МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

О.В. ЕФРЕМЕНКОВА

ОТДЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для студентов технических направлений всех форм обучения

Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом) ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по техническим направлениям

Рубцовск 2015

УДК 517.8

Ефременкова О.В. Отдельные главы математики: Учебное пособие для студентов технических направлений всех форм обучения/ Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2015. - 83с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов технических направлений. В пособии приводятся различные приложения математики и их применение при решении задач, которые играют большую роль в естественно-научных, инженерно-технических и гуманитарных исследованиях. Содержание задач затрагивает также и другие отрасли практических знаний, с которыми будущий инженер может столкнуться в своей практической деятельности. В целях облегчения самостоятельного решения, более сложные задачи снабжены указаниями, а в отдельных случаях - и полными решениями.

Рассмотрено и одобрено
на заседании НМС РИИ.
Протокол №6 от 25.09.2015г.

Рецензент:
к.т.н.

А.В. Шашок

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Математика выделяется среди всех наук своей универсальностью. Методы математического исследования составляют неотъемлемую часть практически всех наук. Математика работает во всех областях человеческой деятельности, и полученные результаты подтверждаются экспериментально. Применение математических методов исследования повышает объективную ценность научных знаний. Это обстоятельство накладывает на курс математики специфический оттенок. Данная дисциплина формирует у студентов творческо-исследовательский подход к будущей профессиональной деятельности специалиста, обладающего гибким научным мышлением.

1. КОМБИНАТОРИКА

1.1. Предмет комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного множества, в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемой комбинаторной конфигурацией.

Целью комбинаторики является изучение комбинаторных конфигураций, вопросы их существования, алгоритмы построения, решение задач на перечисление и подсчет количества.

Возникновение основных понятий и развитие комбинаторики шло параллельно с развитием других разделов математики, таких как алгебра, теория чисел, теория вероятностей, с которыми комбинаторика тесно связана. Некоторые факты комбинаторики были известны еще математикам Древнего Востока.

В XVI веке комбинаторные задачи касались в основном азартных игр – вопросов, сколькими способами можно выбросить данное число очков, бросая две или три игральные кости, или сколькими способами можно получить двух королей в данной карточной игре.

Одним из первых занялся изучением вопросов комбинаторики итальянский математик Тарталья. Рождение комбинаторики как раздела математики связано с трудами французских ученых Б. Паскаля и П. Ферма. Дальнейшее развитие комбинаторики связано с именами Бернулли, Лейбница и Эйлера.

В 50-х годах XX века интерес к комбинаторике возрождается в связи с бурным развитием вычислительной техники и дискретной математики. Комбинаторные методы используются для решения задач теории планирования и теории информации, а также для установления свойств и выявления применимости используемых алгоритмов.

1.2. Правило суммы и произведения

Большинство комбинаторных задач решаются с помощью двух основных правил: суммы и произведения.

Правило произведения

Задача 1.1.

В магазине «Все для чая» есть 5 разных чашек и 3 разных блюдца. Сколькими способами можно купить чашку с блюдцем?

Решение.

Чашку можно выбрать 5 способами. Для каждого способа выбора чашки существует 3 способа выбора блюдца. Таким образом, имеем $5 \cdot 3 = 15$ способов выбора пары предметов.

Если некоторый объект А можно выбрать m способами и если после каждого такого выбора объект В можно выбрать n способами, то выбор пары (А, В) можно осуществить m·n способами. Это утверждение называют правилом произведения.

Для доказательства правила произведения заметим, что каждый из m способов выбора объекта A можно совместить с n способами выбора объекта B. А это приводит к $m \cdot n$ способам выбора пары (A, B).

Может возникнуть ситуация, когда необходимо составить комбинацию из большего числа элементов.

Задача 1.2.

В магазине «Все для чая» есть еще 4 чайные ложки. Сколькими способами можно купить комплект из чашки, блюдца и ложки?

Решение.

Из решения предыдущей задачи известно, что существует $5 \cdot 3 = 15$ способов выбора пары предметов чашка – блюдце. Для каждого способа выбора этой пары существует 4 способа выбора ложки. Таким образом, по правилу произведения имеем $5 \cdot 3 \cdot 4 = 60$ способов выбора комплекта из чашки, блюдца и ложки.

Правило суммы

Задача 1.3.

Из города $А$ в город $Б$ ведет 6 дорог, а из города $Б$ в город $В$ – 4 дороги, из города $А$ в город $Г$ – 2 дороги, и из города $Г$ в город $В$ – тоже 2 дороги. Сколькими способами можно проехать от $А$ до $В$?

Решение.

Из города А в город В можно попасть либо через город Б, либо через город Г. По правилу произведения через город Б можно проехать $6 \cdot 4 = 24$ способами, через город Г – $2 \cdot 2 = 4$ способами. Тогда из города А в город В можно попасть $24 + 4 = 28$ способами.

Часто удается разбить все изучаемые комбинации на несколько классов, причем каждая комбинация входит в один и только один класс. В этом случае общее число комбинаций равно сумме чисел комбинаций во всех классах. Это утверждение называют правилом суммы.

Если некоторый объект А можно выбрать m способами, а другой объект В можно выбрать n способами, то выбор «либо А, либо В» можно осуществить m+n способами.

При использовании правила суммы необходимо следить, чтобы ни один из способов выбора объекта *А* не совпадал с каким-нибудь способом выбора объекта В.

В рассмотренной выше задаче число выборов после каждого шага зависит от того, какие элементы были выбраны на предыдущих шагах. Рассмотрим пример ещё одной такой задачи.

Задача 1.4.

Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая по правилам игры комбинация?

Решение.

Шахматное поле имеет 64 клетки, поэтому белого короля можно поставить 64 способами. Как известно, король бьет клетки, расположенные непосредственно рядом с ним. Таким образом, если король находится в углу, то под боем находятся 3 клетки, если у стены, то – 5, если в центре, то – 8. Очевидно, что ставить черного короля нельзя в ту же клетку, где находится белый король, и в клетку, которая находится под боем. Так как существует 4 способа поставить короля в угол, 24 способа – у стены и 36 способов – в центре поля, то ответ на вопрос задачи вычисляется следующим образом: $4\cdot(64-4)+24\cdot(64-6)+36\cdot(64-9)=3612$.

Рассмотрим теперь вопрос, как вычислить количество способов выбора объекта «либо А, либо В», если известно, что некоторые из способов выбора объекта А совпадают с некоторыми способами выбора объекта В.

1.3. Формула включения и исключения

Задача 1.5.

Из-за различия программ в школах Ярославской области студенты первого курса физико-математического факультета разделились на следующие группы: 47 человек знают алгоритмический язык, 35 – язык программирования Паскаль и 23 – оба языка программирования. Сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

Решение.

Разобьем всех студентов на группы. Первую из них составят те, кто знает только алгоритмический язык, вторую – те, кто знает только Паскаль, третью – те, кто знает оба языка, четвертую – те, кто не знает ни одного.

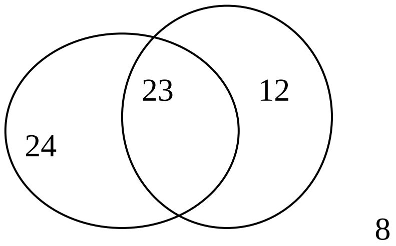


Рис. 1.1

Количество студентов, знающих хотя бы один язык программирования, можно записать в виде

59=23+24+12=23+(47-23)+(35-23)=47+35-23.

Таким образом, к числу студентов, знающих алгоритмический язык, необходимо прибавить число знающих язык Паскаль. При этом некоторые студенты попадают в оба списка и оказываются «прибавленными дважды». Это как раз те, которые знают оба языка программирования. Вычитая их число, получаем число студентов, знающих хотя бы один язык.

Запишем формулу в общем виде.

Обозначим через a_1 свойство студента знать алгоритмический язык, через a_2 – свойство студента знать Паскаль, через $N(a_1)$ – количество студентов, знающих алгоритмический язык, через $N(a_2)$ – количество студентов, знающих Паскаль. Тогда

$N(a_1$ или $a_2) = N(a_1) + N(a_2) - N(a_1 \, и \, a_2)$.

Эту формулу называют формулой включения и исключения.

Задача 1.6.

Теперь усложним задачу. Пусть 47 студентов знают алгоритмический язык, 35 – язык Паскаль, 23 – Паскаль и алгоритмический язык, 20 – знают Бейсик, 12 – алгоритмический язык и Бейсик, 11 – Паскаль и Бейсик, 5 – все три языка. Вопрос тот же: сколько человек на курсе знают хотя бы один язык программирования?

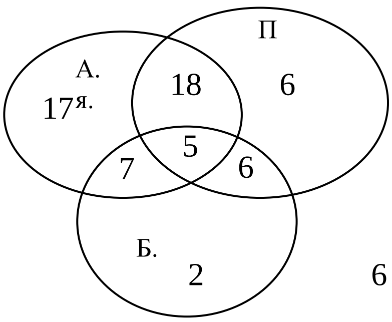


Рис.1.2

Решение.

Решая эту задачу аналогично предыдущей, получим: 47+35+20-23-12-11+5=61.

Используя обозначения, предложенные выше, получаем следующую формулу для трех свойств:

$N(a_1$ или a_2 или $a_3) = N(a_1)+N(a_2)+N(a_3)-N(a_1$ и $a_2)-N(a_1$ и $a_3)-N(a_2$ и $a_3)+N(a_1$ и a_2 и $a_3)$.

Общий вид формулы включения и исключения

Пусть имеется n предметов, некоторые из которых обладают свойствами a_1, a_2, …, a_n. Каждый предмет может либо не обладать ни одним из этих свойств, либо обладать одним или несколькими свойствами одновременно.

Обозначим $N(a_i$ или a_j или … или $a_k)$ количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств a_i, a_j, … a_k.

Для того чтобы определить количество предметов, обладающих хотя бы одним из свойств a_1, a_2, …, a_n, используют формулу:

$N(a_1$ или a_2 или … или $a_n)=N(a_1)+N(a_2)+\ldots+N(a_n)-N(a_1$ и $a_2)-N(a_1$ и $a_3)-\ldots-$ $-N(a_1$ и $a_n)-\ldots-N(a_{n-1}$ и $a_n)+N(a_1$ и a_2 и $a_3)+\ldots N(a_{n-2}$ и a_{n-1} и $a_n)+\ldots+(-1)^{n-1}N(a_1$ и a_2 и … и $a_n)$.

Задача 1.7.

Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 – леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 – шоколад и леденцы, 348 – конфеты и леденцы, а 297 – все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

Решение.

Обозначим через A свойство опрошенного любить шоколад, через B – свойство опрошенного любить конфеты, через C – свойство опрошенного любить леденцы.

По условию задачи $N(A)=811$, $N(B)=752$, $N(C)=418$, $N(A$ и $B)=570$, $N(A$ и $C)=356$, $N(B$ и $C)=348$, $N(A$ и B и $C)=297$.

Подсчитаем количество опрошенных людей, которые любят хотя бы один вид сладостей. Воспользуемся формулой включения и исключения.

$N(A$ или B или $C)=N(A)+N(B)+N(C)-N(A$ и $B)-N(A$ и $C)-N(B$ и $C)+N(A$ и B и $C)=811+752+418-570-356-348+297=1004$.

Опрошено было всего 1000 человек, следовательно, в предложенной информации содержатся ошибки.

1.4. Размещения с повторениями

Конечно, при решении комбинаторных задач можно использовать только приведенные выше правила, но большинство задач являются стандартными, для их решения существуют готовые формулы.

Задача 1.8.

Каково число последовательностей длины n, состоящих из 0 и 1?

Решение.

Заметим, что последовательность длины n можно получить из последовательности длины $n – 1$, дописывая в конец последовательности либо

1, либо 0. Значит, из каждой последовательности длины $n-1$ получается две последовательности длины n. Ответ на вопрос задачи – 2^n.

Данная задача относится к классу задач о размещении с повторениями.

Размещениями с повторениями *из* n *элементов по* k *называются всевозможные комбинации по* k *элементов, составленные из элементов данных* n *видов. При этом в комбинацию могут входить и предметы одного вида, а две комбинации считаются различными, если они отличаются друг от друга или видом входящих в них элементов, или порядком этих элементов.*

Количество размещений с повторениями обозначается $\overline{A}_n^k$ и равно n^k.

Задача 1.9.

Для того чтобы открыть камеру хранения, используется комбинация из 4 цифр (от 0 до 9), набираемая на 4 колесиках. Сколько различных комбинаций существует?

Решение.

Из условия задачи следует, что необходимо составить всевозможные комбинации по 4 элемента из данных 10. По формуле размещений с повторением получаем: $\overline{A}_{10}^4=10^4 = 10\ 000$ вариантов.

Задача 1.10.

Сколько в n-ичной системе счисления натуральных чисел, записываемых ровно k знаками?

Решение.

Если допустить записи чисел, начинающиеся с нуля, то каждое k-значное число в n-ичной системе счисления можно рассматривать как размещение с повторениями, составленное из k цифр, причем цифры бывают n видов. Получаем, что количество чисел, имеющих такую запись, равно n^k.

Но натуральные числа не могут начинаться с нуля. Поэтому из полученного значения n^k необходимо вычесть количество чисел, запись которых начинается с нуля. Если отбросить от этих чисел первую цифру – ноль, то получим (k–1)-значное число (быть может, начинающееся с нуля). Таких чисел по формуле для вычисления количества размещений с повторениями существует n^{k-1}. Значит, общее количество k-значных чисел в n-ичной системе счисления равно $n^k - n^{k-1}= n^k(n-1)$.

Размещения без повторений

Задача 1.11. Как изменится решение задачи о камере хранения, если известно, что цифры, набираемые на колесиках, различны?

Решение.

Вариантов выбора первой цифры 10 (от 0 до 9). Так как повторения быть не может, то вариантов выбора второй цифры всего 9. Аналогично для выбора третьей цифры остается 8 вариантов, для выбора четвертой – 7. По правилу произведения получаем, что всего комбинаций, в которых все числа различны, $10·9·8·7=5\ 040$.

Данная задача относится к классу задач о размещении без повторений.

Размещениями без повторений из *n* элементов по *k* *называются всевозможные комбинации по k элементов, составленные из элементов данных n видов. При этом две комбинации считаются различными, если они либо отличаются друг от друга хотя бы одним элементом, либо состоят из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке.*

Количество размещений без повторений обозначают A_n^k. Общее правило вычисления количества размещений:

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}.$$

Задача 1.12.

В первенстве России по футболу участвуют 17 команд. Разыгрываются золотые, серебряные и бронзовые медали. Сколькими способами они могут быть распределены?

Решение.

Переформулируем задачу: Сколько существует комбинаций из 17 элементов по 3, если важны порядок элементов в комбинации, состав элементов и в комбинацию не могут входить элементы одного типа? (Повторения здесь быть не может – одна и та же команда не может получить и золотую и серебряную медаль.)

Эта задача относится к задачам на размещения без повторения. По формуле получаем: медали могут распределиться A_{17}^3=17·16·15=4 080 способами.

Задача 1.13.

Автомобильные номера некоторой страны состоят из 3 букв (все буквы различны) и четырех цифр (цифры могут повторяться). Сколько максимально машин может быть в этой стране, если в её алфавите 26 букв?

Решение.

Число комбинаций по 3 буквы из данных 26, при условии, что буквы не могут повторяться, определим с помощью формулы для вычисления количества размещений без повторений: A_{26}^3=26·25·24=15 600.

Число комбинаций по 4 цифры из данных 10, если в комбинацию могут входить одинаковые цифры, найдем с помощью формулы для вычисления количества размещений с повторениями: $\overline{A}_{10}^4=10^4$.

Тогда по правилу произведения различных автомобильных номеров – $A_{26}^3\cdot\overline{A}_{10}^4=15600\cdot10^4=156\cdot10^6$.

1.5. Перестановки

При составлении размещений без повторений из n элементов по *k* мы получали расстановки, отличающиеся друг от друга и составом, и порядком элементов. Но если брать расстановки, в которые входят все n элементов, то они могут отличаться друг от друга лишь порядком входящих в них элементов. Такие расстановки называют перестановками из n элементов или n-перестановками.

Перестановками из *n* элементов *называют всевозможные комбинации из n элементов, каждая из которых содержит все элементы по одному разу. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.*

Число n-перестановок обозначают через P_n. Общее правило вычисления количества перестановок:

$P_n=A^n_n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot2\cdot1=n!$

Рассмотрим несколько задач, решаемых с применением этой формулы.

Задача 1.14.

Сколькими способами можно расположить на книжной полке 6 томов детской энциклопедии?

Решение

Так как на полке располагаем все 6 томов, то различные расположения отличаются только порядком, но не составом. По формуле перестановок имеем 6!=720.

Задача 1.15.

Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить друг друга?

Решение.

На каждой вертикали и горизонтали должно стоять по одной ладье. Введем обозначения: перестановка (13256487) означает, что на первой горизонтали ладья стоит в первом поле, на второй – в третьем, на третьем – во втором и т.д. Таким образом, число искомых расположений равно количеству перестановок чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, то есть $P_8=8!=40320$.

Задача 1.16.

Сколько способов разбить 6 мужчин и 6 женщин на пары для танцев?

Решение.

Выстроим мужчин в одну линию в произвольном порядке. Пусть каждая женщина выбирает себе пару. Тогда количество способов разбиения на пары равно количеству способов переставить 6 различных предметов, то есть равно 6!.

Задача 1.17.

Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

Решение.

Если бы девушки стояли на месте, то получилось бы 7! способов. Так как танцующие кружатся, то их положение относительно окружающих предметов несущественно, а важно лишь взаимное расположение. Поэтому перестановки, переходящие друг в друга при кружении танцовщиц, необходимо считать одинаковыми. Из каждой перестановки можно получить еще шесть новых путем вращения. Значит, число 7! необходимо разделить на 7. Получаем 7!:7=6!=720 различных перестановок девушек в хороводе.

Перестановки с повторениями

Рассмотрим, как изменится количество перестановок, если некоторые из переставляемых предметов одинаковы.

Задача 1.18.

Сколько слов можно получить, переставляя буквы слова «март»? Сколько слов можно получить, если переставлять буквы слова «мама»?

Решение.

Переставляя буквы слова «март», получим 24 различные перестановки, так как все переставляемые элементы различны.

Если же некоторые переставляемые предметы одинаковы, то получается меньше перестановок – некоторые перестановки совпадают друг с другом.

При перестановке букв слова «мама» имеем две пары одинаковых букв *мм* и *аа*. Сделаем их различными, дописав к одинаковым буквам различные индексы: $м_1а_1м_2а_2$. Рассмотрим все возможные перестановки:

$м_1а_1м_2а_2$	$м_1м_2а_1а_2$	$а_1а_2м_1м_2$	$м_1а_1м_2а_2$	$м_1а_1а_2м_2$	$а_1м_1м_2а_2$	$а_1м_1а_2м_2$
$м_2а_1м_1а_2$	$м_2м_1а_1а_2$	$а_2а_1м_1м_2$	$м_2а_1м_1а_2$	$м_2а_1а_2м_1$	$а_1м_2м_1а_2$	$а_1м_2а_2м_1$
$м_1а_2м_2а_1$	$м_1м_2а_2а_1$	$а_1а_2м_2м_1$	$м_1а_2м_2а_1$	$м_1а_2а_1м_2$	$а_2м_1м_2а_1$	$а_2м_1а_1м_2$
$м_2а_2м_1а_1$	$м_2м_1а_1а_1$	$а_2а_1м_2м_1$	$м_2а_2м_1а_1$	$м_2а_2а_1м_1$	$а_2м_2м_1а_1$	$а_2м_2а_1м_1$

Получили 24 различные перестановки, которые разбиваются на четверки одинаковых слов, если убрать индексы при буквах «м» и «а». Значит, всего различных перестановок $\frac{24}{4} = 6$.

Общая задача формулируется следующим образом:

Перестановками с повторениями *из n_1 элементов первого типа, n_2 элементов второго типа, ..., n_k элементов k-го типа называются всевозможные комбинации из этих элементов, каждая из которых содержит n_i элементов i-го вида. Комбинации отличаются друг от друга лишь порядком элементов.*

Число перестановок с повторениями обозначают через $P(n_1, n_2, ..., n_k)$. Общее правило вычисления количества перестановок с повторениями:

$$P(n_1, n_2, ..., n_k)= \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot ...\cdot n_k!}.$$

Задача 1.19.

Сколькими способами можно поставить в ряд 3 красных, 4 синих и 5 зеленых кубиков?

Решение.

По формуле перестановок с повторениями получаем: $P(3, 4, 5)= \frac{12!}{3!\cdot 4!\cdot 5!} = 27\ 720$.

Задача 1.20.

Слово – любая конечная последовательность букв русского алфавита. Сколько различных слов можно составить из слова КАСАТЕЛЬНАЯ, если необходимо использовать все буквы?

Решение.

В слове имеется 3 буквы *А* и еще 8 различных букв. По формуле перестановок с повторениями получаем: $P(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3)= \frac{11!}{3!}$ =6 652 800.

1.6. Сочетания

До сих пор при составлении комбинаций из элементов различных типов нас интересовал порядок расположения элементов. Но некоторый класс задач приводит к составлению комбинаций, в которых порядок элементов совершенно не важен.

Задача 1.21.

Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов?

Решение.

Это задача на размещения без повторений. Ответ: A_5^3=5·4·3=60 способов составить флаг.

Задача 1.22.

Сколькими способами можно выбрать три краски из имеющихся пяти?

Решение.

В данном случае порядок выбора красок не важен. Поэтому количество способов выбора красок, полученное в предыдущей задаче, необходимо разделить на 3! – количество способов переставить выбранные краски. Ответ: $\frac{A_5^3}{3!}$=10.

Эта задача относится к классу задач о сочетаниях.

Сочетаниями из n элементов по k *называют всевозможные комбинации по k элементов, составленные из данных n элементов. Комбинации отличаются друг от друга составом, но не порядком элементов.*

Количество сочетаний из n элементов по k обозначают C_n^k.

