МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

О.В. ЕФРЕМЕНКОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Информационные системы и программирование»
на базе 11 классов

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению подготовки «ИВТ»

Рубцовск 2022

Ефременкова О.В. Элементы высшей математики: Методическое пособие для студентов очной формы обучения направления «Информационные системы и программирование» / Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2022 - 95 с.

В методическом пособии изложен теоретический материал, в котором приведены примеры решения задач, представлены контрольные работы по курсу «Элементы высшей математики».

Рассмотрено и одобрено на заседании НМС Рубцовского индустриального института
Протокол № 8 от 22.12.2022 г.

Рецензент:
канд. техн. наук, доцент Н.А. Чернецкая

СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.МАТРИЦЫ.СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ 4
УРАВНЕНИЙ. 15

1.1 Варианты заданий для самостоятельной работы

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 30

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ 48

2.1 Варианты заданий для самостоятельной работы 52

3. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ 63

3.1 Варианты заданий для самостоятельной работы 68

ЭЛЕМЕНТЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ 75

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

4.1 Варианты заданий для самостоятельной работы 86

5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ 94

5.1 Варианты заданий для самостоятельной работы.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ….

1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Определение. Определителем (детерминантом) n-го порядка называется число, записываемое в виде:

$$\Delta = \left| a_{ik} \right| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

и вычисляемое по данным числам a_{ij} (действительным), (которые называются элементами определителя) по следующему закону: $\Delta = \sum\limits_{j} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$, где Δ- есть сумма членов определителя, распространенная на всевозможные различные перестановки $j = (j_1, \dots, j_n)$ из чисел *1, 2, …, n*. Элемент a_{ik} находится на пересечении i – строки и k – столбца. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ, $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ - побочную диагональ.

Рассмотрим определитель третьего порядка, где 3 строки и 3 столбца.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j} (-1)^{t(j)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n},$$

где $j = (j_1, j_2, j_3)$ - всевозможные перестановки основной перестановки 1, 2, 3.

Четные $(1\ 2\ 3)$, $(2\ 3\ 1)$, $(3\ 1\ 2)$, для которых $(-1)^{t(j)} = 1$, нечетные $(3\ 2\ 1)$, $(2\ 1\ 3)$, $(1\ 3\ 2)$, при этом $(-1)^{t(j)} = -1$.

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{22} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

А теперь то, что мы получим, исходя из определения определителя, покажем на самом определителе (соединим черточками элементы в произведениях), тем самым получим правило, по которому можно вычислять определители 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

«+» «-»

Так называемое правило «звездочки», или правило «треугольников». То же самое получим, если к определению дописать первые два столбца, складывая произведения элементов, перемноженные по главной диагонали и параллельно ей, затем вычитая произведения элементов, стоящих по побочной диагонали и параллельно ей.

$$\begin{array}{ccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & -+ & + & +
\end{array}$$

Например, вычислить определитель:

$$\left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{array} = -6 + 0 - 15 - 20 - 4 = -45.$$

Рассмотрим определитель 2-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Пример. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$

Свойства определителей

1) Величина определителя не меняется, если в определителе все строки заменить соответствующими столбцами (1-ю строку на 1-й столбец и т.д.).

2) При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный.

3) Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

4) Общий множитель всех элементов строки (столбца) можно выносить за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

5) Если соответствующие элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен 0. Это свойство следует из свойств 3 и 4.

6) Если каждый элемент какой-либо строки (столбца) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, где в 1-м определителе этой строки (столбца) только первые слагаемые, остальные все без изменений, а во втором определителе в той же строке (столбце) только вторые слагаемые, все остальные без изменений.

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & a_{22} & a_{23} \\ b_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7) Если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.

Это свойство является следствием 3, 4 и 6 свойств.

8) Определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

О п р е д е л е н и е . Минором элемента a_{ik} определителя n-го порядка называется определитель *(n-1),* полученный вычеркиванием той строки и того столбца, на пересечении которых находится данный элемент (i-строка, k-столбец). Обозначается M_{ik}. Величина $A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}$ называется алгебраическим дополнением к элементу a_{ik}.

Дополнения к 8-му свойству.

Сумма произведений элементов какой-либо строки (или столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна 0.

Пример 1.1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 351.$$

Вычислить определитель четвертого порядка и выше можно, только используя 8-е свойство определителей.

Пример 1.2.

Для вычисления данного определителя преобразуем его, пользуясь свойствами определителей. Из первой строки вычтем соответствующие элементы третьей строки. Затем разложим его по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)3\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -117.$$

МАТРИЦЫ И ИХ СВОЙСТВА

Определение матрицы

При изучении определителей мы рассматривали таблицы, составленные из чисел: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Эти таблицы называются матрицами, а числа $a_{11}, a_{12} ..., a_{ij}$ - элементами матрицы. Если в матрице количество строк совпадает с количеством столбцов, то такую матрицу называют квадратной, причем число ее строк и столбцов называется порядком матрицы. Матрица, в которой число строк не совпадает с числом столбцов, называется прямоугольной. Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$.

Рассмотрим матрицы, имеющие только одну строку или столбец. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \end{pmatrix}$ называется матрицей - строкой. Матрица $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ называется матрицей – столбцом.

Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется определителем матрицы.

Для краткости будем обозначать какой-либо буквой алфавита: *A, B* и т.д., а определитель |*A*|=det *A*. Если определитель квадратной матрицы отличен от нуля, то матрица называется невырожденной, а если равен нулю, то вырожденной. Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, |A| = 0$, значит, *A* – вырожденная матрица, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, |B| = 38$, значит, *B* – невырожденная матрица.

2.2. Равенство матриц. Действия над ними

Две матрицы *A* и *B* называются равными (*A*=*B*), если они имеют одинаковое число строк или одинаковое число столбцов и их соответствующие элементы равны. Так, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то A=B, если $a_{11} = b_{11},\ a_{12} = b_{12},\ a_{21} = b_{21},\ a_{22} = b_{22}$.

Сложение матриц. Если даны две квадратные матрицы одного порядка, например $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то их суммой называется матрица $C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$.

Аналогично определяется сумма прямоугольных матриц, имеющих одинаковое число строк и столбцов. Легко проверить, что сумма матриц подчиняется переместительному и сочетательному закону: $A+B=B+A$, $A+(B+C)=(A+B)+C$.

Умножение матриц на число. Произведением матрицы A на число μ называется матрица $\mu A=A\mu$:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \ \mu A=\begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} \end{pmatrix}.$$

Точно так же умножаются на число все остальные матрицы.

Произведение матриц. Рассмотрим умножение матриц на примере двух квадратных матриц A и B.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

По определению произведением матрицы A на матрицу B называется матрица $C=AB$, элементы которой составлены следующим образом:

$$C=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Как мы видим, элемент матрицы–произведения, находящейся на пересечении i-й строки и j-го столбца, представляет собой сумму парных произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующий элемент j-го столбца второй матрицы. Эти правила сохраняются и для перемножения прямоугольных матриц, в которых число столбцов матрицы-множимого равно числу строк матрицы множителя.

Пример 2.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot1 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

В результате умножения двух матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько имеет матрица-множимое, и столько столбцов, сколько их имеет матрица-множитель.

Пример 2.2.

$$AB=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot1-1\cdot3 & 3\cdot1-1\cdot1 \\ -1\cdot1+2\cdot3 & -1\cdot1+2\cdot1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$BA=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1\\8&-1\end{pmatrix}.$$

Этот пример показывает, что произведение двух матриц не подчиняется переместительному закону $AB\neq BA$. Легко проверить, что умножение матриц подчиняется сочетательному и распределительному законам: $A(BC)=(AB)C$, $(A+B)C=AC+BC$. Рассмотрим матрицу E.

Матрица $E=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&.&0\\0&0&1&0\\0&.&.&1\end{pmatrix}$ называется единичной.

Для единичной матрицы выполняется переместительный закон умножения. Если матрица E квадратная, то $|E|=1$.

Если A и B - две квадратные матрицы одного порядка, то определитель матрицы $C=AB$ равен произведению матриц A и B.

$|C|=|A||B|$.

Пример 2.3.

$A=\begin{pmatrix}3&-1\\-1&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\3&1\end{pmatrix}$, $C=AB=\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}$,

$|A|=5$, $|B|=-2$, $|C|=-10$, $-10=5\cdot(-2)$.

Пример 2.4. Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если

$f(x)=3x^2-x+7$, $\quad A=\begin{pmatrix}2&-1\\7&5\end{pmatrix}$.

$f(A)=3A^2-A+7\cdot E$, $\quad E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1\\7&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\7&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot2-1\cdot7&2\cdot(-1)-1\cdot5\\7\cdot2+5\cdot7&7\cdot(-1)+5\cdot5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&-7\\49&18\end{pmatrix};$$

$$3A^2=3\cdot\begin{pmatrix}-3&-7\\49&18\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9&-21\\147&54\end{pmatrix}.$$

$$f(A)=\begin{pmatrix}-9&-21\\147&54\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&-1\\7&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&0\\0&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9-2+7&-21+1+0\\147-7+0&54-5+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-20\\140&56\end{pmatrix}.$$

Обратная матрица

О п р е д е л е н и е : если A – квадратная матрица, то обратной для нее называется матрица, обозначаемая A^{-1} и удовлетворяющая условию $A\cdot A^{-1}=E$ или $A^{-1}\cdot A=E$.

Теорема (без доказательства). Для того, чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т.е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.

Для составления матрицы A^{-1} находим алгебраические дополнения A_{ij} ко всем элементам a_{ij} матрицы A.

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_{11}/|A| & A_{21}/|A| & A_{31}/|A| \\ A_{12}/|A| & A_{22}/|A| & A_{32}/|A| \\ A_{13}/|A| & A_{23}/|A| & A_{33}/|A| \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Пример 2.4. Найти A^{-1} к матрице A. Вычислим определитель матрицы и найдем алгебраические дополнения ко всем элементам:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, |A|=-9.$$

$$\begin{aligned} &A_{11}=3, A_{21}=-4, A_{31}=2, \\ &A_{12}=-6, A_{22}=2, A_{32}=-1, \\ &A_{13}=3, A_{23}=-1, A_{33}=-4, \end{aligned} \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

Проверка: по определению обратной матрицы $A\cdot A^{-1}=E$.

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1/3 & 4/9 & -2/9 \\ 2/3 & -2/9 & 1/9 \\ -1/3 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -1/3+4/3+0 & 4/9-4/9+0 & -2/9+2/9+0 \\ -1+4/3-1/3 & 4/3-4/9+1/9 & -2/3+2/9+4/9 \\ 0+2/3-2/3 & 0-2/9+2/9 & 0+1/9+8/9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системы линейных уравнений

Рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=C_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=C_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=C_m. \end{cases} \qquad (3.1.1)$$

В коэффициенте a_{ik} первый индекс означает номер уравнения, а второй – номер неизвестного $x_{11}x_{21}\dots$.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет решение, и несовместной, если не имеет решения. Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений.

Метод Крамера

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = C_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = C_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = C_3. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

Составим определитель из коэффициентов при неизвестных:

$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - будем называть его определителем системы.

Рассмотрим

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} C_1 & a_{12} & a_{13} \\ C_2 & a_{22} & a_{23} \\ C_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = C_1A_{11} + C_2A_{21} + C_3A_{31},\ x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1} \Rightarrow x_1 = \Delta_{x_1} / \Delta.$$

Аналогично получим для x_2 и x_3:

$x_2 = \Delta_{x_2} / \Delta,\ x_3 = \Delta_{x_3} / \Delta$ - формулы Крамера, где

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{12} & C_1 & a_{13} \\ a_{21} & C_2 & a_{23} \\ a_{31} & C_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & C_1 \\ a_{21} & a_{22} & C_2 \\ a_{31} & a_{32} & C_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$ и по крайней мере один из $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3} \neq 0$, то система (3.2.1) не имеет решения, т.е. несовместна. Действительно, пусть для примера $\Delta_{x_1} \neq 0$.

$x_1 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, т.к. $\Delta = 0$, то $x_2 \cdot \Delta = \Delta_{x_1}$, невозможно, т.к. $\Delta_{x_1} \neq 0$.

Если $\Delta = 0$ и $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система либо имеет множество решений, либо несовместна.

Пример 3.1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + \qquad 4x_3 = 2, \\ 7x_1 - x_2 + 5x_3 = 5. \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

Составляем определитель системы линейного уравнений. Он состоит из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot 5 + 2\cdot 4\cdot 7 + 2\cdot(-1)(-1) - 7\cdot 0\cdot(-1) - 2\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot(-1) =$$

$= 0 + 56 + 2 - 0 - 20 + 4 = 42 \neq 0$.

Составляем Δx_1, меняя в определителе системы Δ первый столбец на столбец из свободных коэффициентов, остальные оставляем без изменения:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 40 + 2 - 0 - 20 + 20 = 42$$

Для Δx_2 меняем второй столбец на столбец из свободных коэффициентов, остальные – без изменения:

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 7 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 140 - 10 + 14 - 50 - 20 = 84.$$

В определителе Δ, меняя третий столбец на столбец из свободных коэффициентов, получаем Δx_3.

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 + 28 - 10 - 0 - 20 + 2 = 0$$

По формулам Крамера находим:

$x_1 = \dfrac{\Delta x_1}{\Delta} = \dfrac{42}{42} = 1$; $\qquad x_2 = \dfrac{\Delta x_2}{\Delta} = \dfrac{84}{42} = 2$; $\qquad x_3 = \dfrac{\Delta x_3}{\Delta} = \dfrac{0}{42} = 0$.

Проверка: $\begin{cases} 1 + 2\cdot 2 - 0 = 5, \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 0 = 2, \\ 7\cdot 1 - 2 + 5\cdot 0 = 5 \end{cases}$ верно.

Ответ: $(1,\ 2,\ 0)$.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система уравнений (3.2). Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ - матрицу системы и $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ - матрицу-столбец из неизвестных, $C=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$ - матрицу-столбец из свободных членов. Найдем произведение матриц *A* и *X*.

$$A\cdot X=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{bmatrix}.$$

Используя определения равенства матриц, систему линейных уравнений (3.2.1) можно записать в таком виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

или короче

$$A\cdot X=C \tag{3.3.1}$$

- матричное уравнение.

Если A – невырождена, т.е. $|A|\neq 0$, то уравнение (3.3.1) решается следующим образом: $A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot C$, где A^{-1} - обратная матрица к матрице *A*. Пользуясь сочетательным законом для перемножения матриц, получаем: $(A^{1}\cdot A)\cdot X=A^{-1}\cdot C, E\cdot X=A^{-1}\cdot C, X=A^{-1}\cdot C$ - решение матричного уравнения.

Пример 3.2. Записать систему из примера 3.1 в матричной форме и решить её средством матричного исчисления. Проверить правильность вычисления обратной матрицы, используя матричное умножение.

Матрицу системы (3.2.1) A составляем из коэффициентов при неизвестных.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 7 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad |A|=\Delta=42.$$

Матрица X – матрица-столбец из неизвестных $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, Матрица B – матрица-столбец из свободных коэффициентов $B = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Тогда система линейных уравнений в матричной форме имеет вид:

$$A \cdot X = B. \qquad (3.3.2)$$

Чтобы найти X, умножаем обе части уравнения (3.3.2) слева на A^{-1}, обратную к A матрицу.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B;$$

т.к. $A^{-1} \cdot A = E$, то $X = A^{-1} \cdot B$. Т.о., чтобы найти X, надо составить обратную к A матрицу A^{-1}, а затем умножить ее на матрицу B.

Чтобы составить A^{-1}, найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A, используя определение алгебраического дополнения к элементам $a_{ij} - A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} - минор, полученный из A вычеркиванием i – строки и j – столбца.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 0 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 = 4.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 4 \cdot 7) = 18.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 7 = -2.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 1) = -9.$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 7 = 12.$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 - 14) = 15.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5 = 8.$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -(4 + 2) = -6.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4.$$

Составим $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{42} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & 8 \\ 18 & 12 & -6 \\ -2 & 15 & -4 \end{pmatrix}$.

