

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет
им. И.И. Ползунова»

Е.А. ДУДНИК

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие для студентов, обучающихся
по направлению «Информатика и вычислительная техника» дневной
формы обучения

Рубцовск 2021

Дудник, Е.А. Вычислительная математика: Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «Информатика и вычислительная техника» дневной формы обучения /Е.А. Дудник; Рубцовский индустриальный институт. – Рубцовск, 2021. – 74 с. [ЭР].

В данном пособии излагаются необходимые начальные представления классических разделов численного анализа: методы алгебры, теории приближения функций одной переменной, методы численного интегрирования. Изложены постановка задач и методики решения предлагаемых задач. Представлены краткий курс лекций, задания для практических занятий. Пособие содержит лабораторный практикум с заданиями по вариантам, методикой выполнения лабораторной работы и контрольными теоретическими вопросами.

Пособие предназначено для студентов направления подготовки «Информатика и вычислительная техника», знакомых с основами математического анализа, линейной алгебры и языками программирования высшего уровня.

Рассмотрено и одобрено на заседании
кафедры ПМ РИИ.
Протокол № 10 от 28.04.21 г.

Оглавление

Введение	4
1. Общие сведения	4
2. Основные источники погрешностей	6
3. Методы решения нелинейных уравнений.....	8
4. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.....	17
5. Методы решения задачи на собственные значения и собственные вектора матриц.....	29
6. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений.....	33
7. Численные методы теории приближений	37
8. Интерполяция сплайнами	45
9. Интерполяция методом наименьших квадратов	47
10. Численное интегрирование	50
Лабораторный практикум.....	57
Задания для практических занятий.....	72
Список литературы.....	74

Введение

Целью освоения дисциплины «Вычислительная математика» является формирование у студентов теоретических и практических знаний, умение применять численными методами для решения задач алгебры, математического анализа и полученных практических навыков с использованием ЭВМ.

В процессе реализации этой цели решаются следующие задачи:

- формирование комплекса знаний о численных методах решения математических задач:

- изучение приближенных методов решения нелинейных уравнений;

- применение методов решения систем линейных уравнений и нахождения собственных чисел матрицы;

- освоение алгоритмов решения нелинейных систем уравнений;

- овладение методами численного приближения табличных функций.

- привитие навыков применения численных методов решений прикладных задач на ЭВМ.

- выработка практических навыков написания прикладных программ на языке высшего уровня.

В учебном пособии излагаются классические разделы численного анализа: методы алгебры, теории приближения функций одной переменной, методы численного интегрирования. Приведены задания для лабораторного практикума.

Пособие не претендует на полноту осязания всего курса вычислительной математики, некоторые не вошедшие методы и разделы курса изложены в [1-5].

1. Общие сведения

«Вычислительная математика» являются одной из основных дисциплин, включенных в подготовку современных инженеров технических и математических специальностей вузов. Знание основ теории и способов реализации численных методов необходимо при проектировании и расчетных исследованиях современных технических средств. Такие расчеты проводятся с использованием вычислительных средств (компьютеры и их системы) и численных методов.

Классическим средством изучения математических моделей и исследований на их основе реальных объектов являются аналитические методы, позволяющие получить точные решения в виде математических формул. Несмотря на большую важность таких методов, к сожалению, класс задач, для которого они могут быть использованы, ограничен. Поэтому решение широкого класса технических задач, соответствующих потребностям современной науки и техники, осуществляется численными методами. Кроме того, в некоторых случаях уравнение содержит коэффициенты, известные лишь приблизительно, из-за не точности измерительных приборов, и, следовательно, сама задача о точном определении решения теряет смысл. Таким образом, в конкретной задаче достаточно получить результат с заданной точностью. Отсюда необходимы алгоритмы приближенных решений и оценки степени их точности. Решение задач

вычислительной математики обычно выполняется по этапам проектирования задач на ЭВМ:

1. Физическая постановка задачи.

Результатом этого этапа является общая формулировка задачи в содержательных терминах (что дано и что требуется определить). Как правило, этот этап выполняется специалистом в конкретной предметной области.

2. Выбор математической модели, адекватной физической постановке задачи.

На этом этапе осуществляется:

- приведение основных математических уравнений, соотношений, аппроксимационных формул, описывающих задачу;
- задание граничных и краевых условий;
- обоснование математической модели.

3. Выбор математического метода.

На этом этапе осуществляется выбор наиболее целесообразного и экономичного метода решения на основе имеющихся у исследователей знаний и исходя из ресурсов компьютера.

4. Составление алгоритма.

5. Разработка программного обеспечения.

6. Анализ решения задачи: обоснования модели и метода путем привязки к реальному объекту, сравнения с фактами.

Численные методы – это методы приближенного решения задач прикладной математики, основанные на реализации алгоритмов, соответствующих математическим моделям.

Численные методы, в отличие от аналитических методов, дают частные решения, которые определяются в дискретных областях изменения независимых переменных (X^n). В силу приближенного характера вычислений этот процесс связан с некоторыми основными требованиями, относящимися к численным методам.

Такие требования, как:

– устойчивость, зависящая от хорошей обусловленности задачи; когда результаты расчета непрерывно зависят от входных данных задачи. При небольших изменениях входных данных результаты ее изменяются незначительно и при любых исходных данных возможного диапазона их изменений задача однозначно разрешима.

- сходимость;
- точность;
- экономичность;
- дискретность;
- количества итераций.

Некоторые из требований являются противоречивыми, поэтому при выполнении исследований приходится чем-то жертвовать, например точностью или экономичностью.

Наука, изучающая численные методы, называется вычислительной математикой. Программа данного курса вычислительной математики состоит из трех основных разделов:

- методы алгебры;
- численные методы теории приближений;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Коши и краевые задачи).

Методы алгебры включают:

- методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
- методы решения нелинейных уравнений и систем;
- методы решения задач о собственных значениях и собственных векторах матриц.

Численные методы теории приближений включают:

- методы приближения сеточных функций;
- методы численного дифференцирования и интегрирования.

2. Основные источники погрешностей

Численные методы – это часть информатики, относящаяся к методологии применения ЭВМ для решения задач науки, техники, производства и практически всех областей человеческой деятельности, в которых используются математические методы. Полученные численными методами результаты содержат погрешность, являясь лишь приближениями к искомым ответам.

Типы погрешностей:

1) Погрешность появляется на первом этапе работы, обусловлена неадекватностью выбранной **математической модели** исходной физической. Искажение может быть из-за неточного описания физического процесса. Эта неадекватность в большей или меньшей степени присуща всем приближенно решаемым задачам.

2) Неточность задания **исходных данных** приводит также к неустранимой погрешности, связанной с точностью измерений или вычислений или округлений данных.

3) Погрешность появляется при решении уравнений, это **погрешность метода**, т.к. метод дает приближенное решение. Именно такие погрешности будут оцениваться при рассмотрении численных методов.

4) **Вычислительная погрешность**. Источниками являются процесс округления при вычислении, ограничение памяти ЭВМ. Если количество операций превышают допустимые границы, то задачу необходимо упростить.

Приближенные результаты решения задач бесполезны без информации о степени их точности, в процессе вычислений обязательно следует вести учет погрешностей.

Пример

Надо решить систему:

$$\begin{aligned} -10^{-7}x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

Первый метод из первого уравнения исключаем $x_1=10^7x_2-10^7$, затем $x_2=(10^7+4)/(10^7+2)$, получаем $x_2=1.000000$, $x_1=0$. Неверно.

Второй метод из второго уравнения исключаем $x_1=4-2x_2$, затем $x_2=(1+4*10^{-7})/(1+2*10^{-7})$, получим $x_2=1.0000$, $x_1=2.000$. Правильно.

Операции вычитания близких по величине чисел приводит к большим погрешностям при вычислениях на машине.

Механизм возникновения больших погрешностей:

- деление на малые числа,
- появление больших промежуточных результатов,
- потеря точности при вычислении больших чисел.

Абсолютная погрешность

Пусть a – точное значение некоторой числовой величины, a^* – приближенное, тогда $a - a^* = \varepsilon$ - погрешность значения.

Любое неотрицательное число Δ , удовлетворяющее выражению:

$$|a - a^*| = |\varepsilon| \leq \Delta$$

-называется абсолютной погрешностью значения a , а также является границей погрешности значения a :

$$a^* - \Delta \leq a \leq a^* + \Delta$$

и определяется неоднозначно, выбирается возможное меньшее число.

Абсолютная погрешность является основной характеристикой точности вычислений. Если известна абсолютная погрешность приближения значения a^* , то a^* называют приближением к a с точностью до Δ .

Следует иметь в виду, что точность вычислений зависит не от количества значащих цифр приближенных чисел a^* , а от количества их верных цифр.

Относительная погрешность

Любое неотрицательное число δ , удовлетворяющее неравенству

$$\left| \frac{a^* - a}{a^*} \right| = \left| \frac{\varepsilon}{a^*} \right| \leq \frac{\Delta}{|a^*|} = \delta,$$

называют относительной погрешностью приближенного числа a^* , а также δ называют границей относительной погрешности. Относительная погрешность записывается одной, двумя значащими цифрами и округляется с избытком. Она является безразмерной величиной и часто выражается в процентах:

$$\delta \leq \frac{\Delta}{|a^*|} \cdot 100\%.$$

Абсолютная погрешность приближения векторов

Любое неотрицательное число Δ будем называть абсолютной погрешностью вектора $a^*(a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$, являющегося приближенным к вектору $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, если выполняется неравенство:

$$\max_{i=1, \dots, n} |a_i - a_i^*| \leq \Delta.$$

Абсолютная погрешность приближенных функций

Пусть $f(x)$ – функция на отрезке $[a, b]$, $p(x)$ – приближение к $f(x)$. Любую заданную на отрезке $[a, b]$ конечную неотрицательную функцию $R(x)$, удовлетворяющую условию:

$$|f(x) - p(x)| = |r(x)| \leq R(x), x \in [a, b],$$

назовем **оценочной функцией** приближенного равенства.

Оценка влияния погрешностей аргумента на значение функции

Пусть вычисляется величина $f(x, y)$. При неточных входных данных: $x^* = x \pm \Delta x$, $y^* = y \pm \Delta y$.

Абсолютная ошибка результата равна:

$$\Delta f \leq |f(x^*, y^*) - f(x, y)| \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y|.$$

Объективной мерой погрешности является относительная ошибка:

$$\delta = \left| \frac{\Delta f}{f} \right| \leq \frac{1}{|f|} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| |\Delta x| + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| |\Delta y| \right).$$

Погрешность вычислений

Реализация численных методов сводится к выполнению многих простейших арифметических операций типа: «+», «*», «/». Абсолютно точно выполняются:

- сложение целых чисел;
- вычитание целых чисел;
- умножение целых чисел.

Результат выполнения операций с целым числом не зависит от последовательности действий. Однако уже при операции деления целых чисел возникает **ошибка, связанная с округлением**.

При этом следует помнить, что получить точные результаты посредством выполнения этих операций с вещественными числами на компьютере принципиально нельзя, даже в случае, если численный метод является точным.

Оценка погрешности арифметических операций

Абсолютная погрешность суммы и разности двух приближенных чисел a и b равна сумме абсолютных разностей слагаемых:

$$\Delta_{a \pm b} = \Delta_a \pm \Delta_b.$$

Относительная погрешность частного и произведения двух не равных нулю приближенных чисел равна сумме относительных погрешностей этих чисел:

$$\delta_{ab} = \delta_a + \delta_b; \delta_{a/b} = \delta_a + \delta_b.$$

3. Методы решения нелинейных уравнений

Постановка задачи

Пусть дано нелинейное уравнение $f(x) = 0$, где $f(x)$ – функция, определена и непрерывна на некотором промежутке $[a, b]$. Требуется найти корни уравнения, числа x_1, \dots, x_n и т.д., которые называются нулями функции.

Решение осуществляется в два этапа:

I. Находятся отрезки $[a_i, b_i]$, внутри которых содержится один простой или кратный корень. Этот этап называется процедурой отделения корней.

II. Уточняется до заданной точности одним из численных методов, в которых реализуются последовательные приближения.

Практически все приближенные методы нахождения корней уравнений относятся к классу итерационных методов.

Методом итерации назовем численный метод, который последовательно, шаг за шагом, уточняет первоначальное, грубое значение корня. Каждый шаг в методе называется итерацией. Важным свойством итерационных методов является сходимость метода.

Отделения корней

Будем говорить, что корень x^* отделен на $[a, b]$, если других корней на этом отрезке нет. Для отделения корней применяются два способа: графический и аналитический.

Основу аналитического способа составляют следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a_i, b_i]$, причем на концах отрезка $[a_i, b_i]$ принимает значения разных знаков, т.е. $f(a_i) \cdot f(b_i) < 0$, то на этом отрезке содержится, по крайней мере, один корень $x^* \in [a_i, b_i]$ для которого $f(x) = 0$.

Теорема 2. В условиях теоремы 1, если $f(x)$ непрерывна на $[a_i, b_i]$ и имеет конечную производную и ее первая производная сохраняет знак внутри отрезка $[a_i, b_i]$ $\left(\underset{[a_i, b_i]}{\text{sign } f'(x)} = \text{const} \right)$, то на $[a_i, b_i]$ находится только один корень уравнения $f(x) = 0$.

Теорема Ролля. Пусть на $[a, b]$ определена функция $f(x)$, причем:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$;

2) для любого x из $[a, b]$ существует конечная производная $f'(x)$;

3) $f(a) = f(b)$.

Тогда найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля устанавливает, сколько всего различных корней может быть у уравнения.

Графический способ - построение графика функции применяется наиболее часто, но не обладает большой точностью.

Часто бывает удобно заменить уравнение $f(x) = 0$ на равносильное $f_1(x) - f_2(x) = 0$, с формированием простых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ и дальнейшим построением графиков этих функций. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$.

Метод половинного деления

Пусть дано нелинейное уравнение $f(x) = 0$ и отделен простой корень x^* , т.е. найден такой отрезок $[a_0, b_0]$, что $x^* \in [a_0, b_0]$, и на концах отрезка функция имеет значения, противоположные по знаку ($f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$). Отрезок $[a_0, b_0]$ называется начальным интервалом неопределенности, требуется уточнить местоположение корня уравнения с заданной точностью ε .

Процедура уточнения положения корня заключается в построении последовательности вложенных друг в друга отрезков, каждый из которых содержит корень уравнения. Для этого находится середина текущего интервала неопределенности $c_k = (a_k + b_k)/2$, $k = 0, 1, 2, \dots$ и в качестве следующего интервала неопределенности из двух возможных выбирается тот, на концах которого функция $f(x)$ имеет различные знаки.

Процесс завершается, когда длина текущего интервала неопределенности становится меньше заданной величины ε , задающей точность нахождения корня. В качестве приближенного значения корня берется середина последнего интервала неопределенности.

В основе метода половинного деления лежит теорема о вложенных отрезках. Последовательность отрезков

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

называется *вложенной*. При условии, что длины отрезков $|b_n - a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, эта последовательность называется *стягивающейся*.

Теорема Кантора. Для всякой стягивающейся последовательности вложенных отрезков существует единственная точка x^ , принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

Замечание!

1. Метод имеет линейную, но безусловную сходимость, его погрешность за каждую итерацию уменьшается в 2 раза:

$$|b_k - a_k| = |b_0 - a_0| \cdot 2^{-k}.$$

Можно оценить число итераций k для достижения заданной точности ε :

$$k \geq \log_2 \frac{(b_0 - a_0)}{\varepsilon}.$$

2. К достоинствам метода следует отнести то, что он позволяет найти простой корень для непрерывных функций при любых a_0, b_0 , таких что $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$. Недостатки метода: он не обобщается на системы нелинейных уравнений и не может быть использован для нахождения корней четной кратности.

Методика решения нелинейного уравнения методом половинного деления

1. Найти начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$ одним из методов отделения корней, задать малое положительное число ε и присвоить $k=0$.
2. Найти середину текущего интервала неопределенности $c_k=(a_k+b_k)/2$.
3. Если $f(a_k)*f(c_k)<0$, то положить $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=c_k$, иначе $a_{k+1}=c_k$, $b_{k+1}=b_k$. В результате находится текущий интервал $[a_{k+1}, b_{k+1}]$.
4. Если $|b_{k+1}-a_{k+1}| \leq \varepsilon$, то процесс завершить: $x^*=(a_{k+1}+b_{k+1})/2$, иначе $k=k+1$, перейти к п.2.