Формула для вычисления числа сочетаний получается из формулы для вычисления количества размещений. Составим сначала все *k*-сочетания из n элементов, а потом переставим входящие в каждое сочетание элементы всеми возможными способами. При этом получатся все *k*-размещения из n элементов, причем каждое только по одному разу. Элементы каждого *k*-сочетания можно переставить *k*! способами, а число этих сочетаний равно C_n^k. Значит, справедлива формула $k!\cdot C_n^k = A_n^k$. Получаем $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.

Задача 1.23.

Два филателиста хотят обменяться марками. У одного для обмена есть 7 марок, у другого – 5. Сколькими способами они могут поменять две марки одного на две марки другого?

Решение.

Первый филателист должен выбрать 2 марки из 7. Он может это сделать C_7^2 способами. Второй должен выбрать 2 марки из 5. Он может это сделать C_5^2 способами. По правилу произведения получаем $C_7^2 \cdot C_5^2 = \frac{7!}{2!\cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 210$ способов совершить обмен.

Задача 1.24.

Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди них окажется ровно три туза?

Решение.

Необходимо выбрать трех тузов и семь «не тузов». Всего в колоде 4 туза. Поэтому выбрать из них 3 можно C_4^3 способами. «Не тузов» в колоде 48. Выбрать из них 7 можно C_{48}^7 способами. По правилу произведения получаем: $C_4^3 \cdot C_{48}^7 = \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{48!}{7! \cdot 41!} = \frac{4 \cdot 42 \cdot 43 \cdot 44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 29\ \ 451\ \ 6288$ способов выбрать из колоды 10 карт так, что среди них будет ровно три туза.

Свойства чисел C_n^k.

Числа C_n^k обладают рядом замечательных свойств. Эти свойства можно доказывать по-разному. Можно прямо воспользоваться формулой $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Однако часто удается получить доказательство из комбинаторных соображений.

1 свойство*:* $P(k, n\text{-}k) = C_n^k$.

Доказательство.

$$P(k, n-k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = C_n^k .$$

2 свойство – свойство симметричности $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство.

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_n^k .$$

3 свойство – основное свойство $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

4 свойство*:* $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^k + \ldots + C_n^n = 2^n$.

5 свойство*:* $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Задача 1.25.

На окружности отмечено 11 точек. Сколько существует многоугольников с вершинами в отмеченных точках?

Решение.

Первый способ. Существует C_{11}^3 треугольников с вершинами в отмеченных точках, C_{11}^4 – четырехугольников, C_{11}^5– пятиугольников, …, C_{11}^{11} – одиннадцатиугольников. Таким образом, по правилу суммы всего многоугольников $C_{11}^3 + C_{11}^4 + C_{11}^5 + \ldots + C_{11}^{11}$. Из четвертого свойства следует, что это выражение равно 2^{11}-C_{11}^1-C_{11}^2=1 982.

Второй способ. Любая из одиннадцати точек либо является вершиной рассматриваемого многоугольника, либо не является. Всего вариантов 2^{11}. Но одна или две точки не могут составлять многоугольник. Остается 2^{11}-C_{11}^1-C_{11}^2 вариантов многоугольников с вершинами в отмеченных точках.

Сочетания с повторениями

Задача 1.26.

В кондитерском магазине продавались 4 сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить 7 пирожных?

Решение.

Эта задача не является задачей на размещения с повторениями, так как порядок, в котором укладывают пирожные в коробку, несуществен. Поэтому она ближе к задачам на сочетания. Но от задач на сочетания она отличается тем, что в комбинации могут быть повторяющиеся элементы. Такие задачи называют задачами на *сочетания с повторениями*.

Чтобы решить задачу, поступим следующим образом. Зашифруем каждую покупку с помощью нулей и единиц. Сначала напишем столько единиц, сколько куплено наполеонов. Потом, чтобы отделить наполеоны от эклеров, напишем нуль, затем – столько единиц, сколько куплено эклеров, и т. д. Например, если куплено 3 наполеона, 1 эклер, 2 песочных и 1 слоеное пирожное, то получим такую запись: 1110101101. Ясно, что разным покупкам соответствуют разные комбинации из 7 единиц и 3 нулей. Обратно, каждой комбинации 7 единиц и 3 нулей соответствует какая-то покупка.

Таким образом, число различных покупок равно числу перестановок с повторениями, которые можно составить из 7 единиц и 3 нулей. А это число равно $P(7,3)=120$.

К тому же самому результату можно было прийти и другим путем, а именно: расположим в каждой покупке пирожные в таком порядке: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные, а потом перенумеруем их. Но при нумерации будем к номерам эклеров прибавлять 1, к номерам песочных – 2, к номерам слоеных – 3. К номерам наполеонов ничего прибавлять не будем. Например, пусть куплено 2 наполеона, 3 эклера, 1 песочное пирожное и 1 слоеное. Тогда эти пирожные нумеруются так: 1, 2, 4, 5, 6, 8, 10. Ясно, что самый большой номер может быть 10, самый маленький – 1, а кроме того, ни один из номеров не повторяется, причем они образуют возрастающую последовательность. Обратно, каждой возрастающей последовательности из 7 чисел соответствует некоторая покупка. Например, последовательность 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 соответствует покупке из 4 эклеров и 3 песочных пирожных. Чтобы убедиться в этом, надо отнять от заданных номеров числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Мы получим числа 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2. Но 1 мы прибавляли к номерам эклеров, а 2 – к номерам песочных.

Отсюда, общее число покупок равно числу возрастающих последовательностей из 7 чисел от 1 до 10. А число таких последовательностей равно $C(10,7)=120$.

Сочетаниями с повторениями *из n элементов по k называют всевозможные комбинации, составленные из элементов n видов по k элементов в каждой. Комбинации считаются различными, если они отличаются составом, но не порядком входящих в них элементов. В комбинацию могут входить элементы одного вида.*

Количество сочетаний с повторениями из n элементов по k обозначают $\overline{C}_n^k$. Общее правило вычисления количества сочетаний с повторениями:

$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Задача 1.27.

Сколько существует различных бросаний двух одинаковых кубиков?

Решение.

Переформулируем задачу. Всего при подбрасывании одного кубика возможны шесть ситуаций – имеем предметы шести различных типов. Подбрасывают два кубика, следовательно, из данных шести типов предметов необходимо выбрать два, причем нас не интересует порядок выбора и допускается выбор одинаковых предметов. Таким образом, это задача на сочетания с повторением. По формуле для вычисления количества сочетаний с повторением имеем $\overline{C}_6^2 = C_{6+2-1}^2 = C_7^2 = 21$ различных бросаний двух одинаковых кубиков.

2. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА КАК РАСШИРЕНИЕ ПОНЯТИЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ЧИСЛА

Комплексным числом z называется ***упорядоченная пара чисел* (*a, b*),** *над множеством которых по определенным правилам можно производить следующие операции: сложение, умножение, деление, возведение в степень, результаты которых также являются комплексными числами.*

Алгебраической формой комплексного числа z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением:

$i^2 = -1; \qquad i = \sqrt{-1}.$

При этом число *a* называется **действительной частью** числа *z* (*a = Re z*), а *b*- **мнимой частью** (*b = Im z*).

Если *a =Re z =0,* то число *z* будет чисто мнимым, если *b = Im z = 0*, то число *z* будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\overline{z} = a - ib$ называются **комплексно – сопряженными.**

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \qquad b_1 = b_2.$$

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет **геометрическое истолкование**. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так, натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости (комплексной плоскости z), координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью (рис. 2.1).

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа a, а на оси OY – чисто мнимые - b.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой **тригонометрической форме.**

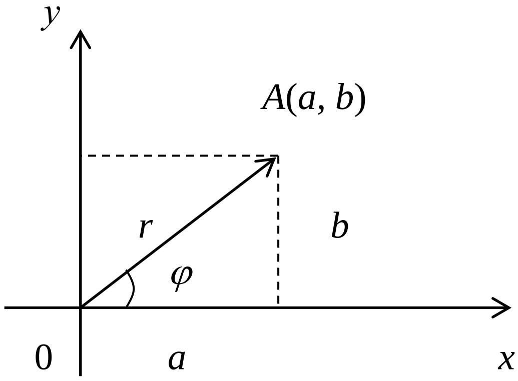


Рис. 2.1

Тригонометрическая форма числа.

Из геометрических соображений видно, что $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\phi + ir\sin\phi = r(\cos\phi + i\sin\phi).$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи комплексного числа.**

При этом величина r называется **модулем** комплексного числа, а угол наклона φ **- аргументом** комплексного числа.

$$r = |z|; \qquad \phi = Arg\,z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \phi = Arg\,z = arctg\frac{b}{a};.$$

Очевидно, что комплексно–сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\overline{z}|; \qquad Arg\,z = -Arg\,\overline{z}.$$

2.1. Действия с комплексными числами

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) Сложение и вычитание.

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2),$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}.$$

2) Умножение.

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2,$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \; z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2),$$

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy,$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2},$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

4) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется ф о р м у л о й М у а в р а

(Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик).

Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Задача 2.1. Найти формулы sin2φ и cos2φ.

Решение.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$.

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$,

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$.

Получили известные формулы двойного угла.

5) Извлечение корня из комплексного числа.

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$.

Возводя в степень, получим:

$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Отсюда: $\rho = \sqrt[n]{r}; \qquad n\psi = \varphi + 2\pi k; \qquad k \in Z.$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right).$$

Таким образом, корень n – й степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Возведение в степень комплексных чисел определяется следующим образом:

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \ldots z}_{n\ раз}.$$

Легко показать, что

$z^n z^m = z^{n+m}$,

$(z^n)^m = z^{nm}$,

$(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n$.

Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z; \qquad z = x + iy.$

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера.** Вывод этого уравнения будет рассмотрен позднее.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2}=\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m=e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$e^{iy}=\cos y+i\sin y$.

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$e^{-iy}=\cos y-i\sin y$.

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases}\cos y=\dfrac{e^{iy}+e^{-iy}}{2},\\ \sin y=\dfrac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}.\end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представим комплексное число в тригонометрической форме

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

и воспользуемся формулой Эйлера $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$,

$$z=re^{i\varphi}.$$

Полученное равенство и есть *показательная форма комплексного числа.*

В этой форме записи удобно осуществлять операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня. Соответствующие формулы записываются следующим образом.

Пусть $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$. Тогда

$$z_1\cdot z_2=r_1e^{i\phi_1}\cdot r_2e^{i\phi_2}=r_1r_2e^{i(\phi_1+\phi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1e^{i\phi_1}}{r_2e^{i\phi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\phi_1-\phi_2)}$$

$$z^n=\left(re^{i\phi}\right)^n=r^ne^{in\phi}$$

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{re^{i\phi}}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\phi+2\pi k)}{n}},\ k=\overline{0,n-1}.$$

Разложение многочлена на множители.

Функция вида *f(x)*= $A_0x^n+A_1x^{n-1}+\ldots+A_n$ называется *целой рациональной* функцией от x.

Т е о р е м а Б е з у . (Этьенн Безу (1730 – 1783) – французский математик).

При делении многочлена f(x) на разность (x – a) получается остаток, равный f(a).

С л е д с т в и е . *Если a – корень многочлена, т.е. f(a) = 0, то многочлен f(x) делится на (x – a) без остатка.*

Если уравнение имеет вид *P(x)* = 0, где *P(x)* – многочлен степени *n*, то это уравнение называется *алгебраическим* уравнением степени *n*.

Т е о р е м а (О с н о в н а я т е о р е м а а л г е б р ы). *Всякая целая рациональная функция f(x) имеет по крайней мере один корень, действительный или комплексный.*

Т е о р е м а . *Всякий многочлен n – й степени разлагается на n линейных множителей вида (x – a) и множитель, равный коэффициенту при* x^n.

Т е о р е м а . *Если два многочлена тождественно равны друг другу, то коэффициенты одного многочлена равны соответствующим коэффициентам другого.*

Если среди корней многочлена встречаются кратные корни, то разложение на множители имеет вид:

$$f(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} ... (x - a_m)^{k_m} .$$

$$k_1 + k_2 + ... + k_m = n ,$$

где k_i - кратность соответствующего корня.

Отсюда следует, что *любой многочлен n – й степени имеет ровно n корней (действительных или комплексных).*

Это свойство имеет большое значение для решения алгебраических уравнений, дифференциальных уравнений и играет важную роль в анализе функций.

2.2. Примеры действий с комплексными числами

Пример 2.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2} i; \quad z_2 = -7 - 2i$. Требуется а) найти значение выражения $\left(\dfrac{1 - \frac{7}{2} i}{-7 - 2i} \right)^{-4}$ в алгебраической форме, б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3} i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Решение.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2} i}{-7 - 2i} \right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i} \right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i} \right)^{4} = 16 \left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} \right)^{4} .$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7-2i}{2-7i}=\frac{(-7-2i)(2+7i)}{(2-7i)(2+7i)}=\frac{-14-49i-4i+14}{4+49}=\frac{-53i}{53}=-i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число $z=2-2\sqrt{3}i$ представим в виде $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, где

$$r=|z|=\sqrt{4+12}=4; \qquad \varphi=arctg\frac{b}{a}=arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-60^0.$$

Тогда $z=4(\cos 60^0-i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20}=4^{20}(\cos 1200^0-i\sin 1200^0)=4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi+120^0)-i\sin(3\cdot 2\pi+120^0))=$$

$$=4^{20}(\cos 120^0-i\sin 120^0)=-4^{20}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3+z=0$, то $w=\sqrt[3]{z}$.

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)=\sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{-60^0+2\pi k}{3}\right); \quad k\in Z.$$

Пример 2.2. Найти сумму комплексных чисел $z_1 = 2 - i$ и $z_2 = -4 + 3i$.

$z_1 + z_2 = (2 + (-1)\cdot i) + (-4 + 3i) = (2 + (-4)) + ((-1) + 3)\, i = -2+2i$.

Пример 2.3. Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 2 - 3i \text{ и } z_2 = -4 + 5i.$$

$z_1\cdot z_2 = (2 - 3i)\cdot(-4 + 5i) = 2\cdot(-4) + (-4)\cdot(-3i) + 2\cdot 5i - 3i\cdot 5i = 7+22i$.

Пример 2.4. Найти частное z от деления $z_1 = 3 - 2$ на $z_2 = 3 - i$.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{(3-2i)}{(3-i)}=\frac{(3-2i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=\frac{11-3i}{9+1}=\frac{11}{10}-\frac{3}{10}i.$$

Пример 2.5. Решить уравнение: $3x-(1-i)(x-yi)=2+3i$, x и $y\in\mathbf{R}$.

$3x-((x-y)+(-x-y)i)=2+3i$,

$(2x + y) + (x + y)i = 2 + 3i$.

В силу равенства комплексных чисел имеем:

$$\begin{cases}2x+y=2,\\ x+y=3,\end{cases}$$

откуда $x = -1$, $y = 4$.

Пример 2.6. Вычислить: i^2, i^3, i^4, i^5, i^6, i^{-1}, i^{-2}.

$$i^2=i\cdot i=-1$$

$$i^3=i^2\cdot i=-i$$

$$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-(-1)=1$$

$$i^5=i^4\cdot i=i$$

$$i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=-1$$

$$i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{i\cdot i}=-i$$

$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=-1.$$

Пример 2.7. Вычислить z^{-3}, если $z=1-i$.

$$z^{-3}=(1-i)^{-3}=\frac{1}{(1-i)^3}=\frac{1}{1-3i+3i^2-i^3}=\frac{1}{-2-2i}=\frac{-2+2i}{(-2)^2+(-2)^2}=$$

$$=\frac{-2+2i}{8}=-0.25+0.25i.$$

Пример 2.8. Вычислить число z^{-1}, обратное числу z =3-i.

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{3-i}=\frac{3+i}{(3-i)(3+i)}=\frac{3+i}{3^2+1^2}=\frac{3+i}{10}=0.3+0.1i.$$

Пример 2.9. Найти модуль комплексных чисел $z_1 = 4 - 3i$ и $z_2 = -2-2i$.

$$r_1=|z_1|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$r_2=|z_2|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

Пример 2.10. Определить на комплексной плоскости области, задаваемые условиями:

1) $|z| = 5$; 2) $|z| \le 6$; 3) $|z-(2+i)| \le 3$; 4) $6 \le |z-i| \le 7$.

1) $|z| = 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2}=5 \Leftrightarrow a^2+b^2=5^2$ - уравнение окружности радиусом 5 и с центром в начале координат.

2) Круг радиусом 6 с центром в начале координат.

3) Круг радиусом 3 с центром в точке $z_0 = 2 + i$.

4) Кольцо, ограниченное окружностями с радиусами 6 и 7 с центром в точке $z_0 = i$.

Пример 2.11. Найти модуль и аргумент чисел: 1) $z_1=1+\sqrt{3}$; 2) $z_2=-2-2i$.

1) $z_1=1+\sqrt{3}$; $a = 1$, $b = \sqrt{3} \Rightarrow r_1=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^3}=\sqrt{4}=2$,

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi_1=\frac{a}{r} \quad &\Rightarrow \quad \cos\varphi_1=\frac{1}{2}\\ \sin\varphi_1=\frac{b}{r} \quad &\Rightarrow \quad \sin\varphi_1=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1=\frac{\pi}{3}+2\pi\kappa, \quad \kappa\in Z.$$

2) $z_2 = -2-2i$; $a = -2$, $b = -2 \Rightarrow r_2=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$,

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi_2&=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi_2&=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_2=\frac{5\pi}{4}+2\pi\kappa, \quad \kappa\in Z.$$

Используя формулы $a=r\cos\varphi,\ b=r\sin\varphi$, можно перейти от алгебраической формы записи комплексных чисел к *тригонометрической форме* (*формула Муавра*):

$$z=a+bi=r\cos\varphi+i\sin\varphi=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Комплексные числа в тригонометрической форме равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на целое число, кратное 2π.

Пример 2.12. Записать числа в тригонометрической форме:

1) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 2) $z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 3) $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, 4) $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

1) $z_1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r=|z_1|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi_1=\dfrac{\frac{1}{2}}{1}=\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi_1=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\quad\varphi_1=\frac{\pi}{3}.$$

(За значение угла берем наименьшее неотрицательное из возможных значений аргумента.)

Таким образом: $z_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$.

2) $z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $r_2=1$, $\varphi_2=\frac{2\pi}{3}$, $z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$.

3) $z_3=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_3=1$, $\varphi_3=\frac{4\pi}{3}$, $z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$.

4) $z_4=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$, $r_4=1$, $\varphi_4=\frac{5\pi}{3}$, $z_4=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}$.

Пример 2.13. Выполнить умножение:

$$z_1=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\ z_2=3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}).$$

$$z_1\cdot z_2=6(\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}))=6(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

Пример 2.14. Вычислить: $(1+i)^{30}$.

$$1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}),\quad(1+i)^{30}=\left(\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})\right)^{30}=\left(\sqrt{2}\right)^{30}(\cos\frac{30\pi}{4}+i\sin\frac{30\pi}{4})=$$

$$=2^{15}(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}).$$

Пример 2.15. $z_1=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$, $z_2=2(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3})$. Найти частное.

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{3}))=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}).$$

Формула Муавра ($(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin\varphi,\quad n\in N$) находит много применений. Так, например, если $n=3$, то, возведя левую часть по формуле сокращенного умножения в куб, получим равенство

$$\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi = \left(\cos^3\varphi - 3\cos\varphi\cdot\sin^2\varphi\right) + \left(3\cos^2\varphi\cdot\sin\varphi - \sin^3\varphi\right)i.$$

Из равенства комплексных чисел и основного тригонометрического тождества получаем

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\sin 3\varphi = -4\sin^3\varphi + 3\sin\varphi.$$

С помощью формулы Муавра можно находить суммы тригонометрических функций.

Например, найдем сумму $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + ... + \sin(2n-1)x, \quad x \neq \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

Рассмотрим сумму

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos 3x + i\sin 3x) + ... + (\cos(2n-1)x + i\sin(2n-1)x).$$

Из формулы Муавра имеем: $(\cos kx + i\sin kx) = (\cos x + i\sin x)^k$.

Таким образом, сумма S(x) примет вид:

$$S(x) = (\cos x + i\sin x) + (\cos x + i\sin x)^3 + ... + (\cos x + i\sin x)^{2n-1}.$$

Эта сумма есть геометрическая прогрессия из n слагаемых с первым членом $b_1 = \cos x + i\sin x$ и знаменателем прогрессии $q = (\cos x + i\sin x)^2$. По формуле $S = \dfrac{b_1 - q^n b_1}{1-q}$ для суммы n членов геометрической прогрессии имеем

$$S(x) = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos x + i\sin x)^{2n+1}}{1-(\cos x + i\sin x)^2} = \frac{(\cos x + i\sin x) - (\cos(2n+1)x + i\sin(2n+1)x)}{1-\cos^2 x + \sin^2 x - 2i\sin x\cos x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x)}{2\sin x(\sin x - i\cos x)} =$$

$$= \frac{((\cos x - \cos(2n+1)x) + i(\sin x - \sin(2n+1)x))(\sin x + i\cos x)}{2\sin x} =$$

$$= \frac{(\cos x - \cos(2n+1)x)\sin x - (\sin x - \sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} +$$

$$+ i\frac{((\sin x - \sin(2n+1)x)\sin x + (\cos x - \cos(2n+1)x)\cos x)}{2\sin x}.$$

$$\operatorname{Im} S(x) = \frac{\sin^2 x - (\sin(2n+1)x)\sin x + \cos^2 x - (\cos(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{1-\cos 2nx}{2\sin x} = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \frac{\cos x\sin x - (\cos(2n+1)x)\sin x - \sin x\cos x + (\sin(2n+1)x)\cos x}{2\sin x} = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

В исходном выражении для $S(x)$ было:

$$\operatorname{Im} S(x) = \sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x,$$

$$\operatorname{Re} S(x) = \cos x + \cos 3x + ... + \cos(2n-1)x.$$

Сравнивая мнимые и действительные части, получаем следующие формулы:

$$\sin x + \sin 3x + ... + \sin(2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x},$$

$$\cos x + \cos 3x + ...\cos(2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

Пример 2.16. Вычислить $u = \sqrt[6]{\sqrt{3}-i}$.