Проверим правильность нахождения A^{-1}, используя определение обратной матрицы: $A^{-1}\cdot A=E$.

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{42}\cdot\begin{pmatrix}4 & -9 & 8\\ 18 & 12 & -6\\ -2 & 15 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 0 & 4\\ 7 & -1 & 5\end{pmatrix}=\frac{1}{42}\cdot\begin{pmatrix}42 & 0 & 0\\ 0 & 42 & 0\\ 0 & 0 & 42\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Найдем $X=A^{-1}\cdot B=\dfrac{1}{42}\begin{pmatrix}4 & -9 & 8\\ 18 & 12 & -6\\ -2 & 15 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ 2\\ 5\end{pmatrix}=$

1.1 Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}12 & 0 & 0\\ -6 & 3 & 1\\ 5 & 11 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}15 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ -2 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

2. Решить систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}3x_1+5x_2+x_3=9,\\ x_1+2x_2+2x_3=5,\\ 3x_1+4x_2-5x_3=2.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x_1+6x_2+3x_3=11,\\ 2x_1+x_2-5x_3=-2,\\ x_1-x_2-3x_3=-3.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1-5x_2-x_3-2x_4=0,\\ 8x_1-6x_2+3x_3-7x_4=0,\\ 2x_1+4x_2+5x_3-3x_4=0.\end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=4x^2+2x+2$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 4 & 5 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & -5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 0 & 6\\ 1 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Вариант 2.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}10 & 2 & 4\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & -5 & 8\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 3 & 7\\ 12 & 15 & -6\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}x_1+x_2=3,\\ x_1+2x_2-x_3=3,\\ 2x_1+3x_2=7.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=4,\\ -x_1+x_2-6x_3=-5,\\ x_1+3x_2-x_3=10.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-x_3-9x_4=0,\\ 5x_1-3x_2+4x_3-3x_4=0,\\ x_1+7x_2-6x_3-15x_4=0.\end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=2x^3+x-5$, если $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Вариант 3.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}21 & 0 & 3\\ 5 & -6 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-3 & 5 & 5\\ 6 & 2 & 10\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}4x_1+3x_2-7x_3=8,\\ x_1+x_2+x_3=5,\\ 4x_1+3x_2-8x_3=7.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3=16,\\ 3x_1-x_2-3x_3=4,\\ -x_1+x_2+2x_3=1.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 10x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 7x_3 - 20x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = x^2 + 5x + 2$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 4.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 12 & 7 & -2 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 7 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 13. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 15x_4 = 0, \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 4x^2 + x - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 8 \\ -7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 5.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 11 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ -7 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 11, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 17, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 25. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 25, \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 31. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 - 3x_2 - 7x_3 - 18x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 - 5x_3 - 12x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6.

1. Вычислить определители $|A + B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 5 & 13 & 21 \\ 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & -5 \\ 5 & 10 & 15 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 22, \\ 5x_1 + 3x_2 - x_3 = 32. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11, \\ -x_1 + x_2 - 6x_3 = -14, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 7x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 2x^2 + x - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -5 \\ 6 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ 2x_1 \quad - 3x_3 = 15, \\ x_1 - 5x_2 = -6. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 0, \\ 3x_2 - 7x_3 - 10x_4 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 - 8x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного уравнения $f(x) = x^2 + 3x - 2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}3&0&10\\1&0&11\\2&6&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&7&-2\\4&0&0\\10&3&-1\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3x_3=16,\\x_1+2x_2-2x_3=9,\\x_1+2x_2-3x_3=8.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}6x_1+3x_2-3x_3=6,\\2x_1+7x_2+x_3=22,\\3x_1-x_2-x_3=0.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1-2x_2+3x_3+x_4=0,\\5x_1-2x_2+4x_3-4x_4=0,\\x_1+2x_2-2x_3-6x_4=0.\end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=4x^2+2x-3$, если $A=\begin{pmatrix}2&-7\\1&-3\end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix}1&-1\\4&5\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}.$$

Вариант 9.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}2&10&-1\\5&0&3\\1&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3&-2&5\\6&0&0\\7&-5&1\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2=21,\\x_1+3x_3=13,\\5x_2-x_3=4.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}2x_1+x_2+5x_3=2,\\-x_1-x_2+3x_3=-8,\\x_1+4x_2+x_3=13.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+8x_3+4x_4=0, \\ -x_1+2x_2-2x_3-2x_4=0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=x^3+x+2$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 10.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 \\ 3 & 8 & 10 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 12 \\ 0 & 4 & 0 \\ 6 & 11 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1-x_2-x_3=-3, \\ x_1+4x_2+2x_3=15, \\ 3x_1+6x_2+3x_3=24. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 6x_1+x_2-x_3=7, \\ 3x_1+x_2+3x_3=8, \\ 6x_1-x_2-3x_3=1. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+5x_3+4x_4=0, \\ -2x_1+x_2+3x_3+6x_4=0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=4x^2+7x-1$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 11.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}12 & 3 & 3\\ 0 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}10 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 5\\ -2 & 4 & 0\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}x_1-2x_2 \qquad =-3,\\ \qquad x_2+3x_3=6,\\ 5x_1- \qquad x_3=9.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}-3x_1-2x_2-3x_3=-7,\\ x_1+5x_2+6x_3=6,\\ 3x_1+7x_2-x_3=21.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}3x_1-8x_2-7x_3-x_4=0,\\ -x_1+7x_2-5x_3-1{,}5x_4=0,\\ x_1+6x_2-3x_3+5x_4=0.\end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=7x^2+x+2$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 5 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

6. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}7 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}.$$

Вариант 12.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}6 & -7 & 5\\ 3 & 0 & 0\\ 1 & 10 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2 & 7 & -4\\ 0 & 6 & 5\\ 0 & -3 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+ \qquad 5x_3 \quad =11,\\ x_1+3x_2+6x_3=18,\\ \quad -x_2+2x_3=-1.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 19, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 - 7x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 3x^2 - x + 5$, если $A = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 13.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -7 \\ 5 & 0 & 0 \\ 7 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 7 & 9 & -8 \\ 5 & 21 & 10 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_2 + 5x_3 = 11. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 9, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 = 26, \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 = -18. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 8x_2 - 6x_3 - 2x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 2x^2 + 7x - 6$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вариант 14.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = x^2 + x + 6$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 15.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 10 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 16. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 14. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 25x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = x^2 + x + 6$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 6 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вариант 16.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -5 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 14, \\ 2x_1 - x_3 = 15, \\ x_1 - 5x_2 = -6. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 11. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 7x^2 + x - 2$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & -7 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вариант 17.

1. Вычислить определители $|A + B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 18, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -20, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 12x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 4x^2 + 5x - 6$, если $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вариант 18.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 6 & 6 & 6\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 10 & 5 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1,\\ x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1-x_2+3x_3=7.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases}-x_1-2x_2-3x_3=-17,\\ 2x_1+4x_2-2x_3=2,\\ 3x_1+4x_2+2x_3=19.\end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases}2x_1+x_2-4x_3+2x_4=0,\\ 4x_1-9x_2+2x_3+4x_4=0,\\ -x_1+5x_2-3x_3-x_4=0.\end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x)=x^2+4x+5$, если $A=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 6 & -1\end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix}4 & 5 & -1\\ 0 & 6 & 8\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Вариант 19.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A\cdot B|$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 8 & -3 & 5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-7 & 1 & 1\\ 0 & 5 & 4\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases}4x_1+3x_2-7x_3=8,\\ x_1+x_2+x_3=5,\\ 4x_1+3x_2-8x_3=7.\end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 2, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 = 13. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 2x^3 + x^2 - 1$, если $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 20.

1. Вычислить определители $|A+B|$, $|A \cdot B|$, если

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 12 \\ 7 & 0 & 14 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Решить системы уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 20, \\ 2x_1 + 7x_2 - 8x_3 = 5, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

3. Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

4. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

5. Найти значение матричного многочлена $f(x) = 2x^3 + x - 2$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

6. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Производной функции $y=f(x)$ *в точке* x_0 *называется предел отношения приращения функции* Δy *в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента* Δx *при произвольном стремлении* Δx *к нулю.*

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается символом $f'(x_0)$.

Итак, по определению,

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1.1}$$

или

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.2}$$

1.1. Основные правила дифференцирования

Основные правила дифференцирования сформулируем в следующих теоремах.

Т е о р е м а 1. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируема и их сумма, причем производная суммы равна сумме производных слагаемых:*

$$(u+v)'=u'+v'. \tag{1.3}$$

Пример 1. Найти производную функции $y=x^3+\sin x+\ln x$.

Решение. Применяя сначала правило дифференцирования суммы, а затем формулы из сводной таблицы формул дифференцирования, получим

$$y'=\left(x^3+\sin x+\ln x\right)'=\left(x^3\right)'+(\sin x)'+(\ln x)'=3x^2+\cos x+\frac{1}{x}.$$

Т е о р е м а 2. *Если функции* $u=u(x)$ *и* $v=v(x)$ *дифференцируемы в данной точке x, то в той же точке дифференцируемо и их произведение. При этом производная произведения находится по следующей формуле:*

$$(uv)'=u'v+uv'. \tag{1.23}$$

С л е д с т в и е. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной:*

$$(cu)'=cu'. \tag{1.24}$$

Пример 2. Найти производную функции $y=e^x\cos x$.

Решение. По формуле (1.23) и формулам из сводной таблицы производных получим

$$y'=\left(e^x\cos x\right)'=\left(e^x\right)'\cdot\cos x+e^x(\cos x)'=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x).$$

Пример 3. Найти производную многочлена $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$.

Решение.

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 5x + 2\right)' = \left(x^3\right)' + \left(-3x^2\right)' + (5x)' + (2)' =$$

$$= 3x^2 - 3\left(x^2\right)' + 5(x)' + 0 = 3x^2 - 3\cdot 2x + 5\cdot 1 = 3x^2 - 6x + 5.$$

З а м е ч а н и е. Формулу (1.23) можно обобщить на случай любого конечного числа *n* сомножителей. Если, например, *n*=3, то

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'. \tag{1.6}$$

В самом деле,

$$(uvw)' = \left[(uv)w\right]' = (uv)'w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'.$$

Т е о р е м а 3. *Если в данной точке x функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *дифференцируемы и* $v \neq 0$, *то в той же точке дифференцируемо и их частное* u/v, *причем*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \tag{1.7}$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 + 1}{\sin x}$.

$$y' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\sin x - (\sin x)'\cdot\left(x^2+1\right)}{\sin^2 x} = \frac{2x\sin x - \cos x\left(x^2+1\right)}{\sin^2 x}.$$

Производная сложной функции

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда *y* есть сложная функция *x*: $y = f\left[\varphi(x)\right]$, а переменная *u* – промежуточный аргумент.

Как найти производную сложной функции y'_x, зная производную y'_u и производную промежуточного аргумента u'_x? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Т е о р е м а 4. *Если функция* $u = \varphi(x)$ имеет производную u'_x *в точке x, а функция* $y = f(u)$ имеет производную y'_u *в соответствующей точке u, то сложная функция* $y = f\left[\varphi(x)\right]$ в данной точке x имеет производную y'_x, которая находится по следующей формуле:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x. \tag{1.8}$$

Часто пользуются менее точной, но более короткой формулировкой этой теоремы: *производная сложной функции равна произведению производной данной функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента.*

Пример 5. Найти производную функции $y = \sin x^3$.

Решение. Данная функция – сложная. Введя обозначение $u = x^3$, получим $y = \sin u$. По формуле (1.8) находим

$$y'_x = (\sin u)'_u \cdot \left(x^3\right)'_x = \cos u \cdot 3x^2,$$

Или, поскольку $u = x^3$,

$$y'_x = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3 .$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \ln arctgx^2$.

Решение. Для данной функции последним действием является взятие натурального логарифма. Это действие совершается над функцией $arctgx^2$. Поэтому принимаем за промежуточный аргумент $u = arctgx^2$. Тогда $y = \ln u$. Найдем производную y' по формуле (1.8):

$$y'_x = (\ln u)'_u \cdot \left(arctgx^2\right)'_x = \frac{1}{u}\left(arctgx^2\right)'_x = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \left(arctgx^2\right)'_x .$$

Дифференцирование не закончено, так как не найдена производная функции $arctgx^2$. Эта функция также сложная, и последним действием для нее является нахождение арктангенса от x^2. Поэтому, применяя повторно формулу (1.8) и полагая в ней уже $u = x^2$, получим

$$\left(arctgx^2\right)'_x = \left(arctgu^2\right)'_u \cdot \left(x^2\right)'_x = \frac{1}{1+u^2} \cdot 2x = \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4} .$$

Окончательно имеем

$$y' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) \cdot arctgx^2} .$$

При достаточном навыке буква u для обозначения промежуточного аргумента не вводится. Вот как, например, могут быть найдены производные только что рассмотренных сложных функций:

$$\left(\sin x^3\right)' = \cos x^3 \cdot \left(x^3\right)' = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3 .$$

Аналогично

$$\left(\ln\ arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2}\left(arctgx^2\right)' = \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+\left(x^2\right)^2} \cdot \left(x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{arctgx^2} \cdot \frac{1}{1+x^4} \cdot 2x = \frac{2x}{\left(1+x^4\right) arctgx^2} .$$

Сводная таблица формул дифференцирования

I. $y=C;\ y'=0$.	VIII. $y=ctgx;\ y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
II. $y=x^n;\ y'=nx^{n-1}$.	IX. $y=\arcsin x;\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III. $y=a^x;\ y'=a^x\ln a$.	X. $y=\arccos x;\ y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
III'. $y=e^x;\ y'=e^x$.	XI. $y=arctgx;\ y'=\dfrac{1}{1+x^2}$.
IV. $y=\log_a x;\ y'=\dfrac{1}{x\ln a}$.	XII. $y=arcctgx;\ y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.
IV'. $y=\ln x;\ y'=\dfrac{1}{x}$.	XIII. $y=shx;\ y'=chx$.
V. $y=\sin x;\ y'=\cos x$.	XIV. $y=chx;\ y'=shx$.
VI. $y=\cos x;\ y'=-\sin x$.	XV. $y=thx;\ y'=\dfrac{1}{ch^2x}$.
VII. $y=tgx;\ y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.	XVI. $y=cthx;\ y'=-\dfrac{1}{sh^2x}$.

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Предположим, что функция y от x задана параметрически уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t),\\ y&=y(t),\end{aligned}\right\}$$

причем в некоторой области изменения параметра t функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы и $x'(t)\neq 0$.

Найдем производную y'_x. Как мы знаем, $y'_x=\dfrac{dy}{dx}$. Так как $dx=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$, то

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)dt}{x'(t)dt}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{y'_x}{x'_t}.$$

Таким образом,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_x}{x'_t}. \qquad (1.9)$$

Формула (1.9) позволяет находить производную функции, заданной параметрически.

Пример 7. Найти производную функции y от x, заданной параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \sin^2 t, \\ y &= \sin 2t. \end{aligned}\right\}$$

Решение. По формуле (4.1) получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left(\sin 2t\right)'}{\left(\sin^2 t\right)'} = \frac{2\cos 2t}{2\sin t \cos t} = 2ctg\, 2t\,.$$

Общая схема исследования функции и построение ее графика

На основании вышеизложенного можно рекомендовать следующий план исследования функций.

1. Нахождение области определения функции, интервалов непрерывности и точек разрыва.
2. Нахождение асимптот графика функции.
3. Нахождение интервалов монотонности функции и ее экстремумов (максимумов и минимумов).
4. Нахождение интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба графика функции.
5. Построение графика функции.

З а м е ч а н и е 1. При построении графика функции полезно знать также точки пересечения графика с осями координат.