Метод хорд

Этот метод в интервале неопределенности обеспечивает более быстрое нахождение корня, чем метод половинного деления. Для этого отрезок $[a, b]$ делится не пополам, а в отношении $|f(a)|:|f(b)|$.

Геометрически метод хорд эквивалентен замене кривой $y=f(x)$ хордой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис.1).

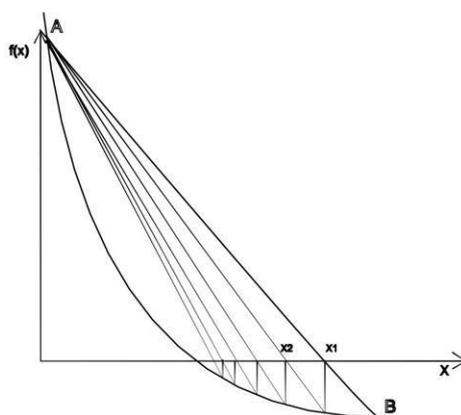


Рис.1

Уравнение хорды имеет вид:

$$(x-a)/(b-a)=(y-f(a))/(f(b)-f(a)).$$

Полагая $x=x^{(1)}$ и $y=0$, получаем

$$x^{(1)} = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Проверяются знаки F и F'' , и фиксируется точка A или B .

В случае, когда знаки F и F'' одинаковы $x=a$ неподвижный конец хорды, то $x^{(0)}=b$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(x_n) - F(a)}(x_n - a). \quad (3.1)$$

Если неподвижный конец $x=b$, $x^{(0)}=a$, то:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F(b) - F(x_n)}(b - x_n). \quad (3.2)$$

Для выявления неподвижного конца используется условие $f''(x) \cdot f(t) > 0$, где $t=a$ или $t=b$. Если неподвижен конец a , то применяется (3.1), если конец b – (3.2).

Метод обладает безусловной сходимостью, если корень отделен на отрезке $[a,b]$ и f', f'' – непрерывны и сохраняют знак на $[a,b]$, тогда последовательность x_n , созданная по методу хорд, сходится к корню x^* , что очевидно из геометрического смысла.

Теорема, позволяющая оценить погрешность метода.

Теорема. Пусть первая и вторая производные функции f из уравнения $f(x)=0$ непрерывны и сохраняют постоянный знак, а числа m и M такие, что $0 < m \leq |f'(x)| \leq M, x \in [a,b]$. Тогда погрешность приближений к x^* , найденных методом хорд, оценивается формулой:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{M - m}{m} |x_{k+1} - x_k|, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\text{где } m = \min_{x \in [a,b]} |f'(x)|, M = \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Методика решения нелинейных уравнений методом хорд

1. Найти начальный интервал неопределенности $[a_0, b_0]$ одним из методов отделения корней, выбрать x_0 из этого интервала. Задать точность вычислений – малое положительное число ε и присвоить $k=0$.
2. Определить неподвижный конец отрезка.
3. Вычислить по рекуррентной формуле x_{k+1} через x_k .
4. Если $\frac{M - m}{m} |x_{k+1} - x_k| \leq \varepsilon$, решением уравнения - будет $x^* = x_{k+1}$, процесс завершить, иначе $k=k+1$, перейти к п.3.

Метод простых итераций

Рассмотрим численное уравнение: $y=f(x)$; f - нелинейная функция.

Уравнение необходимо привести к каноническому виду:

$$x = \varphi(x)$$

Геометрическая интерпретация метода представлена на рис.2.

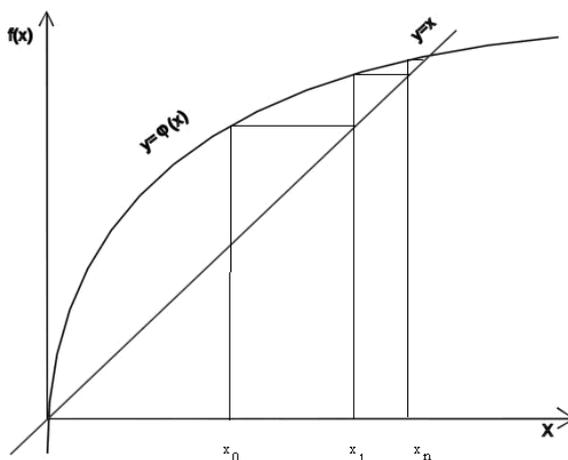


Рис.2

Для левой части $y=x$, для правой части $y=\varphi(x)$, там где они пересекаются – решение. На чертеже $y=x$ – биссектриса первого координатного угла.

Решением является точка пересечения биссектрисы и графика функции φ – точка x^* . Таких точек может быть несколько. Взять x_0 – начальное приближение, далее строится процесс одношаговой итерации:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad n=0, 1, \dots$$

Для оценки погрешности $\varepsilon_n = x_n - x^*$ разложим в ряд Тейлора выражение для $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Таким образом, $x_n = x^* + \varepsilon_n$ и

$$x_{n+1} = x^* + \varepsilon_{n+1} = \varphi(x^* + \varepsilon_n) = \varphi(x^*) + \varepsilon_n \varphi'(x^*) + o(\varepsilon_n).$$

Т.к. $x^* = \varphi(x^*)$ и $o(\varepsilon_n)$ – можно пренебречь, получим:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n \varphi'(x^*).$$

1. Если $|\varphi'(x^*)| > 1$, тогда сходимости нет.
2. Если $|\varphi'(x^*)| < 1$, то $|\varepsilon_{n+1}| < |\varepsilon_n|$ и можно ожидать, что последовательность x_n будет сходиться к x^* со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \varphi'(x^*)$.

а) При $\varphi'(x^*) > 0$ ε_{n+1} и ε_n имеют одинаковые знаки, сходимость x_n к x^* монотонная.

б) При $\varphi'(x^*) < 0$ знаки ε_{n+1} и ε_n различные, сходимость колебательного характера возле x^* .

с) При $\varphi'(x^*) = 0$ ε_{n+1} – будет малой величиной высшего порядка малости в сравнении с ε_n .

Теорема 1 (о сходимости метода простых итераций и единственности получаемого решения)

Пусть выполнены условия:

1. Нелинейное уравнение $x = \varphi(x)$ имеет решение x^* , принадлежащее области G .
2. Отображение $\varphi(x)$ является сжимающим в области G с коэффициентом $q (< 1)$:

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq q |x'' - x'|, \text{ для любых } x'', x' \text{ из } G.$$

Тогда:

- а) решение x^* является единственным решением в области G ;
- б) последовательность x^k сходится к решению x^* со скоростью геометрической прогрессии. Т.е. при любом x^0 из условия $|x^* - x^0| < R$, где $R > 0$ – некоторое малое число, справедливо неравенство:

$$|x^* - x^k| \leq q^k |x^* - x^0|, k = 0, 1, \dots$$

Теорема 2 (о достаточности условия сходимости метода простых итераций)

Пусть выполнены условия:

1. Функция $\varphi(x)$ имеет производную для всех x из G ;
2. $|\varphi'(x)| \leq q (< 1)$ для всех x из G .

Тогда $\varphi(x)$ является сжимающим в G с коэффициентом q и последовательность $x(0), \dots, x(k+1), \dots$ сходится к решению x^* .

Док-во:

В силу условия 1 справедлива теорема Лагранжа о конечных приращениях:

$$\varphi(x'') - \varphi(x') \leq (x'' - x') \varphi'(\delta), \text{ для всех } x', x'' \text{ из } G, \delta \text{ из } [x', x''].$$

Из условия 2 получим

$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leq q|x'' - x'|$, (из теоремы 1) последовательность $x^{(k)}$ сходится к x^{**} , в силу непрерывности $\varphi(x)$ в G имеем место равенство $x^* = x^{**}$.

Положим, что x^{**} некоторый корень. Докажем, что $x^{**} = x^*$. Положим, что корни разные

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leq q|x' - x''|,$$

тогда

$$|x^{**} - x^*| = |\varphi(x^{**}) - \varphi(x^*)| \leq q|x^{**} - x^*|,$$

т.к $0 < q < 1$, то неравенство возможно, если $x^{**} = x^*$.

Замечание!

1. Метод простых итераций представляет линейный итерационный процесс (метод первого порядка).

2. В силу однозначности подбора $\varphi(x_k)$ всегда можно подобрать таким образом, чтобы выполнялось условие сходимости. И погрешность ведет себя, как члены геометрической прогрессии со знаменателем q .

Методика решения нелинейных уравнений методом простой итерации

1. Уравнение $f(x) = 0$ привести к каноническому виду $x = \varphi(x)$. Для сходимости нужно обеспечить выполнение условия $|\varphi'(x^*)| \leq q < 1$ ($q = \text{const}$). При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки пересечения прямой $y = x$ и кривой $y = \varphi(x)$.

2. Задать начальное приближение $x^{(0)}$, ε – погрешность, $k = 0$.

3. Вычислить следующее приближение:

$$x_{k+1} = \varphi(x_k).$$

4. Если $|x^{(k+1)} - x^{(k)}| \leq \varepsilon$, итерации завершаются и $x^* = x^{(k+1)}$, иначе $k = k + 1$ и перейти к 3.

Вместо ε , если известно q , можно использовать $(1 - q)/q$.

Метод Ньютона

Метод позволяет свести решение нелинейных уравнений к решению последовательности линейных задач. Его называют также методом касательных.

Метод быстро сходится. Однако этот метод эффективен при весьма жестких ограничениях на характер функций $f(x)$:

1. существование второй производной функции $f(x)$ на множестве $G: \{a \leq x \leq b\}$;

2. удовлетворение первой производной условию $f'(x) \neq 0$ для всех x принадлежащих G ;

3. знакопостоянство $f(x), f''(x)$ для всех x , принадлежащих G .

Геометрическая интерпретация метода Ньютона представлена на рис.3.

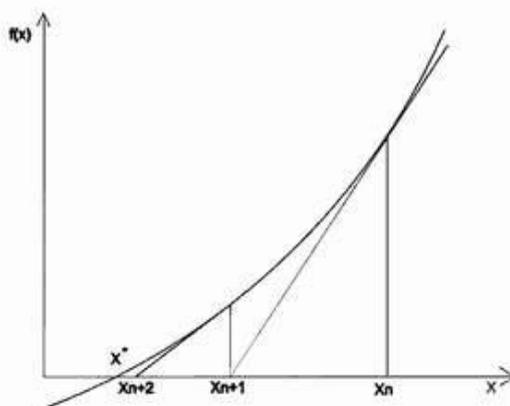


Рис.3

Задается начальное приближение $x^{(0)}$. Далее проводится касательная к кривой $y=f(x)$ в точке $x^{(0)}$, т.е. кривая заменяется на прямую линию. В качестве следующего приближения выбирается точка пересечения этой касательной с осью абсцисс. Процесс построения касательных и нахождения точек пересечения с осью абсцисс повторяется до тех пор, пока приращение не станет меньше заданной величины ε .

Получим расчетную формулу Ньютона. Рассматриваем уравнение

$$f(x)=0, \quad (3.3)$$

x - численная переменная, $f(x)$ - дифференцируемая функция.

Если функция $f(x)$ вещественная, то естественно считать начальное приближение x_i тоже вещественным.

Заменим уравнение (3.3) разложением в ряд Тейлора, ограничиваясь линейной частью:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) = 0. \quad (3.4)$$

Отсюда новое приближение:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Аналогично:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.5)$$

Предполагается, что $f'(x_n) \neq 0$.

Теорема (о достаточном условии сходимости метода Ньютона)

Пусть выполняются условия:

1. *Функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема на $[a, b]$;*
2. *Отрезку $[a, b]$ принадлежит только один простой корень x^* , так что $f(a)f(b) < 0$;*
3. *Производные $f'(x), f''(x)$ на $[a, b]$ сохраняют знак и $f'(x) \neq 0$;*
4. *Начальное приближение $x^{(0)}$ удовлетворяет неравенству $f(x^{(0)})f''(x^{(0)}) > 0$ (знаки функции и ее второй производной совпадают)*

Тогда с помощью метода Ньютона (3.5) можно вычислить корень уравнения $f(x)=0$ с любой точностью.

Пусть отрезок $[x^{(k)}, x^*]$ мал, т.е. итерации выполняются вблизи корня.

Полагая, что условия теоремы выполнены, разложим $f(x)$ в окрестности корня x^* до члена второго порядка.

$$f(x) \Big|_{x=x^{(k)}} = f(x^{(k)}) + (x^* - x^{(k)})f'(x^{(k)}) + (x^* - x^{(k)})^2 \frac{f''(\xi)}{2} = 0,$$

где $\xi \in (x^{(k)} - \delta, x^{(k)} + \delta)$. (δ – малая величина).

Далее:

$$x^* = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})} - \frac{(x^* - x^{(k)})^2}{2f'(x^{(k)})} f''(\zeta).$$

Тогда

$$x^* - x^{(k+1)} = - \frac{(x^* - x^{(k)})^2}{2f'(x^{(k)})} f''(\xi).$$

Из последнего соотношения можно сделать оценку погрешности $(k+1)$ приближения через погрешность k -го приближения:

$$\left| x^* - x^{(k+1)} \right| \leq \frac{M_2}{2m_1} \left| x^* - x^{(k)} \right|^2, \quad (3.6)$$

где $M_2 = \max |f''(x)|$, $m_1 = \min |f'(x)|$.

Оценка свидетельствует о квадратичной сходимости метода касательных вблизи корня. С вычислительной точки зрения это означает, что на каждом приближении количество верных цифр удваивается.

Очевидно, ошибка на каждом шаге убывает, если

$$\frac{1}{2} \frac{M_2}{m_1} |x_0 - x^*| < 1.$$

Полученное условие означает, что сходимость последующих приближений зависит от выбора начального приближения. Выполнения данного условия можно добиться за счет более аккуратной локализации корня.

Метод Ньютона является локально сходящимся, так как он сходится с определенной скоростью к истинному решению при условии, что стартует в достаточной близости от этого решения.

Методика решения нелинейных уравнений методом Ньютона

1. Задать начальные приближения $x^{(0)}$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(x^{(0)}) \cdot f'(x^{(0)}) > 0$, а также малое положительное число ε . Положить $k=0$.

2. Вычислить $x^{(k+1)}$ по формуле: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$.

3. Если $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$, процесс завершить и положить $x^* = x^{(k+1)}$, иначе $k=k+1$ и перейти к пункту 2.

Модифицированный упрощенный метод Ньютона

Здесь производная берется только в одной точке, вычислений меньше, но

процесс сходится медленнее.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}. \quad (3.7)$$

Метод Ньютона – Бройдена

Этот метод позволяет увеличить скорость сходимости последовательности приближений

$$x_{n+1} = x_n - c_n \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (3.8)$$

где c_n – выбирается на каждом шаге итерации, чтобы уменьшить значение по модулю $|f(x_{k+1})|$ по сравнению с $|f(x_k)|$. Таким образом, при $c_n=1$ получим метод Ньютона. В случае плохой сходимости выбираем $0 < c_n < 1$, при хорошей сходимости коэффициент $c_n > 1$.

Комбинированный метод секущих – хорд

Данный метод гарантирует сходимость при выборе двух приближений x_0 и x_1 . Можно вместо вычисления производной на каждом шаге заменить её приближенным значением:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + \Delta x) - f(x_n)}{\Delta x}. \quad (3.9)$$

Как и в модифицированном методе Ньютона, производная заменяется её приближением:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n). \quad (3.10)$$

Проверка на завершение процесса:

$$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon.$$

Метод секущих уступает методу Ньютона по скорости сходимости, однако не требует вычисления производной, которая вычисляется приближенно.

4. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Некоторые сведения из линейной алгебры

Нормой вектора X называется число, обозначаемое $\|X\|$ и удовлетворяющее условиям:

- 1) $\|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0,$
- 2) $\|aX\| = |a| \cdot \|X\|, a$ – скаляр,
- 3) $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|.$

Примеры:

1. $\|X\|_1 = \sum |x_i|,$
2. $\|X\|_2 = \left(\sum x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ – евклидова норма,
3. $\|X\|_\infty = \max |x_i|$ – равномерная норма.