Представим число $z = \sqrt{3}-i$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt{3}-i = 2(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)),$$

Поэтому согласно общей формуле Муавра

$$u_k = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi k}{6},$$

где k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Таким образом, значения корней:

$$u_0 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{36} - i\sin\frac{\pi}{36}),$$

$$u_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 1}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 1}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{36} + i\sin\frac{11\pi}{36}),$$

$$u_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 2}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 2}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{36} + i\sin\frac{23\pi}{36}),$$

$$u_3 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 3}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 3}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{35\pi}{36} + i\sin\frac{35\pi}{36}),$$

$$u_4 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 4}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{47\pi}{36} + i\sin\frac{47\pi}{36}),$$

$$u_5 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{6}+2\pi\cdot 5}{6}) = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{59\pi}{36} + i\sin\frac{59\pi}{36}).$$

Геометрически корни можно интерпретировать как числа, изображающие в комплексной плоскости вершины правильного n- угольника (в рассмотренном примере – шестиугольника), вписанного в окружность радиусом $\sqrt[n]{r}$ (в рассмотренном примере – радиусом $\sqrt[6]{2}$), с центром в начале координат.

Пример 2.17. Найти: 1) $\sqrt[4]{1}$, 2) $\sqrt[3]{i}$, 3) $\sqrt[3]{1}$.

Решение.

1) $u_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[4]{1}(\cos\frac{0+2\pi k}{4} + i\sin\frac{0+2\pi k}{4}), \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$u_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$,

$$u_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,$$

$$u_2 = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$u_3 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2) $u_k = \sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}) =$

$= \cos\frac{\pi+4\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+4\pi k}{6}$, $k = 0, 1, 2.$

$u_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$,

$u_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}+i)$,

$u_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$

3) $u_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1\cdot(\cos 0 + i\sin 0)} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2.$

$u_0 = \cos\frac{2\pi\cdot 0}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 0}{3} = 1,$

$u_1 = \cos\frac{2\pi\cdot 1}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 1}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$

$u_2 = \cos\frac{2\pi\cdot 2}{3} + i\sin\frac{2\pi\cdot 2}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 2.18. Найти показательную форму чисел:
а) $z_1 = 1 + i$; б) $z_2 = -\sqrt{3} - i$.
Решение.

а) $r = |z_1| = \sqrt{2}$, $\varphi = \arg z_1 = \frac{\pi}{4}$, $z_1 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

б) $r = |z_2| = 2,$ $\varphi = \arg z_2 = \frac{7\pi}{6}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i = 2e^{\frac{7\pi i}{6}}$.

Пример 2.19. Найти алгебраическую форму чисел:

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}}$, б) $z_2 = 3e^{-\frac{\pi i}{6}}$, в) $z_3 = e^{-3+4i}$.
Решение.

а) $z_1 = 2e^{\frac{\pi i}{3}} = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$,

б) $z_2 = 3e^{\frac{-\pi i}{6}} = 3(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)) = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$,

в) $z_3 = e^{-3+4i} = e^{-3}\cdot e^{4i} = e^{-3}(\cos 4 + i\sin 4) \approx 0.05(-0.65 - 0.76i) \approx -0.03 - 0.038i$.

Пример 2.20. Найти $z_1 z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$, результат записать в тригонометрической форме:

а) $z_1 = 3e^{\frac{2i}{3}}$, $z_2 = 6e^{\frac{i}{6}}$; б) $z_1 = e^{3-7i}$, $z_2 = e^{-4+5i}$.

Решение.

а) $z_1 z_2 = 3e^{\frac{2i}{3}} \cdot 6e^{\frac{i}{6}} = 18e^{\frac{5i}{6}} = 18(\cos\frac{5}{6} + i\sin\frac{5}{6})$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3e^{\frac{2i}{3}}}{6e^{\frac{i}{6}}} = \frac{1}{2}e^{\frac{i}{2}} = \frac{1}{2}(\cos\frac{1}{2} + i\sin\frac{1}{2}),$$

б) $z_1 z_2 = e^{3-7i} \cdot e^{-4+5i} = e^{-1-2i} = e^{-1}(\cos(-2) + i\sin(-2))$,

$$\frac{z_1}{z_2} = e^{7-12i} = e^{7}(\cos 12 - i\sin 12).$$

Пример 2.21. Вычислить: а) z^4, б) $\sqrt[5]{z}$, где $z = 2e^{-3i}$.

Решение.

а) $z^4 = (2e^{-3i})^4 = 16e^{-12i} = 16(\cos 12 - i\sin 12) \approx 16(0.8438 + 0.5366i)$,

б) $\sqrt[5]{2e^{-3i}} = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi k}{5}i} = u_k, \quad k = 0,1,2,3,4.$

$$u_0 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3i}{5}} = \sqrt[5]{2}(\cos\frac{3}{5} - i\sin\frac{3}{5}) \approx 0.95 - 0.65i,$$

$$u_1 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+2\pi}{5}i} \approx 0.91 + 0.70i,$$

$$u_2 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+4\pi}{5}i} \approx -0.39 + 1.08i,$$

$$u_3 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+6\pi}{5}i} \approx -1.15 - 0.03i,$$

$$u_4 = \sqrt[5]{2}e^{\frac{-3+8\pi}{5}i} \approx -0.33 - 1.10i.$$

Теория комплексных чисел может быть использована при решении геометрических задач на плоскости; и обратно, факты геометрического характера позволяют доказывать некоторые соотношения и тождества для комплексных чисел.

Пример 2.22. Пусть $|z_1| = |z_2| = c$. Доказать, что $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 4c^2$.

Поскольку $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, то

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$
$$= (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + (z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) + z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} -$$
$$-(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}) = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = 4c^2.$$

Геометрически этот факт означает, что сумма квадратов длин диагоналей ромба равна сумме квадратов длин всех его сторон (рис. 2.2).

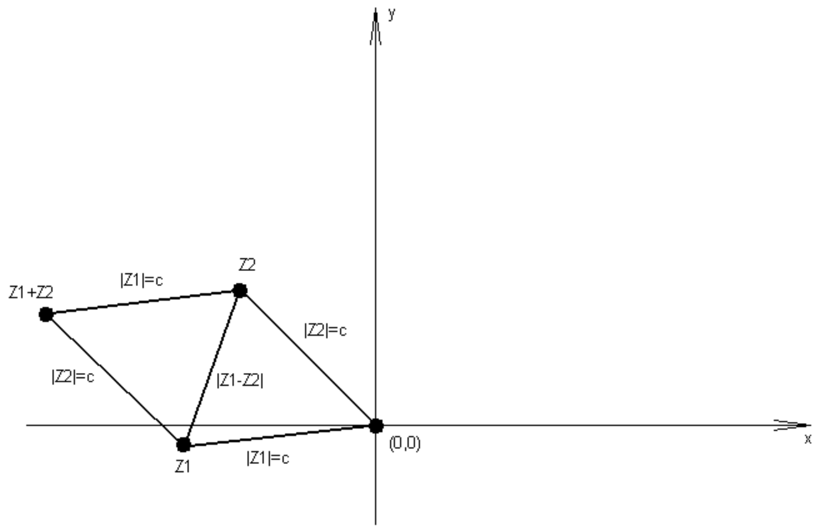


Рис. 2.2

Действительно, точки плоскости, соответствующие комплексным числам 0, z_1, z_2 и $z_1 + z_2$, являются вершинами ромба, для которого $|z_1|$ и $|z_2|$ – длины его сторон, а $|z_1 + z_2|$ и $|z_1 - z_2|$ – длины его диагоналей.

Пример 2.23. Пусть z_1, z_2, z_3, z_4 – различные комплексные числа и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4|$. Доказать, что $|z_1 - z_3||z_2 - z_4| = |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|$.

Имеем:

$$|z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3| = |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)| + |(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| =$$

$$= |(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)|,$$

т.к. число $\dfrac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ вещественно и положительно (докажите это самостоятельно). Кроме того,

$$|(z_1 - z_2)(z_3 - z_4) + (z_1 - z_4)(z_2 - z_3)| =$$

$$= |-z_1 z_4 - z_2 z_3 + z_1 z_2 + z_4 z_3| = |(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)| = |z_1 - z_3||z_2 - z_4|.$$

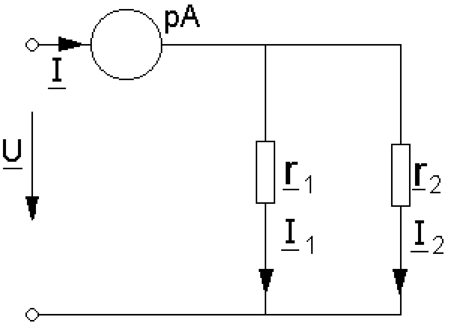
Доказанное равенство известно в планиметрии как теорема Птолемея: произведение длин диагоналей выпуклого вписанного в окружность четырехугольника равно сумме парных произведений длин его противолежащих сторон.

2.3. Примеры из электротехники

Пример 2.24.

Определить ток в неразветвленной части схемы (показания амперметра электромагнитной системы), если $\underline{I}_1 = 3 + j4, A;$ $\underline{I}_2 = 5 - j8, A$.

Решение. В электротехнике мнимую единицу обозначают j.



Ток $\underline{I}$ можно определить по I закону Кирхгофа $\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2, A$:

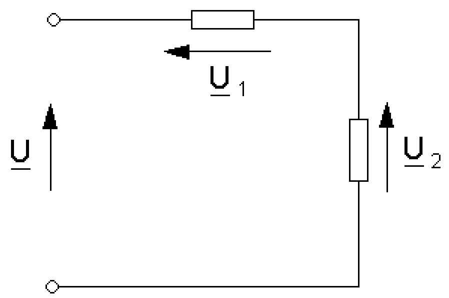
$\underline{I} = 3 + j4 + 5 - j8 = 8 - j4, A.$

Амперметр электромагнитной системы показывает действующее значение тока, поэтому перейдем к показательной форме

$$\underline{I} = \sqrt{8^2 + 4^2} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{4}{8}} = 8.944 e^{-j26.5}, A.$$

Показания амперметра 8.944.

Пример 2.25.



Определить мгновенное значение напряжения на входе электрической цепи, если

$\underline{U}_1 = 50e^{j30}, B;\ \ \underline{U}_2 = 60e^{-j60} B.$

Решение. По II закону Кирхгофа

$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2.$

$$\underline{U} = 50e^{j30} + 60e^{-j60} = 50\cos 30 + j50\sin 30 + 60\cos - j60\sin 60 =$$

$$= 43.3 + j25 + 30 - j51.96 = 73.3 - j26.96, B.$$

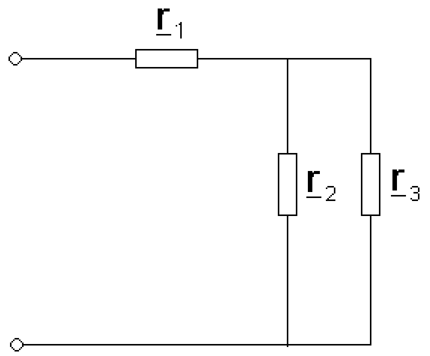
Перейдем к показательной форме

$$\underline{U} = \sqrt{73.3^2 + 26.96^2} e^{-j \operatorname{arctg} \frac{26.96}{73.3}} = 78.1 e^{-j20.2} B.$$

Запишем мгновенное значение

$\underline{U}(t) = U_m \sin(10t + \varphi) = 78.1\sqrt{2} \sin(314t - 20.2), B.$

Пример 2.26.



Определить комплекс входного сопротивления цепи, если

$\underline{r}_1 = 3 - j4, Ом.$

$\underline{r}_2 = 5 + j6, Ом.$

$\underline{r}_3 = 4 - j8, Ом.$

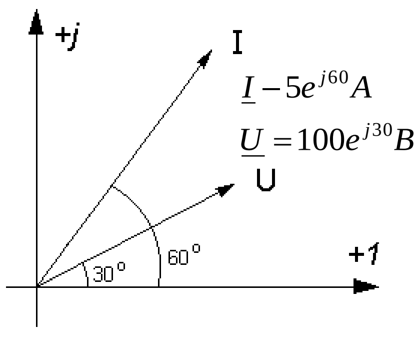
$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \frac{\underline{r}_2 \underline{r}_3}{\underline{r}_2 + \underline{r}_3} = 3 - j4 + \frac{(5 + j6)(4 - j8)}{5 + j6 + 4 - j8} =$$

$$= 3 - j4 + \frac{20 + j24 - j40 + 48}{9 - j2} =$$

$$= 3 - j4 + \frac{(68 - j16)(9 + j2)}{(9 + j2)(9 + j2)} =$$

$$= 10.576 - j4.094; Ом.$$

Пример 2.27.



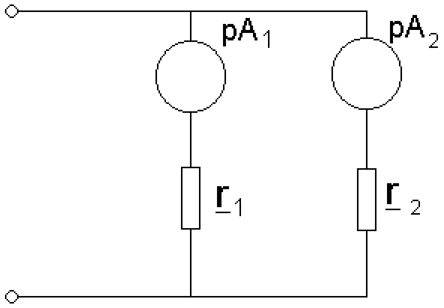
Записать комплексное сопротивление цепи в алгебраической форме, если ток и напряжение указаны на рисунке.

Решение. По закону Ома

$$\underline{r} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{100e^{j30}}{5e^{j60}} = 20e^{-j30} =$$

$$= 29\cos 30 - j20\sin 30 = 16.2 - j10, Ом.$$

Пример 2.28.



Показания какого амперметра электромагнитной системы больше, если $\underline{I}_1 = 3 + j4, A$ $\underline{I}_2 = 2.5 - j4.7, A$?

Решение. Перейдем к показательной форме

$\underline{I}_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} e^{j \operatorname{arctg}\frac{3}{4}} = 5e^{j53}, A.$

$\underline{I}_2 = \sqrt{2.5^2 + 4.7^2} e^{-j \operatorname{arctg}\frac{4.5}{2.5}} = 5.324e^{-j62}, A.$

Действующее значение

$I_1 = 5A.$

$I_2 = 5.324A.$

$I_2 > I_1.$

3. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Понятие о множестве

Понятие множества, совокупности объектов, элементов считается первичным, неопределяемым.

Множество A задано, если о любом объекте (элементе) a можно сказать, принадлежит он этому множеству $(a \in A)$ или не принадлежит $(a \notin A)$. Для данного объекта a и для данного множества A всегда $a \in A$ или $a \notin A$, но не то и другое вместе.

Множества A и B считаются равными $(A = B)$, если они состоят из одних и тех же элементов.

Множество можно задать *списком*, перечислив все его элементы. Запись $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ означает, что множество A состоит из элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Примеры. 1) $\{1,2,25\} = \{25,2,1\} = \{1,25,2,1\}$.

2) Пустой список { } задаёт множество, не имеющее элементов, которое называется *пустым множеством* и обозначается символом $\varnothing$.

3) $\{\{1,2\}\} \neq \{1,2\}$: множество в правой части состоит из двух элементов, а множество в левой части имеет только один элемент.

Другой способ задания множества – указание его *характеристического свойства*.

Характеристическое свойство множества – это такое свойство, которым обладает каждый элемент множества, но не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит.

Случается, что одно и то же множество можно задать, указав различные характеристические свойства. Например, множество квадратов можно задать как множество прямоугольников с равными смежными сторонами, а можно и как множество ромбов с прямым углом.

Множества бывают *конечные* и *бесконечные*. Очевидно, *списком* можно задать только конечное множество.

Некоторые множества имеют стандартные обозначения:

N - множество всех натуральных чисел;

Z - множество всех целых чисел;

Z_+ - множество всех неотрицательных целых чисел;

Q - множество всех рациональных чисел;

R - множество всех действительных чисел;

C - множество всех комплексных чисел;

В $=\{0,1\}$ - *булев отрезок*.

Если из $x \in A$ следует $x \in B$, то пишут $A \subseteq B$ и говорят, что A- *подмножество* B (или A *включается* в B).

Очевидно, $N \subseteq Z_+ \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \subseteq C$. Пустое множество считается подмножеством любого множества.

Примеры. 1) $A = \{x \in N \mid x < 7\}$ - множество натуральных чисел, меньших 7, т.е. $A = \{1,2,3,4,5,6\}$;

2) $\{x \in R \mid \sin x = 0\} = \{x \in R \mid x = n\pi, n \in Z\}$, так как $\sin x = 0$ тогда и только тогда, когда $x = n\pi$ для некоторого целого n.

Взаимно-однозначное соответствие и эквивалентные множества

Если:

1) каждому элементу множества A каким-либо образом сопоставлен единственный элемент множества B

и

2) при этом каждый элемент множества B оказывается сопоставлен одному и только одному элементу из A, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно-однозначное соответствие.

Замечание. Если между A и B установлено взаимно-однозначное соответствие, то различные элементы $x_1 \neq x_2 \in A$ должны переходить в различные элементы $y_1 \neq y_2 \in B$.

Доказательство от противного: допустим, $x_1 \neq x_2$, x_1 переходит в y и x_2 переходит в y; тогда получаем противоречие с п.2).

Если между множествами A и B может быть установлено взаимно-однозначное соответствие, то A и B называются эквивалентными. Конечные множества эквивалентны только тогда, когда у них одинаковое число элементов.

Определение. Число элементов конечного множества A называется его мощностью и обозначается $|A|$.

Бесконечное множество может быть эквивалентно своему подмножеству, не совпадающему с ним. Например, можно установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех натуральных чисел N и множеством всех чётных натуральных чисел, сопоставив каждому $n \in N$ его удвоение $2n$:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots, & n, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2, & 4, & 6, & \ldots, & 2n, & \ldots \end{array}$$

Счётными называются множества, эквивалентные множеству N. Можно доказать, что Q - счётное множество, а R - несчётное множество.

Действия над множествами

1) Суммой двух множеств A и B называется множество $A \cup B = \{x \mid x \in A \quad \textit{или} \quad x \in B\}$.

2) Пересечением A и B называется множество $A \cap B = \{x \mid x \in A \quad \textit{и} \quad x \in B\}$.

3) Если $B \subset A$, то разность $A \setminus B = \{x \mid x \in A, \quad x \notin B\}$.

Если есть множество T, в котором содержатся A и B, то разность $T \setminus B$ называется дополнением B в T. Например, множество $\overline{Q}$ иррациональных чисел можно описать как $\overline{Q} = R \setminus Q$.

Свойства операций над множествами:

1) $A \cap B \subseteq A, \quad A \cap B \subseteq B.$

2) $A \subseteq A \cup B, \quad B \subseteq A \cup B.$

3) Если $A \subseteq B, \quad B \subseteq C,$ то $A \subseteq C.$

Из 1), 2), 3) следует справедливость 4):

4) $A \cap B \subseteq A \cup B.$

Свойства дистрибутивности:

5) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

6) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

7) $A = B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$ и $B \subseteq A.$

8) $A \cup B = B \cup A; \quad A \cap B = B \cap A$ (коммутативное или переместительное свойство).

9) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C); \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативное, или сочетательное свойство).

10) Для конечных множеств A и B выполняется равенство $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Пример. Из 40 студентов курса 32 изучают английский язык, 21- немецкий язык, а 15 – английский и немецкий языки. Сколько студентов курса не изучает ни английский, ни немецкий языки?

Решение. Пусть A- множество студентов курса, изучающих английский язык, B- множество студентов курса, изучающих немецкий язык. По условию задачи: $n(A)=32, n(B)=21, n(A\cap B)=15$. Требуется найти число студентов курса, не изучающих ни английский, ни немецкий язык.

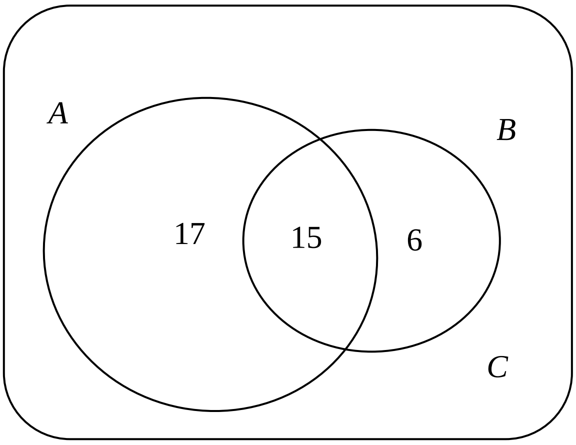
1 *способ*.

1) Найдём число элементов в объединении данных множеств A и B. Для этого воспользуемся формулой: $n(A\cup B)=n(A)+N(B)-n(A\cap B)=32+21-15=38.$

2) Найдём число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки: $40-38=2$.

2 *способ*.

1) Изобразим данные множества с помощью кругов Эйлера и определим число элементов в каждом из непересекающихся подмножеств:



$n(C)=40$

Так как в пересечении множеств A и B содержится 15 элементов, то студентов, изучающих *только* английский язык, будет 17 (32-15=17), а студентов, изучающих *только* немецкий, - 6 (21-15=6). Тогда $n(A\cup B)=17+15+6=38$, и, следовательно, число студентов курса, которые не изучают ни английский, ни немецкий языки, будет 40-38=2.

Опишем ещё один способ построения новых множеств из уже построенных. Пусть A, B - два множества. Через $A\times B$ обозначим множество, состоящее из упорядоченных пар (a,b) таких, что $a\in A,\ b\in B$. Иначе говоря, $c\in A\times B$ тогда и только тогда, когда c есть пара (a,b), причём $a\in A,\ b\in B$. Мы будем обозначать a через $\text{Пр}_1 c$, b - через $\text{Пр}_2 c$ и называть их первой и второй *проекциями* элемента c, $\text{Пр}_1(a,b)=a$, $\text{Пр}_2(a,b)=b$.

Множество $A\times B$ называется декартовым произведением A и B. Аналогично определяется декартово произведение n множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$: его элементами являются упорядоченные наборы вида $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ \ldots,\ a_n\in A_n$. Декартово произведение n одинаковых множителей A обозначается A^n. Например, множество R^n состоит из упорядоченных наборов вещественных чисел вида $(x_1,\ldots,x_n)$; оно называется n- *мерным арифметическим пространством*.

Множество B^n состоит из последовательностей нулей и единиц длины n, оно называется n - *мерным булевым кубом*. Его элементы называются *битовыми строками* длины n.

Так как декартовы произведения $A\times B$ и $B\times A$ состоят из различных элементов, то декартово произведение множеств A и B свойством коммутативности не обладает.