З а м е ч а н и е 2 . Перед построением графика полезно также установить, не является ли данная функция четной или нечетной. При построении графика четной или нечетной функции рекомендуется использовать симметрию графика относительно оси ординат или начала координат.

Пример 8. Построить график функции $y = f(x)$, используя общую схему исследования функции.

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\,.$$

1) $D(y) = (-\infty;+\infty)$.

2) $y(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 - 9(-x) + 2 = -x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = y(x),$

$-y(x) \Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная,

$y(x \pm T) \neq y(x) \Rightarrow$ непериодичная.

Точка пересечения с осью OY: $x = 0 \Rightarrow y = 2m$.

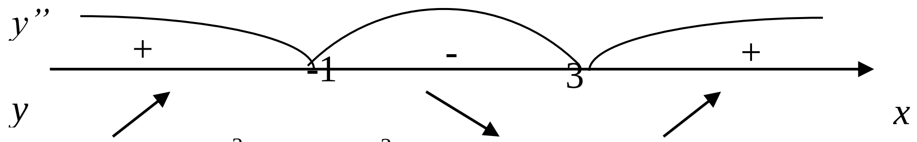
3) Точки экстремума, интервалы монотонности

$y' = \left(x^3 - 3x^2 - 9x + 2\right)' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \big/ : 3.$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 4 \cdot 3 = 16$

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2}$; $x_1 = 3$, $x_2 = -1$ -точки, подозреваемые на экстремум.

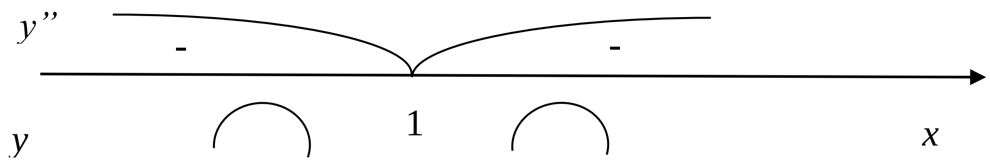


$y\left(-1\right)=\left(-1\right)^3-3\cdot\left(-1\right)^2-9\cdot\left(-1\right)+2=-1-3+9+2=7$.

$y\left(3\right)=3^3-3\cdot 3^2-9\cdot 3+2=-25$.

4) Точки перегиба, интервалы выпуклости, вогнутости графика функции.

$y''-\left(y'\right)'\left(3x^2-6x-9\right)'=6x-6=0\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1$.



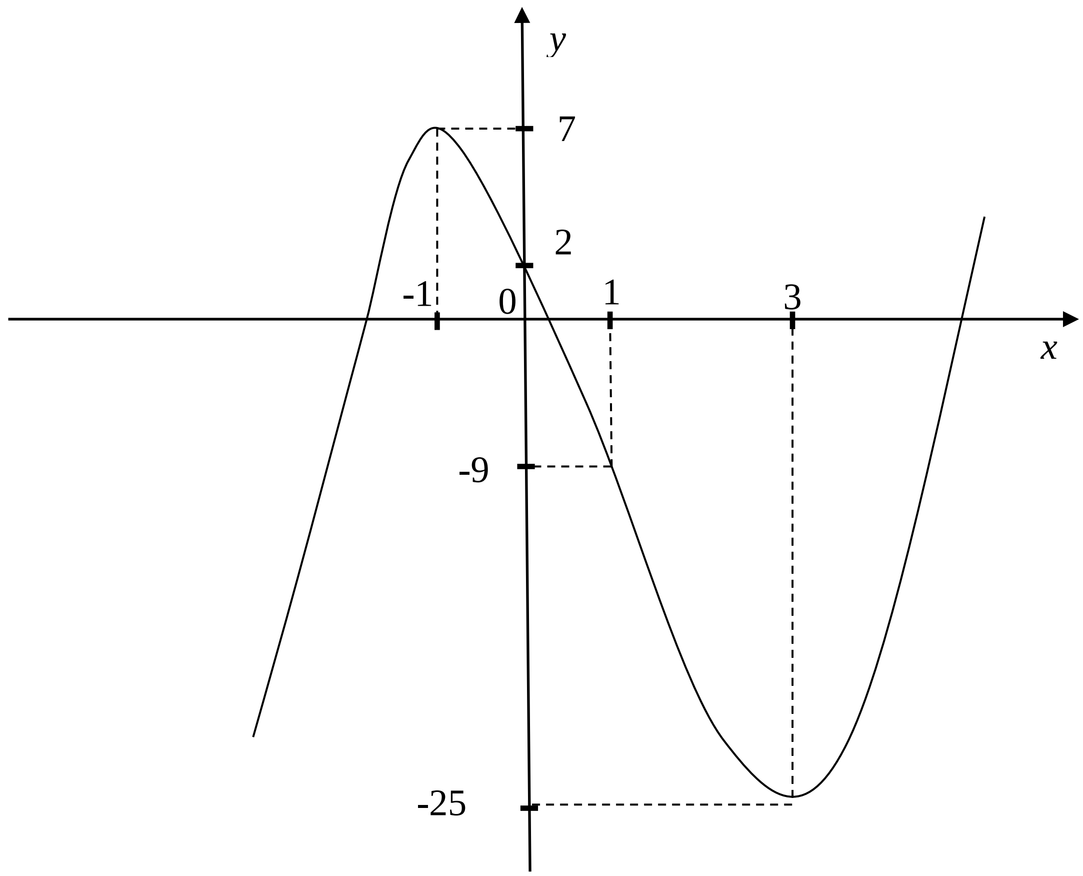
5) Асимптоты графика функции.

Вертикальных асимптот нет, т.к. нет точек разрыва 2-го рода.

Наклонные асимптоты ищем в виде прямой $y=kx+b$, где

$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2-9x+2}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-3x-9+\dfrac{2}{x}\right)=\infty\Rightarrow$ нет наклонных асимптот.

6) График функции.



Пример 9. Исследовать функцию $f\left(x\right)=2x-3\sqrt[3]{x^2}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна для всех значений x.

2. Находим асимптоты графика функции, не параллельные оси Oy. Ууравнение прямой ищем в виде $y=kx+b$, где:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-3\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-3\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=2,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f\left(x\right)-kx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2x-3\sqrt[3]{x^2}-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(-3\sqrt[3]{x^2}\right)=-\infty.$$

Так как для b не существует конечного предела, то график функции асимптот, не параллельных оси Oy, при $x\to+\infty$ не имеет. Легко проверить, что и при $x\to-\infty$ график функции также не имеет асимптот, не параллельных оси Oy. Асимптот, параллельных оси Oy, также нет, так как функция $2x-3\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна при всех значениях x.

3. Определяем интервалы монотонности функции, максимумы и минимумы.

Находим производную $f'\left(x\right)=2-\dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Определим критические значения аргумента:

$$2-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=0, \text{ или } \frac{2\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt[3]{x}}=0,\ \sqrt[3]{x}-1=0,\ x=1.$$

Кроме того, так как при $x=0$ производная терпит бесконечный разрыв, то значение $x=0$ также является критическим.

Определяем знаки производной в каждом из интервалов $\left(-\infty,\ 0\right)$, $\left(0,\ 1\right)$, $\left(1,\ +\infty\right)$, на которые точки 0 и 1 разбивают всю область определения данной функции. Имеем:

$\left(-\infty,\ 0\right)$: $f'\left(-1\right)>0$; $\left(0,\ 1\right)$: $f'\left(1/8\right)<0$; $\left(1,\ +\infty\right)$: $f'\left(8\right)>0$.

Составляем таблицу

x	$-\infty<x<0$	0	$0<x<1$	1	$1<x<+\infty$
y'	+	не сущ.	-	0	+
y	возрастает	максимум $y_{\max}=0$	убывает	минимум $y_{\min}=-1$	возрастает

Таким образом,

$$y_{\max}=f\left(0\right)=0,\quad y_{\min}=f\left(1\right)=-1.$$

4. Определяем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика.

Находим вторую производную

$$f''\left(x\right)=-2\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}=\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}};$$

$f''(x)$ не обращается в нуль ни при каком значении x, но при $x=0$ не существует (имеет бесконечный разрыв).

Определяем знаки второй производной в каждом из интервалов $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ +\infty)$ и составляем таблицу

x	$-\infty < x < 0$	0	$0 < x < +\infty$
y''	+	не существует	+
график	вогнут	перегиба нет	вогнут

Находим точки пересечения графика с осями координат:

$f(x)=0$, $2x-3\sqrt[3]{x^2}=0$, $8x^3-27x^2=0$, $x_1=x_2=0$, $x_3=27/8$.

При построении графика необходимо иметь в виду, что $f'(x)\to\infty$, при $x\to 0$, т.е. в начале координат график имеет вертикальную касательную (рис. 30).

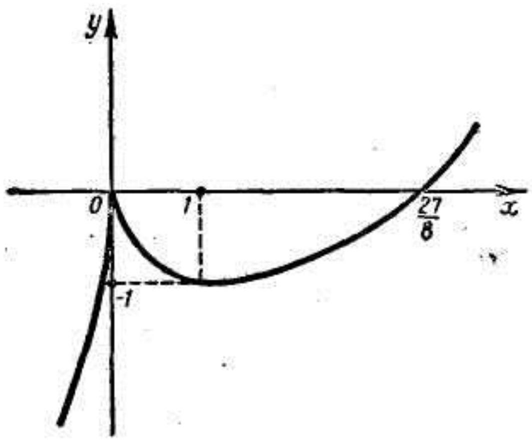


Рис. 1

Пример 10. Исследовать функцию $\dfrac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна в интервале $0 < x < +\infty$. В граничной точке $x=0$ области определения функция имеет бесконечный разрыв, так как $\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{lnx}{x}=-\infty$.

2. Так как в точке $x=0$ функция имеет бесконечный разрыв, то прямая $x=0$ (ось Oy) является асимптотой.

Найдем асимптоту, не параллельную оси Oy:

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1}=0$$

(при нахождении пределов мы воспользовались правилом Лопиталя).

Итак, $k=b=0$ и уравнение асимптоты $y=0$, т.е. асимптотой является ось *Ox*. Таким образом, график имеет в качестве своих асимптот оси *Ox* и *Oy*.

3. Находим производную $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ и критические точки:

$$\frac{1-\ln x}{x^2}=0,\ 1-\ln x=0,\ \ln x=1,\ x=e.$$

Исследуем знак производной в каждом из интервалов $(0,\ e)$, $(e,\ +\infty)$, на которые точка $x=e$ разбивает область определения функции:

$$(0,\ e):\ f'(1)=\frac{1-\ln 1}{1}=1>0;$$

$$]e,\ +\infty[:\ f'(e^2)=\frac{1-\ln e^2}{e^4}=\frac{1-2\ln e}{e^4}=\frac{1-2}{e^4}=-\frac{1}{e^4}<0.$$

Составляем таблицу

x	$0<x<e$	e	$e<x<+\infty$
y'	+	0	-
y	возрастает	максимум $y_{\max}=1/e\approx 0{,}37$	убывает

4. Находим вторую производную функцию: $f''(x)=\dfrac{2\ln x-3}{x^3}$.

Приравниваем $f''(x)$ нулю и находим значения аргумента, при которых график может иметь точку перегиба:

$$f''(x)=0,\ \frac{2\ln x-3}{x^3}=0,\ 2\ln x-3=0,\ \ln x=\frac{3}{2},\ x=e^{3/2}.$$

Определяем знак второй производной в каждом из интервалов $\left(0,\ e^{3/2}\right)$ и $\left(e^{3/2},\ +\infty\right)$:

$$\left(0,\ e^{3/2}\right):\ f''(e)=\frac{2\ln e-3}{e^3}=\frac{2-3}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0;$$

$$\left(e^{3/2},\ +\infty\right):\ f''(e^2)=\frac{2\ln e^2-3}{e^6}=\frac{4-3}{e^6}=\frac{1}{e^6}>0.$$

Составим таблицу

x	$0<x<e^{3/2}$	$e^{3/2}\approx 4{,}48$	$e^{3/2}<x<+\infty$
y''	-	0	+
график	выпуклый	т. перегиба $y=\dfrac{3}{2e^{3/2}}\approx 0{,}33$	вогнутый

Находим точки пересечения с осями координат. С осью *Oy* график точек пересечения не имеет, так как функция определена при $0<x<+\infty$. Точки пересечения с осью Ox находятся из уравнения $y=0$, откуда $\frac{\ln x}{x^2}=0$, $\ln x=0$, $x=1$.

На основании полученных данных строим график функции $y=\frac{\ln x}{x}$, изображенный на рис. 31.

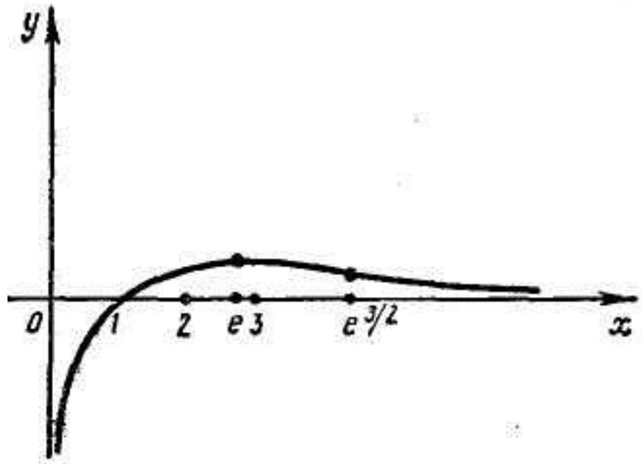


Рис. 2

2.1 Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y=3\sqrt{2x+3}$
2. $y=\ln[\sin(2x+5)]$
3. $y=\sin x\cdot ctgx\cdot\log_2 x^3$
4. $\cos\frac{y}{x}=8x$
5. $y=\left(e^{\cos x}+3\right)^2$
6. $y=4^x\cdot x^4+7$
7. $y=x^x$
8. $x\cdot y+e^y\cdot tgx=0$

Найти $\frac{dy}{dx}=y'$, $\frac{d^2y}{dx^2}=y''$

9. $y=\frac{5x}{x^4-5}$

10. $\begin{cases} y=3t^2 \\ x=3t-t^3 \end{cases}$

Вариант 2

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

2. $y = \left(x^2 + 4\right)^2 \cdot tgx$

3. $y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

4. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

5. $y = \cos^3\left(2 + \frac{1}{x^2 - 1}\right)$

6. $y = \left(10^{x+1} + 9x^2\right)^3$

7. $y = x^{-\cos x}$

8. $x - y + \sin y = 0$

Найти $\frac{dy}{dx} = y'$, $\frac{d^2 y}{dx^2} = y''$

9. $y = xe^{-x^2}$

10. $\begin{cases} y = t - \ln t \\ x = t + \ln \cos t \end{cases}$

Вариант 3

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \log_3 x^2$

2. $y = x \cdot \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x^2}}$

3. $y = e^{x + \cos x}$

4. $y = tg^2 \frac{x}{2}$

5. $y = \sqrt[11]{9 + 6\sqrt[5]{x^9}}$

6. $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

7. $y = (x)^{e^x}$

8. $\sin(x - y) = \cos(x + y)$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$

9. $e^x \cdot e^y - ye^x = 0$

10. $\begin{cases} x = tgt + \sin t \\ y = ctgt + \cos t \end{cases}$

Вариант 4

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y=\cos(\ln x)\cdot\sin(\ln x)$

2. $y=e^{-x}\sqrt{x^2+1}-\dfrac{\sin x}{5}$

3. $y=5^{3x^2}\cdot\ln 10x^2+2x$

4. $e^{xy}-e^x-e^y=0$

5. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

6. $y=tg^3\left(\cos x^2\right)$

7. $y=\left(x^2+1\right)^{\sin x}$

8. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $x^2+2y\cdot\cos x=\sin y$

