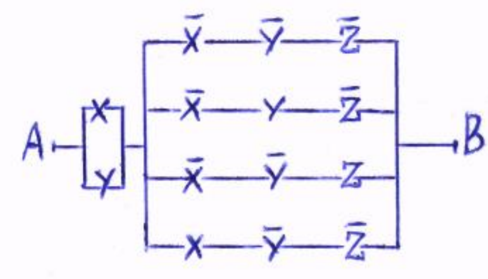
$(x \vee \bar{y} \to x \wedge z) \to (\overline{x \to \bar{x}}) \vee \bar{y}z)$.

5. Составить СКНФ

$(x \to y)(y \to \bar{z}) \to (z \to \bar{x})$.

Вариант 10

1. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



2. Составить таблицу истинности

$\overline{(\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}} \leftrightarrow (xy \vee xz).$

3. Показать тождественную истинность или ложность формулы

$(x \leftrightarrow y) \wedge (x\bar{y} \vee \bar{x}y).$

4. Упростить с помощью равносильностей

$\overline{(ab \rightarrow bc)} \leftrightarrow ((a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow b)).$

5. Составить СДНФ

$(x \rightarrow (y \rightarrow z)) \rightarrow (\bar{y} \rightarrow x).$

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. $f(t) = t\sin^2 t.$
2. $f(t) = e^{-3t}\cos^3 t.$
3. $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 2p + 5}.$
4. $x'' - 3x' + 2x = e^{3t}, \; x(0) = x'(0) = 0.$
5. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases} \quad x(0) = 1, \; y(0) = 0.$
6. $y' + \int_0^t y(\tau)d\tau = \sin t, \quad y(0) = 0.$

Вариант 2

1. $f(t) = \sin 3t \cos^2 t.$
2. $f(t) = e^{-t}(2t^3 + 4\sin^3 5t).$
3. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3(p+2)^2}.$
4. $x'' - 4x' + 3x = \sin 2t, \; x(0) = x'(0) = 0.$
5. $y'' - 2y' + y = e^{2x}, \quad y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$

6. $y'+3\int_0^t y(\tau)d\tau = 9t, \quad y(0)=0.$

Вариант 3

1. $f(t)=\sin^2 6t\cos t.$
2. $f(t)=e^{-2t}(4t^3+2\cos^3 t).$
3. $F(p)=\dfrac{2p}{p^2+4p}.$
4. $x'''-x'-2x=\sin 2t, \ x(0)=2, \ x'(0)=0, \ x''(0)=1.$
5. $\begin{cases} x'+y-z=0 \\ y'-z=0 \\ x+z-z'=0 \end{cases} \qquad x(0)=2, \ y(0)=\dfrac{1}{2}, \ z(0)=\dfrac{5}{2}.$
6. $y'+5\int_0^t y(\tau)d\tau = 3t, \quad y(0)=0.$

Вариант 4

1. $f(t)=e^{3t}\sin^2 7t.$
2. $f(t)=\cos^3 4t\sin 2t.$
3. $F(p)=\dfrac{p+1}{(p-1)(p^2-4)}.$
4. $y''-3y'+2y=e^x, \ y(0)=0, \ y'(0)=2.$
5. $\begin{cases} x'+7x-y=0 \\ y'+2x+5y=0 \end{cases} \qquad x(0)= \ y(0)=1.$
6. $y'+2\int_0^t y(\tau)d\tau = t, \quad y(0)=0.$

Вариант 5

1. $f(t)=4t^5+2\sin^2 4t+\cos 6t.$
2. $f(t)=\sin^3 3t\cos t.$
3. $F(p)=\dfrac{p}{p^5-5p^3+4p}.$
4. $y''-2y'=e^{-x}, \ x(0)=0, \ x'(0)=1, \ x''(0)=2.$
5. $\begin{cases} x'=-x+y+z \\ y'=x-y+z \\ z'=x+y-z \end{cases} \qquad x(0)= \ y(0)=2, \ z(0)=-1.$
6. $y'+\int_0^t y(\tau)d\tau = \cos t, \quad y(0)=0.$

Вариант 6

1. $f(t) = \sin^2 3 - cos^2 5t.$
2. $f(t) = e^{7t}(10t^4 + 5\sin^2 8t).$
3. $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2 + 2p + 10}.$
4. $y'' + y' = 2e^x,\ y(0) = y'(0) = 0.$
5. $x'' + x' - 2x = 6t^2 \quad x(0) = 1,\ x'(0) = 0.$
6. $y' - 3\int_0^t y(\tau)d\tau + 2y = 1,\quad y(0) = 0.$