Аналогично можно показать, что для этой операции не выполняется и свойство ассоциативности. Но она дистрибутивна относительно объединения и вычитания множеств, т.е. $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$, $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

Утверждение. Мощность декартова произведения конечных множеств равна произведению их мощностей.

Доказательство. Проведём индукцию по числу сомножителей, начиная со случая двух сомножителей. Пусть $A=\{a_1,\dots,a_k\}$, $B=\{b_1,\dots,b_l\}$. Тогда $A\times B=B_1\cup\dots\cup B_l$, где $B_1=\{a_1\}\times B,\ \dots,\ B_k=\{a_k\}\times B$ - непересекающиеся множества, каждое из которых содержит l элементов. Значит, число элементов в множестве $A\times B$ равно $\underbrace{l+l+\dots+l}_{k\ \text{слагаемых}}=kl$. База индукции завершена.

Совершим индукционный переход. Предположим, что утверждение теоремы верно для n сомножителей. Рассмотрим $n+1$ конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_{n+1}$. По предположению $|A_1\times A_2\times\dots\times A_n|=|A_1||A_2|\dots|A_n|$. Отсюда получаем, используя также справедливость утверждения теоремы для двух множителей:

$$|A_1\times A_2\times\dots\times A_n\times A_{n+1}|=|(A_1\times A_2\times\dots\times A_n)\times A_{n+1}|=|A_1\times A_2\times\dots\times A_n||A_{n+1}|=$$
$$|A_1||A_2|\dots|A_n||A_{n+1}|.$$

Следствие. $|A_n|=|A|^n$.

***Примеры*:** 1) Булев куб B^n содержит 2^n элементов.

2) Задача. Сколько двузначных чисел можно записать, используя цифры 5,4 и 7?

Решение. Запись любого двузначного числа состоит из двух цифр и представляет собой упорядоченную пару. В данном случае эти пары образуются из элементов множества $A=\{5,4,7\}$. В задаче требуется узнать число таких пар, т.е. число элементов в декартовом произведении $A\times A$. Согласно правилу, $n(A\times A)=n(A)\cdot n(A)=3\cdot 3=9$. Значит, двузначных чисел, записанных с помощью цифр 5,4 и 7, будет 9.

3) Задача. Количество элементов множества $\{a\}\times\{b,c\}\times\{d,e,f\}$ равно

1) 5; 2) 3; 3) 6; 4) 2.

Правильный ответ 3), так как $n_1\cdot n_2\cdot n_3=1\cdot 2\cdot 3=6$. Здесь n_1- мощность множества $\{a\}$, n_2- мощность множества $\{b,c\}$, а n_3- мощность множества $\{d,e,f\}$.

4. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Понятие высказывания является исходным и не определяется, а лишь поясняется. Высказывание – это утверждение, которое является либо истинным, либо ложным, но не то и другое вместе. Пусть **И** обозначает истинное высказывание, а **Л** – ложное.

***Примеры*:**

1) $2 \times 2 = 4$ — **И.**

2) $2 > 3$ — **Л.**

3) Река Дон впадает в Азовское море — **И.**

4) Париж – столица Италии — **Л.**

5) x<2 — не высказывание, т.к. истина или ложь – зависит от х.

6) Слава российским студентам! — не высказывание.

Определение. Два высказывания a *и* b *называются равносильными (обозначение* $a \equiv b$*), если оба они истинны или оба ложны.*

Логические связки. Из высказываний с помощью логических связок могут быть построены новые (составные) высказывания. Таким образом, логические связки можно понимать как операции на множестве высказываний. В следующей таблице приведены наиболее употребительные логические связки (отрицание – унарная, остальные – бинарные).

Название	Прочтение	Обозначение
Отрицание	*Неверно, что* или *не …*	$\bar{\ }$
Конъюнкция	*… и …*	$\wedge$
Дизъюнкция	*… или …*	$\vee$
Импликация	*если … то*	$\Rightarrow$
Эквиваленция	*… эквивалентно …*	$\Leftrightarrow$ или $\sim$

Определение. Одноместной высказывательной формой, заданной на множестве X, называется предложение с переменной, которое обращается в высказывание при подстановке в него значений переменной из множества X.

Среди всех возможных значений переменной нас в первую очередь интересуют те, которые обращают высказывательную форму в истинное высказывание. Множество таких значений переменной называют ***множеством истинности*** высказывательной формы. Например, множеством истинности высказывательной формы $x > 5$, заданной на множестве действительных чисел, будет промежуток $(5;\infty)$. Множество истинности высказывательной формы $x + 5 = 8$, заданной на множестве целых неотрицательных чисел, состоит из одного числа 3.

Условимся обозначать множество истинности высказывательной формы буквой T. Тогда, согласно определению, всегда $T \subset X$.

Истинность или ложность составного высказывания (и высказывательной формы) определяется истинностью или ложностью его частей, соединённых логической связкой. Уточним их содержание и приведём таблицу истинности для каждой из логических связок.

1) Отрицание.

Определение. Отрицанием высказывания α называется высказывание $\overline{\alpha}$, которое ложно, если α истинно, и истинно, если высказывание α ложно.

Таблица истинности отрицания:

α	$\overline{\alpha}$
И	Л
Л	И

2) Конъюнкция высказываний.

Определение. Конъюнкцией высказываний α и β называется высказывание $\alpha \wedge \beta$, которое истинно, когда оба высказывания истинны, и ложно, когда хотя бы одно из этих высказываний ложно.

Таблица истинности конъюнкции:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Определение конъюнкции не расходится с общепринятым пониманием союза “и” (при этом в речи конъюнкция может выражаться не только союзом “и”, но и другими: “а”, “но”, “не только, но и”). Например: “Число 15 делится не только на 3, но и на 5” – конъюнкция высказываний “Число 15 делится на 3” и “Число 15 делится на 5”.

3) Дизъюнкция высказываний.

Определение. Дизъюнкцией высказываний α и β называется высказывание $\alpha \wedge \beta$, которое истинно, когда истинно хотя бы одно из этих высказываний, и ложно, когда оба высказывания ложны.

Таблица истинности дизъюнкции:

α	β	$\alpha \vee \beta$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Отметим, что в математике союз “или” используется как неразделительный, то есть допускается возможность одновременного выполнения обоих условий. Так, высказывание “15 кратно 3 или 5”, согласно определению, считают истинным, поскольку оба высказывания “15 кратно 3 ” и “15 кратно 5” истинны.

Можно доказать (прямой проверкой с помощью таблиц истинности) свойства 1-12 операций $\vee$, $\wedge$ и $\bar{\ }$:

1) $\overline{\overline{a}} \equiv a$ - *закон двойного отрицания*;

2) $a \vee b \equiv b \vee a, \quad a \wedge b \equiv b \wedge a$ - *коммутативность дизъюнкции и конъюнкции*;

3) $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c, \quad a \wedge (b \wedge c) \equiv (a \wedge b) \wedge c$ - *ассоциативность дизъюнкции и конъюнкции*;

4) $a \vee (b \wedge c) \equiv (a \vee b) \wedge (a \vee c), \quad a \wedge (b \vee c) \equiv (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ - *взаимная дистрибутивность конъюнкции и дизъюнкции*;

5) $a \vee a \equiv a, \quad a \wedge a \equiv a$ - *законы идемпотентности*;

6) $\overline{a \vee b} \equiv \bar{a} \wedge \bar{b}, \quad \overline{a \wedge b} \equiv \bar{a} \vee \bar{b}$ - *законы де Моргана*;

7) $a \vee И \equiv И,\ a \wedge Л \equiv Л,\ a \vee Л \equiv a,\ a \wedge И \equiv a$ - *законы истины и лжи*;

8) $a \vee (a \wedge b) \equiv a, \quad a \wedge (a \vee b) \equiv a$ - *законы поглощения*;

9) $(a \wedge b) \vee (a \wedge \bar{b}) \equiv a$ - *закон склеивания*;

10) $(a \wedge b) \vee \bar{a} \equiv b \vee \bar{a}$ - *закон вычеркивания*;

11) $a \vee \bar{a} \equiv И$ – *закон исключения третьего*;

12) $a \wedge \bar{a} \equiv Л$ – *закон противоречия*.

4) Импликация.

Определение. Высказывательная форма $\beta(x)$ следует из высказывательной формы $\alpha(x)$, если $\beta(x)$ обращается в истинное высказывание при всех тех значениях x, при которых $\alpha(x)$ истинно.

Высказывание $\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$ прочитать можно по-разному:

а) из $\alpha(x)$ следует $\beta(x)$;

б) всякое $\alpha(x)$ есть $\beta(x)$;

в) если $\alpha(x)$, то $\beta(x)$;

г) $\beta(x)$ есть следствие $\alpha(x)$;

д) $\alpha(x)$ есть достаточное условие для $\beta(x)$;

е) $\beta(x)$ есть необходимое условие для $\alpha(x)$.

Как и любое высказывание, предложение $\alpha(x) \Rightarrow \beta(x)$ может быть либо истинным, либо ложным. Но так как оно может быть сформулировано “всякое $\alpha(x)$ есть $\beta(x)$”, то его истинность устанавливается путём доказательства, а ложность – с помощью контрпримера (см. п.6).

5) Эквиваленция.

Определение. Предложения $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ равносильны, если из предложения $\alpha(x)$ следует предложение $\beta(x)$, а из предложения $\beta(x)$ следует предложение $\alpha(x)$.

Высказывание $\alpha(x) \Leftrightarrow \beta(x)$ прочитать можно по-разному:

а) $\alpha(x)$ равносильно $\beta(x)$;

б) $\alpha(x)$ тогда и только тогда, когда $\beta(x)$;

в) $\alpha(x)$ - необходимое и достаточное условие для $\beta(x)$;

г) $\beta(x)$ - необходимое и достаточное условие для $\alpha(x)$.

Предложения равносильны, если они одновременно истинны либо одновременно ложны.

Структура теоремы. Виды теорем

Теорема – это высказывание, истинность которого устанавливается посредством рассуждения (доказательства).

С логической точки зрения теорема – высказывание вида $\alpha \Rightarrow \beta$, где α и β - высказывательные формы с одной или несколькими переменными. Предложение α называется *условием* теоремы, а предложение β - её *заключением.*

Есть разные способы (см. п.4, а) - е) для $\alpha \Rightarrow \beta$), но удобнее теорему формулировать в виде "если …, то …", поскольку сразу видно её условие (что дано) и заключение (что надо доказать).

Для всякой теоремы "если α, то β" можно сформулировать предложение "если β, то α", которое называют обратным данному. Но не всегда это предложение является теоремой.

Рассмотрим теорему: "если четырёхугольник является прямоугольником, то в нём диагонали равны". Предложение, обратное данному: "если в четырёхугольнике диагонали равны, то четырёхугольник является прямоугольником"- ложное высказывание (контрпример: в равнобедренной трапеции диагонали равны, но трапеция не является прямоугольником).

Если же предложение "если β, то α" истинно, то его называют теоремой, обратной данной "если α, то β".

Для всякой теоремы "если α, то β" можно сформулировать предложение "если не α, то не β", которое называют противоположным данному. Но не всегда это предложение является теоремой. Например, предложение, противоположное теореме "если четырёхугольник является прямоугольником, то в нём диагонали равны", будет ложным: "если четырёхугольник не является прямоугольником, то в нём диагонали не равны".

В случае, если предложение, противоположное данному, будет истинно, его называют *теоремой, противоположной данной*.

Таким образом, если для теоремы $\alpha \Rightarrow \beta$ сформулировать обратное $\beta \Rightarrow \alpha$ или противоположное $\overline{\alpha} \Rightarrow \overline{\beta}$ предложения, то их надо доказывать (и тогда их называют соответственно обратной или противоположной теоремами) или опровергать.

С другой стороны, имеет место *закон контрапозиции*: $(\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha})$.

Согласно этому закону предложение, обратно противоположное какой-либо теореме, также является теоремой, и вместо данной теоремы можно доказывать теорему, обратно противоположную данной.

На законе контрапозиции основано доказательство теоремы "от противного". Например, вместо теоремы "если четырёхугольник является прямоугольником, то в нём диагонали равны" можно доказывать обратно противоположную теорему "если в четырёхугольнике диагонали не равны, то он не является прямоугольником".

Заметим, что если для данной теоремы $\alpha \Rightarrow \beta$ справедлива обратная $\beta \Rightarrow \alpha$, то их можно объединить в одну $\alpha \Leftrightarrow \beta$, и тогда в формулировке будут использоваться слова “необходимо и достаточно”, “тогда и только тогда”. Доказательство теоремы $\alpha \Leftrightarrow \beta$ сводится к доказательству двух взаимно-обратных теорем $\alpha \Rightarrow \beta$ и $\beta \Rightarrow \alpha$.

Задача. Необходимым и достаточным условием делимости натурального числа a на 24 является 1) $a \vdots 4$ и $a \vdots 6$; 2) $a \vdots 2, a \vdots 3$ и $a \vdots 4$; 3) $a \vdots 2$ и $a \vdots 12$; 4) $a \vdots 3$ и $a \vdots 8$.

Решение. Во всех ответах указываются условия, необходимые для делимости натурального числа a на 24, но только условие 4) является и достаточным для делимости числа a на 24. Правильный ответ - 4).

Кванторы общности и существования

Выражение “для любого x” в логике называется квантором общности по переменной x и обозначается $\forall x$. Запись “$\forall x \in X \quad \alpha(x)$” означает: “для любого $x \in X$ истинно высказывание $\alpha(x)$”.

Выражение “существует x такое, что …” в логике называется квантором существования по переменной x и обозначается символом $\exists x$.

Запись “$\exists x \in X \quad \alpha(x)$” означает: “существует (хотя бы один) $x \in X$ такой, что $\alpha(x)$ истинно”.

Обозначения $\forall$ и $\exists$ для кванторов – это перевёрнутые латинские буквы A и E, которые являются первыми буквами английских слов “All” и “Exist”.

Заметим, что в математике наряду со словом “любой” употребляют слова “всякий”, “каждый”, а вместо слова “существует” используют слова “некоторые”, “найдётся”, “есть”, “хотя бы один”.

Обратим внимание на особенности употребления в математике слова “некоторый”. В обычной речи, говоря “некоторые”, имеют в виду “по меньшей мере один, но не все”, в математике же слово “некоторые” означает “по меньшей мере один, но, может быть, и все”.

Истинность высказывания с квантором общности устанавливается путём доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

А истинность высказывания с квантором существования устанавливается с помощью конкретного примера. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

Заметим, что убедиться в ложности высказывания – значит опровергнуть его.

Правило: для того, чтобы построить отрицание высказывания, начинающегося с квантора общности (существования), достаточно заменить его квантором существования (общности) и построить отрицание предложения, стоящего после квантора.

$$\overline{\forall x \in X \quad \alpha(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X \quad \overline{\alpha(x)}.$$

$$\overline{\exists x \in X \quad \alpha(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X \quad \overline{\alpha(x)}.$$

Пример.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве M, если

$$\exists \quad K > 0 \quad \forall x \in M \Rightarrow | f(x) | \le K. \tag{1}$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется неограниченной на M, если $\forall K > 0$

$$\overline{\forall x \in M \Rightarrow | f(x) | \le K} \Leftrightarrow \forall \quad K > 0 \quad \exists x \in M : | f(x) | > K. \tag{2}$$

(2) – отрицание (1).

5. ФУНКЦИИ. КЛАССИФИКАЦЯ ФУНКЦИЙ

Понятие функции

Определение. Пусть X и Y - 2 множества, и пусть каждому $x \in X$ по какому-то правилу f ставится в соответствие некоторый $y = f(x) \in Y$. Тогда говорят, что задана функция $y = f(x)$ с областью определения X.

Таким образом, функция – это правило, по которому элементу x ставится в соответствие элемент y.

Определение. Областью значений $E(f)$ функции $y = f(x)$ называется множество тех $y \in Y,$ для которых найдётся такой $x \in X,$ что $y = f(x)$. Другими словами, $E(f) = \{y \in Y \mid \exists x \in D(f) = X, \quad y = f(x)\}$.

Очевидно, $E(f) \subset Y$.

Замечание. Иногда допускают, чтобы в определении функции каждому $x \in X$ соответствовало несколько элементов из Y. В этих случаях говорят, что y есть многозначная функция от x. При исследовании таких функций выбирают промежутки, где они однозначны.

Функции обычно задают:

1) аналитически (т.е. с помощью одной или нескольких формул);
2) таблицей;
3) графически.

Мы будем дальше рассматривать числовые функции одной переменной, тогда $X \subseteq R$ и $Y \subseteq R$.

График функции $y = f(x)$ - это множество всех точек (x, y) плоскости Oxy, для которых $y = f(x)$. Другими словами, график Γ - это $\Gamma = \{(x, y) \in R^2 \mid \quad x \in D(f), y = f(x)\}$.

Обратная функция. Пусть задана однозначная функция $y = f(x)$. Предположим, что для $\forall y \in E(f) \subset Y$ существует ровно один $x \in X$ такой, что $f(x) = y$. Определим тогда $g(y) = x$ для указанных x и y. Это задаёт функцию g с областью определения $E(f)$ и областью значений X, т.е. $D(g) = E(f)$ и $E(g) = X$. Такая функция называется обратной к функции f Очевидно, $g(f(x)) = x$ для $\forall x \in X$ и $f(g(y)) = y$ для $\forall y \in E(f)$.

Примеры:

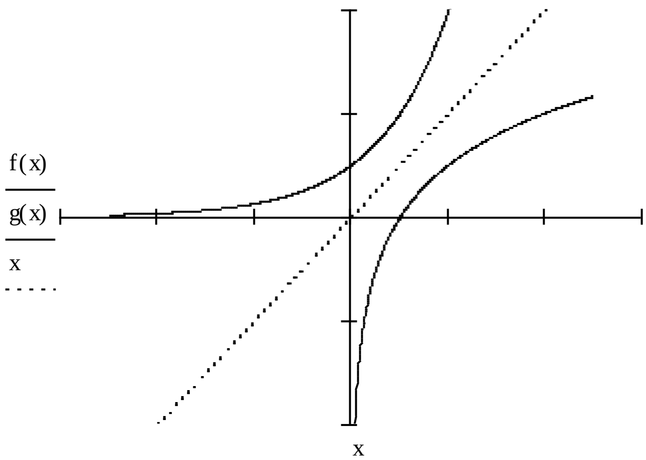
1. Для функции $y = 2x$ обратной функцией является функция $x = \frac{1}{2}y$.

2. Для функции $y = x^2, x \in [0,1]$, обратной функцией является $x = \sqrt{y}$; заметим, что для функции $y = x^2$, заданной на отрезке $[-1;1]$, обратной не существует, так как одному значению y соответствует два значения x (так, если $y = \frac{1}{4}$, то $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$).

3. Для функции $y = \sin(x)$, $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ обратной является функция $x = \arcsin(y)$.

Из определения обратной функции вытекает, что функция $y = f(x)$ имеет обратную тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ задаёт взаимно однозначное соответствие между множествами D и E.

Если $X \subset R$, $Y \subset R$, то $y = f(x)$ и $x = g(y)$ есть числовые функции, графики которых совпадают как множества на плоскости Oxy. Если поменять местами x и y в определении g (т.е. считать g функцией от новой переменной x со значениями y), то графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$.



Суперпозиция функций

Пусть $y = f(x)$, $D(f) = X$, $E(f) \subset Y$. Пусть также задана функция $z = \varphi(y)$ с областью определения $D(\varphi) = Y$. Тогда правило $x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{\varphi} z$ определяет функцию z от x, или $z = \varphi(f(x))$. Такая функция называется сложной функцией, а операция взятия функции от функции называется суперпозицией функций.

Некоторые классы функций

1. Функция $y = f(x)$ называется монотонно возрастающей на $X_0 \subset D(f)$, если $\forall x_1, x_2 \in X_0$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Аналогично определяются монотонно убывающие функции, а также неубывающие и невозрастающие функции (только в последних двух случаях неравенства нужно писать нестрогие).

2. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на $X_0 \subset D(f)$, если $\exists k \quad \forall x \in X_0 \Rightarrow f(x) \le k$ (соответственно $\exists k \quad \forall x \in X_0 \Rightarrow f(x) \ge k$).

3. Функция $y = f(x)$ называется чётной (нечётной), если $D(f)$ симметрична относительно $x = 0$ и $\forall x \in D(f) \Rightarrow f(-x) = f(x)$ (соответственно $f(-x) = -f(x)$).

4. Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом $T > 0$, если $\forall x \in D(f) \Rightarrow x \pm T \in D(f)$ и $f(x \pm T) = f(x)$. Наименьший из периодов называется основным.

Пример. Функция Дирихле $y(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x \quad \text{рационально}, \\ 0, & \textit{если} \quad x \quad \text{иррационально} \end{cases}$ имеет периодами все положительные рациональные числа; основного периода нет.

Элементарные функции

Основными элементарными функциями называются следующие:

1) степенная $y = x^{\alpha} \quad (\alpha \in R)$;

2) показательная $y = a^x \quad (a > 0, \quad a \ne 1)$;

3) логарифмическая $y = \log_a x \quad (a > 0, \quad a \ne 1)$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = tg\, x, \quad y = ctg\, x$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x, \quad y = \arccos x,$ $y = arctg\, x, \quad y = arcctg\, x$.

Определение. Элементарной функцией называется функция, которая построена из основных элементарных функций при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа суперпозиций (и может быть записана одной формулой). Из определения следует, что элементарные функции заданы аналитически.

Пример. Функция $y = |x| = \begin{cases} x, & \text{если} \quad x \ge 0, \\ -x, & \text{если} \quad x < 0 \end{cases}$ - элементарная, так как $|x| = \sqrt{x^2}$.

Пример. Функция $y = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если} \quad x \le 0, \\ x, & \text{если} \quad x > 0 \end{cases}$ - не элементарна.

Алгебраические и трансцендентные функции

1) Многочлены (или целые рациональные функции) – функции вида $y = P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad n \in Z_0$.

2) Дробно-рациональные функции – функции вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x), Q(x)$ - многочлены.

3) Иррациональные функции – те, которые получаются из многочленов с помощью конечного числа арифметических операций и операций возведения в степень с рациональным нецелым показателем.