Векторное пространство с введенной в ней нормой называется нормированным. Одновременно оно является метрическим, так как норма определяет метрику – расстояние между элементами пространства:

$$\rho(X, Y) = \|X - Y\|.$$

При решении задач вычислительной математики используется ряд функциональных пространств:

Пространство C – множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с нормой:

$$\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Пространство C_1 – множество непрерывных вместе с первой производной функций на отрезке $[a, b]$:

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |f'(x)|.$$

Аналогично задается пространство C_k .

Гильбертово пространство L_p с нормой:

$$\|f\| = \left[\int_a^b (f(x))^p dx \right]^{1/p}, \text{ где } p > 1.$$

Вычислительная математика применяет методы, где одна функция заменяется другой, более удобной для вычисления процесса, но близкой к первой. Причем в каждой окрестности для пространства C говорим о равномерном приближении. В гильбертовом пространстве говорим о приближении в среднем, при $p=2$ говорят о среднеквадратичном приближении.

Нормой квадратной матрицы A называется число, обозначаемое $\|A\|$ и удовлетворяющее свойствам:

- 1) $\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0,$
- 2) $\|aA\| = |a| \cdot \|A\|, a$ – скаляр,
- 3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$
- 4) $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$

Норма матрицы $\|A\|$ **согласована** с нормой вектора $\|X\|$, если $\|A \cdot X\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$. Именно использование согласованных норм позволит далее получать требуемые оценки для погрешности методов последовательных приближений, которые будут рассматриваться.

Норма матрицы A называется **подчиненной** норме вектора X , если $\|A\|$ вводится следующим образом:

$$\|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|.$$

Нетрудно видеть, что подчиненная норма согласована с соответствующей метрикой векторного пространства. В самом деле:

$$\frac{\|AX\|}{\|X\|} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \|A\|, \text{ отсюда } \|A \cdot X\| \leq \|A\| \cdot \|X\|.$$

Чтобы получить конкретное выражение подчиненной нормы матрицы через ее элементы, надо найти $\sup_{\|X\|=1} \|AX\|$. Найдем, например, для $\|A\|_C$ – норму матрицы, подчиненную равномерной метрике векторного пространства.

$$\text{Пусть } Y = AX, \text{ тогда } \|AX\| = \|Y\| = \max_i |y_i| = \max_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right|.$$

$$\text{Далее } \left| \sum_j A_{ij} x_j \right| \leq \sum_j |A_{ij}| \cdot |x_j| \leq \max_j |x_j| \sum_j |A_{ij}| = \|X\| \sum_j |A_{ij}|.$$

Следовательно, для векторов с $\|X\| = 1$ имеем

$$\|AX\| \leq \max_i \sum_j |A_{ij}| \text{ и } \|A\| = \max_i \sum_j |A_{ij}|.$$

Покажем, что существует вектор, на котором найденная верхняя оценка достигается.

Пусть максимум правой части последнего неравенства достигается при $i = i_0$. Тогда для вектора

$$X = \text{sign}(A_{i_0 j}), j = 1, 2, \dots, n$$

получим

$$y_{i_0} = \sum_j A_{i_0 j} x_j = \sum_j A_{i_0 j} \text{sign}(A_{i_0 j}) = \sum_j |A_{i_0 j}| = \max_i \sum_j |A_{ij}|.$$

По определению для равномерной нормы для выбранного вектора X

$$\|AX\| = \|Y\| = \max_i |y_i| = \max_i \left| \sum_j A_{ij} \right|.$$

$$\text{Итак, } \|A\|_C = \max_i \sum_j |A_{ij}|.$$

Можно показать, что норма матрицы, подчиненная евклидовой метрике векторного пространства, определяется следующим образом:

$\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}$, где $\rho(A^T A) = \max(\lambda_{A^T A})$ – спектральный радиус матрицы $A^T A$ (A^T – транспонированная матрица A), $\lambda_{A^T A}$ – собственное значение матрицы $A^T A$. Определенная таким образом норма называется спектральной. Если при этом матрица A – симметричная ($A^T = A$), тогда $A^T A = A^2$, $\max(\lambda_{A^2}) = [\max(\lambda_A)]^2$, следовательно

$$\|A\|_2 = [\rho(A^T A)]^{1/2}, \text{ где } \lambda_A \text{ – собственное число матрицы A.}$$

Замечание!

1. В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны в том смысле, что если имеет место $\|x_n\|_{\alpha_n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ (x_n – последовательность элементов пространства, α – признак нормы), то по любой другой норме также сходимость имеет место.

2. Матрица A называется положительной ($A > 0$) (неотрицательной $A \geq 0$), если $(AX, X) > 0$ ($(AX, X) \geq 0$) для любых $X \neq 0$. Для положительной симметричной матрицы справедливо:

$\max_i \lambda_i > 0$, где λ_i – собственные значения матрицы A .

3. Норма обычно используется для оценки погрешности на текущем шаге приближения или для проверки условия прекращения итерационного процесса.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную неоднородную задачу для систем линейных алгебраических уравнений, которая записывается в виде:

$$Ax = b, \quad (4.1)$$

где A – действительная матрица, b – вектор-столбец. X – вектор неизвестных, принадлежат \mathbb{R}^n – n -мерному евклидовому пространству.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$\dots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \quad (4.2)$$

Требуется найти решение $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ из \mathbb{R}^n системы (4.2), подстановка которого в (4.2) приводит к верному равенству $Ax^* = b$.

Замечание!

1. Из линейной алгебры известно, что решение задачи (4.2) существует и единственно, если детерминант матрицы A отличен от нуля.

2. Особенности задачи:

- а) линейна и неоднородна;
- б) количество неизвестных равно количеству уравнений;
- в) количество n для некоторых практических задач велико;
- г) трудно найти обратную матрицу при больших n .

Характер задачи и точность получаемого решения в большой степени зависят от ее обусловленности, являющейся важным математическим понятием, влияющим на выбор метода решения.

Более строго обусловленность задачи характеризуется числом обусловленности $\nu(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$, где $\|A\|$ – норма матрицы A , $\|A^{-1}\|$ – норма обратной матрицы. Чем больше это число, тем хуже обусловленность системы. В качестве нормы A можно принять число, являющееся максимальным из сумм (по модулю) элементов строк этой матрицы.

!!! Реализация хорошей или плохой обусловленности в задачах напрямую связана с численной устойчивостью и неустойчивостью.

В численном анализе используются два класса численных методов решения систем линейных уравнений:

1. Прямые методы, позволяющие найти решение за определенное число операций. К прямым методам относятся: метод Гаусса и его модификации, метод LU – разложения и др.

2. Итерационные методы, основанные на использовании повторяющегося процесса и позволяющие получить решение в результате последовательных приближений. Операции, входящие в повторяющийся процесс, составляют итерацию. К итерационным методам относятся: метод простых итераций, метод Зейделя и др.

Прямые методы решения системы линейных уравнений

Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит в исключении слагаемых системы путем ее равносильного преобразования. Метод разбивается на две совокупности операций, которые разбиваются условно на прямой и обратный ход.

а) Прямой ход состоит в исключении элементов, расположенных ниже элементов, соответствующих главной диагонали матрицы А. Матрица А преобразуется к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали.

б) Обратный ход, из матрицы А* определяем последовательно x_n, \dots, x_1 .

Надо решить систему алгебраических уравнений $Ax = b$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

...

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

Нужно преобразовать к треугольной матрице.

Сделаем последовательно:

1 шаг:

$$x_1 = \frac{(-1)}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) + \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Исключаем из x_1 всех уравнений по симплекс – правилу:

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} p & q \\ 0 & s - \frac{qr}{p} \end{bmatrix},$$

где p - ведущий элемент; q - элемент ведущей строки; r - элемент ведущего столбца; s - произвольный элемент.

Ведущий элемент выбирается по главной диагонали матрицы; из произвольного элемента вычитается произведение элементов ведущей строки на ведущий столбец, деленное на ведущий элемент.

При $i=1$ имеем $a_{1j}^{(0)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}$; $b_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}}$, $j=i, \dots, n$.

В общем случае,

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ki}^{(k-1)} b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad (4.3)$$

где k -номер шага $i=k+1, \dots, n-1, j=i, 2 \dots n$.

Получим

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Обратный ход, начиная с последнего уравнения, последовательно определяем x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 :

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}},$$

$$x_k = \frac{b_k^{(k-1)} - \sum_{j=k+1}^n a_{kj}^{(k-1)} x_j}{a_{kk}^{(k-1)}}. \quad (4.4)$$

Замечание!

1. На основе прямого хода путем перемножения ведущих элементов вычисляется определитель матрицы A .

2. Изложенный метод имеет ограничение, связанное с тем, что ведущие элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ и т.д. должны быть отличны от нуля и не должны быть малыми по модулю, поскольку погрешности вычислений будут большими.

Таким образом, порядок последовательности исключения неизвестных может сильно сказаться на результатах расчетов. Уменьшить опасность такого рода позволяют модифицированные варианты метода Гаусса. Наиболее надежным является метод исключения с выбором главного элемента.

В методе Гаусса-Жордана (с выбором главного элемента) в качестве ведущих элементов выбирается максимальное по модулю a_{ii} путем перебора этих элементов по столбцу, соответствующему этому ведущему элементу или по всем столбцам.

Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу

Перед исключением x_1 отыскивается $\max |a_{i1}|$ по i . Допустим, максимум соответствует $i=i_0$. Тогда первое уравнение в исходной системе меняем местами с i_0 уравнением. После этого осуществляем первый шаг исключения. Затем перед исключением x_2 из оставшихся уравнений отыскиваем $\max |a_{i2}|$, где $2 \leq i \leq n$, осуществляется соответствующая перестановка уравнений.

Можно показать, что условие диагонального преобладания остается справедливым после каждого шага исключений в процессе приведения матрицы к треугольному виду, т.е.

$$|a_{ii}^{(k)}| > \sum_{\substack{j=k \\ i \neq j}}^n |a_{ij}^{(k)}|, \text{ для всех } k=1, 2, \dots, n-1. \quad (4.5)$$

Это означает, что перед каждым исключением очередной неизвестной главный элемент будет находиться в «нужной позиции».

Рассмотренные модификации метода Гаусса позволяют, как правило, существенно уменьшить влияние погрешности округления на результаты расчетов.

Метод Гаусса с выбором главного элемента.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & 0 & \dots & a_{1n} \\ & & \vdots & & \\ \vdots & & a_{pq} & & \vdots \\ & & \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

При первом ходе производится выбор наибольшего по модулю элемента и выполняется перестановка строк или столбцов. Это повышает точность вычисления. Затем проводится преобразование элементов по мнемоническому правилу, т.е. запоминается главная строка, главный столбец обнуляется, получаем новую матрицу с меньшим числом строк и столбцов. Вновь определяем главный элемент. Преобразование проводим до тех пор, пока не останется строка из двух элементов, т.о., получаем треугольную матрицу, далее начинается обратный ход (4.4).

Метод Холесского

Метод опирается на возможность представления матрицы в виде произведения двух треугольных матриц:

$$A=LU.$$

L - верхняя треугольная матрица; U - нижняя треугольная матрица.

Решение системы сводится к последовательному решению двух простых систем с треугольными матрицами.

Замечание! Всякую квадратную матрицу A , имеющую отличные от нуля

$|a_{11}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots$ главные миноры можно представить в виде LU-разложения,

причем это разложение будет единственным.

Из соотношения $A=LU$ следует:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & l_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & u_{1n+1} \\ 0 & 1 & u_{23} & \dots & u_{2n} & u_{2n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & u_{nn+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn+1} \end{bmatrix}.$$

Получим для первой строки и столбца:

$$l_{i1} = a_{i1} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{ij} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad j = 2, 3, \dots, n+1.$$

Аналогично для $i \geq j$ и $i < j$:

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij} u_{jk} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} u_{mj}}{l_{kk}} \quad j = k+1, \dots, n+1.$$
(4.6)

Обратный ход:

$$x_n = u_{n, n+1}$$

$$x_i = u_{i, n+1} - \sum_{k=i+1}^n u_{ik} x_k \quad i = n-1, \dots, 1.$$
(4.7)

Замечание!

1. При большом числе уравнений прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений становятся трудно реализуемыми на компьютере, прежде всего из-за сложности хранения промежуточных результатов и операций с большими матрицами.

2. Существуют различные способы представления матрицы A в виде $A = A_1 * A_2 * \dots * A_m$,

где каждая A_i имеет удобную форму для решения системы линейных уравнений. Как правило, $m \leq 5$. Тогда в результате решения последовательности систем

$A_1 b_1 = b_0, A_2 b_2 = b_1, \dots, A_m b_m = b_{m-1}$ можно найти искомое решение.

Метод трехточечной прогонки

Общая постановка задачи.

Дана система линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей с диагональным преобладанием.

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = f_i, \quad a_1 = c_n = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

Требуется найти решения $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы.

Приводимый ниже алгоритм носит название метода трехточечной прогонки и является специальным случаем метода исключения Гаусса. Рассмотрим следующую линейную систему:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Чтобы начать исключение, разделим первое уравнение этой системы на диагональный элемент b_1 и используем обозначения $p_1 = \frac{c_1}{b_1}$ и $q_1 = \frac{d_1}{b_1}$.

Предположим, что мы исключили все нулевые поддиагональные элементы в первых $i-1$ строках. В этом случае система преобразуется к виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_{i-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_i & b_i & c_i & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ x_i \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{i-1} \\ d_i \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

Теперь, чтобы исключить поддиагональный элемент a_i в i -й строке, умножим $(i-1)$ -ю строку на a_i и вычтем ее из i -й строки. В результате i -я строка нашей системы преобразуется к виду

$$b_i - a_i p_{i-1} x_{i-1} + c_i x_{i+1} = d_i - a_i q_{i-1}.$$

Чтобы получить единицу на главной диагонали матрицы, разделим i -ю строку на коэффициент $b_i - a_i p_{i-1}$. В результате для элементов p_i и q_i в окончательном виде i -й строки получаем следующие формулы:

$$p_i = \frac{c_i}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n-1, \quad p_1 = \frac{c_1}{b_1}, \quad (4.11)$$

$$q_i = \frac{d_i - a_i q_{i-1}}{b_i - a_i p_{i-1}}, \quad i = 2, \dots, n, \quad q_1 = \frac{d_1}{b_1}.$$

Продолжая исключение, получаем систему уравнений с двухдиагональной матрицей вида

$$\begin{bmatrix} 1 & p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & p_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & p_{n-2} & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & p_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Это позволяет записать рекуррентные формулы для вычисления неизвестных x_i

$$x_n = q_n, \quad (4.13)$$

$$x_i = -p_i x_{i+1} + q_i, \quad i = n-1, \dots, 1.$$

Ввиду опасности обращения знаменателя в ноль возникает вопрос об устойчивости решения, таким условием является диагональное преобладание в исходной матрице: $|b_i| > |a_i| + |c_i|$ для всех i . В этом случае $|p_i| < 1$.

Доказательство методом индукции:

Пусть $|p_{i-1}| < 1$, тогда

$$|p_i| = \frac{|c_i|}{|b_i - p_{i-1}a_i|} \leq \frac{|c_i|}{|b_i| - |p_{i-1}a_i|} < \frac{|c_i|}{|b_i| - |a_i|} < \frac{|c_i|}{|c_i|} = 1.$$

Утверждение доказано. Из того, что $|b_i - p_i a_i| > |c_i| > 0$, то есть знаменатель в формулах отличен от нуля.

Отметим, что метод прогонки относится к экономичным методам. Экономичными называются методы, для которых число неизвестных требуемых арифметических операций пропорционально числу неизвестных. Этот метод требует порядка $8n$ операций, метод Гаусса порядка n^3 операций.

Итерационные методы решения систем линейных уравнений

Альтернативой прямым методам являются итерационные, основанные на многократном уточнении $x^{(0)}$ – приближенного решения задачи $Ax=b$. Верхним индексом в скобках обозначается номер итерации (совокупности повторяющихся действий).

Метод простой итерации

Для решения систему линейных уравнений $Ax=b$ приводим к каноническому виду:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Выразим x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}x_2}{a_{11}} - \dots - \frac{a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ &\dots \\ x_n &= \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}x_1}{a_{nn}} - \dots - \frac{a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получим $x=Cx+f$, где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \dots \\ -\frac{a_{12}}{a_{nn}} & \dots & -\frac{a_{nn-1}}{a_{nn}} & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}, x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}. \tag{4.15}$$

Итерационный процесс запишется в виде:

$$x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + f. \tag{4.16}$$

Замечание!