10. $\begin{cases}x=tg2t\\ y=\ln\left(t^2+1\right)\end{cases}$

Вариант 5

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=x^3arctg\cdot x^3$

2. $y=\ln\sqrt{x\sin x}$

3. $y=\left(1+\sqrt{x}\right)^3$

4. $\ln y=arctg\dfrac{x}{y}$

5. $y=3^{4x^2}\cdot\ln\sqrt[5]{x^3}$

6. $y=\arcsin^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)$

7. $y=x^{\sqrt{x+1}}$

8. $tgy=\sin(x+y)+y^2x$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $e^{xy}-x^2+y^2=0$

10. $\begin{cases}x=t^3+3\\ y=t^2-2t\end{cases}$

Вариант 6

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\sin\left(\sin\dfrac{x}{3}\right)$

2. $y=\sqrt{\cos 2x}\cdot 2^{\sqrt{\sin 2}}$

3. $y=5tg\dfrac{x}{5}+tg\dfrac{\pi}{8}$

5. $y=2^{\sqrt{\cos x}}\cdot\log_2 x^3$

6. $y=\ln\cdot arctg\dfrac{1}{1+x}$

7. $y=(\cos x)^{x^3}$

4. $x^2y + y^3 = 3x^5 - \sin y$

8. $y\sin x = \cos(x - y)$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $x - y + e^y arctgx = 0$

10. $\begin{cases} x = \cos\dfrac{t}{2} \\ y = t - \sin t \end{cases}$

Вариант 7

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = \sqrt{x+5} + \sqrt{x^2 + 25}$
2. $y = 3^x e^{-2x}$
3. $y = \dfrac{1}{2}\cos^2 x + \ln \cdot tgx$
4. $(e^x - 1)(e^y - 1) - 1 = 0$
5. $y = 3^{arcctg \cdot x^3}$
6. $y = 2\sin^3(x^2 + 1)$
7. $y = (5x + x^2)^{x^3}$
8. $x \cdot y + a\sin y = 0$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $y = x + \ln \cdot arctgx$

10. $\begin{cases} x = t^3 + 7t \\ y = t^5 + 5t \end{cases}$

Вариант 8

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = x^m \ln x$
2. $y = \log_2 \sqrt[5]{x^2} \cdot 4^x$
3. $y = \dfrac{1}{3}tg^2 x - tgx + x$
4. $y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$
5. $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4}}{\cos^3 x}$
6. $y = arctg(tg^2 x)$
7. $y = x^{arcctg \cdot x}$
8. $y = \sin x - x\cos x$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $tg\dfrac{x}{y}=5x$

10. $\begin{cases} x=e^{2t} \\ y=\cos t \end{cases}$

Вариант 9

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\sqrt[5]{x^3+x^2+x}+\ln\sqrt{x}$
2. $y=\dfrac{tg^4(arctgx)}{\sqrt{1+x^2}}$
3. $y=3^x\cdot e^{-x^3}$
4. $x-y+arctg\cdot y=0$
5. $y=\cos^3(\cos x)$
6. $y=\ln\left(\sin^2 x+6\right)$
7. $y=x^{tg^3 x}$
8. $y=arctg\cdot e^{2x}$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $y=\ln\cdot\sin(2x+5)$

10. $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$

Вариант 10

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\dfrac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$
2. $y=\ln^2\left(2x^3+3x^2\right)$
3. $y=1-e^{hn^2 3x}\cdot\cos^2 3x$
4. $x^y-y^x=0$
5. $y=3x^3\ln x-x^3$
6. $y=\sqrt{1-3x}\cdot\arccos\dfrac{x}{2}$
7. $y=(\cos x)^{\sqrt{11x^2}}$
8. $\sqrt{y-x^2}-3=0$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}-\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}}=0$

10. $\begin{cases} x=e^{-t}\sin t \\ y=e^{t}\cos t \end{cases}$

Вариант 11

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = -ctg^2 \frac{x}{2} - \ln \sin \frac{x}{2}$

5. $y = arctg \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$

2. $y = \frac{1}{7} \sin \sqrt[7]{x} - \frac{2}{5} \sin \sqrt[5]{x}$

6. $y = \ln \frac{x^5}{x^5 + 5}$

3. $y = e^{\sqrt{2x}} \left(\sqrt{2x} - 1 \right)$

7. $y = \left(e^x \right)^{\cos^2 x}$

4. $y = x^{-tg^x}$

8. $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$

9. $tgy = xy$

10. $\begin{cases} x = cht \\ y = sht \end{cases}$

Вариант 12

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \ln^2 (\arcsin 5x)$

5. $y = \sqrt{e^{\sin^2 x}}$

2. $y = 3^{ctg \frac{1}{x}}$

6. $y = arctg \left(\ln \frac{1}{x} \right)$

3. $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$

7. $y = \sqrt[x]{x}$

4. $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$

8. $ye^y = e^{x+1}$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}$

9. $tgy = xy$

10. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

Вариант 13

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y = tg^3 (\arccos(x + 1))$

5. $y = arctg (\ln x)$

2. $y = \sqrt[3]{x^2} + 2^{x^2 + 1}$

6. $y = x \cdot \sin \left(\ln x - \frac{\pi}{4} \right)$

3. $y=\sqrt{e^{ax}}\cdot\cos^3\sqrt{x}$

4. $x^y=y^x$

7. $y=\sqrt[\cos x]{x+1}$

8. $y^3=\dfrac{x-y}{x+y}$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $arctg(x+y)=x$

10. $\begin{cases} x=t\ln t \\ y=(\ln t)/t \end{cases}$

Вариант 14

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\ln\left(x+\sqrt{25+x^2}\right)$

2. $y=arctg\left(\dfrac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)$

3. $y=\sin^5 5x\cdot\cos^2\dfrac{x}{3}$

4. $\ln y+\dfrac{x}{y}=c$

5. $y=\arcsin\left(x^2-2^x\right)$

6. $y=x^2\cdot 10^{2x}$

7. $y=(\cos+1)^{\frac{1}{\sin x}}$

8. $e^y=x+y$

Найти $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

10. $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 15

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=25x^2\cdot 2^{25x}$

2. $y=\dfrac{5}{2}\sqrt{\sin^5 x}\cdot e^{2x}$

3. $y=(x+\sin x)^3$

5. $y=\sqrt[2]{x^5+1/x^7}$

6. $y=tg\left(\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

7. $y=(tgx)^{tgx}$

4. $y-0{,}3\sin y = x$

8. $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$

10. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^2} \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2} \end{cases}$

Вариант 16

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\dfrac{2}{3}arctg\left(\dfrac{5tg\frac{1}{2}+4}{3}\right)$

5. $y=\ln\cdot\ln\left(3-2x^3\right)$

2. $y=ctg\sqrt{x}$

6. $y=\left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}$

3. $y=\dfrac{\sin x}{2\cos^2 x}$

7. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

4. $\sqrt[x]{y}=\sqrt[7]{x}$

8. $y^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $e^x-e^y=y-x$

10. $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$

Вариант 17

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y=\sqrt[3]{\cos^2 \ln x}$

5. $y=\dfrac{\arccos\sin x}{1+x^2}$

2. $y=\log_2\left(\sqrt{tg^{3\sqrt{x}}}\right)$

6. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

3. $y=(2x-1)^{-5}$

7. $y=(arctgx)^{tgx}$

4. $e^y\sin x=e^{-x}\cos y$

8. $y\ln x = x\ln y$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $y = tg(x+y)$

10. $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$

Вариант 18

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = x^2 e^{3x} + \cos^2\sqrt{x}$
2. $y = \dfrac{x^2 + x + 5}{tg^2 x}$
3. $y = 15x^{10} \cdot 10^{x^{15}}$
4. $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
5. $y = x^{n-1}\ln x$
6. $y = \sqrt{\arccos^5\sqrt{x}}$
7. $y = (15x)^{\cos^2 x}$
8. $e^{x-2} + yx - 3y - 2 = 0$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $y = x + arctg \cdot y$

10. $\begin{cases} x = \cos t + a\sin t \\ y = \sin t - a\cos t \end{cases}$

Вариант 19

Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$

1. $y = tg^3\sqrt{1+\cos\sqrt{x}}$
2. $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{\sin^3 x}}$
3. $y = 2\left(\sin 22x + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$
4. $5x^2 + 3xy \cdot 2y^2 + 2 = 0$
5. $y = 2^{x^2} \cdot \ln\cdot\cos 2x$
6. $y = \dfrac{\arccos x}{1-x^2} + tg\sqrt{\sin x}$
7. $y = (\cos x)^{\sin 2x}$
8. $y = x^{x^x}$

Найти $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$

9. $y = x + \ln y$

10. $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \sqrt{x} - 1 \end{cases}$

Вариант 20

Найти производные $\frac{dy}{dx}$

1. $y = \ln^4\left(\cos x + tg^3\sqrt{2x}\right)$
2. $y = \frac{5}{2}\sqrt{ctg^5(x)} + \frac{(x-1)}{\sqrt{x+1}}$
3. $y = 2.5x^5 \cdot 10^{x+1}$
4. $y = ctg(x+y)$
5. $y = \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{2^{\ln x}}$
6. $y = x^3 e^{3x} + \sin^2\sqrt{x}$
7. $y = (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}$
8. $\ln y = \sin 2x \cdot \ln\cos x$

Найти $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$

9. $\ln y = \ln 2 + \ln x - \frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)$ 10. $\begin{cases} x = t^2 + 2t \\ y = \ln(t+1) \end{cases}$

3. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ, ЧАСТНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

Итак, *функцией двух переменных называется правило, по которому каждой паре чисел* $(x;\, y) \in M$ *соответствует единственное число* $z \in L$ при условии, что каждое число $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x;\, y) \in M$, где под множеством M понимается некоторое множество пар $(x;\, y)$ действительных чисел, а под множеством L – некоторое множество действительных чисел.

При этом x и y называются *независимыми переменными* (или *аргументами*), z – *зависимой переменной,* множество M – *областью определения* функции, а L – *множеством значений* функции. Как и в случае одной переменной, зависимую переменную также называют функцией (как и само правило соответствия).

Обозначения функции двух переменных аналогичны обозначениям функции одной переменной: $z = f(x,\, y)$, $z = \varphi(x,\, y)$, $z = z(x,\, y)$ и т.д.

Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,\, y)$. Зафиксируем значение одного из ее аргументов, например y, положив $y = y_0$. Тогда функция $f(x,\, y_0)$ есть функция одной переменной x. Пусть она имеет производную в точке x_0:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,\, y_0)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Эта производная называется *частной производной первого порядка* функции $z=f(x,\, y)$ по *x* в точке $P_0(x_0;\, y_0)$ и обозначается символом $f'_x(x_0,\, y_0)$.

Разность $f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,\, y_0)$ называется *частным приращением по x* функции $z=f(x,\, y)$ в точке $P_0(x_0;\, y_0)$ и обозначается символом $\Delta_x z$:

$$\Delta_x z=f(x_0+\Delta x,\, y_0)-f(x_0,\, y_0). \qquad (2.2)$$

Учитывая эти обозначения, можно записать

$$f'_x(x_0,\, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}. \qquad (2.3)$$

Аналогично определяются и обозначаются частное приращение функции $z=f(x,\, y)$ по *y* и частная производная по *y* в точке $P_0(x_0;\, y_0)$:

$$\Delta_y z=f(x_0,\, y_0+\Delta y)-f(x_0,\, y_0) \qquad (2.2')$$

$$f'_y(x_0,\, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}. \qquad (2.3')$$

Таким образом, *частная производная функции двух переменных по одному из ее аргументов равна пределу отношения частного приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.*

Частные производные, рассматриваемые как функции двух переменных, обозначаются следующим образом*:

$$f'_x(x,\, y),\ f'_y(x,\, y),\ \text{или}\ z'_x,\ z'_y,\ \text{или}\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Пример 11. Найти частные производные функции $z=f(x,\, y)=x^2y-3y^2+5x$.

Решение. Частную производную $f'_x(x,\, y)$ находим как производную функции $f(x,\, y)$ по аргументу *x* в предположении, что $y=const$. Поэтому

$$f'_x(x,\, y)=\left(x^2y-3y^2+5x\right)'_x=2xy-0+5=2xy+5.$$

Аналогично

$$f'_y(x,\, y)=\left(x^2y-3y^2+5x\right)'_y=x^2-6y+0=x^2-6y.$$

Пример 12. $f(x,\, y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$. Найти $f'_x(3,\ 4)$.

Решение. Находим сначала частную производную функции $f(x,\, y)$ по *x*:

---

* Заметим, что в отличие от производной функции одной переменной выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ нельзя рассматривать как дроби. Эти выражения являются символами, обозначающими частные производные.

$$f'_x(x,\ y)=\left(x+y-\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=(x+y)'_x-\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)'_x=$$
$$=1+0-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\left(x^2+y^2\right)'_x=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Теперь вычислим частное значение найденной частной производной при $x=3\ \ y=4$:

$$f'_x(3,\ 4)=\left[1-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{\substack{x=3\\y=4}}=1-\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{2}{5}.$$

Частные производные высших порядков

Частные производные функции нескольких переменных являются функциями тех же переменных. Эти функции, в свою очередь, могут иметь частные производные, которые называются *вторыми частными производными* (или *частными производными второго порядка*) исходной функции.

Так, например, функция $z=f(x,\ y)$ двух переменных имеет четыре частных производных второго порядка, которые определяются и обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,\ y);\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,\ y);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,\ y);\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,\ y).$$

Функция $u=f(x,\ y,\ z)$ трех переменных имеет девять частных производных второго порядка:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,\ y,\ z);\quad \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,\ y,\ z);$$
$$\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial z}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=f''_{xz}(x,\ y,\ z)$$

и т.д.

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего и более высокого порядка функции нескольких переменных: *частной производной n-го порядка функции нескольких переменных называется частная производная первого порядка от частной производной $(n-1)$-го порядка той же функции.*

Например, частная производная третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функции $z = f(x, y)$ есть частная производная первого порядка по y от частной производной второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется *смешанной частной производной.*

Например, частные производные

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2},\ \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$$

являются смешанными частными производными функции двух переменных $z = f(x, y)$.

Пример 13. Найти смешанные частные производные второго порядка функции $z = x^2 y^3$.

Решение. Находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3,\ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Затем находим смешанные частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \left(3x^2 y^2\right)'_x = 6xy^2.$$

Мы видим, что смешанные частные производные данной функции $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, отличающиеся между собой лишь порядком дифференцирования, т.е. последовательностью, которой производится дифференцирование по различным переменным, оказались тождественно равными. Этот результат не случаен. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема, которую мы принимаем без доказательства.

Т е о р е м а. *Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.*

В частности, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Полный дифференциал функции двух переменных

Т е о р е м а. *Если частные производные* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *функции* $z = f(x, y)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $P(x; y)$, *то эта функция в точке* $P(x; y)$ *дифференцируема.*

Как и в случае функции одной переменной, для приращений независимых переменных введем следующие обозначения: $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$. Тогда выражение для дифференциала примет следующий вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \qquad (2.4)$$

или

$$dz = f'(x, y) dx + f_y'(x, y) dy. \qquad (2.4')$$

Пример 14. Найти полный дифференциал функции $z = xy^2$ в произвольной точке.

Решение. Полный дифференциал $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ существует при условии непрерывности частных производных $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(xy^2\right)'_x = y^2, \ \frac{\partial z}{\partial y} = \left(xy^2\right)'_y = 2xy.$$

Мы видим, что найденные частные производные являются непрерывными функциями во всей плоскости *Oxy*. Поэтому дифференциал этой функции всюду существует, причем $dz = y^2 dx + 2xy dy$.

3.1 Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln(x + \ln y)$.
2. Найти dz, если $z = \sqrt{x^2 y + 3xy + 5x}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z^3 + 3xyz + 4x^2 y = a^3$.
4. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, если $u = \frac{1}{3}\sqrt{\left(x^2 + y^2\right)^3}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 8x^2 - 9x + 4y^2 - 5y + 1$.