Вариант 7

1. $f(t) = \sin 12t \sin 2t.$
2. $f(t) = e^{-9t}\cos^2 3t.$
3. $F(p) = \dfrac{p}{p^4 - 5p^2 + 4}.$
4. $x'' - 2x' - 8x = t^3,\ x(0) = x'(0) = 0.$
5. $y'' + 2y' + 5y = x\ ,\quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$
6. $y' + 8\int_0^t y(\tau)d\tau - 9y = 1,\quad y(0) = 0.$

Вариант 8

1. $f(t) = e^{-3t}(7\cos^2 t + \cos 3t).$
2. $f(t) = e^{-6t}\sin^2 4t.$
3. $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 4p + 3}.$
4. $x'' - 2x' - 3x = \cos 4t,\ x(0) = x'(0) = 0.$
5. $\begin{cases} x'' - y' = 0 & x(0) = y'(0) = 0 \\ x' - y'' = 2\cos t & x'(0) = y(0) = 2 \end{cases}.$
6. $y' + 3\int_0^t y(\tau)d\tau = 9t,\quad y(0) = 0.$

Вариант 9

1. $f(t) = \cos 11t \cos t - 4t^2.$
2. $f(t) = 12t^4 - 2\sin^2 + e^{8t}\cos t.$
3. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-3)}.$
4. $x'' + 4x' + \# x = e^{-2t},\ x(0) = x'(0) = 0.$

5. $\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = 2x + y + 1 \end{cases}$ $\quad x(0) = 0,\; y(0) = 5.$

6. $2y' + \int_0^t y(\tau)d\tau = 1,\;\; y(0) = 0.$

Вариант 10

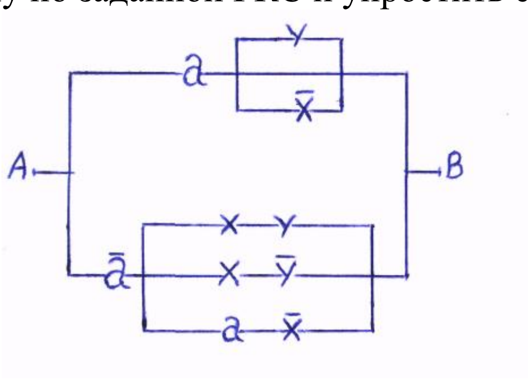
1. $f(t) = \sin^2 5t\cos 3t.$
2. $f(t) = e^{-3t}(2t^3 + 4\sin^2 2t - \cos 4t).$
3. $F(p) = \dfrac{3p+1}{p^2 - 3p + 2}.$
4. $x'' + 7x' + 12x = t^4,\; x(0) = x'(0) = 0.$
5. $\begin{cases} x' = y - z \\ y' = x + y \\ z' = x + y \end{cases}$ $\quad x(0) = 1,\; y(0) = 2,\; z(0) = 3.$
6. $y' + 9\int_0^t y(\tau)d\tau = \cos 3t,\;\; y(0) = 0.$

6. КОНТРОЛИРУЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ» (ЗАОЧНАЯ ФОРМА ОБУЧЕНИЯ)

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. $f(t) = t\sin^2 t.$
2. $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 2p + 5}.$
3. $x'' - 3x' + 2x = e^{3t},\; x(0) = x'(0) = 0.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

$xyz \vee \bar{x}y\bar{z} \leftrightarrow x \vee y \vee z.$

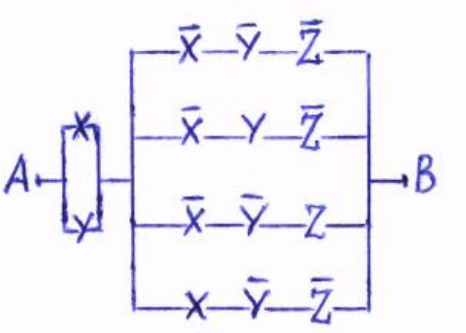
6. Построить РКС

$(x \to \overline{yz})(y \to \overline{xz}) \vee x \vee \bar{y}.$

Вариант 2

1. $f(t) = \sin 3t \cos^2 t.$
2. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)^3 (p+2)^2}.$
3. $x'' - 4x' + 3x = \sin 2t,\ x(0) = x'(0) = 0.$