4) Алгебраической называется функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет некоторому уравнению вида $P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_n(x) = 0$, где $P_i(x)$ - многочлены. Все функции из разделов 1 - 3 - алгебраические, причём для иррациональных функций степень n равна 2, 3 или 4. Функция, не являющаяся алгебраической, называется трансцендентной (например, $y = \cos x$, $y = 2^x$, $y = \ln x$ и т.д.).

6. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

Современный человек каждый день запоминает номера машин и телефонов, в магазине подсчитывает стоимость покупок, ведет семейный бюджет и т.д. Числа, цифры с нами везде.

Люди всегда считали и записывали числа, даже пять тысяч лет назад. Но записывали они их совершенно по-другому, по другим правилам. Но в любом случае число изображалось с помощью любого или нескольких символов, которые называются цифрами.

Известно множество способов представления чисел. В любом случае число изображается символом или группой символов (словом) некоторого алфавита. Такие символы называются *цифрами*, символические изображения чисел — *кодами*, а правила их получения — *системами счисления* (кодирования).

Система счисления **—** это совокупность приемов и правил для обозначения и наименования чисел.

Алфавит системы счисления **—** это множество всех символов (знаков), используемых для записи чисел в данной системе счисления.

Цифра — это любой символ (знак), входящий в алфавит данной системы счисления.

Системы счисления делятся на следующие виды:

1) системы бирок (унарные);

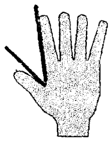
2) кодовые (непозиционные) системы;

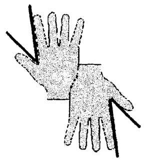
3) позиционные системы.

Простейшая и самая древняя — так называемая *унарная система счисления*. В ней для записи любых чисел используется всего один символ — палочка, узелок, зарубка, камешек. Если какое-нибудь число должны были запомнить два человека, то брали деревянную бирку, делали на ней соответствующее число зарубок, а потом раскалывали бирку пополам. Этим кодом пользуются малыши, показывая на пальцах свой возраст.

Система счисления называется непозиционной, если количественный эквивалент значения каждого символа не зависит от его положения (места, позиции) в коде числа.

Примером непозиционной системы может служить система счисления, которая применялась более двух с половиной тысяч лет назад в Древнем Риме. В основе римской системы счисления лежали знаки I (один палец) для числа 1, V (раскрытая ладонь) для числа 5, X (две сложенные ладони) для 10, а обозначения C для 100 и M для 1000 — это первые буквы соответствующих латинских слов (centum — сто, mille — тысяча).


V


X

Чтобы записать число, римляне разлагали его на сумму тысяч, полутысяч, сотен, полусотен, десятков, пятерок, единиц. Например, десятичное число 28 представляется следующим образом: XXVIII = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 + 1 (два десятка, пятерка, три единицы).

Культура Древней Руси была тесно связана с византийской (греческой) культурой. Поэтому и обозначения чисел (буквами) были похожи на греческие. Для обозначения высших десятичных разрядов в славянском языке использовались следующие названия: 10 тысяч — тьма, 10 тем — легион, 10 легионов — леорд и др. Чтобы обозначить тьмы, буквы, соответствующие числам от 1 до 10, обводились кружком, для обозначения легионов эти же буквы обводились кружком из точек, для обозначения леордов — кружком из лучей и т.д.

Система счисления называется позиционной, если количественный эквивалент (значение) символа зависит от его положения (места, позиции) в записи числа.

В привычной нам системе счисления для записи чисел используются десять различных знаков (цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9). Поэтому ее называют ***десятичной***.

Не только сама цифра, но и ее место, ее позиция имеют определяющее значение: из двух написанных рядом цифр левая выражает единицы, в десять раз большие, чем правая. Поэтому данную систему счисления называют ***позиционной***.

Арифметические действия над десятичными числами производятся с помощью операций, в основе которых лежат таблицы умножения и сложения, а также ***правило переноса:*** если в результате сложения двух цифр получается число, которое больше или равно 10, то оно записывается с помощью нескольких цифр, находящихся на соседних позициях.

Кроме десятичной, известны другие позиционные системы счисления, в том числе двадцатеричная и шестидесятеричная. Остатки последней мы находим в сохранившемся до наших дней обыкновении делить один час на 60 минут, одну минуту — на 60 секунд, полный угол — на 360 градусов. В некоторых областях Украины еще несколько десятков лет назад продавали яблоки, яйца и многое другое на «копы» — кучи по 60 штук.

Следует отметить, что позиционная шестидесятеричная система счисления возникла раньше десятичной. Ее применяли в Древнем Вавилоне. В Китае долгое время пользовались пятеричной системой счисления.

До первой трети XX в. имели элементы двенадцатеричной системы счисления. При этом число 12 (дюжина) даже составляло конкуренцию числу 10 в борьбе за почетный пост основания общеупотребительной системы счисления. Дело в том, что число 12 имеет больше делителей (2, 3, 4, 6), чем 10 (2 и 5). Поэтому в двенадцатеричной системе счисления гораздо удобнее производить расчеты, нежели в десятичной.

Основные достоинства любой позиционной системы счисления — простота выполнения арифметических операций и ограниченное количество символов, необходимых для записи любых чисел.

7. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Утверждения подразделяются на общие и частные. Приведем пример общего утверждения: *во всяком параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам*.

Соответствующим примером частного утверждения является следующее: *в параллелограмме ABCD диагонали в точке пересечения делятся пополам*.

Переход от общих утверждений к частным называется *дедукцией*. Рассмотрим пример:

Все числа, оканчивающие нулем, делятся на 5. (1)

140 – число, оканчивающееся на ноль. (2)

140 делится на 5. (3)

Из общего утверждения (1) при помощи утверждения (2) получено частное утверждение (3).

Переход от частных утверждений к общим называется *индукцией*. Индукция может привести как к верным, так и к неверным выводам. Разберем два примера:

140 делится на 5. (1)

Все числа, оканчивающиеся нулем, делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) верно.

140 делится на 5. (1)

Все трехзначные числа делятся на 5. (2)

Из частного утверждения (1) получено общее утверждение (2). Утверждение (2) неверно.

Спрашивается, как пользоваться в математике индукцией, чтобы получать только верные ответы? Ответ на этот вопрос и дается в этой статье.

Если имеется утверждение, справедливое в нескольких частных случаях, а все частные случае рассмотреть невозможно, как же узнать, справедливо ли вообще это утверждение?

Этот вопрос иногда удается решить посредством применения особого метода рассуждений, называемого *методом математической индукции* (полной индукции, совершенной индукции).

В основе этого метода лежит *принцип математической индукции*, заключающийся в следующем:

утверждение справедливо для всякого натурального n, если:

1) оно справедливо для $n = 1$

2) из справедливости утверждения для какого-либо произвольного натурального $n = k$ следует его справедливость для $n = k+1$.

Доказательство, основанное на принципе математической индукции, называется доказательством методом математической индукции. Такое доказательство необходимо должно состоять из двух частей, из доказательства двух самостоятельных теорем:

Теорема 1. Утверждение справедливо для $n = 1$.

Теорема 2. Утверждение справедливо для $n = k+1$, если оно справедливо для $n = k$, где k – какое-либо произвольное натуральное число.

Если обе эти теоремы доказаны, то на основании принципа математической индукции утверждение справедливо для всякого натурального n.

Пример 7.1. Вычислить сумму

$S_n = 1/1\cdot 2 + 1/2\cdot 3 + 1/3\cdot 4 + \ldots + 1/n(n+1)$.

Мы знаем, что

$S_1 = 1/2$; $S_2 = 2/3$; $S_3 = 3/4$; $S_4 = 4/5$.

Рассмотрение сумм S_1, S_2, S_3 и S_4 позволяет высказать гипотезу, что $S_n = n/n+1$, при всяком натуральном n. Для проверки гипотезы воспользуемся методом математической индукции.

Теорема 1. Для $n = 1$ гипотеза верна, так как $S_1 = 1/2$.

Теорема 2. Предположим, что гипотеза верна и для $n = k$, т.е. что

$$S_k = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \ldots + \frac{1}{k}(k+1) = \frac{k}{(k+1)},$$

где k – некоторое натуральное число.

Докажем, что тогда гипотеза обязана быть верной и для $n = k+1$, т.е. что

$$S_{k+1} = S_k + 1/(k+1)(k+2).$$

Следовательно, по условию теоремы,

$$S_{k+1} = k/(k+1) + 1(k+1)(k+2) = (k^2 + 2k + 1)/(k+1)(k+2) = (k+1)/(k+2).$$

Обе теоремы доказаны. Теперь на основании принципа математической индукции мы утверждаем, что

$$S_n = n/n+1.$$

Замечание. Необходимо подчеркнуть, что доказательство методом математической индукции, безусловно, требует доказательства *обеих теорем 1 и 2*.

Пример 7.2.

Теорема. Всякое натуральное число равно следующему за ним натуральному числу.

Д*оказательство*: проведем методом математической индукции. Предположим, что

$k = k + 1$. (1)

Докажем, что

$k + 1 = k + 2$. (2)

Действительно, прибавив к каждой части равенства (1) по 1, получим равенство (2). Выходит, что если утверждение справедливо для $n= k$, то оно справедливо и для $n = k+1$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е . Все натуральные числа равны.

Где же здесь ошибка? Ошибка заключается в том, что первая теорема, необходимая для применения принципа математической индукции, не доказана и не верна, а доказана только вторая теорема.

Теоремы 1 и 2 имеют свое особое значение. Теорема 1, так сказать, создает базу для проведения индукции. Теорема 2 дает право неограниченного автоматического расширения этой базы, право перехода от данного частного случая к следующему, от n к $n+1$.

Если не доказана теорема 1, а доказана теорема 2, то, следовательно, не создана база для проведения индукции, и тогда бессмысленно применять теорему 2, так как и расширять-то, собственно, нечего.

Если не доказана теорема 2, а доказана только теорема 1, то, хотя база для проведения индукции и создана, право расширения этой базы отсутствует.

Для того чтобы научиться применять метод математической индукции, надо рассмотреть достаточное количество задач.

Чтобы не повторять без конца слова «Теорема 1» и «Теорема 2», мы условимся в дальнейшем помечать первую и вторую части доказательства по индукции знаками 1° и 2°.

7.1. Доказательства тождеств: задачи арифметического характера

Пример 7.3. Выпишем в порядке возрастания положительные нечетные числа 1, 3, 5, 7, … Обозначим первое из них u_1, второе u_2, третье u_3 и т. д., т.е.

$u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5, u_4 = 7, \ldots\ldots\ldots$.

Поставим перед собой такую задачу: составить формулу, выражающую нечетное число u_n через его номер n.

Решение: Первое нечетное число u_1 можно записать так:

$u_1= 2\cdot 1 – 1$; (1)

второе нечетное число можно записать так:

$u_2 = 2\cdot 2 – 1$; (2)

третье нечетное число можно записать так:

$u_3 = 2\cdot 3 – 1$. (3)

Внимательно рассматривая равенства (1), (2), (3), можно высказать гипотезу, что для получения любого нечетного числа достаточно от удвоенного номера его отнять 1, т.е. для n-го нечетного числа имеем формулу

$u_n = 2n – 1$. (4)

Докажем, что эта формула справедлива.

1°. Равенство (1) показывает, что для $n = 1$ формула (4) справедлива.

2°. Предположим, что формула (4) справедлива для $n = k$, т.е. k-е нечетное число имеет вид

$u_k = 2k - 1$.

Докажем, что тогда формула (4) обязана быть справедливой и для (k+1)-го нечетного числа, т.е. что (k+1)-е нечетное число имеет вид

$u_{k+1} = 2(k+1) - 1$,

или, что все равно,

$u_{k+1} = 2k + 1$.

Для получения (k+1)-го нечетного числа достаточно к k-му нечетному числу прибавить 2, т.е.

$u_{k+1} = u_k + 2$.

Но, по условию, $u_{k+1} = (2k\text{-}1)$. Значит,

$u_{k+1} = (2k\text{-}1) + 2 = 2k + 1$,

что и требовалось доказать.

Ответ: $u_n = 2 \cdot n - 1$.

Пример 7.4. Вычислить сумму первых n нечетных чисел.

Решение. Обозначим искомую сумму S_n, т.е.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1).$$

Для решения таких задач в математике существуют готовые формулы. Нам интересно решить эту задачу, не прибегая к готовой формуле, а пользуясь методом математической индукции. Для этого, прежде всего, надо построить гипотезу, т.е. просто постараться угадать ответ.

Придаем n последовательно значения 1, 2, 3, … до тех пор, пока у нас не накопится достаточно материала, чтобы на основе его построить более или менее надежную гипотезу. После этого останется только эту гипотезу проверить методом математической индукции.

Имеем,

$S_1 = 1$, $S_2 = 4$, $S_3 = 9$,

$S_4 = 16$, $S_5 = 25$, $S_6 = 36$.

Теперь все зависит от наблюдательности решающего задачу, от его способности по частным результатам угадать общий.

Полагаем, что в данном случае легко заметить, что

$S_1 = 1^2$, $S_2 = 2^2$, $S_3 = 3^2$, $S_4 = 4^2$.

На основе этого можно предположить, что вообще $S_n = n^2$.

Докажем, что эта гипотеза справедлива.

1°. При $n = 1$ сумма представляется одним слагаемым, равным 1. Выражение n^2 при $n = 1$ также равно 1. Значит, при $n = 1$ гипотеза верна.

2°. Допустим, что гипотеза верна для $n = k$, т.е. $S_k = k^2$. Докажем, что тогда гипотеза должны быть верна и для $n = k + 1$, т.е.

$S_{k+1} = (k + 1)^2$.

Действительно,

$S_{k+1} = S_k + (2k + 1)$.

Но $S_k = k^2$ и потому

$S_{k+1} = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$.

Что и требовалось доказать.

Ответ: $S_n = n^2$.

Пример 7.5. Доказать, что сумма квадратов n первых чисел натурального ряда равно $n(n+1)(2n+1)/6$.

Решение. Пусть

$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$.

1°. $S_2(1) = 1^2 = 1(1+1)(2\cdot 1+1)/6$.

2°. Предположим, что

$S_2(n) = n(n+1)(2n+1)/6$.

Тогда

$S_2(n+1) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = (n(n+1)(2n+2)/6) + (n+1)^2$

и окончательно

$S_2(n+1) = (n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1]/6$.

7.2. Тригонометрические и алгебраические задачи

Пример 7.6. Доказать тождество

$$cos\,(\alpha) cos\,(2\alpha)\, cos(4\alpha) \ldots cos(2^n\alpha) = sin(2^{n+1}\alpha)/2^{n+1} sin\alpha.$$

Решение.

1°. При $n = 0$ тождество справедливо, так как

$\cos(\alpha) = \sin(2\alpha)/2\sin(\alpha)$.

Пусть тождество справедливо при $n = k$, т.е.

$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) \ldots \cos(2^k\alpha) = \sin(2^{k+1}\alpha)/2^{k+1}\sin\alpha$.

Тогда оно справедливо и при $n = k + 1$. Действительно,

$\cos(\alpha)\cos(2\alpha) \ldots \cos(2^k\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha) = \sin(2^{k+1}\alpha)\cos(2^{k+1}\alpha)/2^{k+1}\sin\alpha = {}$ $=\sin(2^{k+2}\alpha)/2^{k+2}\sin\alpha$.

Пример 7.7. Доказать, что $A_k = \cos n\,\theta$, если известно, что $A_1 = \cos\theta$; $A_2 = {}$ $=\cos 2\theta$ и для всякого натурального $k > 2$ имеет место соотношение:

$$A_k = 2\, cos\theta\, A_{k-1} - A_{k-2}.$$

Решение.

1°. Утверждение справедливо при $n = 1$ и $n = 2$.

2°. Пусть

$A_{k-2} = \cos(k-2)\,\theta$,

$A_{k-1} = \cos(k-1)\,\theta$.

Тогда

$A_k = 2\cos\theta\cos(k-1)\,\theta - \cos(k-2)\,\theta = \cos k\,\theta$.

Пример 7.8. Доказать, что

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = [\sin(n+1)x/2][\sin(nx/2)]/\sin(x/2).$$

Решение.

1°. При $n = 1$ утверждение справедливо.

2°. Пусть

$$\sin x + \sin 2x + \ldots \sin kx = [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2).$$

Тогда

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin kx + \sin (k+1)x = [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2) +$$
$$+\sin(k+1)\, x = [\sin(k+1)x/2][\sin(kx/2)]/\sin(x/2) + 2[\sin((k+1)x/2)]\, [\cos\, ((k+1)x/2)] =$$
$$= [\sin(k+2)x/2][\sin((k+1)x/2)]/\sin(x/2),$$

ибо

$$2\cos((k+1)x/2)\,\sin\,(x/2) = \sin\,((k+2)[/2) - \sin kx/2.$$

7.3. Задачи на доказательство неравенств

Пример 7.9. Доказать, что при любом натуральном $n > 1$

$1/(n+1) + 1/(n+2) + \ldots + 1/2n < 13/24.$

Решение. Обозначим левую часть неравенства через S_n.

1°. $S_2 = 7/12 = 14/24$, следовательно, при $n = 2$ неравенство справедливо.

2°. Пусть S_k.> 13/24 при некотором k. Докажем, что тогда и $S_{k+1} > 13/24$. Имеем

$S_k = 1/(k+1) + 1/(k+2) + \ldots + 1/2k,$

$S_{k+1} =1/(k+2) + 1/(k+3) + \ldots + 1/2k + 1/(2k+1) + 1/(2k+2).$

Сравнивая S_k и S_{k+1}, имеем

$S_{k+1} - S_k = 1/(2k+1) + 1/(2k+2) + 1/(k+1),$

т.е.

$S_{k+1} - S_k = 1/2(k+1)(2k+1).$

При любом натуральном k правая часть последнего неравенства положительна. Поэтому

$S_{k+1}> S_k.$

Но $S_k > 13/24$, значит, и $S_{k+1} > 13/24$.

Пример 7.10. Доказать, что $(1+\alpha)^n > 1 + k\alpha$, где $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, n – натуральное число, большее 1.

Решение.

1°. При $n = 2$ неравенство справедливо, так как $+\alpha^2 > 0$.

2°. Пусть неравенство справедливо при $n = k$, где k – некоторое натуральное число, т.е.

$(1+\alpha)^k > 1 + k\alpha.$

Покажем, что тогда неравенство справедливо и при $n = k + 1$, т.е.

$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha.$

Действительно, по условию, $1+\alpha > 0$, поэтому справедливо неравенство

$(1+\alpha)^{k+1} > (1 + k\alpha)(1 + \alpha),$

полученное из неравенства умножением каждой его части на $(1 + \alpha)$.

Перепишем неравенство так:

$(1+\alpha)^{k+1} > 1 + (k+1)\alpha + k\alpha^2.$

Отбросив в правой части последнего неравенства положительное слагаемое $k\alpha^2$, получим справедливое неравенство.

8. ГРАФЫ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Графом (будем обозначать его буквой Г) называется рисунок, состоящий их нескольких точек (вершин графа) и ребер – отрезков или дуг, соединяющих некоторые вершины.

С помощью графов удобно и наглядно изображается информация о разных объектах и отношениях между ними. Рассмотрим пример.

Пример 8.1. В розыгрыше финальной части турнира участвуют семь команд: шесть команд, набравших наибольшее количество очков в предварительной части турнира, и команда–победитель прошлого года. Сначала играют друг с другом первые шесть команд, затем три команды, одержавшие победы, и команда, победитель прошлого года, играют друг с другом. Два победителя этого тура встречаются в финале.

Понять, о чем идет речь в этом тексте, нелегко. Попробуем представить его в виде наглядной схемы (рис. 8.1), и порядок организации финальной части розыгрыша станет очевидным.

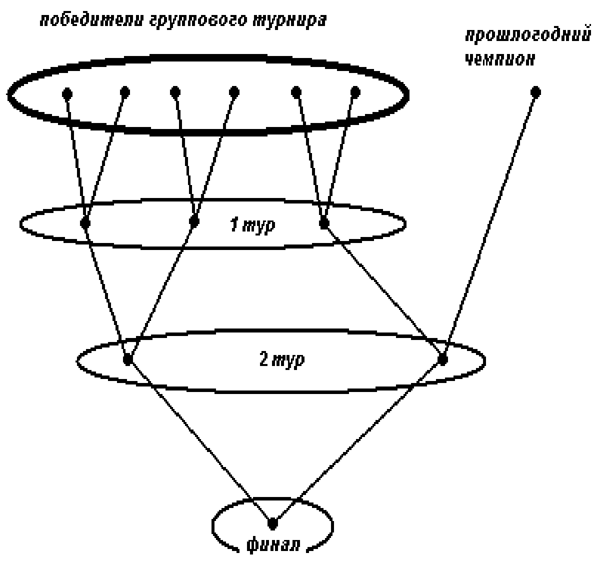


Рис. 8.1

Степенью вершины графа называется число выходящих из него ребер.

Для степени вершины принято следующее обозначение**: deg(A).**

Рассмотрим некоторый граф *Г*. Обозначим количество его вершин буквой *p*, а количество ребер буквой *q*. Сформулируем в виде теорем простейшие свойства степени.

Т е о р е м а 1. Сумма степеней всех вершин графа *Г* равна удвоенному количеству его ребер (2*q*).

Граф называют *простым*, если две вершины соединяет не более одного ребра, в противном случае граф называют *мультиграфом*.

Т е о р е м а 2. В простом графе найдется не менее двух вершин с одинаковыми степенями.

Т е о р е м а 3. В простом графе с p вершинами число ребер не больше $\frac{p(p-1)}{2}$:

$$\frac{p(p-1)}{2} \geq q.$$

Граф называется *полным*, если каждая его вершина соединена со всеми другими вершинами.

Примеры полных графов вы можете построить сами: нарисуйте выпуклый многоугольник и постройте все его диагонали. В полном графе с p вершинами $\frac{p(p-1)}{2}$ ребер.

8.1. Пути, циклы, связность

Еще одно важное понятие, относящееся к графам, – *связность*. Для того чтобы ввести его, дадим несколько определений. Начнем с понятия *путь*.

Путем (из вершины A в вершину B) в графе называется последовательная цепочка смежных ребер, которая начинается в вершине *A* и заканчивается в вершине В. Путь может проходить через ребро только один раз.