6. $z = x^5\sqrt{y} + \sqrt{x}, \quad \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}, \quad gradz$.

7. Найти область определения функции $z = \sqrt{3x} - \frac{5}{\sqrt{y}}$.

8. Вычислить приближенно $arctg(0{,}98 \cdot 1{,}05)$.

9. $z = x - 2y^2, \quad x = \sqrt{t}, \quad y = t^{\frac{3}{4}}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

10. $z = \alpha^4 + \alpha\beta + \beta^3,\ \alpha = xy,\ \beta = x^y$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 8x - 6y^2$ в точке $M(1;1;2)$.

Вариант 2

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \ln tg\frac{x}{y}$.

2. Найти dz, если $z = \frac{x+y}{x-y}$.

3. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $x^3y - e^y + \ln x = 4$.

4. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = \ln\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

5. Исследовать на экстремум: $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

6. $z = x^3 - 3x^2y + \sqrt{y^3}, \quad \vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}, \quad gradz$.

7. Найти область определения функции $u = \frac{\ln(x^2y)}{\sqrt{y-x}}$.

8. Вычислить приближенно $arcctg(1{,}02 \cdot 0{,}96)$.

9. $z = u^4v^5 + \frac{1}{v};\ u = x^2 + 1;\ v = \sqrt{x}$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

10. $z = t\cdot\cos v + v\cdot\cos t;\ t = xy,\ v = x + 2y$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. 11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 + 3y - 4z = 6$ в точке M(0;1;-$\frac{3}{4}$).

Вариант 3

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = arctg\sqrt{x^y}$.

2. Найти dz, если $z = \ln(xy^2)$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $\sin(xy) - e^{xy} - x^2y - z^3 = 0$.

4. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}$, если $u = x\sin^2 y$.

5. Исследовать на экстремум: $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

6. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Найти $\frac{du}{da}$, $grad u$.

7. Найти область определения функции $z = \frac{\sqrt{xy}}{x + y}$.

8. Вычислить приближенно $(1{,}03)^{2{,}05}$.

9. $z = x^2 - y^2$, $x = \cos\ln t$, $y = t^2$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

10. $z = xe^y$, $x = u + 2v$, $y = u^2 - 3v^2$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z + \sqrt{x} + \sqrt{y} = \frac{3}{4}xy$ в точке M(1;4;0).

Вариант 4

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = x^{y^2}$.

2. Найти dz, если $z = \frac{x + 3y}{y - 3x}$.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $arctgz + \frac{1}{xy} = 2$.

4. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если $z = (\ln y)^3 - x^2\sqrt{y}$.

5. Исследовать на экстремум: $z = x^2 + xy + y^2 - 13x - 11y + 7$.

6. $z = xy + \sqrt{y}$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.

7. Найти область определения функции $z = \frac{1}{x^2 - y^2}$.

8. Вычислить приближенно $(2{,}001)^5 \cdot (3{,}002)^2$.

9. $z = \sqrt{xy}\ln\frac{x}{y}$, $x = e^t$, $y = \sqrt{t}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

10. $z = x^2 + y^3 - 3xy$; $x = \sin t + \cos v$; $y = t - v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$. **11.** Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 2x^2 - 4y^2$ в точке M(2;1;4).

Вариант 5

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \arcsin\left(x^3 + \sqrt{y}\right)$.
2. Найти dz, если $z = \sqrt{3x^2 - 4y^3}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2 \ln z - y^2 \ln x = 3$.
4. Найти частные производные второго порядка, если $z = e^x \ln y + \sin y \cdot \ln x$.
5. Найти экстремум: $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
6. $z = x^2 - 2xy + 3y - 1, \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}, \quad gradz$.
7. Найти область определения функции $u = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{(1,05)^3} \cdot \sqrt[3]{0,97}$.
9. $z = \arcsin\frac{x}{y}, \quad x = t + 3, \quad y = \sqrt{t+1}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
10. $z = \cos^2(x - y), \quad x = 3t, \quad y = t^2 - v$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}, \ \frac{\partial z}{\partial v}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = xy$ в точке M(1;1;1).

Вариант 6

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = arctg(xy)$.
2. Найти dz, если $z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, если $z^3 \arcsin\sqrt{y} - z\ln x = 10$.
4. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, если $u = y\sqrt{\frac{y}{x}}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 4x^2 - 3y^2 + 6x - 9y + 2$.
6. $u = x^2 y^3 z, \quad \vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$. Найти $\frac{du}{da}, \quad gradu$.
7. Найти область определения функции $z = \frac{\ln(x + y)}{x - y}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt[5]{(1,03)^2} \cdot \sqrt[6]{0,99}$.
9. $z = tgx \cdot tgy, \quad x = \sin v, \quad y = \cos v$. Найти $\frac{dz}{dv}$.
10. $z = x^2 y - x, \quad x = \ln\frac{u}{v}, \quad y = uv$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \ \frac{\partial z}{\partial v}$

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} - xy$ в точке M(3;4;-7).

Вариант 7

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = \arccos\sqrt{x+y}$.
2. Найти dz, если $z = e^{x^2+y^2}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$.
4. Найти частные производные второго порядка, если $z = e^x \ln y + xy$.
5. Исследовать на экстремум: $z = x^3 y^2 (1 - x - y)$.
6. $z = x^y$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.
7. Найти область определения функции $t = \frac{1}{\sqrt[3]{xy}}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt{4{,}08} \cdot \sqrt[3]{8{,}01}$.
9. $z = \frac{\sqrt[3]{x}}{x+y}$, $x = t^4$, $y = 2t^2$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
10. $z = x^2 \ln y$, $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = arctg\frac{y}{x}$ в точке М(1;1;$\frac{\pi}{4}$).

Вариант 8

1. Найти частные производные $z = \arcsin(x^2 + y^2)$ в точке $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.
2. Найти dz, если $z = x^2 y + \sin xy$.
3. Найти $\frac{dy}{dx}$, если $e^{xy} - x = y^2 + 1$.
4. Найти производные второго порядка $z = \frac{x^2}{y^3}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 3x^2 + 2x\sqrt{y} - y - 8x + 8$.
6. $z = \arcsin\frac{x}{x+y}$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.
8. Вычислить приближенно $(1{,}03)^{0{,}98}$.
9. $z = e^{x^2 y}$, $x = t^2 - 2$, $y = t + 5$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
10. $u = \cos xy$, $x = \frac{1}{v} + z$, $y = u - z$. Найти $\frac{\partial u}{\partial v}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$. **11**.Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ в точке М(1;2;-1).

Вариант 9

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{y}{x}}$ в точке (2; 1).
2. Найти dz, если $z = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $e^{xz} - xyz = 0$.
4. Производные второго порядка $z = x^3 \cos y$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 9x^2 - 4xy - 3y^2 + 8x - 2y + 9$.
6. $z = \sqrt{2 + x^2 + y^2 + t}$, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \frac{8}{\sqrt{x^2 - y}}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt{(1{,}02)^3 + (1{,}97)^3}$.
9. $u = \arccos\frac{x}{y}$, $x = \frac{1}{t}$, $y = \frac{1}{t^2 + 1}$. Найти $\frac{du}{dt}$.
10. $z = \sin^2 xy$, $x = u^2 - v^2$, $y = \sqrt{uv}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^4 - 4y^3z + 4z^2xy - 4z^3x + 1 = 0$ в точке M(1;1;1).

Вариант 10

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z = arctg\frac{y^2}{x}$ в точке (2;3).
2. Найти dz, если $z = e^{x^2 + y^3}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. Найти производные второго порядка $z = 3x^3 + 4x^2y^2 + 5y^3 - 6x$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.
6. $\varphi = x\sin z - y\cos z$, $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Найти $\frac{d\varphi}{da}$, $grad\varphi$.
7. Найти область определения функции $z = \frac{4}{\sqrt{y^2 - 4x}}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt[8]{0{,}98} \cdot \sqrt[3]{1{,}02}$.
9. $z = \frac{x+1}{y-1}$, $x = t^2 + 1$, $y = \frac{t^3}{3}$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
10. $t = \frac{\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$, $\alpha = xy$, $\beta = \frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial t}{\partial x}$, $\frac{\partial t}{\partial y}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $\left(z^2 - x^2\right)xyz - y^5 = 5$ в точке M(1;1;2).

Вариант 11

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = 3x^{y^2}$ в точке (2;2).
2. Найти dz, если $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z^2 + \frac{2}{x} = \sqrt{y^2 - z^2}$.
4. Найти производные второго порядка функции $z = x^3 - 4x^2 y + 5y^2$.
5. Исследовать на экстремум: $z = x^3 y^2 (6 - x - y)$.
6. $z = e^{x+y} - \sqrt{x+y}, \quad \vec{a} = \vec{i} - \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \ln\left(y^2 - 4x + 8\right)$.
8. Вычислить приближенно $\frac{\sqrt[3]{1,01}}{\sqrt[5]{1,04}}$.
9. $z = \sqrt{x} y^5, \quad x = \cos t, \quad y = tgt$. Найти $\frac{dz}{dt}$.
10. $z = x^3 \ln y, \quad x = u + v, \quad y = \frac{v}{u}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \ \frac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = x + y + z$ в точке М(2;3;6).

Вариант 12

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \sqrt{2x^2 + y^2}$ в точке (1; -2).
2. Найти dz, если $z = 3x^3 - x^2 y + \cos x$.
3. Найти $\frac{dz}{dx}$, если $arctg \frac{y}{x^2} = \ln \sqrt[3]{x^3 + y}$.
4. Найти производные второго порядка $z = y^2 e^x + \sin x$.
5. Исследовать на экстремум: $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.
6. $z = 4x^2 - 2y^2 + 1, \quad \vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}$, $gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$.
8. Вычислить приближенно $\left(0{,}99\right)^{1,03}$.
9. $z = u^{v+3}, \quad u = \sqrt{x}, \quad v = e^x$. Найти $\frac{dz}{dx}$.
10. $z = \sin x^2 y, \quad x = u + v, \quad y = \frac{u}{\sqrt{v}}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}, \ \frac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $3x^2 + y - 2z = 0$ в точке М(1;1;2).

Вариант 13

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.

2. $z=\frac{xy}{x^2+y^2}$, найти dz.

3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^3-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.

4. $z=e^{xy^2}$, найти $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

5. Исследовать на экстремум: $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$.

6. $z=\sqrt{x^2+y^2}-xy,\quad \vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da},\quad gradz$.

7. Найти область определения функции $z=\frac{1}{\sqrt{x+y}}+\frac{1}{\sqrt{x-y}}$.

8. Вычислить приближенно $\cos 31^0 \cdot tg46^0$.

9. $u=z^2\sqrt{x+z},\quad x=v+3,\quad z=2v$. Найти $\frac{du}{dv}$

10. $u=t^{\alpha+1},\quad t=x^2y,\quad \alpha=\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $xy=\sqrt{z}$ в точке M(1;1;1).

Вариант 14

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $z=e^{x^3y+3x^2y^2+\frac{y^4}{4}}$.

2. Найти dz, если $z=\ln\left(2x+3xy-y^2\right)$.

3. $z=x^2\sin y+y^2\sin x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

4. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$. Найти $\frac{dy}{dx}$.

5. Исследовать на экстремум: $z=4xy-6x^2+y^2-4x+1$.

6. $z=\sqrt[3]{x+y}-x^2y^2,\quad \vec{a}=4\vec{i}-3\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da},\quad gradz$.

7. Найти область определения функции $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

8. Вычислить приближенно $\sqrt{(0{,}98)^2+(1{,}01)^2}$.

9. $z=ctg\frac{x}{y},\quad x=\sin t,\quad y=e^t$. Найти $\frac{dz}{dt}$.

10. $z=x^2y-\ln(x+y),\quad x=u^v,\quad y=\frac{u}{v}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2 - y^2 = 2z$ в точке M(4;1;7,5).

Вариант 15

1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = \arcsin\left(x^2 + y^2\right)$ в точке $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$.
2. Найти dz, если $z = \ln\left(x^3 + y^3\right)$.
3. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $2z^2 + 6xy^3 z = a^2$.
4. Найти производные второго порядка $z = \frac{2y^2}{x^3}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = e^x\left(x^2 - 2y^2 + 3x + 1\right)$.
6. $z = x^4 y - x\sqrt{y}, \quad \vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}, \quad gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \ln xy$.
8. Вычислить приближенно $(2{,}003)^3 \cdot (3{,}01)^2$.
9. $z = \ln y + \sqrt[3]{x}y, \quad x = t^2, \quad y = t^3 + 1$. Найти $\frac{dz}{dt}$
10. $z = 2^{x+y} \cdot (x - y), \quad x = tv, \quad y = \frac{t^2}{v}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial t}, \quad \frac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 1$ в точке M(2;3;3).

Вариант 16

1. $z = tg\frac{x^2}{y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.
2. $z = \frac{5}{x^2 + y^2}$. Найти dz.
3. $x^2y^2 - x^4 - y^4 = a^4$. Найти $\frac{dy}{dx}$.
4. $z = \sqrt{xy} \cdot \ln\frac{x}{y}$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
6. $z = \ln xy - x^2 - y^2, \quad \vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$. Найти $\frac{dz}{da}, \quad gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \sqrt{\frac{x^2 + 2x + y^2}{x^2 - 2x + y^2}}$.
8. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{(1{,}05)^3} \cdot \sqrt{1{,}02}$.
9. $z = 3x^2\sqrt{y + 1}, \quad x = \cos t, \quad y = tgt$. Найти $\frac{dz}{dt}$

10. $z=\ln\left(x^3-y^3\right),\quad x=u+v,\quad y=u-2v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=2x^2-xy+y^2$ в точке М(1;-1;4).

Вариант 17

1. $z=\ln(tg(x+y))$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. $z=e^{x^2+2y^2}$. Найти dz.
3. $z=\left(x^2+y^2\right)e^x$. Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.
4. $xe^y+ye^x-e^{xy}=0$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.
5. Исследовать на экстремум: $z=x^2+xy+y^2+x-y+1$.
6. $z=5x-\ln(x+y),\quad \vec{a}=3\vec{i}+4\vec{j}$. Найти $\dfrac{dz}{da},\quad gradz$.
7. Найти область определения функции $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$.
8. Вычислить приближенно $\sin 29^0\cdot tg46^0$.
9. $z=arctgxy,\quad x=t^2,\quad y=tgt$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$
10. $z=\sin(x+y),\quad x=e^{uv},\quad y=u-v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u},\quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=xy+4x^2-y^2$ в точке М(1;1;4).

Вариант 18

1. $z=e^{\sin xy}$, найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. $t=e^{3x^2+4y^3}$. Найти dt.
3. $z=(x+y)e^{x+y}$. Найти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$.
4. $\left(x^2+y^2\right)^2-a^2\left(x^2-y^2\right)=0$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.
5. Исследовать на экстремум: $z=2xy-3x^2-2y^2+10$.
6. $z=\dfrac{xy}{x+y},\quad \vec{a}=\vec{i}-\vec{j}$. Найти $\dfrac{dz}{da},\quad gradz$.
7. Найти область определения функции $z=\sqrt{x^2-5x+6-y}$.
8. Вычислить приближенно $(3{,}001)^4\cdot(4{,}003)^2$.

9. $z = e^{\cos(x+y)}, \quad x = t^2, \quad y = \sqrt{t}$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$

10. $z = x^3\sqrt{y} - y^5, \quad x = \dfrac{v}{u}, \quad y = u + v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2y - y^2x + 1$ в точке M(1;1;1).