4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

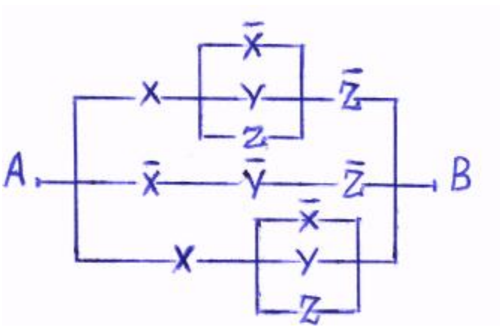
$(x \to y) \leftrightarrow \overline{(y \to z)}.$

6. Построить РКС

$(xy \vee \bar{x}y \vee xz) \to \overline{xy}.$

Вариант 3

1. $f(t) = \sin^2 6t \cos t.$
2. $F(p) = \dfrac{2p}{p^2 + 4p}.$
3. $x'' - x' - 2x = \sin 2t,\ x(0) = 2,\ x'(0) = 0,\ x''(0) = 1.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

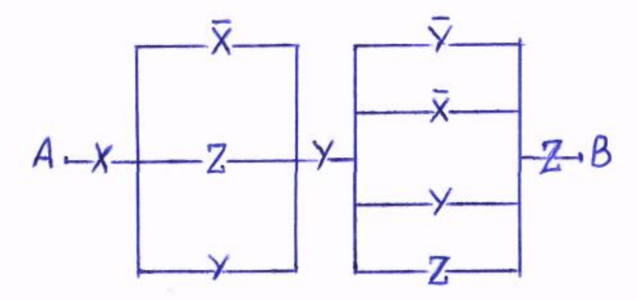
$(x \vee y)(x \vee \bar{y}) \vee x\bar{y} \vee \overline{xy}.$

6. Построить РКС

$(\overline{xy \to \bar{x}})(\overline{xy} \to x)(xz \to \bar{z})$.

Вариант 4

1. $f(t) = e^{3t} \sin^2 7t.$
2. $F(p) = \dfrac{p+1}{(p-1)(p^2-4)}.$
3. $y'' - 3y' + 2y = e^x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

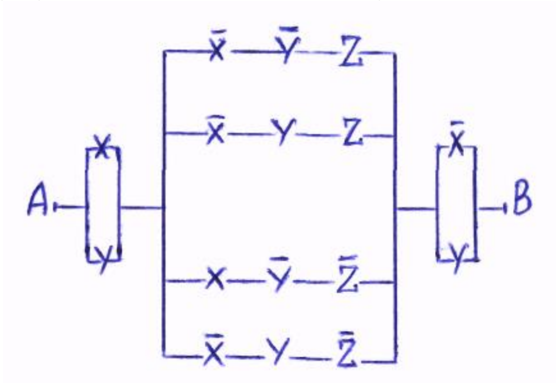
$(x \vee yz \vee \bar{x}z) \leftrightarrow (\bar{x} \vee xz \vee \bar{z}).$

6. Построить РКС

$(x \to y) \to (\bar{x}(y \vee z)) \wedge xy \wedge x\bar{z}.$

Вариант 5

1. $f(t) = 4t^5 + 2\sin^2 4t + \cos 6t.$
2. $F(p) = \dfrac{p}{p^5 - 5p^3 + 4p}.$
3. $y'' - 2y' = e^{-x},\ x(0) = 0,\ x'(0) = 1,\ x''(0) = 2.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

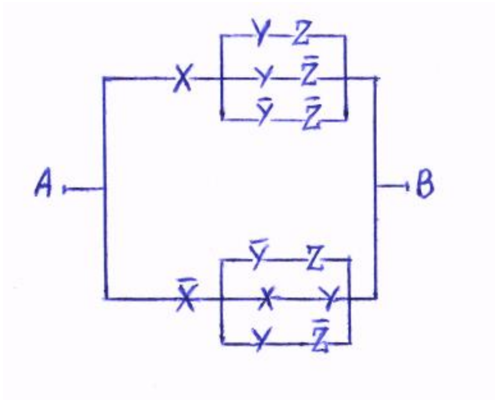
$(\overline{\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}}) \leftrightarrow (xy \vee xz).$

6. Построить РКС

$(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

Вариант 6

1. $f(t) = \sin^2 3 - cos^2 5t$.
2. $F(p) = \dfrac{p+3}{p^2 + 2p + 10}$.
3. $y'' + y' = 2e^x$, $y(0) = y'(0) = 0$.
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

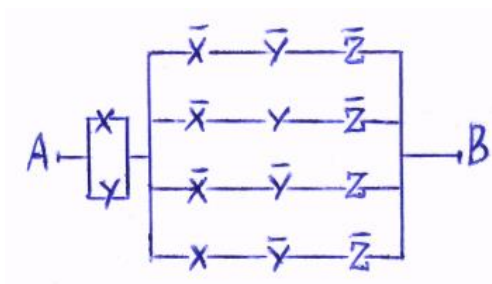
$(\overline{x \vee y} \to \bar{x} \vee y) \wedge y \vee \bar{x}y)$.