Процесс называется параллельным итерированием, так как для вычисления $(k+1)$ -го приближения всех неизвестных учитываются вычисленные ранее их k -е приближение. Начальное приближение $x^{(0)}$ выбирается произвольно.

Возникают вопросы об условии сходимости и о том, какова погрешность. Ответ на вопрос о сходимости дают следующие две теоремы

Теорема 1. Для сходимости итераций (4.16) к решению системы (4.14) достаточно, чтобы в какой-либо норме выполнялось условие $\|c\| \leq q < 1$, тогда независимо от выбора $x^{(0)}$ выполняется

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq q^k \|x^{(0)} - x^*\|, \text{ где } x^* - \text{точное решение (4.14).}$$

Доказательство:

Из (4.14) имеем $x^* = Cx^* + f$.

Вычитаем из (4.16) $x^{(k)} - x^* = C(x^{(k-1)} - x^*)$.

Получим оценку погрешности

$$\|x^{(k)} - x^*\| \leq \|P\| \cdot \|x^{(k-1)} - x^*\| \leq q \|x^{(k-1)} - x^*\| \leq \dots \leq q^k \|x^{(0)} - x^*\|;$$

очевидно, что при $q < 1$ $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x^*$

Замечание!

1. Условие теоремы, как достаточное, является завышенным.
2. Сходящийся процесс обладает свойством самоисправляемости.
3. Условие сходимости выполняется, если в матрице A диагональные элементы преобладают. Иначе модули диагональных коэффициентов в каждом уравнении системы больше суммы модулей недиагональных коэффициентов. Чем меньше величина нормы матрицы C , тем быстрее сходится метод.

Теорема 2. Для сходимости итераций (4.16) к решению системы (4.14) необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения матрицы C по абсолютной величине были меньше 1.

Замечание!

Хотя теорема 2 дает более общее условие сходимости метода простых итераций, однако ею воспользоваться сложнее, так как нужно вычислить границы собственных значений.

Для того, чтобы данный процесс сходил, необходимо, чтобы норма матрицы C была меньше 1 или выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |c_{ij}| &\leq \alpha < 1 & i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n |c_{ij}| &\leq \beta < 1 & j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Тогда справедливы оценки скорости сходимости:

$$\begin{aligned} |x_i - x_i^{(k)}| &\leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \max_{j=1, \dots, n} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|; \\ |x_i - x_i^{(k)}| &\leq \frac{\beta}{1 - \beta} \sum_{j=1}^n |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Метод работает лучше, если диагональные элементы значительно превосходят остальные.

Метод имеет ряд преимуществ:

1. погрешность округления сказывается значительно меньше, чем в методе Гаусса;
2. метод самоисправляющийся, отдельные ошибки при определении очередного вектора могут рассматриваться как новый начальный вектор;
3. метод удобен в разреженных матрицах (в коэффициентах стоит много нулей);
4. процесс легко программируется.

Количество операций для выполнения этого метода приблизительно равно $(2n^2)k$, где k - количество приближений. Если допустимая погрешность достигается при $k < \frac{n}{3}$, то метод итераций становится предпочтительнее метода Гаусса.

Кроме того методы итераций могут оказаться предпочтительнее с точки зрения устойчивости вычислений.

Методика решения систем линейных уравнений методом простой итерации

1. Преобразовать систему $Ax=b$ к виду $x=cx+f$.
2. Задать начальное приближение $x^{(0)}$ и точность ε . Положить $k=0$.
3. Вычислить приближение по формуле $x^{(k+1)}=cx^{(k)}+f$.
4. Если выполнено условие $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, то процесс завершить и положить $x^*=x^{(k+1)}$, иначе $k=k+1$, перейти к пункту 3.

Метод Зейделя

Является модифицированным методом простой итерации, дает лучшую сходимость и экономит память. При нахождении $(k+1)$ - приближения сразу же используются найденные значения k компонент приближения с меньшим номером.

$$\begin{aligned}
 x_1^{(k)} &= \frac{1}{a_{11}}(f_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k-1)}) \\
 x_2^{(k)} &= \frac{1}{a_{22}}(f_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k-1)})
 \end{aligned}
 \tag{4.19}$$

$$x_m^{(k)} = \frac{1}{a_{mm}}(f_m - a_{m1}x_1^{(k)} - \dots - a_{mm-1}x_{m-1}^{(k)} - a_{m,m+1}x_{m+1}^{(k-1)} \dots - a_{mn}x_n^{(k-1)}).$$

Замечание!

- 1) Метод Зейделя гарантированно сходится:
 - а) выполняется условие диагонального преобладания, является достаточным условием, но не является необходимым;
 - б) для матриц симметричных и положительно определенных.
- 2) В одинаковых условиях метод Зейделя сходится примерно в два раза быстрее метода простых итераций. Метод Зейделя может сходиться, если расходится метод простых итераций, и наоборот. Также является самоисправляю-

щимся, удобным в пользовании на ЭВМ, экономит память.

5. Методы решения задачи на собственные значения и собственные вектора матриц

Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу линейной алгебры. Она характеризуется операциями над матрицей A . Если вектор правой части β в преобразовании $AX=\beta$ имеет то же направление, что и X , то составляющие β_i вектора β должны быть пропорциональны x_i и получается соотношение:

$$AX=\lambda X, \quad (5.1)$$

где λ n скалярных величин (собственные значения матрицы A), а X – вектор собственных значений, соответствующий собственным числам. Это соотношение равносильно системе относительно X :

$$(A-\lambda E)X=0, \quad (X \neq 0). \quad (5.2)$$

Векторы X , удовлетворяющие системе $Ax_i=\lambda_i x_i, \quad i=1,2,\dots,n$, называются собственными векторами.

Собственные значения являются корнями характеристического уравнения:

$$|A-\lambda E|=0. \quad (5.3)$$

Различают полную и частичную проблему собственных чисел, когда необходимо найти весь спектр или часть спектра: $\rho(A)=\max|\lambda_i(A)|$ или $\min|\lambda_i(A)|$. Величина $\rho(A)$ называется спектральным радиусом. Существует два класса методов: прямые методы, где составляется характеристическое уравнение и решается приближенно, и итерационные методы.

Используем ряд понятий теории матриц:

Матрица **ортогональная**, если:

$$A^T A = E.$$

Матрицы A и B - **подобные**, если существует матрица P :

$$B = P^{-1} A P.$$

Если A можно привести к диагональному виду, то столбцы матрицы T образуют полную систему собственных векторов матрицы, а диагональные элементы являются собственными значениями.

Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения.

Доказательство:

Имеем: по определению подобия – $B = P^{-1} A P$; из определения собственных значений – $A X = \lambda X$.

Умножим на матрицу P^{-1} :

$$P^{-1} A X = P^{-1} \lambda X$$

и положим $X = P Y$, тогда получим

$$P^{-1} A P Y = \lambda Y, \text{ или } B Y = \lambda Y.$$

Подобные матрицы не только имеют одинаковые собственные значения, но и их собственные вектора связаны: $X = P Y$.

В теории матриц рассматриваются следующие основные положения:

1. Все n собственных значений любой вещественной симметричной матрицы $n \times n$ – вещественные. Обычно матрицы в технических задачах симмет-

ричны. Положительно определенная матрица имеет спектр действительных положительных собственных значений.

2. Если все элементы квадратной матрицы положительны, то наибольшее по модулю собственное значение положительно и ему соответствует собственный вектор с положительными компонентами.

3. Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям матрицы, ортогональны. Набор из n линейно независимых собственных векторов образует базис в рассматриваемом пространстве. k -кратному корню характеристического уравнения соответствует не более k линейно независимых векторов.

4. Собственный вектор матрицы, умноженный на произвольное число, есть также собственный вектор. Если X - собственный вектор, то и μX - является собственным вектором, μ - произвольное число.

5. Вещественная матрица, если имеет комплексные собственные значения, не может быть приведена к треугольной матрице с помощью вещественного преобразования. Любую матрицу можно привести к почти треугольной форме.

Нахождение наибольшего по модулю собственного числа матрицы

Пусть задано характеристическое уравнение (5.3).

Корни этого уравнения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ являются собственными значениями матрицы A , им соответствуют вектора $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$.

Пусть $|\lambda_1|$ наибольший по модулю. Для матрицы с действительными и положительными коэффициентами имеем наибольшее действительное собственное значение.

Произвольный вектор Y разложим по собственным векторам матрицы A :

$$Y = \sum_{j=1}^n c_j X^{(j)}.$$

Преобразуем матрицу:

$$AY = \sum_{j=1}^n c_j AX^{(j)}.$$

Т.к. $X^{(j)}$ собственный вектор, то $AX^{(j)} = \lambda_j X^{(j)}$ подставим:

$$AY = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j X^{(j)}.$$

AY назовем итерацией вектора Y , образуется $AY, A^2Y \dots A^m Y$.

Общий вид итерационного процесса:

$$A^m Y = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^m X^{(j)}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим вектор в левой части $Y^{(m)} = A^m Y$ в некотором выбранном базисе:

$$\begin{bmatrix} Y_1^{(m)} \\ Y_2^{(m)} \\ \vdots \\ Y_n^{(m)} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n c_j \lambda_j^m \begin{bmatrix} X_1^{(j)} \\ X_2^{(j)} \\ \vdots \\ X_n^{(j)} \end{bmatrix}.$$

Разделив вторую сумму на первую

$$Y_i^{(m+1)} = \sum_{j=1}^n c_j X_{ij} \lambda_j^{m+1} \quad \text{на} \quad Y_i^{(m)} = \sum_{j=1}^n c_j X_{ij} \lambda_j^m,$$

получим:

$$\frac{Y_i^{(m+1)}}{Y_i^{(m)}} = \frac{c_1 X_{i1} \lambda_1^{m+1} + \dots + c_n X_{in} \lambda_n^{m+1}}{c_1 X_{i1} \lambda_1^m + \dots + c_n X_{in} \lambda_n^m},$$

полагаем, что $c_1 \neq 0, X_{i1} \neq 0$:

$$\frac{Y_i^{(m+1)}}{Y_i^{(m)}} = \frac{\lambda_1 + \frac{c_2 X_{i2}}{c_1 X_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1} + \dots + \frac{c_n X_{in}}{c_1 X_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^{m+1}}{1 + \frac{c_2 X_{i2}}{c_1 X_{i1}} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m + \dots + \frac{c_n X_{in}}{c_1 X_{i1}} \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^m};$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{Y_i^{(m+1)}}{Y_i^{(m)}} = \lambda_1;$$

$$\lambda_1 \approx \frac{Y_i^{(m+1)}}{Y_i^{(m)}}, \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (5.5)$$

Для ускорения сходимости можно составить последовательность A, A^2, A^4, A^8 и т.д.

Методика решения задачи нахождения наибольшего собственного значения матрицы

1. Выбрать произвольное начальное приближение собственного вектора $Y^0, k=0$.

2. Найти $y^1 = A * y^0, \lambda_1^1 \approx \frac{y_i^1}{y_i^0}$, где $1 \leq i \leq n$ и $k=1$.

3. Вычислить $y^{k+1} = A * y^k$.

4. Найти $\lambda_1^{k+1} \approx \frac{y_i^{k+1}}{y_i^k}$, где $1 \leq i \leq n$.

5. Если $|\lambda_1^{k+1} - \lambda_1^k| \leq \varepsilon$, то процесс завершить и положить $\lambda_1 = \lambda_1^{k+1}$, иначе $k=k+1$ и перейти к п.3.

Замечание!

1. При неудачном выборе начального приближения предела может не существовать.

2. При проведении некоторого числа итераций рекомендуется «гасить» растущие компоненты получающегося собственного вектора, нормировать его.

Нахождение второго собственного значения матрицы

Пусть: $|\lambda_n| \leq \dots \leq |\lambda_3| \leq |\lambda_2| < |\lambda_1|$, т.е. два отличных друг от друга собственных числа λ_1 и λ_2

$$\begin{aligned} A^m Y &= c_1 \lambda_1^m X^{(1)} + c_2 \lambda_2^m X^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m X^{(n)}, \\ A^{m+1} Y &= c_1 \lambda_1^{m+1} X^{(1)} + c_2 \lambda_2^{m+1} X^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^{m+1} X^{(n)}. \end{aligned}$$

Исключим члены с λ_1 :

$$A^{m+1} Y - \lambda_1 A^m Y = c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) X^{(2)} + \dots + c_n \lambda_n^m (\lambda_n - \lambda_1) X^{(n)}.$$

Обозначим $\Delta \lambda$ – разность

$$\Delta_\lambda A^m Y = A^{m+1} Y - \lambda_1 A^m Y.$$

При $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \Delta_{\lambda_1} A^m Y &\approx c_2 \lambda_2^m (\lambda_2 - \lambda_1) X^{(2)} \quad (*) \\ \Delta_{\lambda_1} A^{m-1} Y &\approx c_2 \lambda_2^{m-1} (\lambda_2 - \lambda_1) X^{(2)} \quad (**) \end{aligned}$$

Разделим (*) на (**). Тогда для i – ой компоненты вектора:

$$\lambda^2 \approx \frac{\Delta \lambda_1 Y_i^m}{\Delta \lambda_1 Y_i^{m-1}} = \frac{Y_i^{(m+1)} - \lambda_1 Y_i^{(m)}}{Y_i^{(m)} - \lambda_1 Y_i^{(m-1)}}. \quad (5.6)$$

Последний корень можно определить из условия, что след матрицы A равен

$$S_p = \sum_{j=1}^n \lambda_j = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

Метод вращений

При реализации метода вращений преобразование подобия применяется к исходной матрице A многократно:

$$A^{(k+1)} = (H^k)^{-1} A H^k = (H^k)^T A H^k, \quad k=0, 1, \dots \quad (5.7)$$

В качестве H берется ортогональная матрица, называемая матрицей вращения Якоби, зависит от угла φ^k :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \cos \varphi^k & \dots & -\sin \varphi^k & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sin \varphi^k & \dots & \cos \varphi^k & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

На каждом шаге итерации в качестве a_{ij} выбирается недиагональный наибольший по модулю элемент, вычисляется угол вращения:

$$\varphi^k = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2a_{ij}^k}{a_{ii}^k - a_{jj}^k}.$$

Определяется матрица H , приводящая этот элемент к нулю.

Методика решения задачи

1. Положить $k=0$, $A^0=A$ и задать точность.
2. Выделить в верхней треугольной наддиагональной части матрицы максимальный по модулю элемент $a_{ij}^k, i < j$.

3. Если $|a_{ij}^k| \leq \varepsilon$, при $i < j$, то процесс завершить. Собственные значения определяются формулой $\lambda_i = a_{ii}^k, i = 1, n$, иначе процесс продолжается.

4. Найти угол поворота по формуле, приведенной выше.

5. Составить матрицу вращения H .

6. Вычислить очередное приближение

$$A^{k+1} = H^{kT} A^k H^k.$$

Перейти на п.3.

Замечание! Контроль правильности выполнения действий по каждому повороту осуществляется путем сохранения следа.

6. Методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений

Прикладные задачи, характерные для проектирования современных объектов новой техники, часто сводятся к многомерным в общем случае нелинейным уравнениям, которые решаются методом линеаризации, т.е. сведением нелинейных уравнений к линейным. В общем случае система n уравнений с n неизвестными записывается в виде:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0; \\ &\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где f_1, f_2, \dots, f_n – функции n переменных, нелинейные в некоторой области G из R^n .

Метод Ньютона

Дана система n уравнений с n неизвестными (7.1).

Обозначим:

$$P(X) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

В векторной форме: $P(X) = 0$, где $P(X)$ – вектор функция.

Для всех рассматриваемых далее методов требуется находить начальное приближение $X^{(0)}$. В случае $n=2$ это можно сделать графически, определив координаты точки пересечения кривых, описываемых уравнениями $f_1=0, \dots, f_n=0$.

Обозначим матрицу Якоби:

$$P'(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Полагаем, что определитель матрицы отличен от нуля.

Если мы не знаем точное решение, то заменяем приближенно уравнение на линейное, аналогично разложению в ряд Тейлора:

$$P(X_0) + P'(X_0)(X - X_0) = 0;$$

$$\dots$$

$$P(X_n) + P'(X_n)(X_{n+1} - X_n) = 0.$$

Умножаем на обратную матрицу $[P'(X_n)]^{-1}$.