Вариант 19

1. $z = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. $z = \ln\left(2x + 3xy - y^2\right)$. Найти dz.
3. $z = x^2 \sin y + y^2 \cos x$. Найти, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.
4. $ye^x + e^y = 0$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = 6 - x^2 - 2y^2 - xy - 4x$.
6. $z = \dfrac{x - y}{x + y}, \quad \vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Найти $\dfrac{dz}{da}, \quad gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \ln(-x - y)$.
8. Вычислить приближенно $(0{,}98)^{1{,}03}$.
9. $z = \ln\left(x^2 + 2xy\right), \quad x = t^3, \quad y = t^2$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.
10. $z = xe^{x-y}, \quad x = tg\dfrac{u}{v}, \quad y = u + v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial u}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.
11. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \sqrt{xy} + 2$ в точке M(1;4;4).

Вариант 20

1. $z = \cos^2\left(x^2 + y^2\right)$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.
2. $z = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$. Найти dz.
3. $\sin xy - e^{xy} - x^2 y = 0$. Найти $\dfrac{dy}{dx}$.
4. $u = \dfrac{e^{xt}}{x + t}$. Найти $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$.
5. Исследовать на экстремум: $z = x^3 + y^3 - 3xy$.
6. $z = arctg(x + y), \quad \vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j}$. Найти $\dfrac{dz}{da}, \quad gradz$.
7. Найти область определения функции $z = \sqrt{9 - 9x - y^2}$.

8. Вычислить приближенно $\ln\left(\sqrt[3]{1,03}+\sqrt[4]{0,98}-1\right)$.

9. $z=\dfrac{x+y}{x-y}, \quad x=e^{t}, \quad y=e^{2t}+1$. Найти $\dfrac{dz}{dt}$.

10. $z=\dfrac{x}{y^{2}}, \quad x=t^{2}-v, \quad y=\sqrt{t}+v$. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial t}, \quad \dfrac{\partial z}{\partial v}$.

11.Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

4. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.

Отыскание функции $F(x)$ по известному ее дифференциалу $dF(x)=f(x)dx$ (или по известной ее производной $F'(x)=f(x)$), т. е. действие, обратное дифференцированию, называется интегрированием, а искомая функция $F(x)$ называется первообразной функцией от функции $f(x)$.

Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество различных первообразных функций, которые отличаются друг от друга постоянным слагаемым: если $F(x)$ есть первообразная от $f(x)$, то и $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная, есть также первообразная от $f(x)$, так как $\left(F(x)+C\right)'=f(x)$.

Общее выражение $F(x)+C$ *совокупности всех первообразных от функции* $f(x)$ *называется неопределенным интегралом от этой искомой функции* и обозначается знаком $\int$: $\int f(x)dx=F(x)+C$, если $d\left[F(x)+C\right]=f(x)dx$.

Свойства неопределенного интеграла.

1. $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right]=f(x)$ или $d\int f(x)dx=f(x)dx$.
2. $\int F'(x)dx=F(x)+C$ или $\int dF(x)dx=F(x)+C$.
3. $\int af(x)dx=a\int f(x)dx$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.
4. $\int (f_1(x)+f_2(x)-f_3(x))dx=\int f_1(x)dx+\int f_2(x)dx-\int f_3(x)dx$, т.е. интеграл от суммы равен сумме интегралов от всех слагаемых.

Основные формулы интегрирования (таблица интегралов):

1. $\int dx=x+C$.
2. $\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C,\alpha\neq-1$.
3. $\int\frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
4. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.
5. $\int e^x dx=e^x+C$.
6. $\int\sin xdx=-\cos x+C$.
7. $\int\cos xdx=\sin x+C$.
8. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$.
9. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$.
10. $\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$.
11. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a.}{x+a}\right|+C$.
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.
13. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

Справедливость формул интегрирования, а также и каждый результат интегрирования можно проверить путем дифференцирования.

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Метод непосредственного интегрирования

Данный метод заключается в том, что искомый интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличных интегралов.

Например.

Пример 1. $\int(3x^2-2x+5)dx=3\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx=3\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+5x+C$.

Пример 2. $\int\frac{2x^3+\sqrt{x}-1}{x^4}dx=2\int\frac{x^3}{x^4}dx+\int\frac{\sqrt{x}}{x^4}dx-\int\frac{dx}{x^4}=2\int\frac{dx}{x}+\int x^{-\frac{7}{2}}dx-$

$-\int x^{-4}dx=2\ln|x|+\frac{x^{-\frac{5}{2}}}{-\frac{5}{2}}-\frac{x^{-3}}{-3}+C=2\ln|x|-\frac{2}{5\sqrt{x^5}}+\frac{1}{3x^3}+C$.

Пример 3. $\int\left(1+e^x\right)^2dx=\int\left(1+2e^x+e^{2x}\right)dx=\int dx+2\int e^xdx+\int\left(e^2\right)^x dx=$

$=x+2e^2+\frac{\left(e^2\right)^x}{\ln e^2}+C=x+2e^x+\frac{e^{2x}}{2}+C$.

Пример 4. $\int\frac{x^2}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int\frac{x^2+1}{x^2+1}dx-\int\frac{dx}{x^2+1}=\int dx-arctgx=$
$=x-arctgx+C$.

Пример 5. $\int ctg^2xdx=\int\frac{\cos^2x}{\sin^2x}dx=\int\frac{1-\sin^2x}{\sin^2x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2x}-\int\frac{\sin^2x}{\sin^2x}dx=$
$=-ctgx-x+C$.

Интегрирование методом замены переменной

Метод интегрирования заменой переменной заключается в введении новой переменной интегрирования. При этом искомый интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или приводящимся к нему.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f\left(x\right)dx$. Сделаем замену $x=\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ - функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx=\varphi'\left(t\right)dt$ и $\int f\left(x\right)dx=\int f\left(\varphi(t)\right)\varphi'\left(t\right)dt$.

Пример 6. $\int 4^{3x-1}dx = \left[\begin{array}{l} 3x-1=t \\ 3dx=dt \\ dx=\dfrac{dt}{3} \end{array}\right] = \int 4^t \dfrac{dt}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4^t}{\ln 4}+C = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4^{3x-1}}{\ln 4}+C$.

Пример 7. $\int \dfrac{xdx}{\left(x^2+2\right)^2} = \left[\begin{array}{l} x^2+2=t \\ d\left(x^2+2\right)=dt \\ 2xdx=dt \\ xdx=\dfrac{dt}{2} \end{array}\right] = \int \dfrac{\frac{dt}{2}}{t^2} = \dfrac{1}{2}\int t^{-2}dt = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t^{-1}}{-1}+C=$

$=-\dfrac{1}{2t}+C=\dfrac{1}{2\left(x^2+2\right)}+C$.

Пример 8. $\int \dfrac{\sin xdx}{\sqrt{1+5\cos x}} = \left[\begin{array}{l} 1+5\cos x=t \\ d\left(1+5\cos x\right)=dt \\ -5\sin xdx=dt \\ \sin xdx=-\dfrac{dt}{5} \end{array}\right] = \int \dfrac{-\frac{dt}{5}}{\sqrt{t}} = -\dfrac{1}{5}\int t^{-\frac{1}{2}}dt=$

$=-\dfrac{1}{5}\dfrac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C=-\dfrac{2}{5}\sqrt{1+5\cos x}+C$.

Пример 9. $\int \dfrac{\arcsin^3 xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin x=t \\ d\left(\arcsin x\right)=dt \\ \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt \end{array}\right] = \int t^3dt=\dfrac{t^4}{4}+C=\dfrac{\arcsin^4 x}{4}+C$.

Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом, в виде произведения двух сомножителей u и dv, затем после нахождения v и du используется формула интегрирования по частям. Иногда формулу приходится использовать несколько раз.

$$\int f(x)\cdot g(x)dx = \left[\begin{array}{ll} u=f(x) & dv=g(x)dx \\ du=f'(x)dx & v=\int g(x)dx \end{array}\right].$$

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно находить методом интегрирования по частям.

1. $\int P(x)\cdot a^{kx}dx; \int P(x)\cdot e^{kx}dx; \int P(x)\cdot \sin kxdx; \int P(x)\cdot \cos kxdx$, где $P(x)$-многочлен, k-число. В этом случае $u=P(x)$ за dv - все остальные сомножители.

2. $\int P(x)\cdot \arcsin kxdx; \int P(x)\cdot \arccos kxdx; \int P(x)\cdot arctgkxdx; \int P(x)\cdot arcctgkxdx;$ $\int P(x)\cdot \ln kxdx$. В данном случае $P(x)dx=dv$, за u - все остальные сомножители.

Пример 10. $\int x\cos xdx = \begin{bmatrix} u=x & dv=\cos xdx \\ du=dx & v=\sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int \sin xdx =$

$$= x\sin x + \cos x + C.$$

Пример 11. $\int \frac{\ln xdx}{x^3} = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv=\frac{dx}{x^3} \\ du=\frac{dx}{x} & v=-\frac{1}{2x^2} \end{bmatrix} = -\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} =$

$$= -\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x^2}+C.$$

Пример 12. $\int xarctgxdx = \begin{bmatrix} u=arctgx & dv=xdx \\ du=\frac{dx}{1+x^2} & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \frac{x^2arctgx}{2} -$

$$-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2arctgx}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \frac{x^2arctgx}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{x^2+1}{1+x^2}dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{1+x^2} = \frac{x^2arctgx}{2}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Пример 13 $\int \arcsin xdx = \begin{bmatrix} u=\arcsin x & dv=dx \\ du=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v=x \end{bmatrix} = x\arcsin x - \int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$$= \begin{bmatrix} 1-x^2=t \\ d\left(1-x^2\right)=dt \\ -2xdx=dt \\ xdx=-\frac{dt}{2} \end{bmatrix} = x\arcsin x+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = x\arcsin x+\frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt = x\arcsin x +$$

$$+\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+C = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 14. $\int x^2e^{3x}dx=\begin{bmatrix} u=x^2 & dv=e^{3x}dx \\ d=2xdx & v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{bmatrix}=\dfrac{x^2e^{3x}}{3}-\dfrac{2}{3}\int xe^{3x}dx=$

$$=\begin{bmatrix} u=x & dv=e^{3x}dx \\ du=dx & v=\dfrac{1}{3}e^{3x}\end{bmatrix}=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2}{3}\left(\frac{xe^{3x}}{3}-\frac{1}{3}\int e^{3x}dx\right)=$$

$$=\frac{x^2e^{3x}}{3}-\frac{2xe^{3x}}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{e^{3x}}{3}+C.$$

2.4. Интегралы от функций, содержащих квадратный трехчлен

Для отыскания интеграла $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}dx$ и преобразования его к формулам интегрирования следует сначала выделить полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=$$

$$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right).$$

Затем сделать замену переменной $\begin{bmatrix} x+\dfrac{b}{2a}=t \\ x=t-\dfrac{b}{2a} \\ dx=dt\end{bmatrix}$.

Пример 15.

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+8}=\int\frac{dx}{x^2+4x+4-4+8}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+4}=\begin{bmatrix} x+2=t \\ x=t-2 \\ dx=dt\end{bmatrix}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4}=\frac{1}{2}arctg\frac{t}{2}+C=\frac{1}{2}arctg\frac{x+2}{2}+C.$$

Пример 16. $\int\frac{7-8x}{2x^2-3x+1}dx=\int\frac{7-8x}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)}dx=$

$$=\int\frac{7-8x}{2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}-\frac{9}{16}+\frac{1}{2}\right)}dx=$$

$$=\int \frac{7-8x}{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)}dx=\begin{bmatrix} x-\frac{3}{4}=t \\ x=t+\frac{3}{4} \\ dx=dt \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\int \frac{7-8\left(t+\frac{3}{4}\right)}{t^2-\frac{1}{16}}dt=\frac{1}{2}\int \frac{1-8t}{t^2-\frac{1}{16}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2-\frac{1}{16}}-2\int \frac{2tdt}{t^2-\frac{1}{6}}=\begin{bmatrix} t^2-\frac{1}{16}=z \\ d\left(t^2-\frac{1}{16}\right)=dz \\ 2tdt=dz \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}\ln\left|\frac{t-\frac{1}{4}}{t+\frac{1}{4}}\right|-2\int \frac{dz}{z}=$$

$$=\ln\left|\frac{x-\frac{3}{4}-\frac{1}{4}}{x-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}\right|-2\ln|z|+C=\ln\left|\frac{x-1}{x-\frac{1}{2}}\right|-2\ln\left|\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right|+C.$$

Пример 17. $\int \frac{3x-2}{x^2+6x+9}dx=\int \frac{3x-2}{(x+3)^2}dx=\begin{bmatrix} x+3=t \\ x=t-3 \\ dx=dt \end{bmatrix}=\int \frac{3(t-3)-2}{t^2}dt=$

$$=\int \frac{3t-11}{t^2}dt=3\int \frac{t}{t^2}dt-11\int \frac{dt}{t^2}=3\int \frac{dt}{t}-11\int t^{-2}dt=3\ln|t|-11\cdot\frac{t^{-1}}{-1}+C=$$

$$=3\ln|x+3|+\frac{11}{x+3}+C.$$

4.1 Варианты заданий для самостоятельной работы
Вариант 1

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4}$.
2. $\int x\cdot arctgx\cdot dx$.
3. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$.
4. $\int \frac{x}{x^4-1}dx$.
5. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}dx$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3+4x-4x^2}}$.
7. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}dx$.

Вариант 2

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $\int x \ln xdx$.
3. $\int \frac{dx}{2x^2-3x+1}$.
4. $\int \frac{dx}{1+x^3}$.
5. $\int \sin^3 x \cos^2 xdx$.
6. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.
7. $\int \frac{\sin^4 xdx}{\cos^2 x}$.

Вариант 3

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{x^2dx}{x^6+4}$.
2. $\int x3^x dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$.
4. $\int \frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}dx$.
5. $\int x^3 \ln xdx$.
6. $\int \frac{xdx}{(x-1)(x+3)(x+5)}$
7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}dx$.

Вариант 4

Вычислить интегралы:

1. $\int e^{\sin x} \cdot \cos xdx$.
2. $\int xe^{-x}dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.
4. $\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.
5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-3x^2}}$.
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-7x-3x^2}}$.
7. $\int \sin^2 x \cdot \cos^3 xdx$.

Вариант 5

Вычислить интегралы:

1. $\int xe^{x^2}dx$.

2. $\int x\cos xdx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-12x+2}}$.

4. $\int \frac{dx}{x\left(x^2+1\right)}$.

5. $\int xarctgxdx$.

6. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

7. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^3 x}$.

Вариант 6

Вычислить интегралы:

1. $\int e^{-x^3}x^2dx$.

2. $\int x\sin 2xdx$.

3. $\int \frac{11dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

4. $\int \frac{x^2+1}{x^3-x^2}dx$.

5. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}dx$.

6. $\int \frac{3x-7}{(x-3)(x+2)}dx$.

7. $\int \cos^2 3xdx$.

Вариант 7

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{(arctgx)^2}{1+x^2}dx$.

2. $\int (x+2)arctgxdx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$.

4. $\int \frac{x^2-3x+2}{x\left(x^2+2x+1\right)}dx$.

5. $\int \cos^3 xdx$.

6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+3}}$.

7. $\int ctg^4 xdx$.

Вариант 8

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{1+tgx}}{\cos^2 x} dx$.
2. $\int x \ln(2x-3) dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-6x+2}}$.
4. $\int \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2 \frac{dx}{x}$.
5. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^2-4x}$.
6. $\int \sin x \cdot \sin 3x dx$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

Вариант 9

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}+4}$.
2. $\int \ln(x^2+1) dx$.
3. $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$.
4. $\int \frac{32x dx}{(2x-1)(4x^2-16x+15)}$.
5. $\int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x}$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$.
7. $\int \frac{dx}{tg^2 x}$.

Вариант 10

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx$.
2. $\int e^x \sin x dx$.
3. $\int \frac{(x+2) dx}{x^2+2x+2}$.
4. $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$.
5. $\int \cos^2 x \sin x dx$.
6. $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx$.
7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Вариант 11

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$.

2. $\int (x+1)5^x \, dx$.

3. $\int \frac{(x-3)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$.