6. Построить РКС

$(ab \to \bar{c}) \to (\overline{\bar{b} \to \bar{a}}) \wedge ba \wedge ac$.

Вариант 7

1. $f(t) = \sin 12t \sin 2t$.
2. $F(p) = \dfrac{p}{p^4 - 5p^2 + 4}$.
3. $x'' - 2x' - 8x = t^3$, $x(0) = x'(0) = 0$.
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

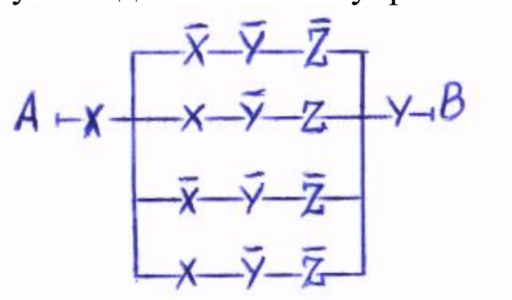
$(x \to y) \leftrightarrow (\overline{y \to z})$.

6. Построить РКС

$(xy \vee \bar{x}y \vee xz \vee \overline{yz}) \to \overline{xy}.$

Вариант 8

1. $f(t) = e^{-3t}(7\cos^2 t + \cos 3t).$
2. $F(p) = \dfrac{p}{p^2 - 4p + 3}.$
3. $x'' - 2x' - 3x = \cos 4t,\ x(0) = x'(0) = 0.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

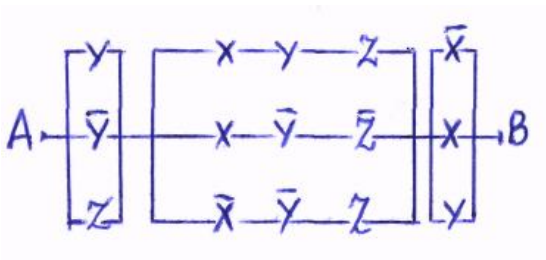
$(x \vee y \vee \bar{x}) \leftrightarrow (xy \vee yz \vee xz).$

6. Построить РКС

$(x \vee y)(\bar{x} \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z}) \to (\bar{x} \vee y).$

Вариант 9

1. $f(t) = \cos 11t \cos t - 4t^2.$
2. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-3)}.$
3. $x'' + 4x' + 3x = e^{-2t},\ x(0) = x'(0) = 0.$
4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

$(xyz \to \bar{x}y\bar{z}) \leftrightarrow (x \vee y \vee z).$

6. Построить РКС

$(x \to y)(y \to \bar{z}) \to (z \to \bar{x}).$

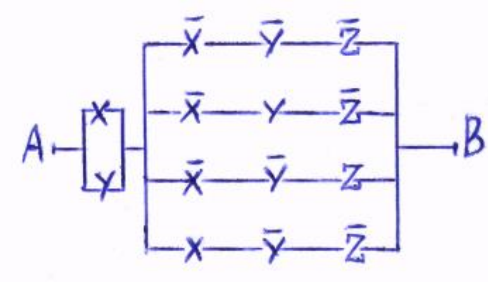
Вариант 10

1. $f(t) = \sin^2 5t \cos 3t.$

2. $F(p) = \dfrac{3p+1}{p^2 - 3p + 2}.$

3. $x'' + 7x' + 12x = t^4,\ x(0) = x'(0) = 0.$

4. Составить формулу по заданной РКС и упростить ее.



5. Составить таблицу истинности

$\overline{(\bar{x} \vee yx \vee \bar{z}} \leftrightarrow (xy \vee xz).$

6. Построить РКС

$(x \to (y \to z)) \to (\bar{y} \to x).$

Кулешова Ирина Ивановна

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ЭНЕРГЕТИКИ

Учебное пособие для студентов направления
«Электроэнергетика и электротехника» всех форм обучения»

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 30.11.15. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 4,56. Тираж 95 экз. Зак. 151514. Рег. № 144.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.