Формула для нахождения решения является естественным обобщением метода Ньютона для решения нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} P'(X_n)^{-1} P(X_n) + X_{n+1} - X_n &= 0; \\ X_{n+1} &= X_n - P'(X_n)^{-1} P(X_n). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Решение системы для $n=2$ через обратную матрицу:

$$\begin{aligned} x_1^{(k)} &= x_1^{(k-1)} - \frac{f_1^{(k-1)} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_2} - f_2^{(k-1)} \frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_2}}{\left(\frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_1} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_2} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_1} \right)}; \\ x_2^{(k)} &= x_2^{(k-1)} - \frac{f_2^{(k-1)} \frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_1} - f_1^{(k-1)} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_1}}{\left(\frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_1} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_2} - \frac{\partial f_1^{(k-1)}}{\partial x_2} \frac{\partial f_2^{(k-1)}}{\partial x_1} \right)}. \end{aligned}$$

Так как процесс вычисления обратной матрицы является трудоемким, преобразуем к виду:

$$\Delta x^{(k)} = -P'(x^{(k)})^{-1} \cdot P(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots, \text{ где } \Delta x^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}.$$

Умножаем последнее выражение слева на матрицу Якоби:

$$P'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -P'(x^{(k)}) \cdot P'(x^{(k)})^{-1} P(x^{(k)}) = -P(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots,$$

или

$$P'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} = -P(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \quad (6.4)$$

В результате получена система линейных алгебраических уравнений относительно $\Delta x^{(k)}$. После ее определения вычисляется следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

Методика решения системы нелинейных уравнений методом Ньютона

1. Задать начальное приближение, точность положить $k=0$.
2. Решить систему линейных алгебраических уравнений относительно

$$\begin{aligned} \Delta x^{(k)} &= x^{(k+1)} - x^{(k)}; \\ P'(x^{(k)}) \cdot \Delta x^{(k)} &= -P(x^{(k)}). \end{aligned}$$

3. Вычислить следующее приближение:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}.$$

4. Если $\Delta^{(k+1)} = \max_i |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon$, то решение найдено.

Иначе идем на п.2.

Теорема (о достаточных условиях сходимости метода Ньютона)

Пусть функция $P(x)$ непрерывна, дифференцируема в открытом выпуклом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что существуют $x^* \in \mathbb{R}^n$, и $r, b > 0$, такие что $\delta(x^*, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^*| < r\} \subset G$, $F(x^*) = 0$, и существует $[P'(x^*)]^{-1}$, причем $\| [P'(x^*)]^{-1} \| \leq b$ и

$$\| P'(x') - P'(x'') \| \leq \gamma \| x' - x'' \|, \forall x', x'' \in \delta(x^*, r).$$

Тогда существует $\varepsilon > 0$, такое что для всех $x^{(0)} \in \delta(x^*, \varepsilon)$ последовательность $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ порождаемая соотношением по методу Ньютона сходится и удовлетворяет неравенству

$$\| x^{(k+1)} - x^* \| \leq b\gamma \| x^{(k)} - x^* \|^2, k = 0, 1, \dots$$

Замечания!

1. Теорема свидетельствует о локальной квадратичной сходимости метода Ньютона.
2. Недостатки метода Ньютона:
 - а) необходимость задавать достаточно хорошее начальное приближение;
 - б) отсутствие глобальной сходимости для многих задач;
 - в) необходимость вычисления матрицы Якоби на каждой итерации;
 - г) необходимость решения на каждой итерации системы линейных уравнений, которая может быть плохо обусловленной.
3. Достоинством метода является квадратичная сходимость из хорошего начального приближения при условии невырожденности матрицы Якоби.

Метод простых итераций

Дана система n уравнений с n неизвестными:

$$f_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

...

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где $f_i(x_1, \dots, x_n) = 0$ – нелинейные функции, определенные и непрерывные в некоторой области G из \mathbb{R}^n .

Для применения метода требуется привести систему к каноническому виду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots \\ x_n &= \varphi_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{6.5}$$

Или в векторной форме $X = \Phi(x)$, функции φ_i определены и непрерывны в окрестности изолированного решения x^* .

Итерационный процесс записывается в виде:

$$x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \tag{6.6}$$

Методика решения системы нелинейных уравнений методом простых итераций

1. Привести систему к каноническому виду и проверить условие сходимости.
2. Задать начальное приближения удовлетворяющее условию сходимости. $k=0$, ε точность.
3. Вычислить $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$
4. Если $\max_i |x_i^{k+1} - x_i^k| \leq \varepsilon$, то процесс завершен и $x^* = x^{(k+1)}$, иначе $k=k+1$ и перейти к п.3.

Замечание!

1. Итерационный процесс соответствует параллельному итерированию.
2. Система может быть преобразована к каноническому виду различными способами таким образом, чтобы выполнялось условие сходимости.
3. В качестве условия окончания процесса можно использовать различные нормы векторов.

Теорема (о достаточных условиях сходимости метода простых итераций).

Пусть функции $\varphi_i(x)$ и $\varphi_i'(x)$, $i = 0, 1, \dots, n$, непрерывны в области G , причем выполнено неравенство

$$\max_{x \in G} \max_i \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq q < 1, \quad (6.7)$$

где q - некоторая постоянная.

Если последовательность приближений $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$, $k = 0, 1, \dots$ не выходит из области G , то процесс последовательных приближений сходится к вектору x^* единственному решению системы.

Замечание!

1. Вместо условия (6.7) можно использовать:

$$\max_{x \in G} \max_j \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x_j} \right| \leq q < 1, \quad (6.8)$$

2. Условия (6.7), (6.8) выполняются, если для любого x , принадлежащего G , справедливы неравенства

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\|_1 < 1, \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right\|_2 < 1, \text{ соответственно, где}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

7. Численные методы теории приближений

Общая постановка задачи и классификация методов

В вычислительной практике часто приходится иметь дело с таблицами значений функций. В форме таблиц обычно оформляются результаты экспериментальных исследований, результаты расчетов, проведенных на ЭВМ.

Пусть функция задана множеством своих значений для дискретного набора точек

X	f(x)
x_0	y_0
x_1	y_1
x_n	y_n

x_i - табличные аргументы, y_i - табличные значения функции ($i=0, 1, \dots, n$).

$$y_i = f(x_i). \quad (7.1)$$

Одной из самых часто встречающихся прикладных задач, связанных с табличными функциями, является их аналитическое приближение на основе заданной таблицы значений. А именно, поиск такой аналитически заданной вычисляемой функции P , которая близка к табличной:

$$f(x) \approx P(x), \quad x \in [a; b] \quad (*).$$

Предположим, что табличная и приближенная функции считаются близкими, если значения этих функций в табличных аргументах совпадают. Способ аналитического приближения с выполнением указанного свойства называется интерполированием.

В общем виде задача интерполирования формулируется следующим образом: для табличной функции требуется найти достаточно простую известную функцию P , удовлетворяющую соотношениям:

$$P(x_i) = y_i, \quad (i=0, 1, 2, \dots, n). \quad (7.2)$$

В этом случае функция P называется интерполирующей функцией, а табличные аргументы - узлами интерполяции. Если интерполирующая функция P найдена, то на отрезке $[a, b]$ будет иметь место приближенное равенство (*), которое называется интерполяционной формулой.

Интерполяционная формула точна в узлах интерполяции, необходимо оценить погрешность в случае, когда $x \neq x_i$ ($i=0, 1, \dots, n$).

Существуют несколько способов приближения, в которых по-разному понимается близость между функциями f и P :

а) приближения функции интерполяционными полиномами;

б) среднеквадратичное приближение, когда минимизируется сумма квадратов отклонений полинома от заданных значений функции (Метод наименьших квадратов):

$$e = \sum_{i=0}^n (P(x_i) - y_i)^2.$$

Полиномиальное интерполирование

Для восполнения исходных табличных функций искомыми функциями, как правило, используются алгебраические многочлены. Задача полиномиального интерполирования всегда имеет решение.

Теорема. Пусть задана табличная функция f с $n+1$ аргументами. Тогда существует единственный многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n,$$

совпадающий в точках x_i с y_i

$$P_n(x_i) = y_i \quad i=0,1,2,\dots,n. \quad (7.3)$$

Доказательство:

Теорема будет доказана, если покажем, что равенство (7.3) определяется единственным набором коэффициентов многочлена P_n .

$$\begin{cases} a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \dots + a_n = f(x_0) \\ a_0x_1^n + a_1x_1^{n-1} + \dots + a_n = f(x_1) \\ \dots \\ a_0x_n^n + a_1x_n^{n-1} + \dots + a_n = f(x_n). \end{cases}$$

Поставим узловые точки в многочлен, получим систему уравнений с $n+1$ неизвестным:

$$W_{n+1} = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & x_0^{n-2} & \dots & x_0 & 1 \\ & & & \dots & & \\ & & & & & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Получили определитель Вандермонда. Т.к. среди чисел x_0, x_1, \dots, x_n нет совпадающих, то он отличен от нуля, следовательно, многочлен существует, система разрешима, многочлен отличен от нуля.

Замечание!

1. На самом деле степень полинома может оказаться меньше, когда получатся нулевые коэффициенты при старших степенях x .

2. Можно построить множество интерполяционных полиномов P_k степени $k > n$. В этом случае система содержит больше неизвестных, чем число уравнений.

Оценка погрешности интерполирования

Пусть на $[a,b]=[x_0,x_n]$ для заданной табличной функции f получена интерполяционная формула:

$$f(x) \approx P_n(x), \quad x \in [a,b].$$

Функция f достаточное число раз непрерывно дифференцируема, есть возможность получить оценку погрешности независимо от способа построения интерполяционного многочлена. При этом остаточный член R_n определяется только функцией f и выбором узлов интерполирования.

$$R_n = f(x) - P_n(x), \quad (7.4)$$

т.е. многочлен степени n , он равен в узлах интерполяции самой функции, а вне узлов можно записать оценку R_n , характеризующую точность приближения.

Теорема:

Если $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на $[a, b]$ и содержит узлы интерполирования x_0, x_1, \dots, x_n , то $\forall x \in [a, b]$ существует такая $a < \xi < b$, что выполняется

$$R_n = \frac{w(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),$$

где $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$.

Доказательств во:

Введем вспомогательную функцию, которая равна

$$u(x) = f(x) - P_n(x) - kw(x),$$

где k - некий постоянный коэффициент. Очевидно, что $u(x)$ имеет $(n+1)$ корней и совпадает в узлах интерполяции (корни x_0, x_1, \dots, x_n).

Подберем k т.о., чтобы $u(x)$ имела $(n+2)$ корня. Найдем $x^* \in [a, b]$, удовлетворяющий соотношению:

$$f(x^*) - P_n(x^*) - kw(x^*) = 0. \quad (7.5)$$

Выразим k :

$$k = \frac{f(x^*) - P_n(x^*)}{w(x^*)}, \quad (7.6)$$

$w(x^*) \neq 0$, т.е. на концах отрезков, в узлах получаем, что функция u обращается в ноль $n+2$ раза:

$$[x_0, x_1] [x_1, x_2] \dots [x_i, x^*] [x^*, x_{i+1}] \dots [x_n, x_{n-1}],$$

количество отрезков $(n+1)$, т.е. по теореме Ролля на каждом отрезке в ноль обращается производная $u'(x)=0$, т.е. она имеет $(n+1)$ корней; $u''(x)=0$ имеет n корней. Т.о., последовательно, применяя теорему Роля, получим в некоторой точке $\xi \in [a, b]$, в которой $u^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Причем $w^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$ и $P_n^{(n+1)}(\xi) = 0$, т.о., мы имеем в некоторой точке ξ из (7.5):

$$f^{(n+1)}(\xi) - k(n+1)! = 0$$

Найдем k :

$$k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

Подставим в (7.6): $\frac{f(x^*) - P_n(x^*)}{w(x^*)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$.

Получаем остаточный член:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x^*). \quad (7.7)$$

Т.к. ξ зависит от x и лежит внутри интервала, то найдена верхняя граница остатка интерполяции (она зависит от выбора узлов).

Оценка интерполяции:

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w(x)|, \quad (7.8)$$

$$\text{где } M_{n+1} = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(n+1)}(x)|.$$

Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть исходная сеточная функция $f_i = f(x_i)$ $i=0, 1, \dots, n$ задана в $(n+1)$ узлах $[x_0, x_n]$, в общем случае не равностоящих. Тогда многочлен Лагранжа имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f_k.$$

Найдем коэффициенты l_k .

Построим многочлен $l_k(x)$, равный 1 при $x=x_k$ и нулю в остальных узлах $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$. Т.к. многочлен в узлах должен иметь корни, то он может быть разложен на множители:

$$l_k(x) = c(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n),$$

коэффициент c определим из условия $l_k(x_k)=1$.

$$1 = c(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n),$$

$$l_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}.$$

Введем многочлен степени $n+1$ (с учетом счета от нуля) с корнями в узлах интерполяции и его производную в точку x_k :

$$w(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n),$$

$$w'(x_k) = (x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n).$$

$$\text{Тогда } l_k(x) = \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)},$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n l_k(x) f(x_k),$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{w(x)}{(x-x_k)w'(x_k)} f(x_k). \quad (7.9)$$

Множители $l_k(x)$ называются *множителями Лагранжа* или лагранжевыми коэффициентами, они показывают влияние узлов на значение многочлена. В коэффициентах отсутствуют функции, т.е. их можно вычислить отдельно, для любых функций.

Если количество узлов увеличить на 1, то каждое слагаемое в многочлене надо пересчитывать заново. Это требует усовершенствования вида многочлена.

Конечные разности

Пусть известно значение функции $y=f(x)$ в равноотстоящих точках. Аргумент пробегает значение при $k=0,1,2,\dots,n$, $h>0$, $x_k=x_0+kh$.

Будем говорить, что тогда задана таблица функции $f(x)$ с шагом h с начальным аргументом x_0 и конечным x_n .

Числа $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta y_1 = y_2 - y_1$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2$ называются конечными разностями.

Конечные разности второго порядка:

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0, \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1, \dots$$

Конечные разности $(k+1)$ -го порядка:

$$\Delta^{k+1} y_0 = \Delta^k y_1 - \Delta^k y_0, \Delta^{k+1} y_1 = \Delta^k y_2 - \Delta^k y_1, \dots$$

Можно найти выражение для конечных разностей любого порядка через значения функции.

$$\Delta y_0 = y_1 - y_0,$$

$$\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 = (y_2 - y_1) - (y_1 - y_0) = y_2 - 2y_1 + y_0.$$

Конечные разности обладают свойством линейности:

1) Если $F(x) = \alpha f(x)$, где α – постоянная, то

$$\Delta F(x) = \alpha \Delta f(x).$$

2) Конечная разность суммы двух функций равна сумме конечных разностей слагаемых

$$F(x) = f(x) + g(x),$$

$$\Delta F(x) = \Delta f(x) + \Delta g(x).$$

Конечные разности являются аналогом производных.

Теорема: Конечная разность от многочлена степени n является многочленом степени $n-1$.

Рассмотрим $P(x) = x^k$.

Составим разность

$$\Delta P = (x+h)^k - x^k = khx^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} h^2 x^{k-2} + \dots$$

Первое слагаемое разложим по биному Ньютона.

Предложение доказано.

Это верно для любого многочлена на основании свойств 1 и 2, т.к. произвольный многочлен строится с помощью суммы и умножения на константы.

Конечная разность порядка n от многочлена степени n равна постоянной величине, и все разности более высокого порядка равны нулю.

Существует формула аналогичного ряда Тейлора, которая дает представление значения функции через конечные разности:

$$y_k = y_0 + \frac{k}{1!} \Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^k y_0.$$

Разделенные разности

Иногда известны значения функции для неравноотстоящих значений аргумента. Тогда применяются разделенные разности. Пусть задана таблица для неравноотстоящих аргументов x_0, x_1, \dots, x_n .