Запись пути в графе зависит от того, как определены его ребра. Если ребра определены с помощью вершин, то записывают последовательность тех вершин, через которые проходит путь. Если же ребра имеют собственные названия, то выписывается последовательность из этих названий.

Циклом называется путь, у которого начало и конец совпадают.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить хотя бы одним путем. В противном случае граф называется *несвязным*.

Вам уже, наверное, приходилось встречать задачи, в которых предлагается обвести ту или иную фигуру, не отрывая карандаш от бумаги. При этом запрещается проводить карандаш по одной линии несколько раз. Понятно, что аналогичное задание может быть дано и относительно некоторого графа. Далеко не все графы можно построить описанным выше способом. Те, для которых это требование выполняется, называются *уникурсальными* или *эйлеровыми*.

Т е о р е м а 4 (Э й л е р а). Связный граф уникурсален тогда и только тогда, когда степени всех его вершин четны или у него ровно две вершины нечетной степени.

Существует еще одна очень интересная задача, связанная с графами. В ней требуется отыскать простой цикл, который проходит через все вершины данного связного графа. Эта задача является частным случаем “задачи коммивояжера”, суть которой в следующем. Коммивояжер (разъездной торговец) должен проехать по всем городам некоторого региона и вернуться в исходный пункт. При этом целесообразно так составить маршрут, чтобы в каждом городе побывать ровно один раз (иначе покупатели могут предъявить счет за некачественный товар). У коммерсанта, естественно, имеется карта дорог региона.

Циклы, обладающие указанным выше свойством, называют *гамильтоновыми*, в честь их изобретателя Гамильтона, придумавшего игру–головоломку, в которой требовалось отыскать такие пути.

В отличие от эйлеровых циклов, для гамильтоновых циклов нет исчерпывающего условия, подобного теореме 4. Имеется следующий достаточный признак.

Т е о р е м а 5 . Пусть связный граф имеет не меньше четырех вершин (p>3) и степень каждой вершины не меньше p/2, тогда в графе имеется гамильтонов цикл.

8.2. Деревья

Важным частным случаем графа является дерево. Это название связано с типичным видом некоторых представителей данного класса. Дадим определение.

Деревом называется связный граф, не содержащий циклов. Несвязный граф, не имеющий циклов, называют лесом. (В лесу, как известно, не меньше двух деревьев.)

На рис. 8.2,а и 8.2,б приведены примеры деревьев. Как видите, далеко не все они напоминают по форме дерево. Тем не менее, можно так деформировать граф на рисунке 8.2,б, что он станет полностью похож на граф с рисунка 8.2,а. Нас будет интересовать вопрос о том, когда граф является деревом. Ответ на него сформулируем ниже, а сейчас укажем одно интересное свойство деревьев.

Т е о р е м а 6 . В любом дереве существует хотя бы одна вершина степени единица. (Такие вершины называют “висячими”).

Теперь сформулируем теорему, являющуюся признаком дерева.

Т е о р е м а 7 **.** Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда количество его вершин на единицу превосходит количество ребер:

$$p - q = 1.$$

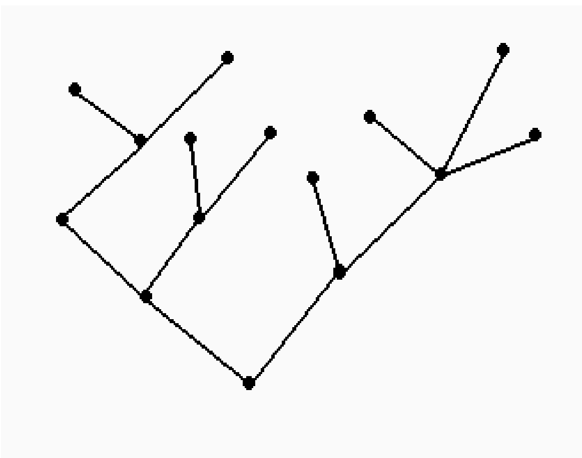


Рис. 8.2,а. Дерево (похожее на куст)

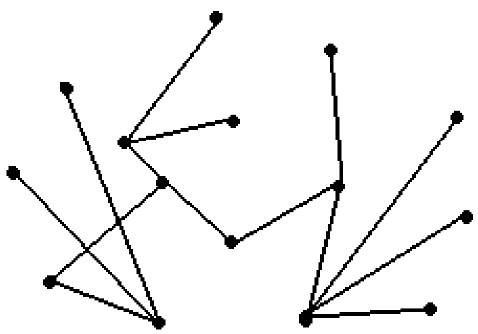


Рис. 8.2,б. Дерево (не похожее на дерево)

Одна из важных прикладных задач, относящихся к графам, это отыскание *минимального остова*[1] графа. Поясним, о чем идет речь. Пусть имеется связный граф Γ, необходимо найти такой его подграф, который связен, содержит все вершины исходного графа и при удалении любого ребра становится несвязным (в этом и заключено условие минимальности). Нетрудно догадаться, что такой минимальный остов является деревом.

8.3. Планарные графы. Раскраски

Исторически планарные графы связаны с одной знаменитой задачей.

Задача о домиках и колодцах. *В некоторой деревне есть три колодца. Трое жителей, живущие в трех стоящих рядом домиках, перессорились, и решили так протоптать тропинки от своих домов к каждому из трех колодцев, чтобы они не пересекались. Удастся ли им выполнить свой план?*

Попробуем решить эту задачу. Проведем тропинки так, как это показано на рис. 8.3.

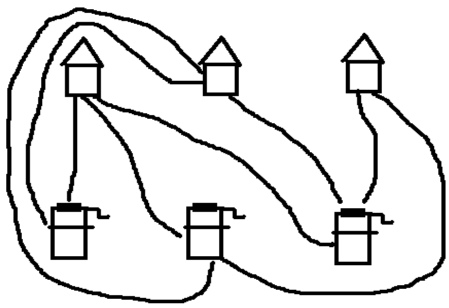


Рис. 8.3. Домики и колодцы

Как видно, нам удалось провести только восемь тропинок, а девятая должна пересечься хотя бы с одной. Можно доказать (мы не будем приводить строгое доказательство), что эта задача не имеет решения. Дело в том, что по мере проведения тропинок из двух первых домиков, будет получаться некоторый замкнутый контур, внутри которого будет стоять один из колодцев, при этом третий домик будет находиться снаружи от этого контура. Для того чтобы соединить этот домик с колодцем, обязательно потребуется пересечь новой тропинкой одну из уже проложенных.

Можно предложить еще одну задачу.

Задача о пяти хуторах. *Пять хуторов расположены в вершинах правильного пятиугольника. Нужно проложить дороги от каждого из них к остальным так, чтобы не было перекрестков.*

Эта задача также не может быть решена.

На рис. 8.4 построены графы $K_{3,3}$ и K_5, соответствующие задаче о домиках и колодцах и задаче о пяти хуторах. Оказывается, что проблема укладки графа на плоскости тесно связана с этими типами графов.

---

[1] Существует другая трактовка минимальности, связанная с тем, что каждому ребру графа приписано некоторое положительное число. Такое число называют *весом* ребра.

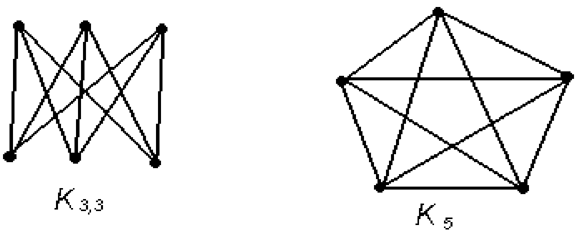


Рис. 8.4. Графы к задачам о домиках и колодцах и о пяти хуторах

Перейдем теперь к более строгим формулировкам.

Граф называется планарным, если его можно изобразить на плоскости без самопересечений. Такое изображение называют ***плоской укладкой*** *графа.*

На рис. 8.5 изображен полный граф K_4 и его плоская укладка.

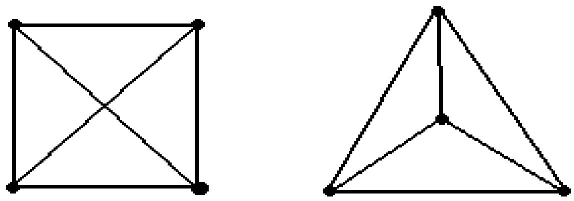


Рис. 8.5. Граф и его плоская укладка

Далее нам понадобится понятие *гомеоморфизма*. Это очень сложное математическое понятие, но в отношении к графам оно формулируется довольно просто. Мы не будем давать строгого определения, а рассмотрим это свойство на примерах.

Будем говорить, что два графа *гомеоморфны*, если один из них получен из другого путем добавления новых вершин на уже имеющиеся ребра.

На рис. 8.6 показаны два гомеоморфных графа. Граф справа получен из первого графа добавлением четырех вершин. На практике бывает довольно трудно увидеть, что два графа гомеоморфны.

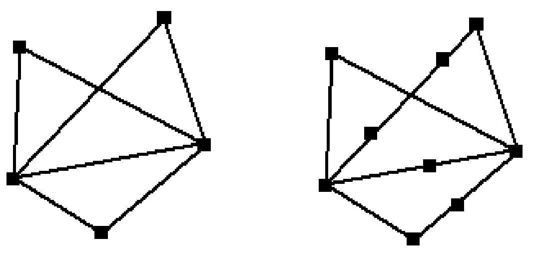


Рис. 8.6. Гомеоморфные графы

Теперь сформулируем условие планарности графов.

Т е о р е м а 8 . Граф планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов, гомеоморфных $K_{3,3}$ и K_5.

Эта общая теорема ставит окончательную точку в рассмотренных выше задачах о хуторах и о домиках и колодцах.

Замечание. Доказать, что граф планарен, и построить его плоскую укладку – это две независимые задачи. Заметим, что если граф не имеет пяти вершин, степень которых не меньше четырех, то он наверняка не имеет подграфа, гомеоморфного K_5. Если в графе нет шести вершин, степень которых не меньше трех, то он гарантированно не имеет подграфа, гомеоморфного $K_{3,3}$. Однако построить плоскую укладку графа с достаточно большим количеством вершин бывает непросто.

Теорема 9**.** Планарный граф можно раскрасить пятью красками так, что любые смежные вершины будут окрашены в разные цвета.

Еще одна интересная **проблема**: *скольками способами можно раскрасить граф*[2]*, если имеется* ***n*** *красок?*

Оказывается, что число способов раскрашивания является многочленом от ***n***, коэффициенты этого многочлена можно вычислить с помощью специального алгоритма.

Рассмотрим обобщение задачи о раскрасках. Известно, что граф без самопересечений располагается на некоторой поверхности (на сфере, на торе, на бутылке Клейна и т.п.), какое минимальное количество красок нужно для его раскрашивания?

Ответ на этот вопрос был получен в разделе математики, называющемся “топологией”. Оказалось, что для всех замкнутых двумерных поверхностей (кроме сферы) данное число выражается через Эйлерову характеристику этой поверхности.

8.4. Формула Эйлера

Для пространственных многогранников существует одно интересное соотношение, впервые доказанное Эйлером. Оно справедливо и для графов. Обозначим через: p, q, r соответственно число вершин, ребер и граней (часть плоскости, заключенная между ребрами) графа.

Теорема 10**.** В любом плоском графе выполняется соотношение: $p - q + r = 2$.

Замечание. Внешняя грань также считается.

Пример 8.2. Проверим формулу Эйлера для графа, изображенного на рис. 8.7.

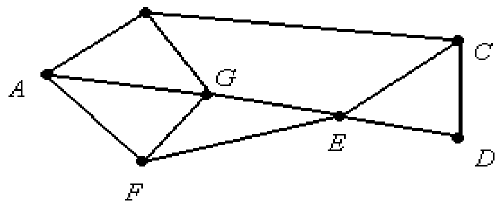


Рис. 8.7

[2] Здесь граф необязательно должен быть планарен.

Число вершин $p = 7$, число ребер $q = 11$, число граней $r = 6$. Подставим в формулу и получим верное равенство: 7 -11 +6 = 2.

8.5. Дополнение графа. Регулярный граф

Дополнением $\overline{\Gamma}$ *графа Г с множеством вершин* p *и множеством ребер* q называется простой граф со множеством вершин *p*, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в *Г*.

На рис. 8.8 изображен граф *Г* и его дополнение $\overline{\Gamma}$.

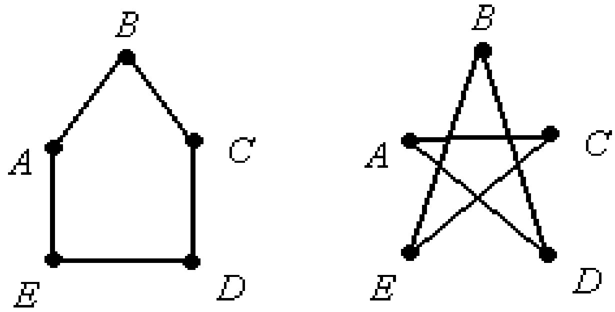


Рис. 8.8. Граф Г и его дополнение

Граф, у которого все вершины имеют одну и ту же степень, называется регулярным.

Примерами регулярных графов являются полные графы.

Рассмотрим пример задачи, при решении которой применяются графы.

Задача. *На небольшом предприятии каждый рабочий имеет по 2 специальности. Всего специальностей 4, причем на каждой специальности занято по 3 рабочих. Сколько рабочих на предприятии? Изобразите решение в виде графа.*

Решение. В графе для этой задачи вершины, соответствующие рабочим, обозначим звездочкой, а вершины, соответствующие специальностям, – кружочком (рис. 8.9).

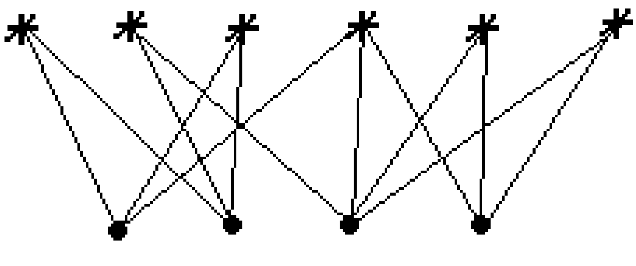


Рис. 8.9

Каждое ребро графа соединяет ровно две вершины: одну звездочку и один кружочек, причем количество кружочков - 4. Обозначим за x количество рабочих, тогда $2x = 3 \cdot 4 \Rightarrow x = 6$. Решение в виде графа изображено на рис. 8.9.

9. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ТЕМАМ

9.1. Комбинаторика

Общие правила комбинаторики

1. Имеется пять видов конвертов и четыре вида марок одного достоинства. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?
2. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный?
3. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске два квадрата – белый и черный – так, чтобы они не лежали на одной горизонтали и вертикали?
4. Из 12 слов мужского рода, 9 женского и 10 среднего надо выбрать по одному слову каждого рода. Сколькими способами это можно сделать?
5. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?
6. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 100 фехтовальщиков каждое, надо выделить по одному фехтовальщику для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?
7. Имеется 6 пар перчаток разных размеров. Сколькими способами можно выбрать из них одну перчатку на левую руку и одну – на правую так, чтобы эти перчатки были различных размеров?
8. Из трех различных экземпляров учебника алгебры, 7 экземпляров учебника геометрии и 6 экземпляров учебника физики надо выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?
9. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова “КАМЗОЛ”?
10. На доске написаны 7 существительных, 5 глаголов и 2 прилагательных. Для предложения нужно выбрать по одному слову каждой из этих частей речи. Сколькими способами это можно сделать?
11. Составляются знаки, состоящие из геометрической фигуры (окружности, квадрата, треугольника или шестиугольника), буквы и цифры. Сколько таких знаков можно составить?
12. При составлении экипажа космического корабля необходимо учитывать психологическую совместимость экипажа. Известно, что команда состоит из трех человек: капитана, инженера и врача. Причем на должность капитана есть четыре кандидата k_1, k_2, k_3, k_4, на место инженера – 3 кандидата i_1, i_2, i_3 и на место врача - 3 кандидата v_1, v_2, vi_3. Проведенные исследования показали, что командир k_1 психологически совместим с инженерами i_1, i_3 и врачами v_2, v_3, командир k_2 – с инженерами i_1, i_2 и со всеми врачами, командир k_3 – с инженерами i_1, i_2 и врачами v_1, v_3, командир k_4 – со всеми инженерами и врачом v_2. Кроме того, инженер i_1 психологически несовместим с врачом v_3, инженер i_2 – с врачом v_1, инженер i_3 – с врачом v_2. Сколькими способами можно составить команду корабля?

13. В Стране Чудес есть четыре города: *А, Б, В* и *Г*. Из города *А* в город *Б* ведет 6 дорог, а из города *Б* в город *В* - 4 дороги. Из города *А* в город *Г* - две дороги, и из города *Г* в город *В* - тоже две дороги. Сколькими способами можно проехать от *А* до *В*?

14. В магазине одежды продаются 5 видов костюмов-троек (брюки, пиджак, жилет), 7 видов брюк, 3 вида пиджаков и 2 вида жилетов, кроме того, 3 вида костюмов-двоек (брюки, пиджак). Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую брюки, пиджак и жилет?

15. У двух начинающих коллекционеров по 20 марок и по 10 значков. Честным обменом называется обмен одной марки на одну марку или одного значка на один значок. Сколькими способами коллекционеры могут осуществить честный обмен?

16. В книжном магазине лежат 6 экземпляров романа И.С. Тургенева “Рудин”, 3 экземпляра его же романа “Дворянское гнездо” и 4 экземпляра романа “Отцы и дети”. Кроме того, есть 5 томов, содержащих романы “Рудин” и “Дворянское гнездо”, и 7 томов, содержащих романы “Дворянское гнездо” и “Отцы и дети”. Все книги различны. Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

17. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

18. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты, по одной каждой масти?

19. Сколькими способами из полной колоды (52 карты) можно выбрать 4 карты разных мастей и достоинств?

20. В корзине лежат 12 яблок и 10 апельсинов. Ваня выбирает из неё яблоко или апельсин (что-то одно), после чего Надя берет и яблоко, и апельсин. В каком случае Надя имеет большую свободу выбора: если Ваня взял яблоко или если он взял апельсин?

21. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки - белую и черную – так, чтобы белая шашка могла бить черную? Черная белую? Обе шашки могут бить друг друга? Ни одна не может бить другую?

Формула включения и исключения

22. Исследователь рынка сообщает следующие данные. Из 1000 опрошенных 811 нравится шоколад, 752 нравятся конфеты и 418 - леденцы, 570 нравится шоколад и конфеты, 356 - шоколад и леденцы, 348 - конфеты и леденцы, а 297 - все три вида сладостей. Показать, что в этой информации содержатся ошибки.

23. В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом. Докажите, что в этой информации сдержатся ошибки.

24. В отделе научно-исследовательского института работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык.

Шестеро знают английский, шестеро – немецкий, семеро – французский. Четверо знают английский и немецкий, трое – немецкий и французский, двое – французский и английский. Один человек знает все три языка. Сколько человек работают в отделе? Сколько человек знают только английский язык? Только французский?

25. Сколько чисел в первой сотне не делится ни на одно из чисел 2, 3, 5?

26. Сколько существует натуральных чисел, меньших 1000, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

27. В ожесточенном бою 70 из 100 пиратов потеряли один глаз, 75 -одно ухо, 80 - одну руку и 85 - одну ногу. Страховая компания “Веселый Роджер”, в которой застрахованы пираты, задалась вопросом: каково минимальное число потерявших одновременно глаз, ухо, руку или ногу (страховой случай Total Permanent Disablement, при котором выплаты компании максимальны)?

Размещения с повторениями

28. Назовем натуральное число «симпатичным'», если в его записи встречаются только нечетные цифры. Сколько существует 4-значных «симпатичных» чисел?

29. Четыре студента сдают экзамен. Сколько может быть вариантов распределения оценок, если известно, что все студенты экзамен сдали?

30. На железнодорожной станции имеется m светофоров. Сколько может быть дано различных сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: красный, желтый, зеленый?

31. Сколькими способами можно отправить 6 писем с тремя курьерами?

32. В клубе велосипедистов считается плохим знаком иметь членский билет, в номере которого есть цифра 8. Поэтому председатель клуба решил выдавать билеты с номерами, в которые ни одна 8 не входит. Сколько было членов в группе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки?

33. На флоте применяют семафор флажками. Каждой букве соответствует определенное положение флажков. Всего положений каждого флажка пять – вниз отвесно, вниз наклонно, горизонтально, вверх наклонно и вверх отвесно. Как правило, флажки находятся по разные стороны от тела сигнальщика. Но при передаче некоторых букв оба флажка расположены по одну и ту же сторону. Почему пришлось сделать такое исключение?

34. В селении проживают 2000 жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы.

35. Каждую клетку квадратной таблицы 2x2 можно покрасить в черный или белый цвет. Сколько существует различных раскрасок этой таблицы?

36. Крокодил имеет 68 зубов. Доказать, что среди 16^{17} крокодилов может не оказаться двух с одним и тем же набором зубов.

37. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства? (наибольшее число зубов равно 32).

38. При передаче сообщений по телеграфу используется код Морзе. В этом коде буквы, цифру и знаки препинания обозначают точками и тире. При этом для одних букв используется только один знак (Е ·), а для некоторых приходится использовать пять знаков (Э · · - · ·). Почему нельзя обойтись меньшим числом знаков?

39. Сколькими способами можно заполнить одну карточку в лотерее «Спортпрогноз»? (В этой лотерее нужно предсказать итог тринадцати спортивных матчей. Итог каждого матча – победа одной из команд либо ничья; счет роли не играет.

40. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. В городе есть три завода, где требуются рабочие в литейный цех (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают лишь женщин) и две фабрики, где требуются и мужчины и женщины. Сколькими способами могут они распределиться между этими предприятиями?

41. Алфавит племени Мумбо-Юмбо состоит из трех букв А, Б и В. Словом является любая последовательность, состоящая не более чем из 4 букв. Сколько слов в языке племени Мумбо-Юмбо?

Размещения без повторений

42. Сколькими способами в группе студентов из 34 человек можно выбрать старосту и казначея? Если известно, что один человек не может занимать две должности сразу. Если известно, что один человек может занимать две должности сразу.