4. $\int \frac{xdx}{x^4 - 3x^2 + 2}$.

5. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} dx$.

6. $\int \frac{3x+2}{x^2 - 4x + 3} dx$.

7. $\int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

Вариант 12

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$.

2. $\int x e^{3x} dx$.

3. $\int \frac{3x-1}{4x^2 - 4x + 17} dx$.

4. $\int \frac{xdx}{2x^2 - 3x - 2}$.

5. $\int (1-\cos x)^3 \sin x dx$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 2x - 1}}$.

7. $\int \frac{\sin x dx}{(1-\cos x)^2}$.

Вариант 13

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

2. $\int (x^2 + 2x) \ln x dx$.

3. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx$.

4. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

5. $\int \frac{5dx}{2x+1}$.

6. $\int x e^{3x} dx$.

7. $\int \cos^4 x dx$.

Вариант 14

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-4^x}}$.

2. $\int \frac{x-1}{x^2-7x+12} dx$.

3. $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x} dx$.

4. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$.

5. $\int \cos\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{x}{3} dx$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}}$.

7. $\int \arccos x dx$.

Вариант 15

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[4]{\cos^3 x}}$.

2. $\int arctgx dx$.

3. $\int \frac{4-3x}{5x^2+6x+18} dx$.

4. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx$.

5. $\int \frac{x+2}{x(x-3)} dx$.

6. $\int x^3 \ln x dx$.

7. $\int ctg^3 x dx$.

Вариант 16

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{(arctgx)^3 dx}{1+x^2}$.

2. $\int xtgx dx$.

3. $\int \frac{2x+5}{\sqrt{9x^2+6x+2}} dx$.

4. $\int \frac{dx}{(x+5)(3x-4)}$.

5. $\int \frac{x^2}{(x^3-5)^4} dx$.

6. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

7. $\int \cos^4 x dx$.

Вариант 17

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}$.

2. $\int x^2 e^x dx$.

3. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$.

5. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$.

6. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$.

7. $\int \sqrt{9-x^2} dx$.

Вариант 18

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x\cos^2(1+\ln x)}$.

2. $\int x\ln(2x+1)dx$.

3. $\int \frac{3-4x}{2x^2-3x+1}dx$.

4. $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$.

5. $\int \frac{dx}{x^2-6x+18}$.

6. $\int \frac{x^3+x^2}{x^2-6x+5} dx$.

7. $\int \frac{x^2-3x+1}{x(x^2+2x+1)}dx$.

Вариант 19

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

2. $\int x^2 \ln(1+x)dx$.

3. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+6x-5}}$.

4. $\int \frac{xdx}{x^3-1}$.

5. $\int x^2(1-2x^3)^4 dx$.

6. $\int \arccos xdx$.

7. $\int \frac{\cos xdx}{(1-\cos x)^2}$.

Вариант 20

Вычислить интегралы:

1. $\int \frac{e^x dx}{\sin^2 e^x}$.

2. $\int (2x+1)\sin x dx$.

3. $\int \frac{(1+x)dx}{x^2-7x+12}$.

4. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x} dx$.

5. $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$.

6. $\int x \cdot arctgx \cdot dx$.

7. $\int e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}$.

5. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Понятие определенного интеграла и его свойства

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и если:

1) разделить этот отрезок произвольным способом на n частичных отрезков длиною $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \ldots, \Delta x_n$;

2) выбрать в каждом частичном отрезке по одной произвольной точке $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$;

3) вычислить значения функции $f(x)$ в выбранных точках и составить сумму $f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, то она называется интегральной суммой функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

По-разному деля отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков и по-разному выбирая в них по одной точке ξ_i, можно для всякой заданной функции $f(x)$ и всякого заданного отрезка $[a;b]$ составить бесчисленное множество различных интегральных сумм. При этом оказывается, что все эти различные интегральные суммы при неограниченном возрастании n и при стремлении к нулю наибольшей из длин частичных отрезков имеют один общий предел. Этот общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется определенным интегралом от $f(x)$ в пределах от a до b и обозначается $\int_a^b f(x)dx$.

Свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов интегрирования изменяется знак интеграла: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. Интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Отрезок интегрирования можно разбивать на части: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

4. Интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых: $\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_3(x)dx$.

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла: $\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$.

Для вычисления определенного интеграла, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл, служит формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, - определенный интеграл равен разности значений неопределенного интеграла при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Для вычисления многих определенных интегралов полезно заменять переменную интегрирования. При этом, если определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ преобразуется при помощи подстановки $x = \varphi(t)$ (или $t = \psi(x)$) в другой интеграл, с новой переменной интегрирования t, то заданные пределы $x_1 = a$ и $x_2 = b$ заменяются новыми пределами $t_1 = \alpha$ и $t_2 = \beta$, которые определяются из исходной подстановки, т.е. из уравнений $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$ (или $\alpha = \psi(a), \beta = \psi(b)$). Если $\varphi'(t)$ и $f(\varphi(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, то имеет место формула интегрирования по частям

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Пример 18. $\int_2^3 3x^2dx = 3\dfrac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$.

Пример 19.

$$\int_0^4\left(1+e^{\frac{x}{4}}\right)dx = \int_0^4 dx + \int_0^4 e^{\frac{x}{4}}dx = \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{4} = t \\ \dfrac{1}{4}dx = dt \\ dx = 4dt \\ \begin{array}{ccc} x & 0 & 4 \\ t & 0 & 1 \end{array} \end{array}\right] = x\Big|_0^4 + 4\int_0^1 e^t dt = 4 + 4e^t\Big|_0^1 =$$

$$= 4 + 4\left(e - e^0\right) = 4 + 4e - 4 = 4e.$$

Пример 20. $\int\limits_{-1}^{7}\frac{dx}{\sqrt{3x+4}}=\left[\begin{array}{l|c|c} 3x+4=t & & \\ 3dx=dt & & \\ dx=\dfrac{dt}{3} & & \\ x & -1 & 7 \\ \hline t & 1 & 25 \end{array}\right]=\frac{1}{3}\int\limits_{1}^{25}\frac{dt}{\sqrt{t}}=\left.\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_{1}^{25}=\frac{2}{3}\left(\sqrt{25}-\sqrt{1}\right)=$

$$=\frac{2}{3}(5-1)=\frac{8}{3}.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы.

Пример 21. $\int\limits_{1}^{e^4}\sqrt{x}\ln xdx$.

Решение. Положим $u=\ln x$, $dx=\sqrt{x}dx$, тогда $du=(1/x)dx$, $v=(2/3)x\sqrt{x}$. Отсюда по формуле (…) получим

$$\int\limits_{1}^{e^4}\sqrt{x}\ln xdx=\left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\ln x\right|_{1}^{e^4}-\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e^4}x\sqrt{x}\frac{dx}{x}=$$

$$=\frac{2}{3}e^6\cdot 4\frac{2}{3}\int\limits_{1}^{e^4}\sqrt{x}dx=\frac{8}{3}e^6-\frac{2}{3}\cdot\left.\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right|_{1}^{e^4}=\frac{8}{3}e^6-\left(\frac{4}{9}e^6-\frac{4}{9}\right)=\frac{4}{9}\left(5e^6+1\right).$$

Пример 22. $\int\limits_{0}^{\pi/6}(2-x)\sin 3xdx$.

Решение. Пусть $u=2-x$, $dv=\sin 3xdx$; отсюда $du=-dx$, $v=(-1/3)\cos 3x$. Следовательно,

$$\int\limits_{0}^{\pi/6}(2-x)\sin 3xdx=-\left.\frac{1}{3}(2-x)\cos 3x\right|_{0}^{\pi/6}-\frac{1}{3}\int\limits_{0}^{\pi/6}\cos 3xdx=$$

$$=\left.\left[\frac{1}{3}(x-2)\cos 3x-\frac{1}{9}\sin 3x\right]\right|_{0}^{\pi/6}=-\frac{1}{3}(-2)-\frac{1}{9}=\frac{5}{9}.$$

Геометрические приложения определенного интеграла

Площадь плоской фигуры.

Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Ox и расположенной над осью, рис. 1, площадь выражается интегралом

$$S=\int\limits_{a}^{b}ydx=\int\limits_{a}^{b}f(x)dx\ . \tag{3.1}$$

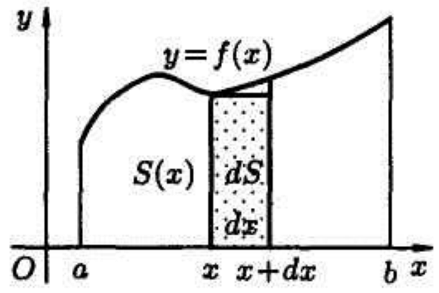


Рис. 1

Если криволинейная трапеция расположена под осью Ox, то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S=-\int_a^b ydx=-\int_a^b f(x)dx. \tag{3.2}$$

Для криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy и расположенной над осью, рис. 2, площадь выражается интегралом

$$S=\int_c^d xdy=\int_c^d \varphi(y)dy. \tag{3.3}$$

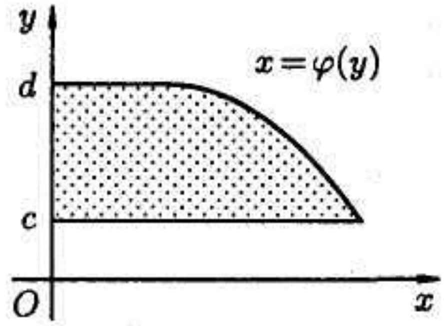


Рис. 2

Если криволинейная трапеция расположена под осью Oy, то ее площадь может быть найдена по формуле

$$S=-\int_c^d xdy=-\int_c^d \varphi(y)dy. \tag{3.4}$$

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$, прямыми $x=x_1$ и $x=x_2$ (при условии, что $f_2(x)\geq f_1(x)$), рис.3, можно найти по формуле

$$S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))dx. \tag{3.5}$$

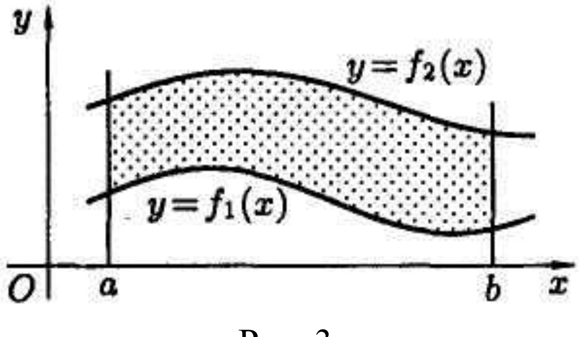


Рис. 3

Если плоская фигура имеет “сложную” форму (рис. 4), то прямыми, параллельными оси Oy, ее следует разбить на части так, чтобы можно было применить уже известные формулы.

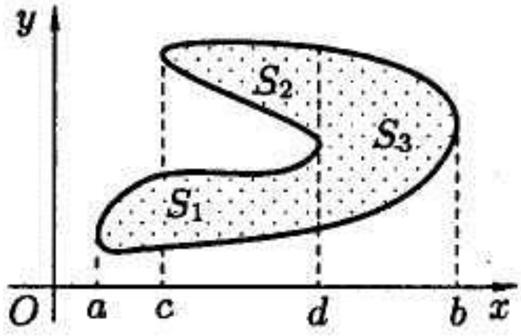


Рис. 4

Пример 23. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 1$, прямыми $x = -1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

Решение. На основании формулы (3.1) получим

$$S = \int_{-1}^{2} \left(x^2 + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]\Bigg|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} + 2\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1\right) = 6 \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 24. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x + 2y - 8 = 0$, $y = 1$, $y = 3$ и осью ординат.

Решение. Для вычисления искомой площади снова воспользуемся формулой (3.3), учитывая, что здесь изменены роли осей координат (рис. 5):

$$S = \int_{1}^{3} f\left(y\right) dy = \int_{1}^{3} \left(8 - 2y\right) dy = \left[8y - y^2\right]\Big|_{1}^{3} = 15 - 7 = 8 \text{ (кв. ед.).}$$

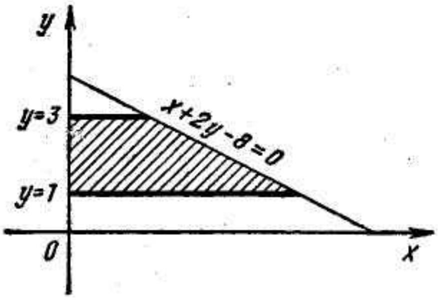


Рис. 5

Пример 25. Вычислить площадь фигуры, ограниченной цепной линией $y = \left(e^x + e^{-x}\right)/2$, прямыми $x = -1$, $x = 1$ и осью абсцисс.

Решение. Данная фигура состоит из двух симметричных относительно оси *Ox* криволинейных трапеций; поэтому достаточно вычислить половину искомой площади и результат удвоить:

$$S = 2\int_{0}^{1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \int_{0}^{1} \left(e^x + e^{-x}\right) dx = \left[e^x - e^{-x}\right]\Big|_{0}^{1} = e - \frac{1}{e} \approx 1{,}45 \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 26. Вычислить площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y=1/x$, прямыми $x=-6$, $x=-2$ и осью абсцисс.

Решение. На отрезке $[-6,\ -2]$ функция $x(x)=1/x$ отрицательна. Поэтому для вычисления площади рассматриваемой фигуры следует воспользоваться формулой (3.1)

$$S=-\int_{-6}^{-2}\frac{1}{x}dx=\left(-\ln|x|\right)\Big|_{-6}^{-2}=-\left(\ln 2-\ln 6\right)=\ln 3\approx 1{,}1.\ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 27. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2-2x+3$, осями координат и прямой $x=2$.

Решение. В рассматриваемом случае функция $f(x)=-x^2-2x+3$ на отрезке $[0,2]$ меняет знак (рис. 6), а именно $f(x)\ge 0$ на отрезке $[0,1]$ и $f(x)\le 0$ на отрезке $[1,2]$. Для нахождения искомой площади воспользуемся формулой $S=\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)\right|dx$:

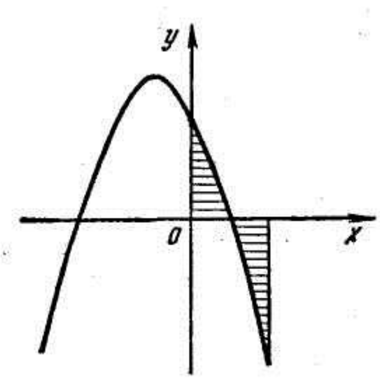


Рис. 6

$$S=\int_0^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=\int_0^1\left|-x^2-2x+3\right|dx+\int_1^2\left|-x^2-2x+3\right|dx=$$

$$=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^2\left(-x^2-2x+3\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]\Bigg|_0^1-\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]\Bigg|_1^2=\frac{5}{3}-\left(-\frac{7}{3}\right)=4\ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 28. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+4x$ и прямой $x-y+4=0$.