Разделенные разности:

$$f(x_2, x_1) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1},$$

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Это угловые коэффициенты хорд графика функции.

$$f(x_3, x_2, x_1) = \frac{f(x_3, x_2) - f(x_2, x_1)}{x_3 - x_1},$$

$$f(x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0}.$$

По разделенным разностям первого порядка определяются разделенные разности второго порядка:

Аналогично определяются разностные отношения третьего порядка:

$$f(x_3, x_2, x_1, x_0) = \frac{f(x_3, x_2, x_1) - f(x_2, x_1, x_0)}{x_3 - x_0}.$$

Они обладают свойством линейности:

1. Разностное отношение суммы $F(x) = f(x) + g(x)$ равно сумме разностных отношений слагаемых $f(x)$ и $g(x)$: $F(x_i, x_{i-1}) = f(x_i, x_{i-1}) + g(x_i, x_{i-1})$.

2. Если $F(x) = \alpha f(x)$, где α — константа, то $F(x_{i+1}, x_i) = \alpha f(x_{i+1}, x_i)$.

Разностные отношения являются аналогом производных.

3. Разделенные разности порядка n от многочлена степени n являются постоянной величиной, и разделенные разности более высокого порядка равны нулю.

Выразим разделенные разности любого порядка через значение $f(x)$:

$$f(x_1, x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0},$$

$$\begin{aligned} f(x_2, x_1, x_0) &= \frac{f(x_2, x_1) - f(x_1, x_0)}{x_2 - x_0} = \\ &= \frac{1}{x_2 - x_0} \left\{ \left[\frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1} \right] - \left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} \right] \right\} = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{x_2 - x_0} \left[\frac{1}{x_1 - x_2} - \frac{1}{x_1 - x_0} \right] = \\ &= \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}. \end{aligned}$$

В общем случае разделенные разности порядка n :

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Если ввести обозначения для многочлена степени $n+1$ с корнями x_0, x_1, \dots, x_n

$$w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n),$$

$$w'(x_k) = (x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n),$$

тогда

$$f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f(x_k)}{w'(x_k)}$$

Разделенные разности являются симметрической функцией своих аргументов.

Выражение функции $f(x_k)$ через разделенные разности (аналог формулы Тейлора):

$$f(x_k) = f(x_0) + (x_k - x_0)f(x_0, x_1) + (x_k - x_0)(x_k - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})f(x_0, x_1, \dots, x_k).$$

Найдем выражения разделенных разностей в случае равных промежутков интерполяции.

Если аргументы равноотстоящие, т.е. $x_k = x_0 + kh$, $k=0, 1, 2, \dots, N$.

Конечные разности первого порядка:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f(x_0)}{h},$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x_1)}{h}.$$

Конечные разности второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{1}{2h} \left[\frac{\Delta f(x_1)}{h} - \frac{\Delta f(x_0)}{h} \right] = \frac{1}{2!} \frac{\Delta^2 f(x_0)}{h^2}.$$

При любом порядке:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{\Delta^k f(x_0)}{k! h^k}.$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

Приведем еще одну форму записи интерполяционного полинома.

Будем искать интерполяционный многочлен n -степени на равномерной сетке в виде:

$$P_n^1(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Коэффициенты a_0, \dots, a_n находим из условия интерполяции:

при $x=x_0$, $P(x_0) = a_0 = y_0$;

при $x=x_1$, $P(x_1) = y_0 + a_1(x_1 - x_0) = y_1 \rightarrow a_1 = (y_1 - y_0)/h$;

при $x=x_2$, $P(x_2) = y_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_2$.

Используя табличные значения y_k через конечные разности:

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0,$$

$$y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0,$$

$$\dots$$

$$y_n = y_0 + n\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \Delta^n y_0,$$

найдем $a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}$.

Аналогично,

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}, \dots, a_n = \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}.$$

Подставим:

$$P_n^1(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}). \quad (7.10)$$

Многочлен (7.10) называется первым интерполяционным многочленом Ньютона, а приближенное равенство $f(x) \approx P_n^1(x)$, $x \in [a; b]$ — первой интерполяционной формулой Ньютона.

На практике чаще всего используется другая форма записи многочлена P .

$$\text{Положим } t = \frac{x-x_0}{h}, \text{ или } x = x_0 + th.$$

$$\text{Тогда } x-x_1 = h(t-1), x-x_2 = h(t-2), \dots, x-x_{n-1} = h(t-n+1).$$

Многочлен примет вид

$$P_n^1(x) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{\Delta^2 y_0}{2!}t(t-1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t-1)\dots(t-n+1).$$

Получаем выражения остаточного члена:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}t(t-1)\dots(t-n), (c \in (a;b)).$$

С помощью первой интерполяционной формулы Ньютона обычно вычисляют значение $f(x)$, близких к x_0 .

Второй интерполяционный многочлен Ньютона применяется при вычислении значений функции для x , близких к x_n .

$$P_n^2(x) = y_n + \frac{\Delta y_{n-1}}{h}(x-x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!h^2}(x-x_n)(x-x_{n-1}) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_n)\dots(x-x_1),$$

или

$$P_n^2(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!}t(t+1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n!}t(t+1)\dots(t+n-1).$$

Многочлен называется вторым интерполяционным многочленом Ньютона, а приближенное равенство $f(x) \approx P_n^2(x)$, $x \in [a; b]$ — второй интерполяционной формулой Ньютона.

Остаточный член будет иметь вид

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(c) \frac{h^{(n+1)}}{(n+1)!}t(t+1)\dots(t+n), (c \in (a;b)).$$

Интерполяционный многочлен Ньютона на неравномерной сетке

Пусть исходная сеточная функция $y_i = f(x_i)$, $i = 0, n$ задана на неравномерной сетке x_0, \dots, x_n с шагом $h_{i+1} = x_{i+1} - x_i$. Тогда для функциональной интерполяции может быть использован многочлен Ньютона, основанный на разделенных разностях:

$$P_N(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0, x_1, x_2) + \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})f(x_0, x_1, \dots, x_n).$$

Многочлен будет совпадать с функцией в узлах, при $x=x_0$, $P_N(x_0)=f_n(x_0)$.

При $x=x_1$,

$$P_N(x_1) = f(x_0) + (x_1 - x_0)f(x_0, x_1) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = f(x_1).$$

Замечание!

Многочлен Лагранжа: Выбрав любую функцию, можно легко оценить погрешность.

Метод Ньютона менее удобен для теоретического исследования. При добавлении нового узла предыдущие слагаемые останутся без изменения.

Т.к. слагаемые включают разделенные разности, равносильные производным, то они расположены в порядке малости. Этот факт дает возможность судить о точности и оценить погрешность.

8. Интерполяция сплайнами

Постановка задачи

Полиномиальная интерполяция может давать значительную погрешность между узлами. Для более правильного поведения $y(x)$ применяются задачи экстраполяции, например сплайны.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана табличная функция $y_i = f(x_i)$ на сетке x_0, x_1, \dots, x_n . Требуется восполнить её функцией $S(x) = \bigcup_{i=0}^{n-1} S_i(x)$, определенной и непрерывной до некоторого порядка производной на всем отрезке $[a, b]$, где S_i – алгебраический многочлен, определенный на частичных отрезках $[x_i, x_{i+1}], i = 0, n - 1$.

Интерполяционный кубический сплайн

Рассмотрим задачу восполнения заданной табличной функции на базе интерполяционного кубического сплайна.

Определение:

$S(x) \in C^2 [a, b]$ – интерполяционный кубический сплайн, если

1. На $[x_i, x_{i+1}] \forall i=0, \dots, N-1$ является кубическим полиномом:

$$S(x) = S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}(x - x_i) + a_{i2}(x - x_i)^2 + a_{i3}(x - x_i)^3, \\ \forall x \in [x_i, x_{i+1}]$$

2. Выполняется состыковка многочленов в узлах интерполяции вплоть до второй производной:

$$S_{i-1}^{(r)}(x_i - 0) = S_i^{(r)}(x_i + 0), r = 0, 1, 2,$$

где r – порядок производной.

3. Выполняется условия интерполяции:

$$S(x_i) = y_i \quad i = 0, \dots, N.$$

Для определения функции понадобятся коэффициенты. Всего $4N$ неизвестных. Из (2) условия получаем $3(N-1)$ уравнений, из (3) условия еще $(N+1)$. Для замыкания системы необходимы еще 2 уравнения, для этого используют граничные условия.

Из определения сплайна понятно, что вторая производная – кусочно-линейная функция. Поэтому обозначение $M_i = S''(x_i), i = 1, 2, \dots, N$ можно записать

$$S''(x) = S_i''(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)}{h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)}{h_i}, \quad (8.1)$$

$$x \in [x_i, x_{i+1}], \quad h_i = x_{i+1} - x_i = \text{шаг}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

Дважды интегрируем (8.1) для нахождения выражение для $S_i(x)$, содержащего две произвольных постоянных:

$$S_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + C_{1i}(x_{i+1} - x) + C_{2i}(x - x_i). \quad (8.2)$$

Найдем константы из условия интерполяции:

$$\text{при } x=x_i \quad S_i(x_i) = y_i,$$

$$\text{при } x=x_{i+1} \quad S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}.$$

Находим

$$M_i \frac{h_i^2}{6} + C_{1i} h_i = y_i, \quad M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} + C_{2i} h_i = y_{i+1}. \quad (8.3)$$

Подставим в (8.2), получим формулу кубического сплайна на $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x) = M_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + \left(y_i - M_i \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \left(y_{i+1} - M_{i+1} \frac{h_i^2}{6} \right) \frac{x - x_i}{h_i}, \quad i=0, 1, \dots, N. \quad (8.4)$$

Для нахождения $M_i, i=0, \dots, N$ используем непрерывность первой производной сплайна. Возьмем производную от (8.4) и приравняем ее справа и слева:

$$S_i'(x) = -M_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h_i} + M_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} - \left(\frac{y_i}{h_i} - M_i \frac{h_i}{6} \right) + \left(\frac{y_{i+1}}{h_i} - M_{i+1} \frac{h_i}{6} \right). \quad (8.5)$$

$$\text{При } x=x_i \quad S_i' = S_{i+1}',$$

$$S_{i-1}(x_i - 0) = M_{i-1} \frac{h_{i-1}}{6} + M_i \frac{h_{i-1}}{3} + d_{i-1},$$

$$S_i(x_i + 0) = -M_i \frac{h_i}{3} - M_{i+1} \frac{h_i}{6} + d_i,$$

$$\text{где } d_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i}.$$

Теперь из условия $S_{i-1}(x_i - 0) = S_i(x_i + 0), i = 1, \dots, N-1$ получаем систему из $(N-1)$ уравнений:

$$h_{i-1} M_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i) M_i + h_i M_{i+1} = 6(d_i - d_{i-1}), \quad i=1, \dots, N-1. \quad (8.6)$$

Система (8.6) является недоопределенной, так как содержит $N-1$ для нахождения $N+1$ неизвестных. Для замыкания этой системы используем приведенные выше условия.

В простейшем случае накладываются нулевые условия на вторую производную, т.е. $M_0=0, M_{N+1}=0$, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) & h_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \dots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6(d_i-d_{i+1}) \\ \dots \\ 6(d_i-d_{i+1}) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Для решения системы относительно M_i эффективно использовать метод трехточечной прогонки.

Используются краевые условия на первую производную:

$$S'(x_0) = y'_0, \quad S'(x_n) = y'_n$$

или

$$2M_0 + M_1 = \frac{6}{h_0} (y'_0 - y'_1)$$

$$M_{N-1} + 2M_N = \frac{6}{h_{N+1}} (y'_N - y'_{N+1})$$

Тогда получим систему:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ h_0 & 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & h_{N-2} & 2(h_{N-2}+h_{N-1}) & h_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \dots \\ M_{N-1} \\ M_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{h_0} (d_0 - y'_0) \\ 6(d_1 - d_0) \\ \dots \\ 6(d_N - d_{N+1}) \\ \frac{6}{h_{N+1}} (y'_N - d_{N+1}) \end{pmatrix}.$$

Методика построения интерполяционного кубического сплайна

1. Сформировать замкнутую систему относительно неопределенных коэффициентов (8.7).
2. Решить систему методом прогонки, найти неопределенные коэффициенты.
3. Сформировать многосвязную функцию (8.4).

9. Интерполяция методом наименьших квадратов

Постановка задачи

Определение вида функциональных зависимостей, получаемых в физическом эксперименте, имеет важное значение. Таблица $y_i=f(x_i)\pm\varepsilon_i$ имеет форму ломаной, но экспериментатор предполагает, на основе практического опыта, что функция должна быть гладкой. На практике удобно представить искомую зависимость в виде многочлена:

$$f_m(x, a) = \sum_{j=0}^m a_j g_j = a_0 g_0 + a_1 g_1 + \dots + a_m g_m, \quad (9.1)$$

где a_0, \dots, a_m - неизвестные коэффициенты, $\{g_i\}$ - заданная система базисных функций. В качестве базисных функций могут выбираться, например, степен-

ные функции, полиномы Чебышева, тригонометрические функции $\{g_j\} = \{\cos jx\}$.

Условия согласования метода сглаживания – метод наименьших квадратов:

$$\sqrt{\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n [f_m(x_i, a) - f(x_i)]^2} \rightarrow \min_a (m \leq n); \quad (9.2)$$

Отметим отличительные особенности решения задачи сглаживания методом наименьших квадратов:

1. Метод интерполяции - это точный метод, так как требует выполнения условий интерполяции. Метод наименьших квадратов требует выполнения условия соответствия f_m и y_i в среднем.

2. Исходная функция задана неточно, с большой погрешностью, поэтому нет необходимости требовать выполнения условия интерполяции.

3. Количество точек x_i ($i=0, \dots, n$), в которых задана исходная функция, значительно больше, чем степень многочлена.

Метод наименьших квадратов

Кривая выбирается таким образом, чтобы среднеквадратичные отклонения были минимальными.

Пусть заданы значения функции y_0, y_1, \dots, y_N в узлах x_0, x_1, \dots, x_N .

$g(x)$ – интерполяционная функция.

Нужно, чтобы среднеквадратичная погрешность в каждой точке была минимальна:

$$E = \sum_{i=0}^N |g(x_i) - y_i|^2 \rightarrow \min. \quad (9.3)$$

Функцию $g(x)$ выбирают в виде линейной комбинации подходящих функций:

$$g(x) = a_1 g_1(x) + a_2 g_2(x) + \dots + a_k g_k(x). \quad (9.4)$$

Если g_i – степенные функции, тогда $g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k$.

Для нахождения минимума погрешности возьмем производную:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0, i = 1, \dots, k,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a_1} &= 2 \sum_{i=0}^n (a_1 g_1(x_i) + \dots + a_k g_k(x_i) - y_i) g_1(x_i) = 0, \\ &\dots \\ \frac{\partial E}{\partial a_k} &= 2 \sum_{i=0}^n (a_1 g_1(x_i) + \dots + a_k g_k(x_i) - y_i) g_k(x_i) = 0. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Далее решаем систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_k .

$$\begin{bmatrix} \sum_i g_1^2(x_i) & \sum_i g_1 g_2(x_i) & \dots & \sum_i g_1(x_i) \dots g_k(x_i) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_i g_1(x_i) g_k(x_i) & \dots & \dots & \sum_i g_k^2(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i g_1(x_i) y_i \\ \dots \\ \sum_i g_k(x_i) y_i \end{bmatrix}. \quad (9.6)$$

Степень полинома должна быть не больше заданного количества узлов.

Использование ортогональных полиномов

Ортогональные полиномы обладают свойством:

$$\sum_i g_i(x_i) g_k(x_i) = 0,$$

при построении аппроксимирующей функции использовать g_i – ортогональные полиномы произведения при $i \neq j$,

т.е. получим диагональную матрицу:

$$\begin{bmatrix} \sum_i g_1^2(x_i) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \sum_i g_2^2(x_i) & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & \sum_i g_k^2(x_i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i g_1(x_i) y_i \\ \dots \\ \sum_i g_k(x_i) y_i \end{bmatrix}.$$

Выразим константы:

$$a_j = \frac{\sum_{i=0}^n g_j(x_i) y_i}{\sum_{i=0}^n g_j^2(x_i)}.$$

Применение степенных функций в методе наименьших квадратов

В качестве базисных функций используются степенные:

$$g_j(x) = x^j, \quad j=0, \dots, m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^n 1 \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^m \right) a_m &= \sum_{i=0}^n y_i, \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^2 \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \right) a_m &= \sum_{i=0}^n x_i y_i, \\ &\dots \\ \left(\sum_{i=0}^n x_i^m \right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{m+1} \right) a_1 + \dots + \left(\sum_{i=0}^n x_i^{2m} \right) a_m &= \sum_{i=0}^n x_i^m y_i, \end{aligned} \quad (9.7)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} s_0 &= n+1, \quad t_0 = y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_n, \\ s_k &= x_0^k + x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k, \quad k = 1, \dots, 2m, \\ t_k &= x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + x_2^k y_2 + \dots + x_n^k y_n, \quad k = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Получим систему:

$$\begin{aligned}
s_0 a_0 + s_1 a_1 + \dots + s_m a_m &= t_0 \\
s_1 a_0 + s_2 a_1 + \dots + s_{m+1} a_m &= t_1 \\
&\dots \\
s_m a_0 + s_{m+1} a_1 + \dots + s_{2m} a_m &= t_m.
\end{aligned}
\tag{9.8}$$

Методика решения задачи сглаживания

1. Вычислить коэффициенты $s_k, k = 0, 1, \dots, 2m; t_k, k = 0, 1, \dots, m$ по заданной табличной функции и записать систему (9.8).
2. Решить полученную систему линейных уравнений относительно коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_m .
3. Записать искомую сглаживающую функцию $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m$.