43. В футбольной команде (11 человек) нужно выбрать капитана и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

44. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

45. Сколькими способами можно сделать трехцветный флаг с горизонтальными полосами одинаковой ширины, если имеется материя шести различных цветов?

46. Забор состоит из 100 дощечек. У Тома Сойера есть краски 150 различных цветов. Сколько существует различных раскрасок забора, если все дощечки покрашены в разный цвет? Та же задача, но дощечки могут быть покрашены в одинаковый цвет.

47. Сколько различных дробей можно составить из чисел 3, 5, 7, 11, 13, 17 так, чтобы в каждую дробь входили два различных числа?

48. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5? Тот же вопрос, но при условии, что ни одна цифра не повторяется.

49. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают ровно три имени?

50. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ему дают не более трех имен?

51. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеется материал 5 различных цветов? А если одна полоса обязательно должна быть красной?

52. Сколькими способами можно составить расписание на день из 5 различных уроков, если изучается 14 предметов?

53. В комнате студенческого общежития живут трое студентов. У них есть 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки отличаются друг от друга). Сколькими способами они могут накрыть стол для чаепития (каждый получает одну чашку, одно блюдце и одну ложку)?

54. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)?

55. Докажите, что $A_m^n = A_{m-1}^n + n \cdot A_{m-1}^{n-1}$.

56. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу. Известно, что один человек может получить две путевки сразу.

Перестановки

57. Сколько существует трехзначных чисел, в записи которых цифры 1, 2, 3 встречаются ровно по одному разу?

58. Сколькими способами можно выложить в ряд красный, черный, синий и зеленый шарики?

59. В ряду зрительного зала 15 кресел. Сколькими способами можно разместить на них 15 человек?

60. На полке n различных книг. Скольким способами их можно переставить?

61. Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 мужчин и 6 женщин таким образом, чтобы мужчины и женщины чередовались?

62. Сколько существует перестановок из n различных элементов, в которых один данный элемент идет впереди другого данного элемента?

63. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два стоят рядом?

64. Сколько можно сделать перестановок из n различных элементов, в которых данные два не стоят рядом?

65. Лингвисты разгадывают записи некоторого племени. Известно, что каждый символ обозначает один звук. Всего в алфавите 26 символов. Сколькими способами можно сопоставить звуки знакам письма? Во сколько раз уменьшится количество возможных вариантов, если ученым удалось найти 7 знаков, обозначающих гласные, и 19 - согласные?

66. Сколько существует различных последовательностей длины 5, составленных из трех 1 и двух 0?

67. Сколько существует различных пятизначных чисел, составленных из трех 1 и двух 0?

68. Бусы - это кольцо, на которое нанизаны бусины. Бусы можно поворачивать, но не переворачивать. Сколько различных вариантов бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

69. Предположим теперь, что бусы можно и переворачивать. Сколько тогда различных бус можно сделать из 13 разноцветных бусин?

70. Сколькими способами на доске из n вертикалей и горизонталей можно расположить n ладей так, чтобы они не могли бить друг друга? Ответьте на вопрос задачи, если все ладьи одинаковы и если все они различны.

71. Слово - любая конечная последовательность букв русского алфавита. Выясните, сколько различных слов можно составить из слов а) «ВЕКТОР'»; б) «ЛИНИЯ»; в) «ПАРАБОЛА»; г) «БИССЕКТРИСА»; д) «МАТЕМАТИКА».

Сочетания

72. Группе из пяти сотрудников выделено три путевки. Сколько существует способов распределения путевок, если:

- Все путевки различны,
- Все путевки одинаковы?

73. Сколько вариантов экзаменационной комиссии, состоящей из 5 человек, можно создать их 14 преподавателей?

74. Сколькими способами можно выбрать из n человек упорядоченную группу из k человек? Сколькими способами можно выбрать из n человек неупорядоченную группу из k человек?

75. У одного школьника есть 6 книг по математике, а у другого - 8. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

76. При встрече 12 человек обменялись рукопожатиями. Сколько сделано рукопожатий?

77. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников для участия в математической олимпиаде. Сколькими способами это можно сделать?

78. Из класса, в котором учатся 30 человек, нужно выбрать двоих школьников: одного для участия в математической олимпиаде, другого для участия в олимпиаде по физике. Сколькими способами это можно сделать, при условии, что олимпиады проходят в одно время?

79. Есть 3 билета в различные театры. Сколькими способами они могут быть распределены среди 25 студентов группы, если каждый студент может получить только один билет?

80. На группу из 25 человек выделены 3 пригласительных билета на вечер. Сколькими способами они могут быть распределены (не более одного билета в руки)?

81. В шахматном кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

82. В классе, в котором учатся Петя и Ваня, - 31 человек. Сколькими способами можно выбрать из класса футбольную команду (11 человек) так, чтобы Петя и Ваня не входили в команду одновременно?

83. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и трех солдат для патрулирования?

84. На школьном вечере присутствуют 15 юношей и 12 девушек. Сколькими способами можно выбрать из них четыре пары для танца?

85. Сколькими способами можно вырезать прямоугольник из клеток доски размером m x n, при условии, что стороны прямоугольника состоят из целого количества клеток?

86. Докажите формулу $P(n_1,n_2,\ldots,n_k)=C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-n_2-\ldots n_k}^{n_k}$ двумя способами.

Сочетания с повторениями

87. В почтовом отделении продаются открытки 10 сортов.

· Сколькими способами можно купить 8 различных открыток?

· Сколькими способами можно купить 8 открыток?

· Сколькими способами можно купить 12 открыток?

· Сколькими способами можно купить 12 открыток, чтобы среди них оказались открытки трех фиксированных типов?

· Сколькими способами можно купить 20 открыток, чтобы среди них были открытки всех типов?

88. Сколько существует треугольников, длины сторон которых принимают одно из значений: 4, 5, 6, 7?

89. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, длина каждого ребра которых является целым числом от 1 до 10?

90. Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4?

91. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?

92. Сколько существует различных бросаний пяти одинаковых кубиков?

Разные задачи

93. Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 50 и 70 бегунов соответственно, надо выбрать по одному бегуну для участия в состязании. Сколькими способами может быть сделан этот выбор?

94. На ферме есть 10 телят и 24 поросенка. Сколькими способами можно выбрать по одному теленку и поросенку? А просто двух любых животных?

95. В шахматном кружке занимаются 15 девочек и 20 мальчиков. Для участия в соревновании необходимо составить команду из двух человек, в которую обязательно должны входить одна девочка и один мальчик. Сколькими способами это можно сделать?

96. У одного филателиста есть 5 марок для обмена, а у другого - 10. Сколькими способами они могут обменять марку одного на марку другого?

97. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова “КАМЗОЛ”?

98. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиадах по пяти различным предметам, если известно, что все олимпиады проходят одновременно? А если все олимпиады проходят в разное время?

99. В классе 25 человек. Сколькими способами можно выбрать 5 человек для участия в олимпиаде по математике?

100. Сколько слов, содержащих по пяти букв каждое, можно составить из 33 букв, если допускаются повторения, но никакие две соседние буквы не должны совпадать, то есть такие слова, как «пресс» или «ссора», не допускаются?

101. Сколько вариантов итогов чемпионата по футболу из 20 команд, совпадающих в главном (то есть 3 призера и 4 вылетевшие команды)?

102. Сколько различных десятизначных чисел можно составить из цифр 0, 1 и 2?

103. Сколько существует десятизначных чисел, в которых пять цифр 1, три цифры 2 и две цифры 3?

104. Сколько слов можно составить из пяти букв А и не более чем из трех букв Б?

105. В алфавите племени Бум-Бум шесть букв. Словом является любая последовательность из шести букв, в которой есть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько слов в языке племени Бум-Бум?

106. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга а) две ладьи; б) двух королей; в) двух слонов; г) двух коней; д) двух ферзей?

107. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение 9 дней подряд она дает сыну один из оставшихся фруктов. Сколькими способами это может быть сделано?

108. Сколькими способами можно поселить 7 студентов в 3 комнаты: одно-, двух- и четырехместную?

109. На группу из 34 человек выделено две путевки в Сочи и Евпаторию. Сколькими способами можно распределить путевки? Известно, что один человек не может получить две путевки сразу.

110. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи, Евпаторию и Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу? Если известно, что один человек может получить сразу несколько путевок.

111. На группу из 15 человек выделено три путевки в Сочи. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

112. На группу из 15 человек выделено 15 различных путевок. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

113. На группу из 15 человек выделено 5 путевок в Сочи, 3 в Евпаторию и 7 в Анапу. Сколькими способами можно распределить путевки, если известно, что один человек не может получить две путевки сразу?

114. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черных полях шахматной доски?

115. В стране 20 городов, каждые два из которых соединены авиалинией. Сколько авиалиний в этой стране?

116. Сколько диагоналей в выпуклом n-угольнике?

117. В классе 30 человек. Сколько способов разбить класс на две группы и в каждой выбрать старосту?

118. Сколько существует 6-значных чисел, в записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

119. Сколько гирлянд можно составить из 5 красных шариков, 2 зеленых и 3 синих?

120. Сколько существует 10-значных чисел, в которых имеются хотя бы две одинаковые цифры?

121. Сколько всего 6-значных чисел а) без единиц в записи? b) по крайней мере с одной единицей в записи?

122. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белую и черную ладьи так, чтобы они не били друг друга?

123. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску белого и черного королей так, чтобы получилась допустимая правилами игры позиция?

124. Сколькими способами можно выбрать из полной колоды (52 карты) 10 карт так, чтобы а) среди них был ровно один туз? б) ни одного туза в)среди них был хотя бы один туз?

125. Сколько существует 6-значных чисел, у которых по 3 четных и нечетных цифры?

126. Сколько существует 10-значных чисел, сумма цифр которых равна а) 2; б) 3; в) 4?

127. Кубик бросают трижды. Среди всех возможных последовательностей результатов есть такие, в которых хотя бы один раз встречается шестерка. Сколько их?

128. На плоскости отмечено 10 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

129. На прямой отмечено 10 точек, а на параллельной ей прямой – 11 точек. Сколько существует а) треугольников; б) четырехугольников с вершинами в этих точках?

130. На плоскости даны 5 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

131. Сколькими способами можно выбрать из 15 различных слов набор, состоящий не более чем из 5 слов?

132. Сколькими способами можно составить комиссию из 3 человек, выбирая ее членов из 4 супружеских пар, но так, чтобы члены одной семьи не входили в комиссию одновременно?

133. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17, если данные двое человек из этих 17 не могут быть выбраны вместе?

134. Из 12 девушек и 10 юношей выбирают команду, состоящую из 5 человек. Сколькими способами можно выбрать эту команду так, чтобы в нее вошло не более 3 юношей?

135. Сколькими способами можно составить из 9 согласных и 7 гласных слова, в которые входят 4 различных согласных и 3 различных гласных?

136. Найти сумму четырехзначных чисел, получаемых при всевозможных перестановках цифр 1, 2, 3, 4.

137. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

138. Сколько способов выстроить в шеренгу 213 группу (25 человек)? А если ребята (9 человек) не стоят рядом?

139. На книжной полке стоит 12 книг. Сколькими способами можно выбрать из них 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

140. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить леди Дженивьеру. Сколькими способами это можно сделать, если среди выбранных рыцарей не должно быть врагов?

141. Сколькими способами можно переставить буквы слова обороноспособность так, чтобы никакие две буквы «о» не шли подряд?

142. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли подряд?

Сколькими способами можно составить 6 слов из 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

9.2. Комплексные числа

1. Вычислить:

1) $(3 - 2i) + (5 + 3i)$;

2) $(1 + 2i) - (3 - i)$;

3) $3(2 - i)\cdot(1 - i)$;

4) $(1 + 3i)(-7 + 2i)$;

5) $(2 - i)^2$;

6) $(1 + 2i)^3$.

2. Найти решение уравнений ($x, y \in \mathbf{R}$):

1) $(1 + i)x + (2 + i)y = 5 + 3i$;

2) $2x + (1 + i)(x + y)=7 +i$;

3) $(3 - y + x)(1 + i) + (x - y)(2 + i) = 6 - 3i$.

3. Вычислить:

1) i^{13}; 2) i^{65}; 3) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$;

4) $\dfrac{5}{1+2i}$; 5) $\dfrac{2i-3}{1+i}$; 6) $\dfrac{2+3i}{i}$;

7) $\dfrac{1+2i}{-2+i}(-i)+1$; 8) $\dfrac{2+i}{2-i}-(3+4i)+\dfrac{4-i}{3+2i}$; 9) $(2-i)^2$.

4. Найти z^{-1}, если:

1) $z = 7 - 12i$; 2) $z = 3 + 4i$; 3) $z = -3 + 7i$; 4) $z = i$.

5. Вычислить:

1) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^3(1 - \mathrm{i})^7$; 2) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-12}$; 3) $\dfrac{(1+i)^8}{(-1+i)^4}$.

6. Доказать, что $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{z_1 z_2}$; $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$.

7. Доказать, что если $z = a + bi$, то $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{a^2 + b^2}$.

8. Построить точки, соответствующие комплексным числам:

-1; i; $-\sqrt{2}$; $-3i$; $2 - 3i$; $-4-2i$; $3+i$; $-6 + 2i$; $2 + 2i$; $-2 + 2i$; $-2 - 2i$.

9. Найти сумму, разность, произведение и частное комплексных чисел, изобразить геометрически данные числа и результаты действий.

1) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 3 - i$; 2) $z_1 = -3$, $z_2 = 4i$.

10. Изобразить геометрическое множество всех комплексных чисел $z = x + yi$, для которых:

1) $x = 2$; 2) $1 \le x \le 3$; 3) $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$; 4) $\operatorname{Im} z = 2\operatorname{Re} z$.

11. Найти модуль и аргумент следующих комплексных чисел и представить их на комплексной плоскости:

1) $z =1 + i$; 2) $z = \sqrt{3} - i$; 3) $z = \sqrt{2}i$; 4) $z = 2$; 5) $z = -i$.

12. Указать на комплексной плоскости множества точек, соответствующие комплексным числам z, удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 5$; 3) $1 \le |z| \le 2$; 4) $\arg z = 0$;

5) $\dfrac{\pi}{6} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$; 6) $|z-1| = \dfrac{1}{3}$; 7) $|z - 3 + 2i| \le 2$.

13. Представить следующие комплексные числа в тригонометрическом виде:

1) 1, -1, i, $-i$;

2) $z = 3 - 3i$;

3) $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}i}{2}$.

14. Даны числа

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}, \quad z_2 = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}, \quad z_3 = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}.$$

Вычислить: 1) $z_1 z_2 z_3$; 2) $\dfrac{z_1}{z_2 z_3}$; 3) $\dfrac{z_1 z_2}{z_3}$; 4) $\dfrac{z_1 z_3}{z_2}$.

15. Вычислить $|z|$ и $\arg z$, если $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.

16. Упростить выражение $\dfrac{\cos\varphi + i\sin\varphi}{\cos\varphi - i\sin\varphi}$.

17. Вычислить корни и результат изобразить на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[4]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

18. Выразить в радикалах корни из единицы степени 2, 3, 4, 6, 8.

19. Представить в показательной форе комплексные числа:

1) $-1-i$; 2) $\sqrt[3]{i}$; 3) $\sqrt[3]{-1+i}$.

20. Найти тригонометрическую и алгебраическую форму для чисел:

1) $z=2e^{\frac{\pi i}{4}}$; 2) $z=4e^{\frac{\pi i}{2}}$; 3) $z=3e^{\pi i}$; 4) $z=e^{i}$.

21. Найти z_1z_2 и $\frac{z_1}{z_2}$, результат написать в алгебраической форме.

1) $z_1=1{,}5e^{0{,}7i}$; $z_2=0{,}7e^{1{,}7i}$,

2) $z_1=e^{-0{,}7+3i}$; $z_2=e^{1{,}5+2i}$.

22. Вычислить z^6 и $\sqrt[4]{z}$, результаты представить в алгебраической форме и изобразить их на плоскости.

1) $z=4.2e^{2{,}3i}$; 2) $z=0{,}4^{\pi i}$; 3) $z=3{,}5e^{5i}$; 4) $z=-16$.

23. Решить уравнения на множестве комплексных чисел и разложить многочлен на множители:

1. $x^2+x+1=0$.
2. $x^3+x^2+2x-4=0$.
3. $x^2+3x+4=0$.
4. $x^3-27=0$.
5. $x^3-4x^2-4x-5=0$.
6. $x^3+8x^2+15x+18=0$.
7. $x^3-6x+9=0$.
8. $x^3+6x+2=0$.
9. $x^3+24x-56=0$.
10. $x^3+3x^2-3x-1=0$.
11. $x^3+9x-26=0$.
12. $x^3-4x+2=0$.
13. $x^3+18x+15=0$.
14. $x^3+9x^2+18x+28=0$.
15. $x^3+6x^2+30x+25=0$.

9.3. Множества и операции над ними

I.

1. В группе из 100 туристов 70 человек знают английский язык, 45 знают французский язык и 23 человека знают оба языка. Сколько туристов в группе не знают ни английского, ни французского языка?

2. Из 40 студенток 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько студенток умеют плавать и играть в шахматы?

3. 20 мальчиков поехали на пикник. При этом 5 из них обгорели, 8 были сильно покусаны комарами, а 10 остались всем довольны. Сколько обгоревших

мальчиков не было покусано комарами? Сколько покусанных комарами мальчиков также и обгорели? *(Сформулируйте эту задачу как лингвистическую, например: анализ наличия 2 предлогов в предложениях; и в общем виде, используя понятия: множество, подмножества и их элементы)*

4. В штучном отделе магазина посетители обычно покупают либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет, В один из дней было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

5. В олимпиаде по иностранному языку принимало участие 40 студентов, им было предложено ответить на один вопрос по лексикологии, один по страноведению и один по стилистике. Результаты проверки ответов представлены в таблице:

Получены правильные ответы на вопросы	*Количество ответов*
по лексикологии	20
по страноведению	18
по стилистике	18
по лексикологии и страноведению	7
по лексикологии и стилистике	8
по страноведению и стилистике	9

Известно также, что трое не дали правильных ответов ни на один вопрос. Сколько студентов правильно ответили на все три вопроса? Сколько студентов правильно ответили ровно на два вопроса?

6. Среди абитуриентов, выдержавших приемные экзамены в вуз, оценку «отлично» получили: по сочинению–48 абитуриентов, по истории–37, по английскому языку–42, по сочинению или истории–75, по сочинению или английскому языку–76, по истории или английскому языку–66, по всем трем предметам–4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получивших только одну пятерку?

7. 180 студентов одного курса сдавали экзамены по английскому языку и истории. 15 из них не сдали экзамен по истории, 10 не сдали экзамен по английскому языку и 5 не сдали обоих экзаменов. Сколько студентов не сдали экзамен по истории и сдали экзамен по английскому языку? Сколько студентов сдали экзамен по истории н не сдали экзамен по английскому языку?

8. Каждый из студентов 3 курса в летние каникулы ровно два раза был в театре, при этом спектакли А, В и С видели соответственно 25, 12 и 23 студента. Сколько студентов на 3 курсе? Сколько из них видели спектакли А и В, А и С, В и С?

9. В течение недели в кинотеатре демонстрировались фильмы А, *В* и *С*. Из 40 студентов, каждый из которых просмотрел либо все три фильма, либо один из трех, фильм А видели 13, фильм В – 16, фильм С – 19. Найти, сколько студентов просмотрели все три фильма.

10. Преподаватель решил узнать, кто из 40 студентов читал книги А, В и С. Результаты опроса оказались таковы: книгу А читали 25 человек, книгу В – 22, книгу С – также 22. Книгу А или В читали 33 студента, А или С – 32, В или С –

31; все три книги прочли 10 студентов. Сколько студентов прочли только по одной книге? Сколько студентов не читали ни одной из этих трех книг?

11. В спортивном лагере 65% студентов умеют играть в футбол, 70%–в волейбол и 75%–в баскетбол. Каково наименьшее число студентов, умеющих играть и в футбол, и в волейбол, и в баскетбол?

II.

1. Дано $U=\{a,b,c,d,e,f\}$, $A=\{a,b,c\}$, $B=\{b,c,d,f\}$, $C=\{a,c,e\}$, $D=\{c,d,e,f\}$. Задать перечислением элементов множества:

а) $A\cap B$; б) $A\cup C$; в) $\overline{D}$; г) $C\setminus A$; д) $A\setminus C$;
е) $B\Delta D$; ж) $(A\cup\overline{C})\setminus B$; з) $(B\setminus C)\cap\overline{D}$; и) $(\overline{A}\cap B)\Delta(\overline{D}\cup C)$.

2. Дано $N_{10}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

$$A=\{a|\ a\in N_{10},\ a-\text{четное}\},$$
$$B=\{b|\ b\in N_{10},\ b\le 5\},\ C=\{c|\ c\in N_{10},\ c>3\}.$$

Задать множества:

а) $\overline{A}$; б) $\overline{B}$; в) $A\cup C$; г) $C\cap B$; д) $B\setminus A$; е) $C\setminus A$;
ж) $B\Delta C$; з) $A\Delta C$; и) $\overline{A}\cup B$; к) $\overline{A\Delta B}$; л) $\overline{B}\setminus(A\cap C)$.

3. Справедливы ли равенства:

а) $\{e,f,d\}=\{d,e,f\}$; б) $\{x|\ x\in N,\ x\le 4\}=\{0,1,2,3,4\}$;
в) $\{x|\ x=a+b,\ a\in A,\ b\in B\}=\{2,3,4,5,6\}$, если $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3,4\}$;
г) $\{1,8,27\}=\{1^3,2^3,3^3\}$; д) $\{\{a,b\},\{b,c\}\}=\{a,b,c\}$; е) $\varnothing=\{\varnothing\}$?

4. Построить диаграммы Эйлера-Венна для множеств:

а) $\overline{A}\cap B$; б) $A\cap(B\cup C)$; в) $(A\cup B)\setminus C$;
г) $(A\setminus B)\setminus(A\setminus C)$; д) $(A\Delta C)\cup(A\Delta B)$; е) $(A\cup\overline{B})\setminus(\overline{C}\Delta A)$.

5. Задать табличным способом множества:

а) $\overline{A}\cap B$; б) $(A\setminus C)\cup\overline{B}$; в) $(A\Delta C)\cup(B\cap C)\cup(\overline{D\Delta A})$.