Решение. Решая совместно уравнения, определяющие данные линии, получим $x_1 = -4$ и $x_2 = 1$ (рис. 7). Площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 4x$ и прямой $y = x + 4$, находим по формуле (3.5):

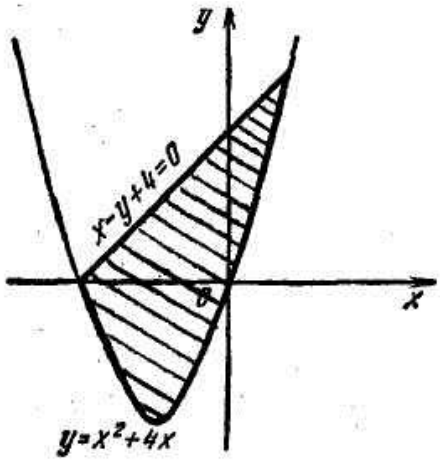


Рис. 7

$$S = \int_{-4}^{1}\left[\left(x+4\right)-\left(x^2+4x\right)\right]dx = \int_{-4}^{1}\left(4-3x-x^2\right)dx =$$

$$= \left[4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_{-4}^{1} = \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3}\right) = \frac{125}{6} \text{ (кв. ед.).}$$

Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $y = f\left(x\right)$, осью абсцисс и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ $\left(a < b\right)$ (рис. 8), находится по формуле

$$V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b \left[f\left(x\right)\right]^2 dx. \tag{3.6}$$

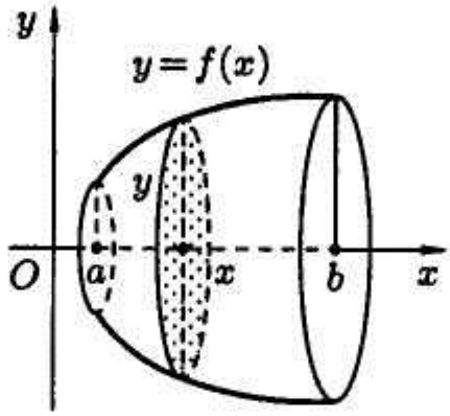


Рис. 8

Аналогично, объем тела вращения вокруг оси Oy криволинейной трапеции, ограниченной непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат и двумя прямыми $y=c$ и $y=d$ $(c<d)$, вычисляется по формуле

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\left[\varphi(y)\right]^2dy. \qquad (3.7)$$

Пример 29. Вычислить объем тела, которое получается при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $y=4/x$, прямыми $x=3$, $x=12$ и осью абсцисс.

Решение. Пользуясь формулой (3.6), находим

$$V_x=\pi\int_3^{12}\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=16\pi\int_3^{12}\frac{dx}{x^2}=-16\pi\cdot\frac{1}{x}\bigg|_3^{12}=-16\pi\left(\frac{1}{12}-\frac{1}{3}\right)=4\pi \text{ (куб. ед.).}$$

Пример 30. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $y=x^3$ и отрезком $0\le y\le 8$ оси ординат.

Решение. Записав уравнение данной кривой в виде $x=\sqrt[3]{y}$, используя формулу (3.7.), получим

$$V_y=\pi\int_0^8\sqrt[3]{y^2}dy=\frac{3}{5}\pi y^{5/3}\bigg|_0^8=\frac{96\pi}{5} \text{ (куб. ед.).}$$

Несобственные интегралы

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования $[a;b]$ конечный, а подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, называют еще собственным интегралом.

Рассмотрим *несобственные интегралы*, т.е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом первого рода и обозначают $\int_a^{+\infty}f(x)dx$.

Таким образом, по определению $\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл сходится. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty;b]$: $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, где c-произвольное число. В этом случае интеграл в левой части сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла в правой части.

Пример 31. $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-x}dx = -\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} e^{-x}d(-x) =$

$$= -\lim_{b\to+\infty} e^{-x}\Big|_0^b = -\lim_{b\to+\infty}\left(e^{-b} - e^{0}\right) = 1.$$

Следовательно, данный несобственный интеграл сходится.

Пример 32. $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} \frac{2xdx}{x^2+1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{2}^{b} \frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_2^b = \frac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\ln\left(b^2+1\right) - \ln 5\right) = \infty$; это означает, что интеграл расходится.

Пример **33.** $\int\limits_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b} xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-xe^{-x}\Big|_0^b - e^{-x}\Big|_0^b\right) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-be^{-b} - e^{-b} + 1\right) = -\lim_{b\to+\infty} be^{-b} - \lim_{b\to+\infty} e^{-b} + 1 = -\lim_{b\to+\infty}\frac{b}{e^b} - 0 + 1 =$$

$$= -\lim_{b\to+\infty}\frac{(b)'}{\left(e^b\right)'} + 1 = -\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{e^b} + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Это означает, что интеграл сходится.

Пример 34. $\int\limits_{-\infty}^{1} \frac{dx}{(2x+1)^3} = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} \frac{d(2x+3)}{(2x+3)^3} = \frac{1}{2}\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{1} (2x+3)^{-3} d(2x+3) =$

$$=\frac{1}{2}\lim_{a\to-\infty}\frac{(2x+3)}{-2}\Bigg|_a^1=-\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{(2x+3)^2}\Bigg|_a^1=$$

$$=-\frac{1}{4}\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{(2a+3)^2}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{25}-0\right)=-\frac{1}{100}.$$

Это означает, что интеграл сходится.

Несобственные интегралы от разрывной функции
(несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ не определена на промежутке $[a;b]$ и имеет бесконечный разрыв при $x=b$. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to b-0}\int\limits_a^{\varepsilon} f(x)dx$, то его называют несобственным интегралом II рода, и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$. Таким образом,

$$\left[\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to b-0}\int_a^{\varepsilon} f(x)dx\right].$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл сходится. Если не существует или бесконечен, то – расходится.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x=a$, то

$$\left[\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to f+0}\int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx\right].$$

Если функция терпит разрыв во внутренней точке с отрезком $[a;b]$, то несобственный интеграл определяется формулой

$$\left[\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx\right].$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла справа сходятся.

Пример 35.

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to1-0}\int_0^{\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to1-0}\arcsin x\Big|_0^{\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to1-0}(\arcsin\varepsilon-\arcsin 0)=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2}.$$ Интеграл сходится.

Пример 36.

$$\int_0^1 x\ln x dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_0^1 x\ln x dx = \begin{bmatrix} u=\ln x & dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix} = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{x^2}{2}\cdot \ln x\Big|_\varepsilon^1 -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_\varepsilon^1 x^2\cdot\frac{dx}{x}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{1}{2}\ln 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_\varepsilon^1\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{\varepsilon^2}{2}\cdot\ln\varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\varepsilon^2\cdot\ln\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{4} + 0 = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{(\ln\varepsilon)'}{(\varepsilon^{-2})'} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-2\varepsilon^{-3}} - \frac{1}{4} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{\varepsilon\to 0+}\frac{\varepsilon^2}{-2} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}.$$ Интеграл сходится.

Пример 37.

$$\int_2^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^2}} = \int_2^3 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}} + \int_3^4 \frac{dx}{(3-x)^{2/3}} =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 3-0}\int_2^\varepsilon (3-x)^{-\frac{2}{3}} d(3-x) - \lim_{\varepsilon\to 3+0}\int_\varepsilon^4 (3-x)^{-\frac{2}{3}} d(3-x) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 3-0}\frac{3(3-x)^{\frac{1}{3}}}{1}\Bigg|_2^\varepsilon - \lim_{\varepsilon\to 3+0} 3(3-x)^{\frac{1}{3}}\Big|_\varepsilon^4 =$$

$$= -3\lim_{\varepsilon\to 3-0}\left((3-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} - 1\right) - 3\lim_{\varepsilon\to 3+0}\left(-1-(3-\varepsilon)^{\frac{1}{3}}\right) = \infty.$$ Интеграл сходится.

5.1 Варианты заданий для самостоятельной работы

Вариант 1

1. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}dx$.
2. $\int\limits_7^\infty \frac{dx}{x^4}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r=4(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.
4. Найти площадь, ограниченную линией $y=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$ и осью *OX*.
5. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}e^x$, $x=1$, $y=0$.

Вариант 2

1. $\int\limits_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.
2. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$.
3. Вычислить площадь шарового пояса, полученного при вращении вокруг оси *OX* дуги окружности $x^2+y^2=9$ между точками с абсциссами $x=-1$, $x=1$.
4. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y=4x-x^2$ и прямой $y=-x$.
5. Вычислить длину кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$.
6. В цилиндрический стакан с водой вложен параболоид вращения вершиной вниз. Основание и высота параболоида совпадают с основанием и высотой стакана. Найти объем оставшейся в стакане воды, если радиус основания *r*, высота *h*.

Вариант 3

1. $\int\limits_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$.
2. $\int\limits_0^\infty e^{-ax}dx$.
3. Определить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

4. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = x^2$, $y = \frac{x^3}{3}$.
5. Вычислить длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$.

Вариант 4

1. $\int\limits_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$ вокруг оси *OX*.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $x = y^2(y-1)$ и осью *OY*.
5. Найти длину логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$, где $m > 0$, находящейся внутри круга $r = a$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{64}{x^2+16}$, $x^2 = 8y$.

Вариант 5

1. $\int\limits_0^{16} \frac{dx}{\sqrt{x+9}-\sqrt{x}}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $y = x(x-1)^2$ и осью *OX*.
5. Уравнение эволюты (развертки) окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$. Найти длину эволюты при изменении *t* от 0 до *T*.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* и прямой $y = 1$.

Вариант 6

1. $\int\limits_0^1 (e^x-1)^4 \cdot e^x dx$.

2. $\int\limits_{2}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением первой арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг оси *OY*.
4. Найти площадь внутри эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.
5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки (4; 8).
6. Найти объем тела, полученного при вращении кардиоиды $r = 1 + \cos\varphi$ вокруг полярной оси.

Вариант 7

1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$.
2. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2\left(x+1\right)}$.
3. Найти площадь поверхности, образуемой вращением астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $a > 0$ вокруг оси *OX*.
4. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y = x - x^2\sqrt{x}$, $y = 0$.
5. Найти длину кривой $r = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, которая описывается точкой при изменении φ от 0 до $\frac{3\pi}{2}$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, заключенной между параболами $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

Вариант 8

1. $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.
2. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x}{\left(1+x\right)^3}dx$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* кривой $9y^2 = x\left(3-x\right)^2$, $x \le 2$.
4. Найти площадь, ограниченную линиями: окружностью $x^2 + y^2 = 4x$ и параболой $y^2 = 2x$.
5. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.
6. Найти площадь, ограниченную аркой циклоиды $x = 2\left(t - \sin t\right)$.

Вариант 9

1. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}dx}{x^2}$.
2. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.
3. Определить площадь поверхности, образованной вращением кривой $r = a^2 \cos\varphi$ вокруг полярной оси.
4. Найти площадь, ограниченную линиями $y^2 = x^3$, $x = 0$, $y = 4$.
5. Вычислить длину одной арки циклоиды $x = 4(t - \sin t)$, $y = 4(1 - \cos t)$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченные линиями $xy = 4$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$.

Вариант 10

1. $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}$.
2. $\int_0^{\infty} xe^{-x^2}dx$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = \frac{a}{2}(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.
4. Найти площадь, ограниченную линиями $y = x^3$, $y = x$, $y = 2x$.
5. Найти длину $L = L(x)$ параболы $y = t^2$ при $0 \le t \le x$.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

Вариант 11

1. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$.
2. $\int_0^{\infty} x^3 \cdot e^{-x^2}dx$.
3. Найти площадь поверхности , образованной вращением тангенсоиды $y = \mathrm{tg}x$ от точки с абсциссой $x = 0$ до точки с абсциссой $x = \frac{\pi}{4}$.
4. Найти площадь, ограниченную линиями $xy = 6$, $y = 7 - x$.
5. Найти длину архимедовой спирали $r = a\varphi$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.
6. Найти объем тела, полученного от вращения дуги параболы $y = x^2 - 4$, отсекаемой от нее осью *OX*, вокруг оси *OX*.

Вариант 12

1. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$.
2. $\int\limits_0^\infty x \cdot \sin x dx$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* дуги кривой $y = e^{-x}$, $x \geq 0$.
4. Найти площадь, ограниченную параболой $y = 6x - x^2$ и осью *OX*.
5. Вычислить длину астроиды $x = 3a\cos^3 t$, $y = 3a\sin^3 t$.
6. Определить объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси *OY*.

Вариант 13

1. $\int\limits_{-0,5}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$.
2. $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx$.
3. Вычислить площадь шарового пояса, полученного при вращении вокруг оси *OX* дуги окружности $x^2 + y^2 = 9$ между точками с абсциссами $x = -2$, $x = 2$.
4. Вычислить площадь, ограниченную линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.
5. Вычислить длину дуги кривой $x = 8\cos^3 t$, $y = 8\sin^3 t$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Вариант 14

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$.
2. $\int\limits_0^\infty e^{-x} \sin x dx$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* петли кривой $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$.

4. Вычислить площадь, ограниченную параболой $4y = 8x - x^2$ и прямой $4y = x + 6$.
5. Найти длину полукубической параболы $ay^2 = x^3$, где $a > 0$, от точки с абсциссой $x = 0$ до точки с абсциссой $x = a$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* тангенсоиды $y = \mathrm{tg}x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.

Вариант 15

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \cdot \sin 2x dx$.
2. $\int\limits_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ вокруг оси *OX*.
4. Найти площадь, ограниченную верхней частью эллипса $x = a\cos t$, $t = b\sin t$ и прямой $y = \frac{\sqrt{2}}{2} b$.
5. Найти длину петли кривой $9y^2 = x(3-x)^2$.
6. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$ и осью *OX*.

Вариант 16

1. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$.
2. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. Определить площадь поверхности образованной вращением вокруг оси *OX* дуги $y^2 = 4 + x$, отсеченной прямой $x = 2$.
4. Найти площадь, ограниченную эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, расположенную справа от прямой $x = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.
5. Найти длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.
6. Найти объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, вокруг оси *OY*.

Вариант 17

1. $\int\limits_0^1 x\cdot e^{-x}dx$.
2. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2-4x+3}$.
3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* дуги цепной линии $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ от точки с абсциссой $x=0$ до $x=0{,}5$.
4. Найти площадь, ограниченную эллипсом $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, осью *OY* и прямой $x=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.
5. Найти длину параболы $y=x^2$, $0\le x\le 0{,}5$.
6. Вычислять объем тела, образованного вращением вокруг оси *OX* фигуры, ограниченной линиями $y^2=2px$, $x=a$, $p>0$, $a>0$.

Вариант 18

1. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$.
2. $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{x-1}$.
3. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* части кривой $y=\sin x$ на отрезке, соответствующем $y=0{,}5$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.
4. Найти площадь, ограниченную линиями $x^2=8y$, $y^2=8x$.
5. Найти длину дуги кривой $y=\ln(2\cos x)$ между смежными точками пересечения с осями координат *OY* и *OX*.
6. Найти объем тела, полученного от вращения одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ вокруг оси *OX*.

Вариант 19

1. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

2. $\int_{0}^{1} x \cdot \ln x dx$.
3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси *OX* дуги параболы $y^2 = 4ax$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 3a$.
4. Найти площадь, ограниченную параболами $y^2 = 2x$, $x^2 = 2y$.
5. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от точки с ординатой $y = 1$ до точки с ординатой $y = e$.
6. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, $x = 0$, $y = 0$.

Вариант 20

1. $\int_{0}^{\pi} x^3 \sin x dx$.
2. $\int_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.
3. Кривая $y = x^3$, $0 \le x \le 1$ вращается вокруг оси *OX*. Найти площадь поверхности вращения.
4. Найти площадь, ограниченную кривой $y = \ln x$, осью *OX и прямой* $x = e^2$.
5. Найти длину $L = L(t)$ дуги цепной линии $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* фигуры, ограниченной линиями $y^2 + x - 4 = 0$, $x = 0$.

Список рекомендуемой литературы

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.- М.: Наука, 1969. - 439 с.

2. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т и др. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2003. - 576 с.: ил.

3. Подольский В.А., Суходский А.М. Сборник задач по математике для техников-программистов: Учебное пособие для техникумов. - М.: Высшая школа, 1978. – 352 с.: ил.

4. Шнейдер В.Е., Слуцкий А.И., Шумов А.С. Краткий курс высшей математики. Ч. 1. - М.: Высшая школа, 1978. - 384 с.

Ефременкова Ольга Валентиновна

ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Методическое пособие и варианты заданий
для студентов специальности
«Информационные системы и программирование»
на базе 11 классов

Подписано к печати 26.12.22. Формат 60x84 /16.
Усл. печ. л. 5,94. Тираж 25 экз. Заказ 221826. Рег. № 27.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.