Замечание!

1. Если $n=m$, тогда полученный многочлен совпадает с интерполяционным многочленом.
2. В каждом конкретном случае может существовать оптимальная степень m , зависящая от числа n и вида базисной функции.

10. Численное интегрирование

Общие интерполяционные квадратурные формулы

В приложениях математики одной из наиболее часто встречающихся задач является вычисление определенного интеграла от некоторой интегрируемой на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$.

Вычислить определенный интеграл возможно по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),
\tag{10.1}$$

где $F(x)$ – первообразная, её определение возможно в редких случаях.

Численными методами приближение к интегралу отыскивается по числовому выражению на основе значений подынтегральной функции в конечном множестве точек из отрезка интегрирования. Такой способ вычислений часто называется механической квадратурой, соответствующие приближенные формулы называются формулами численного интегрирования или квадратурными формулами, а используемые при этом аргументы функций – узлами квадратуры:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n,
\tag{10.2}$$

где x_k – узлы квадратурной формулы.

$A_k^{(n)}$ – коэффициенты квадратурной формулы.

$f(x)$ – непрерывная функция, интеграл в левой части для такой функции существует.

$R_n(f)$ – остаточный член.

Узлы нумеруются в порядке возрастания:

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \dots < x_n^{(n)}.$$

Промежуток интегрирования может быть и бесконечным.

Общий подход к решению задачи заключается в разбиении отрезка $[a, b]$ на множество отрезков меньших размеров и вычисления интеграла, как суммы, приближенно вычисленных площадей полосок, полученных при таком разбиении.

Схема вычислений методом численного интегрирования:

Берут натуральное число $n \in N$, отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей одинаковой длины $h = \frac{b-a}{n}$ (шаг разбиения), из каждой части выбирают узлы δ_i , вычисляют значения $f(x_i)$ и применяют квадратурную формулу (10.2).

Числовые коэффициенты A_i определяются при выводе каждой конкретной формулы. Остаточный член $R_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Это означает чем меньше шаг разбиения, тем квадратурная формула точнее.

При решении задачи численного интегрирования с заданной точностью $\varepsilon > 0$ необходимо определить число n , при котором $R_n < \varepsilon$, что равносильно выбору такого шага, когда квадратурная формула обеспечивает точность ε .

Простейшие квадратурные формулы

Формула прямоугольника

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, каждая длиной $h = \frac{b-a}{n}$. Рассмотрим один из интервалов. Площадь, лежащую под кривой $y=f(x)$ между x_i и x_{i+1} , будем приближенно вычислять как площадь прямоугольника:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) \quad (10.3)$$

- формула прямоугольника с левыми ординатами;

$$\int_a^b f(x) dx \approx h(f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)) \quad (10.4)$$

- формула прямоугольника с правыми ординатами;

Взяв значение функции в середине отрезка, получим формулу с центральными ординатами.

Оценка погрешностей

Для получения оценки погрешности понадобятся следующие теоремы из курса математического анализа.

Теорема 1 (вторая теорема Больцано-Коши). Пусть функция F непрерывна на отрезке $[a, b]$, а числа m и M – ее наименьшее и наибольшее значения на $[a, b]$. Тогда для любого числа C , заключенного между m и M , найдется точка $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = C$.

Теорема 2 (аддитивность интеграла). Если $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx.$$

Теорема 3 (обобщенная теорема о среднем значении интеграла). Пусть:

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция $g(x)$ интегрируема на этом отрезке;

2) функция $g(x)$ не меняет знак на всем отрезке $[a, b]$.

Тогда существует точка $c \in [a, b]$ такая, что

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Получим оценку погрешности для квадратурной формулы прямоугольника.

Теорема 4. Если подынтегральная функция $f(x)$ имеет на $[a, b]$ непрерывную производную f' , то оценка погрешностей формул дается неравенством

$$R_n \leq M \frac{(b-a)^2}{2n}, \text{ где } M = \max_{[a,b]} |f'(x)|. \quad (10.5)$$

Доказательство:

Пусть отрезок $[a, b]$ разбит на n равных частей $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, каждая длиной $h = \frac{b-a}{n}$.

Возьмем любой отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$). Для всякого x из него найдется зависящее от x число $c_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ такое, что $f(x) = f(x_{i-1}) + f'(c_i^*)(x - x_{i-1})$ (теорема Лагранжа). Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = hf(x_{i-1}) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(c_i^*)(x - x_{i-1}) dx.$$

К интегралу в правой части можно применить теорему 3:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = hf(x_{i-1}) + f'(c_i) \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1}) dx = hf(x_{i-1}) + f'(c_i) \frac{h^2}{2}.$$

Сложив левые и правые части при $i = 1, 2, \dots, n$ и воспользовавшись теоремой 2, получим:

$$\int_a^b f(x) dx = h(f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})) + \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot \frac{f'(c_1) + \dots + f'(c_n)}{n}.$$

Среднее арифметическое значение функции f' находится между наименьшим и наибольшим значениями на $[a, b]$ и равно $f'(c)$ для некоторого $c \in [a, b]$ (по теореме 1). Следовательно,

$$R_n = \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot f'(c) (c \in [a, b]).$$

Таким образом, получили оценку погрешности квадратурной формулы прямоугольника.

Формула трапеции

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, каждая длиной $h = \frac{b-a}{n}$, и найдем $y_i = f(x_i) (i = 0, 1, \dots, n)$. На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ функцию $f(x)$ заменим по первой интерполяционной формуле Ньютона через конечные разности:

$$f(x) \approx y_{i-1} + t\Delta y_{i-1}, \text{ где } t = \frac{x-x_{i-1}}{h}, \Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}.$$

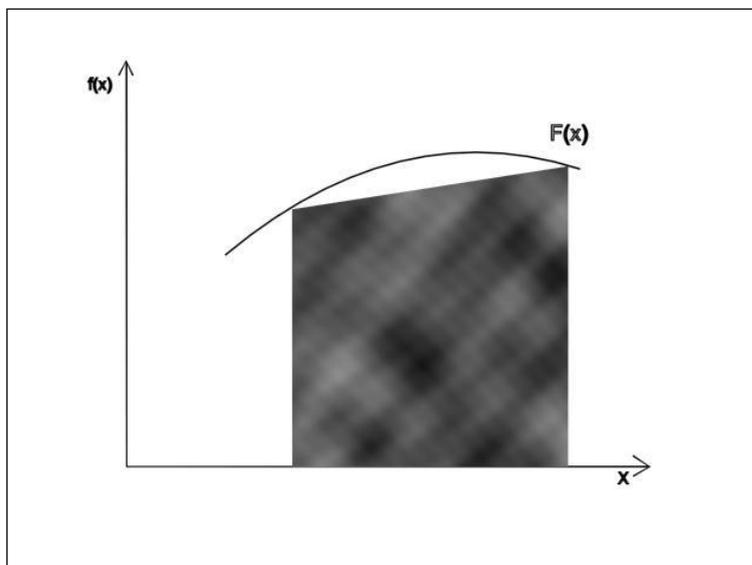
Тогда

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h \int_0^1 (y_{i-1} + t\Delta y_{i-1}) dt \approx h \frac{y_{i-1} + y_i}{2}.$$

Складывая почленно приближенные равенства при $i = 0, 1, \dots, n$, в силу аддитивности интеграла получим формулу трапеции:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right).$$

На рисунке показан геометрический смысл этой формулы. Вместо криволинейной трапеции рассматривается фигура, составленная из прямолинейных трапеций с основаниями y_i, y_{i+1} и высотой h .



Оценка погрешности

Теорема 5. Если $f''(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для квадратурной формулы трапеции формула остаточного члена имеет вид:

$$R_n \leq M_2 \frac{(b-a)^3}{12n^2}, \quad \text{где} \quad M_2 = \max_{[a,b]} |f''(x)|.$$

Доказательство:

Пусть $[x_{i-1}, x_i]$ – произвольный отрезок из разбиения $[a, b]$ на n равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{n}$. Пользуясь формулой остаточного члена для полиномиального интерполирования, получим:

$$f(x) = h \frac{y_{i-1} + y_i}{2} + \frac{f''(c_i^*)}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i), \quad \text{где } c_i^* \in [x_{i-1}, x_i].$$

Проинтегрируем левую и правую часть на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Так как

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})(x - x_i) dx = -\frac{h^3}{6},$$

получим

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = h \frac{y_{i-1} + y_i}{2} - \frac{f''(c_i)}{12} h^3, \quad (c_i \in [x_{i-1}, x_i]).$$

Просуммировав левые и правые части равенств при $i=0, 1, \dots, n$, получим оценку погрешности для формулы трапеции:

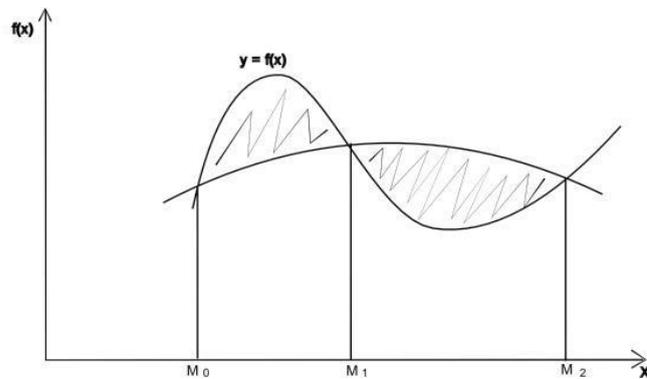
$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c) \quad (c \in [a, b]).$$

Формула Симпсона

Для приближения подынтегральной функции $f(x)$ на частичном отрезке используется квадратичное интерполирование.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$, каждая длиной $h = \frac{b-a}{n}$, и найдем $y_i = f(x_i)$ ($i = 0, 1, \dots, n$), но теперь возьмем четное число

n .



Тогда можно рассматривать «сдвоенные» отрезки $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ с тремя известными узлами и на них функцию f заменять первым интерполяционным многочленом Ньютона второй степени:

$$f(x) \approx y_{i-1} + t\Delta y_{i-1} + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_{i-1},$$

где $t = \frac{x - x_{i-1}}{h}, \Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}, \Delta^2 y_{i-1} = y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}.$

Проинтегрируем выражения:

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (y_{i-1} + t\Delta y_{i-1} + \frac{t(t-1)}{2} \Delta^2 y_{i-1}) dx &= h \int_0^1 (y_{i-1} + t\Delta y_{i-1} + \frac{t^2 - t}{2} \Delta^2 y_{i-1}) dt = \\ &= h(2y_{i-1} + 2\Delta y_{i-1} + \frac{1}{3} \Delta^2 y_{i-1}) = \frac{h}{3} (y_{i-1} + 4y_i + y_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx. \end{aligned}$$

Результатом суммирования приближенных равенств будет формула Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \dots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

При $n=2$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

интерполирование параболой по трем точкам.

Формула Симпсона значительно точнее предыдущих квадратурных формул, оценивая погрешности, можно показать, что остаточный член:

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(IV)}(\eta), \quad a \leq \eta \leq b$$

Теорема 6. Если производная четвертого порядка f – подынтегральной функции непрерывна на $[a, b]$, тогда:

$$R_n \leq M_4 \frac{(b-a)^5}{180n^4}, \quad \text{где } M_4 = \max_{[a,b]} |f^{(IV)}(x)|.$$

Если отыскание четвертой производной подынтегральной функции затруднительно, то оценку погрешности вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ по формуле Симпсона можно получить по методу удвоения шага вычислений.

Полагая $n = 4k$, вычисляют приближенное значение данного интеграла по формуле Симпсона для шага $h = (b-a)/(4k)$. Погрешность определяется формулой:

$$\delta \approx (I_1 - I_2)/15,$$

где I_1 – найденное значение интеграла при шаге $h = (b-a)/(4k)$, I_2 – найденное значение интеграла при шаге $h = (b-a)/(2k)$.

Методика вычисления интеграла с заданной точностью

1. Для правой части формулы оценки погрешности вычислить константу $M_p = \max_{[a,b]} |f^{(p)}(x)|$. С этой целью необходимо продифференцировать функцию p раз и вычислить ее максимальное значение на отрезке $[a,b]$, где p - порядок аппроксимации квадратурной формулы.

2. Из условия $\frac{M_p}{A}(b-a) \cdot h^p \leq \varepsilon$, где $\frac{M_p}{A}$ - константа, входящая в правую часть оценки погрешности, определить величину h .

3. По значению h вычислить n – количество разбиений отрезка $[a,b]$ и сформировать сеточное представление функции $y=f(x)$, в точках $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$.

4. Поставить сеточную функцию в правую часть соответствующей квадратурной формулы и вычислить искомое значение. При этом значение интеграла в силу справедливости оценки удовлетворяет заданной точности.

Лабораторный практикум

Целью лабораторного практикума является усвоение и закрепление теоретического материала, приобретение практических навыков приближенного решения математических задач с помощью соответствующих численных методов. Приведены семь лабораторных работ, охватывающих все разделы изучаемого курса. Их можно выполнять в компьютерном зале или самостоятельно.

Лабораторная работа №1

Методы решения нелинейных уравнений

Необходимые сведения из теории (см. гл.2-3)

1. Постановка задачи.
2. Этапы приближенного решения уравнений с одним неизвестным.
3. Отделение корней.
4. Условия применения метода решения нелинейных уравнений.
5. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом половинного деления.
6. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом хорд.
7. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом простых итераций.
8. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом Ньютона и его модификацией.
9. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом секущих - хорд.

Задание

Отделите корни заданного уравнения, согласно варианту из табл.1, и уточните их одним из методов с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$. Решить уравнения методом половинного деления, методом Ньютона и методом простых итераций.

Таблица 1. Уравнения по вариантам

1	$\cos(x + 0.5) - x = 2$	9	$\sin(x + 1) - x - 1 = 0$
2	$\sin x - 2x = 1$	10	$2x + \operatorname{tg}(x) = 0$
3	$\cos x - (x - 1)^2 = 0$	11	$(x - 6)^2 + \ln x = 0$
4	$x \ln(x + 1) = 1$	12	$x \ln(x + 2) = 2$
5	$2x + \cos(x) = 0$	13	$2 \ln x - 0.5x + 1 = 0$
6	$x^2 + e^x = 2$	14	$x^2 - 3 \sin x = 0$
7	$5 \sin x = x$	15	$\sin(x + 1) = 0.2x$
8	$x \ln(x + 2) = 1$	16	$\cos(x + 0.3) = x^2$

Порядок выполнения работы

Отделите графически все корни уравнения.

1. Составьте методику решения нелинейного уравнения для метода половинного деления, метода Ньютона, метода простых итераций.
2. Составьте программу уточнения корня методом половинного деления с точностью до ϵ , выводящую результаты в таблицу:

N	a_n	b_n	$b_n - a_n$
...

где a_n b_n – концы вложенных отрезков.

3. Составьте программу уточнения корня методом Ньютона и методом простых итераций с точностью до ϵ , выводящую результаты в таблицу:

N	x_n	x_{n+1}	$x_{n+1} - x_n$
...

4. Найдите все корни уравнения и выпишите их с верными знаками.
5. Сравните методы решения нелинейных уравнений по скорости сходимости.