6. Доказать тождества (разными способами):

а) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$; б) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; в) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;
г) $(A\cup B)\cap A=A$; д) $(A\cap B)\cup A=A$; е) $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$;
ж) $A\Delta(A\Delta B)=B$; з) $(A\Delta B)\cup(A\cap B)=A\cup B$.

7. Доказать тождества (с помощью таблицы):

а) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; б) $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$;
в) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$; г) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;
д) $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$;

е) $(A\cap B)\cup(C\cap D)=(A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$.

8. Доказать, что:

а) $(A\setminus B)\setminus C\subseteq(A\cup C)\setminus B$; б) $A\Delta B=A\setminus B$, если $B\subseteq A$;

в) $A\cap B\subseteq C$, если $A\subseteq(\overline{B}\cup C)$; г) $A=\overline{B}$, если $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=U$.

9. Найти булеан множеств:

а) $A=\varnothing$; б) $A=\{\varnothing\}$; в) $A=\{x\}$; г) $A=\{x,y\}$;

д) $A=\{m,n,k\}$; е) $A=\{a,b,c\}$; ж) $A=\{-3,\sqrt{2},7,0\}$; з) $A=\{2,4,6,8\}$.

10. В отделе магазина посетители покупали либо один торт, либо одну коробку конфет, либо один торт и одну коробку конфет. Известно, что было продано 57 тортов и 36 коробок конфет. Сколько было покупателей, если 12 человек купили и торт, и коробку конфет?

11. В отряде из 40 ребят 30 умеют плавать, 27 умеют играть в шахматы и только пятеро не умеют ни того, ни другого. Сколько ребят умеют и плавать, и играть в шахматы?

12. В классе обучаются 42 ученика. Из них 16 участвуют в секции по легкой атлетике, 24 – в футбольной секции, 15 – в шахматной секции, 11 – и в секции по легкой атлетике, и в футбольной секции, 8 – и в легкоатлетической, и в шахматной, 12 – и в футбольной, и в шахматной, а 6 – во всех трех секциях. Остальные школьники увлекаются только туризмом. Сколько школьников являются туристами?

13. В отделе работают несколько человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. 6 человек знают английский язык, 6 – немецкий, 7 – французский, 4 знают и английский и немецкий, 3 – и немецкий, и французский, 2 – и французский, и английский, 1 человек знает все три языка. Сколько человек работает в отделе? Сколько из них знают только английский язык? Сколько человек знают только один язык?

14. Среди абитуриентов оценку «отлично» получили: по математике – 48 человек, по физике – 37, по русскому языку – 42, по математике или физике – 75, по математике или по русскому языку – 76, по физике или по русскому языку – 66, по всем трем предметам – 4. Сколько абитуриентов получили хотя бы одну пятерку? Сколько среди них получили только одну пятерку?

III.

1. Даны множества $X=\{x,y\}$, $Y=\{x,y,z\}$. Задать следующие множества:

а) $X\times Y$; б) $Y\times X$; в) X^2; г) $X\times Y\times X$.

2. Задать перечислением пар следующие бинарные отношения. Построить матрицы данных отношений. Найти $Dom(R)$, $Im(R)$, $\overline{R}$, R^{-1}:

а) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,3,4\},\ x<y\}$;

б) $R=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,3,4,5\},(x+y)\ \text{четно}\}$;

в) $R=\{(x,y)|\ x\in\{1,2,3,4,5\},\ y\in\{12,16\},\ x\ делит\ y\}$.

3. Задать перечислением пар бинарные отношения $R\circ P,\ P^{-1}\circ\overline{R}$.

Найти $Dom(\overline{R}\circ P^{-1}),\ Im(R\circ P)^{-1}$:

а) $R=\{(x,y)|\ x,y\in\{1,2,3\},\ x+5y-четно\}$,

$P=\left\{(x,y)\middle|\ x\in\{1,2,3\},\ y\in\{4,5\},\ \dfrac{y}{x}-целое\ число\right\}$;

б) $R=\{(x,y)|\ x\in\{4,6\},\ y\in\{2,5,7\},\ |x-y|<3\}$,

$P=\{(x,y)|\ x\in\{2,5,7\},\ y\in\{5,7\},\ 20\le xy\le 40\}$.

4. Определить, выполняются ли для отношений свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, эквивалентности, полноты:

а) отношения “жить в одном городе” на множестве людей;

б) “быть моложе” на множестве людей;

в) отношение $\ge$ на множестве R;

г) $R=\{(m,n)|\ m$ и n взаимно просты$\}$ на множестве N;

д) $R=\{(m,n)|\ m-n=2\}$ на множестве N;

е) $R=\{(x,y)|\ (x+2y)$ делится на $3\}$ на множестве Z.

5. Определить, выполняются ли для отношений задач 2а), 2б) свойства рефлексивности, антирефлексивности, симметричности, антисимметричности, транзитивности, полноты. Какие из этих отношений являются эквивалентностями?

6. Доказать, что следующие отношения являются отношениями эквивалентности:

а) $R=\{(x,y)|\ x,y\in R,\ x^2=y^2\}$; б) $R=\{(x,y)|\ x,y\in R,\ (x-y)\in Z\}$.

7. Выяснить, какие из следующих подмножеств множества $Z\times Z$ являются функциями из Z в Z:

а) $\{(n,2n)|\ n\in Z\}$; б) $\{(2n,n)|\ n\in Z\}$;

в) $\{(n^3,n)|\ n\in Z\}$; г) $\{(n,n+4)|\ n\in Z\}$.

8. Выяснить, какие из функций являются взаимно-однозначными из R в R:

а) $f(x)=e^x$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=\sqrt[3]{x}$;

г) $f(x)=x^3-x$; д) $f(x)=2x+1$.

9. Определить, является ли отношение $R: A\to B$ функцией, инъекцией, сюръекцией, биекцией:

а) $R=\{(a,1),(a,2),(c,3)\},\ A=\{a,b,c\},\ B=\{1,2,3\}$;

б) $R=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)\},\ A=\{x_1,x_2,x_3\},\ B=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$;

в) $R=\{(1,a),(2,b),(3,c)\},\ A=\{1,2,3\},\ B=\{a,b,c\}$;

г) $R=\{(1,1),(2,1),(3,4),(4,3)\},\ A=\{1,2,3,4\},\ B=\{1,2,3,4\}$;

д) $R=\{(x,a),(y,a),(z,c)\},\ A=\{x,y,z\},\ B=\{a,b,c,d\}$.

9.4. Метод математической индукции

1. Доказать, что при любом натуральном n:

а) $n(2n^2-3n+1)$ *кратно* 6;

б) $11^{n+1}+12^{2n-1}$ *делится нацело на* 133;

в) n^5-n *кратно* 5;

г) n^7-n *кратно* 7.

2. Методом математической индукции доказать справедливость равенств для каждого натурального значения n:

а) $1\cdot 2+2\cdot 5+\ldots+n(3n-1)=n^2(n+1)$;

б) $1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$;

в) $0\cdot 1^2+1\cdot 2^2+2\cdot 3^2+\ldots+(n-1)n^2=\dfrac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}$;

г) $\dfrac{1}{1\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)}=\dfrac{n}{4n+1}$.

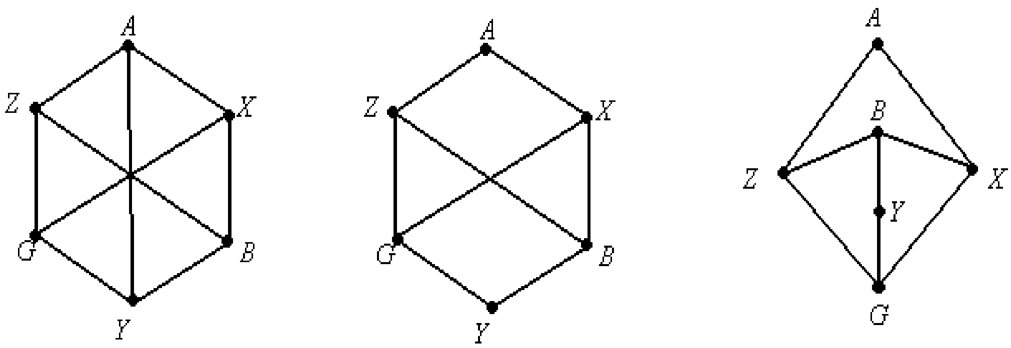
3. Методом математической индукции доказать справедливость следующих неравенств для всех натуральных $n>1$:

а) $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$; б) $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\ldots+\dfrac{1}{2n}>\dfrac{13}{24}$.

9.5. Графы

1. Найдите минимальное количество вершин, необходимых для построения простого графа с шестью ребрами. Изобразите его.

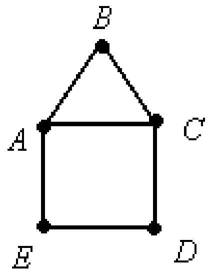
2. Проверьте формулу Эйлера для графа (рис. (в)). Выполнима ли она для графов (рис. (а), (б))?



а) б) в)

3. Изобразите все возможные простые графы, имеющие 4 вершины.

4. Сколькими способами можно нарисовать домик, не отрывая карандаш от бумаги? Напишите пути прохождения. (Замечание: каждое ребро можно пройти только один раз).



5. Докажите формулу Эйлера для дерева.

Указание: *Воспользуйтесь методом стирания, т.е. постепенно удаляйте «висячие» вершины и соответствующие им ребра.*

6. Докажите, что дополнение полного графа является полностью несвязным графом.

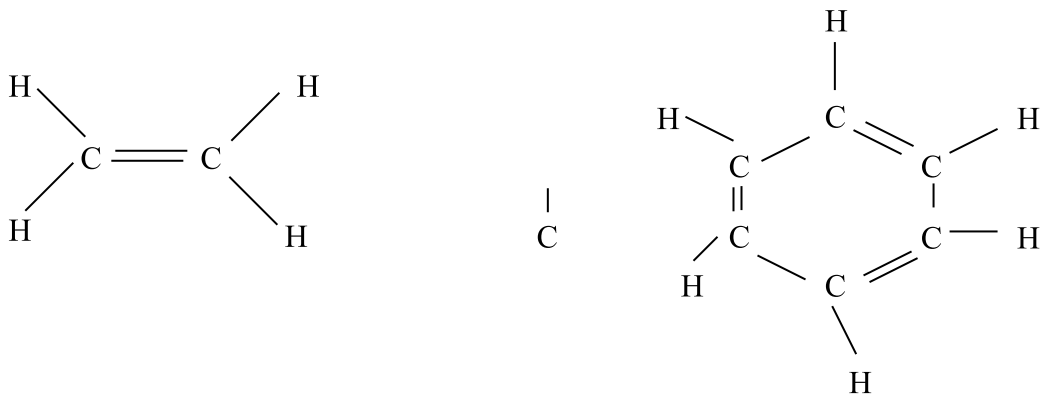
7. Найдите минимальное количество цветов, необходимых для раскраски каждой вершины дерева так, чтобы смежные вершины всегда имели различные цвета.

8. В шахматном турнире по круговой системе участвуют семь студентов. Известно, что Ваня сыграл шесть партий, Толя – пять, Леша и Дима –по три, Семен и Илья – по две, Женя - одну. С кем сыграл Леша?

9. Покажите, что следующие объекты можно рассматривать как графы:

- вершины и ребра многогранника;
- план лабиринта;
- дружеские отношения в группе студентов;
- генеалогическое дерево;
- теннисный турнир;
- страны на карте.

10. На рисунке изображены молекулы этилена и бензола; через C и H обозначены атомы углерода и водорода соответственно. Можно ли считать эти диаграммы графами? Если да, то что будет являться необходимым условием, для того чтобы граф представлял собой молекулу какого-либо углеводорода?



11. Могут ли степени вершины в простом графе быть равны:

- 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;
- 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;
- 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

12. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

13. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с пятью другими?

14. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

15. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

16. В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этой группе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?

17. В некоторой стране 19 регионов. Может ли оказаться так, что у каждого региона 1, 5 или 9 соседних регионов?

18. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

19. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

20. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже сыгравшие между собой?

21. Нарисуйте полный граф с n вершинами, если:

а) $n = 2$, б) $n = 3$, в) $n = 5$.

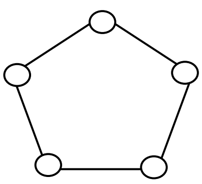
22. Какова степень каждой вершины полного графа, у которого n вершин?

23. Спортивные соревнования проводятся по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. В соревновании с двенадцатью участниками провели все встречи. Сколько было сыграно встреч?

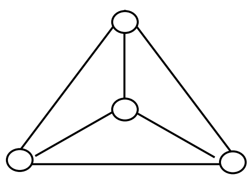
24. Может ли полный граф иметь 7, 8, 9 или 10 ребер?

25. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

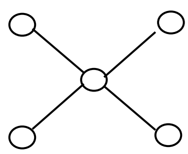
26. Какие из предложенных графов являются регулярными?



а)



б)



в)

27. В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

28. Известно, что в компании каждый человек знаком не менее, чем с половиной присутствующих. Докажите, что можно выбрать из компании четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми.

29. Спортивные соревнования проводятся по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое число встреч.

30. Докажите, что в любом графе найдутся по крайней мере две вершины одинаковой степени.

31. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с 8 разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

32. Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми и для любой группы из шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

33. Докажите, что среди любых шести человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

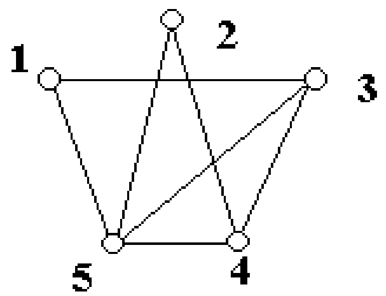
34. В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из любых трех делегатов по крайней мере двое смогут объясниться между собой на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

Матрицы, ассоциированные с графом

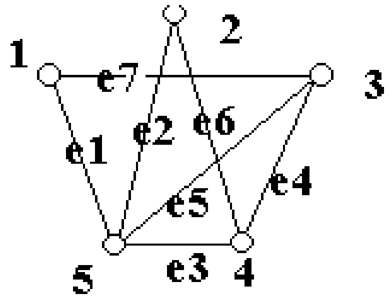
35. Дана симметричная матрица размером n x n. В каждой строке расположено нечетное число единиц, остальные элементы равны нулю. Элементы на главной диагонали равны нулю. Доказать, что n является четным.

36. Опишите матрицы смежности полных графов, вполне несвязных графов. Что можно сказать о матрице простого графа и его дополнения?

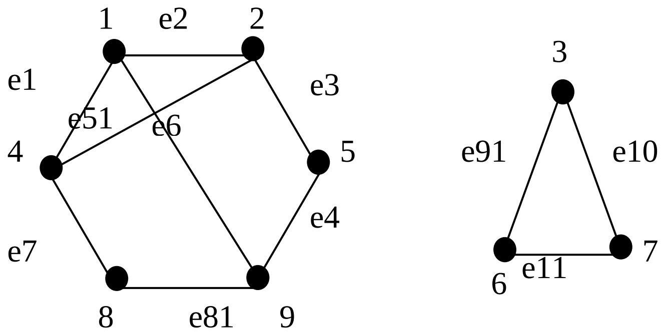
37. Изобразите матрицу смежности графа:



38. Изобразите матрицу инцидентности графа.



39. Изобразите матрицы смежности, инцидентности графа:



40. Дана матрица смежности. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	1	1	0	1	0
2	0	0	0	0	1	0	1
3	1	0	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0	0	1
6	1	0	1	0	0	0	0
7	0	1	0	1	1	0	0

41. Дана матрица инцидентности. Изобразите граф, ей соответствующий.

	1	2	3	4	5
E1	1	0	0	0	1
E2	0	1	0	0	1
E3	0	0	0	1	1
E4	0	0	1	1	0
E5	0	0	1	0	1
E6	0	1	0	1	0
E7	1	0	1	0	0

42. Установить, какие из следующих матриц являются матрицами смежностей простого графа, какие - матрицами инциденций и какие не являются ни теми, ни другими.

а)

0	0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	0

б)

0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	0

в)

1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	1	0	1

г)

1	1	1	1	1	0	0
0	0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0

д)

1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0

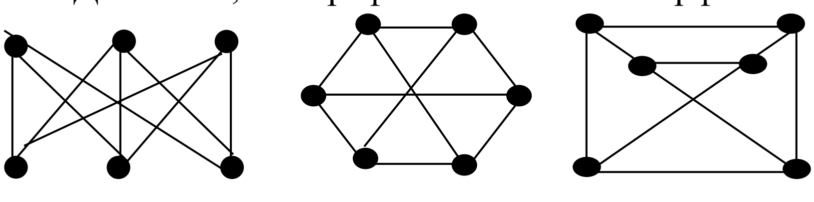
е)

1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0

Изоморфизм графов

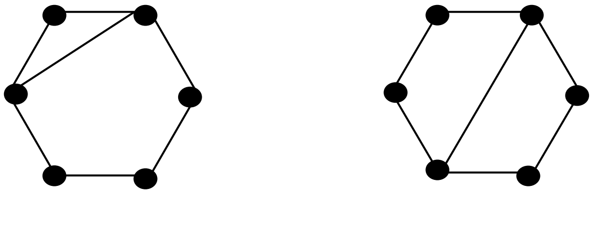
43. Являются ли изоморфными графы? Ответ обосновать.

44. Докажите, что графы являются изоморфными.



45. Докажите, что графы являются изоморфными.

46. Докажите, что графы не изоморфны.



47. Докажите, что графы не изоморфны.

9.6. Бином Ньютона

Разложить по формуле бинома Ньютона (1 – 2):

1. a) $\left(x-x^{-1}\right)^5$; b) $\left(x+2\right)^6$.
2. a) $\left(a^2+\dfrac{1}{a^4}\right)^5$; b) $\left(2x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$.
3. В разложении $(1+x)^8+(1+x)^9$ найти коэффициент члена, содержащего x^5.
4. Найти 5-й член разложения $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^7$.
5. Третий коэффициент разложения $(1+x)^n$ равен 45. Найти четвертый коэффициент от конца.
6. В разложении $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^n$ коэффициент третьего члена разложения больше коэффициента второго на 35. Найти член разложения, не содержащий *x*.
7. Найти член разложения $(3x+2)^7$ с наибольшим коэффициентом.
8. Найти член разложения $\left(2+x+x^2\right)^9$, содержащий x^2.
9. Найти третий член разложения $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\sqrt[3]{x}\right)^n$, если сумма всех биномиальных коэффициентов этого разложения равна 2048.
10. Найти член разложения $\left(\sqrt[3]{a}-\dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^{15}$, не содержащий *a*.
11. Упростить выражение $\left(\dfrac{a+1}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{a-1}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)^{10}$ и найти член разложения, который не содержит “*a*”.
12. Сумма коэффициентов первого, второго и третьего слагаемых разложения $\left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)^n$ равна 46. Найти член разложения, не содержащий “*a*”.
13. В разложении $\left(x\sqrt{x}+\dfrac{1}{x^4}\right)^n$ коэффициент третьего члена на 44 больше коэффициента второго члена. Найти свободный член.
14. Сколько рациональных членов содержится в разложении $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Асанов М. О., Баранский В. А., Расин В.В. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы. – Ижевск, 2001.
2. Ахо А., Хокпкрофт Дж., Ульман Дж.Структуры данных и алгоритмы. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001.
3. Гусак А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: справочное пособие к решению задач. – 4-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2006. – 288 с.
4. Гусак А.А. Высшая математика. В 2 т. Т.1.:Учебник для студентов вузов. – 6-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 544 с.
5. Гусак А.А. Высшая математика. В 2 т. Т.2.:Учебник для студентов вузов. – 6-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 448 с.
6. Гусак А.А. Задачи и упражнения по высшей математике. В 2 частях. – Мн.: Выш. шк., 1988.
7. Гусак А.А. Математический анализ и дифференциальные уравнения: справочное пособие к решению задач. – 4-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2006. – 416 с.
8. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. – 6-е издание. – Мн.: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.
9. Иванов Б.Н. Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002.
10. Коновалова И.Н. и др. Комплексные числа и их приложения: Учебное пособие/ Кафедра высшей математики МБФ, ГОУ ВПО РГМУ Росздрава, 2007.
11. Корнилов П.А., Никулина Н.И., Семенова О.Г. Элементы дискретной математики. Учебное пособие. Ярославль: Изд-во ЯГПУ им. К.Д. Ушинского, 2005. 91 с.
12. Лихтарников, Л.М. Математическая логика/ Л.М. Лихтарников, Т.Г.Сукачева. С.-Петербург: Лань, 2008.–288с.
13. Матейко О.М., Плащинский П.В. Высшая математика. Примеры и задачи: учебно-методическое пособие для студентов географического факультета. – Мн.: БГУ, 2005. – 47 с.
14. Мельников О.И. Занимательные задачи по теории графов. – Минск.: Тетрасистемс, 2001.
15. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов. – СПб.: Питер, 2001.
16. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Часть 1. - М.: Рольф, 2001 - 288 с.
17. Практикум по математике для студентов ФПРР/Авт.-сост.: Л.Л. Дудко, В.Е. Рыбакова/ Новгород, НовГУ им. Ярослава Мудрого, 1995.–52с.
18. Серапинас Б.Б. Математическая картография: Учебник для вузов. – М.: Академия, 2005. – 336 с.
19. Современные философские проблемы математических, естественных и технических наук. Учебно-методическое пособие для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук/ Сост. А.Г. Деменев. – Архангельск: Изд-во АГТУ. – 78 с.
20. Стефанова, Н.Л. Математика и информатика/ Н.Л. Стефанова, В.Д. Будаев и др. М.: Высшая школа, 2004.– 349 с.
21. Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В. Элементы дискретной математики. – М.: ИНФРА-М; Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002.
22. Турецкий, В.Я. Математика и информатика. – М: ИНФРА-М, 2005. – 560 с. УДК 167/168:001
23. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2002.

Ефременкова Ольга Валентиновна

ОТДЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие для студентов технических направлений
всех форм обучения

Редактор Е.Ф. Изотова

Подписано к печати 15.10.15. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 5,19. Тираж 120 экз. Заказ 151490. Рег. №120.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.