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Этапы решения нелинейных уравнений.
3. Аналитический способ отделения корней уравнения.
4. Геометрический способ отделения корней уравнения.
5. Достоинства и недостатки метода половинного деления.
6. Сходимость метода половинного деления и хорд, оценка скорости сходимости методов.
7. Достоинства и недостатки метода Ньютона.
8. Сходимость метода Ньютона, оценка скорости сходимости метода.
9. Достоинства и недостатки метода простой итерации.
10. Сходимость метода простых итераций, оценка скорости сходимости метода.
11. Геометрическая интерпретация методов.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом половинного деления.

И ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом Ньютона.

И ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом простой итерации.

И ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №2

Методы решения нелинейных уравнений

Необходимые сведения из теории (см. гл.2-3)

1. Постановка задачи.
2. Этапы приближенного решения уравнений с одним неизвестным.
3. Отделение корней.
4. Условия применения метода решения нелинейных уравнений.
5. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом половинного деления.
6. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом хорд.
7. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом простых итераций.
8. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом Ньютона и его модификацией.
9. Алгоритм решения нелинейного уравнения методом секущих - хорд.

Задание

Отделите корни заданного уравнения, согласно варианту из табл.2, и уточните их одним из методов с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$. Решите уравнения методом половинного деления, методом Ньютона и методом простых итераций.

Таблица 2. Уравнения по вариантам

1	$\cos(x + 0.5) - x = 2$	13	$\sin(x + 1) - x - 1 = 0$
2	$\sin x - 2x = 1$	14	$2x + \operatorname{tg}(x) = 0$
3	$\cos x - (x - 1)^2 = 0$	15	$(x - 6)^2 + \ln x = 0$
4	$x \ln(x + 1) = 1$	16	$x \ln(x + 2) = 2$
5	$2x + \cos(x) = 0$	17	$2 \ln x - 0.5x + 1 = 0$
6	$x^z + e^x = 2$	18	$x^2 - 3 \sin x = 0$
7	$5 \sin x = x$	19	$\sin(x + 1) = 0.2x$
8	$x \ln(x + 2) = 1$	20	$\cos(x + 0.3) = x^2$
9	$2 \cos x - x = 2$	21	
10	$\cos x - (x - 2)^3 = 0$	22	
11	$x \ln(x - 1) = 1$	23	
12	$2x + \cos(2x) = 0$	24	

Порядок выполнения работы

1. Отделите графически все корни уравнения.

2. Составьте методику решения нелинейного уравнения для метода половинного деления, метода Ньютона, метода простых итераций.
3. Составьте программу уточнения корня методом половинного деления с точностью до ε , выводящую результаты в таблицу:

N	a_n	b_n	$b_n - a_n$
...

где a_n b_n – концы вложенных отрезков.

4. Составьте программу уточнения корня методом Ньютона и методом простых итераций с точностью до ε , выводящую результаты в таблицу:

N	x_n	x_{n+1}	$x_{n+1} - x_n$
...

5. Найдите все корни уравнения и выпишите их с верными знаками.
6. Сравните методы решения нелинейных уравнений по скорости сходимости.

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Этапы решения нелинейных уравнений.
3. Аналитический способ отделения корней уравнения.
4. Геометрический способ отделения корней уравнения.
5. Достоинства и недостатки метода половинного деления.
6. Сходимость метода половинного деления и хорд, оценка скорости сходимости методов.
7. Достоинства и недостатки метода Ньютона.
8. Сходимость метода Ньютона, оценка скорости сходимости метода.
9. Достоинства и недостатки метода простой итерации.
10. Сходимость метода простых итераций, оценка скорости сходимости метода.
11. Геометрическая интерпретация методов.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом половинного деления.

И ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом Ньютона.

И ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (25 баллов)

Написать программу решения нелинейных уравнений методом простой итерации.

И ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №3

Методы решения систем линейных уравнений

Необходимые сведения из теории (см. гл.4)

1. Постановка задачи.
2. Прямые методы решения систем линейных уравнений.
3. Итерационные методы решения систем линейных уравнений.
4. Условия и скорости сходимости итерационных методов.

Задание

Из табл.3 выбрать данные для системы линейных уравнений. Найти решение этой системы прямым и приближенным методами с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$. Варианты нечетные решить систему уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента и методом простых итераций, четные варианты – методом Холесского и методом простых итераций.

Исходная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} Mx_1 - 0.04x_2 + 0.21x_3 - 1.8x_4 = -1.24, \\ 0.25x_1 - 1.23x_2 + Nx_3 - 0.09x_4 = P, \\ -0.21x_1 + Nx_2 + 0.8x_3 - 0.13x_4 = 2.56, \\ 0.15x_1 - 1.31x_2 + \quad \quad \quad + Px_4 = M. \end{cases}$$

Таблица 3. Данные для исходной системы линейных уравнений по вариантам

	M	N	P		M	N	P
1	-0.77	0.16	1.12	9	-1.13	0.14	0.87
2	0.93	0.07	-0.84	10	0.91	-0.23	-1.04
3	-1.14	-0.17	0.95	11	-0.88	0.1	0.91
4	1.08	0.22	-1.16	12	1.25	-1.14	-1.09
5	0.87	-0.19	1.08	13	0.79	0.18	-0.86
6	-1.21	0.2	0.88	14	-1.19	-0.21	1.21
7	1.09	-0.16	0.84	15	0.89	0.12	-1.15
8	0.89	0.08	-1.21	16	1.08	0.22	-1.16

Порядок выполнения работы

1. Составьте методику решения системы линейных уравнений прямым методом согласно варианту.
2. Составить программу решения системы уравнений, вывести результаты прямого и обратного хода метода.
3. Преобразовать систему к каноническому виду с выполнением условия сходимости итерационной последовательности.

4. Составьте методику решения системы уравнений методом простых итераций.
5. Составьте программу решения системы уравнений с точностью до ε , выводящую результаты в таблицу:

N	x_1	x_2	x_3	x_4	ε_n
...

6. Найдите все корни системы уравнений и выпишите их с верными знаками.

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Норма вектора. Норма матрицы.
3. Пример нормированных пространств.
4. Норма матрицы, выраженная через элементы матрицы.
5. Прямые методы решения линейных систем уравнений.
6. Итерационные методы решения линейных систем уравнений.
7. Сравнение прямых и итерационных методов.
8. Условие хорошей обусловленности прямых методов.
9. Исключения по симплекс – правилу.
10. Условие сходимости метода простой итерации.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу решения систем линейных уравнений методом Гаусса или Холесского и методом простой итерации. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (50 баллов)

Написать программу решения систем линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента по столбцу и методом простой итерации. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (75 баллов)

Написать программу решения систем линейных уравнений методом Гаусса с выбором главного элемента и методом простой итерации. Ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №4

Нахождение собственных значений матрицы

Необходимые сведения из теории (см. гл. 5)

1. Постановка задачи.
2. Алгоритм нахождения наибольшего собственного значения матрицы.

3. Алгоритм нахождения второго наибольшего собственного значения матрицы.
4. Метод вращений.

Задание

Найти собственные значения матрицы из табл.4 с точностью до $\epsilon=10^{-2}$. Четные варианты найти собственные числа методом вращений, нечетные – методом итераций.

Таблица 4. Матрицы по вариантам

1	5 1 2 1 4 1 2 1 3	6	1.6 0.7 0.8 0.7 1.6 0.3 0.8 0.3 1.6	11	1.6 1.2 0.4 1.2 0.5 1.0 0.4 1.0 0.8
2	4 1 0 1 2 1 0 1 1	7	2.5 1 1.5 1 1.3 1.5 1.5 1.5 1.5	12	2.1 1 1.1 1 2.6 1.1 1.1 1.1 3.1
3	2 3 5 3 1 6 5 6 2	8	1.7 0.8 0.9 0.8 0.7 0.3 0.9 0.3 1.7	13	1.3 0.4 0.5 0.4 1.3 0.3 0.5 0.3 1.3
4	1.2 2.0 0.5 2.0 1.4 1.7 0.5 1.7 0.3	9	4 2 2 2 5 1 2 1 6	14	2.2 1 2.2 1 2.7 1.2 2.2 1.2 3.2
5	2.4 1 1.4 1 2.3 1.4 1.4 1.4 3.4	10	2 3 5 3 1 6 5 6 2	15	1.4 0.5 0.6 0.5 1.4 0.3 0.6 0.3 1.4
16	2.3 1 1.3 1 2.8 1.3 1.3 1.3 3.3				

Порядок выполнения работы

1. Составьте методику нахождения собственных значений матрицы.
2. Составьте программу нахождения собственных значений матрицы методом итераций, выводящую результаты в таблицу:

N	λ_n	λ_{n+1}	$ \lambda_{n+1} - \lambda_n $
...

3. Составьте программу с выводом промежуточных матриц, полученных методом вращений.
4. Найдите все собственные значения матрицы и выпишите их с верными знаками.

Контрольные вопросы:

1. Характеристическое уравнение.

2. Собственные значения матрицы.
3. Собственные вектора матрицы.
4. След матрицы.
5. Прямой способ нахождения собственных значений.
6. Основные свойства собственных значений.
7. Нахождения большего по модулю собственного значения.
8. Для каких матриц применим метод вращения?
9. Контроль правильности вычислений.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу нахождения наибольшего собственного значения. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (50 баллов)

Написать программу нахождения собственных значений методом вращений. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (75 баллов)

Написать программу написать нахождения собственных значений методом дефляции или методом RQ-разложения. Ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №5

Методы решения систем нелинейных уравнений

Необходимые сведения из теории (см. гл.6)

1. Постановка задачи.
2. Условия применения метода для решения системы нелинейных уравнений.
3. Метод Ньютона.
4. Метод простых итераций.

Задание

Решите систему нелинейных уравнений методом Ньютона и методом простых итераций с точностью до $\varepsilon=10^{-3}$.

Порядок выполнения работы

1. Выберите начальное приближение, удовлетворяющее условию сходимости методов.
2. Составьте методику решения системы уравнений методом Ньютона и методом простой итерации.
3. Составьте программу решения системы нелинейных уравнений с точностью до ε , выводящую результаты в таблицу:

N	x_1^n	x_2^n	ε_n
...

4. Найдите все корни уравнения и выпишите их с верными знаками.
5. Сравните скорости сходимости метода Ньютона и метода простых итераций.

Таблица 5. Системы нелинейных уравнений по вариантам

1	$\begin{cases} 2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1 x_2^3 - x_2 - 4 = 0; \end{cases}$	9	$\begin{cases} \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1, \\ 2x_1 + \cos x_2 = 2; \end{cases}$
2	$\begin{cases} 2x_1 + \operatorname{tg}(x_1 x_2) = 0, \\ (x_2^2 - 6)^2 + \ln x_1 = 0; \end{cases}$	10	$\begin{cases} \operatorname{tg}(x_1 x_2 + 0.2) = x_1^2, \\ x_1^2 + 2x_2^2 = 1; \end{cases}$
3	$\begin{cases} x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0, \\ -2x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0; \end{cases}$	11	$\begin{cases} \cos(x_1 - 0.5) - x_2 = 2, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 1; \end{cases}$
4	$\begin{cases} \sin(x_1 + 1) - x_2 = 1.2, \\ 2x_1 + \cos x_2 = 2; \end{cases}$	12	$\begin{cases} \cos(x_1 + 0.5) + x_2 = 1, \\ \sin x_2 - 2x_1 = 2; \end{cases}$
5	$\begin{cases} \cos(x_2 - 2) + x_1 = 0, \\ \sin(x_1 + 0.5) - x_2 = 1.2; \end{cases}$	13	$\begin{cases} \sin x_1 + 2x_2 = 1.6, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 1; \end{cases}$
6	$\begin{cases} \sin(x_2 - 1) + x_1 = 1.3, \\ -\sin(x_1 + 1) + x_2 = 0.8; \end{cases}$	14	$\begin{cases} \cos(x_2 + 0.5) + x_1 = 0.8, \\ \sin x_1 - 2x_2 = 1.6; \end{cases}$
7	$\begin{cases} \sin(x_2 + 0.5) - x_1 = 1, \\ \cos(x_1 - 2) + x_2 = 0; \end{cases}$	15	$\begin{cases} \cos x_2 + x_1 = 1.5, \\ -\sin(x_1 - 0.5) + 2x_2 = 1; \end{cases}$
8	$\begin{cases} \sin x_1 + 2x_2 = 2, \\ \cos(x_2 - 1) + x_1 = 0.7; \end{cases}$	16	$\begin{cases} \operatorname{tg}(x_1 x_2 + 0.4) = x_1^2, \\ 0.6x_1^2 + 2x_2^2 = 1, x_1 > 0, x_2 > 0. \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Матрица Якоби.
3. Геометрический способ отделения корней. Выбор начального приближения.
4. Условие сходимости метода Ньютона, решение нелинейных систем уравнений.
5. Достоинства и недостатки метода Ньютона.
6. Нахождение обратной матрицы.
7. Условие сходимости метода простой итерации решение нелинейных систем уравнений.
8. Достоинства и недостатки метода простой итерации.
9. Метод Зейделя.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом простой итерации. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (25 баллов)

Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (50 баллов)

Написать программу решения систем нелинейных уравнений методом Ньютона и методом Зейделя. Ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №6

Полиномиальное интерполирование

Необходимые сведения из теории (см. гл.7)

1. Общие постановка задачи полиномиального интерполирования.
2. Оценка погрешности интерполирования.
3. Интерполяционный многочлен Лагранжа.
4. Конечные разности.
5. Разностные отношения.
6. Интерполяционные многочлены Ньютона.

Задание

Восполнить значения функции заданной таблично (табл.6), построив полиномы Лагранжа и Ньютона. Найти значение функции в заданных точках по вариантам в табл.7.

Таблица 6. Значения табличной функции по вариантам

варианты	x_i	f_i	варианты	x_i	f_i
1-4	0.43	1.63597	9-12	0.68	0.80866
	0.48	1.73234		0.73	0.89492
	0.55	1.87686		0.80	1.02964
	0.62	2.03345		0.88	1.20966
	0.70	2.22848		0.93	1.34087
	0.75	2.35973		0.99	1.52368
5-8	0.35	2.73951	13-16	0.02	1.02316
	0.41	2.30080		0.08	1.09590
	0.47	1.96864		0.12	1.14725
	0.51	1.78776		0.17	1.21483
	0.56	1.59502		0.23	1.30120
	0.64	1.34310		0.30	1.40976

Таблица 7. Данные промежуточных значений полиномов по вариантам

	a	b		a	b
1	0.55	0.49	9	0.80	0.70
2	0.75	0.58	10	0.88	0.85
3	0.62	0.65	11	0.99	0.95

4	0.70	0.72	12	0.93	0.90
5	0.47	0.45	13	0.12	0.15
6	0.51	0.53	14	0.17	0.20
7	0.64	0.61	15	0.23	0.10
8	0.56	0.49	16	0.30	0.25

Порядок выполнения работы

1. Составить методику построения полиномов Лагранжа и Ньютона.
2. Составить программу вычисления приближенного значения из табл.7 полинома Лагранжа в точках a, b .
3. Составить программу вычисления приближенного значения из табл.7 полинома Ньютона в точках a, b .
4. Определить погрешность.

Контрольные вопросы:

1. Постановка задачи.
2. Полиномиальное интерполирование.
3. Оценка погрешности полиномиального интерполирования.
4. Конечные разности.
5. Разделенные разности.
6. Первая форма полинома Ньютона. Оценка погрешности.
7. Вторая форма полинома Ньютона. Оценки погрешности.
8. Интерполяционный многочлен Ньютона на неравномерной сетке.
9. Сравнение полиномов Лагранжа и Ньютона.

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу построения полинома Лагранжа. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (25 баллов)

Написать программу построения полинома Ньютона на равномерной сетке. Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (25 баллов)

Написать программу построения полинома Ньютона на неравномерной сетке. Ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №7

Специальные методы интерполирования

Необходимые сведения из теории (см. гл.8, 9)

1. Общая постановка задачи приближения табличных функций.
2. Приближение по методу наименьших квадратов.
3. Приближение по методу кубических интерполяционных сплайнов.

Задание

По заданной табл.8 значений функции построить приближения по методу наименьших квадратов и с помощью кубических интерполяционных сплайнов. Найти значения в заданных точках.

Порядок выполнения работы

1. Составить методику построения функции по методу наименьших квадратов.
2. Составить программу вычисления приближенного по методу наименьших квадратов.
3. Составить методику построения интерполяционного кубического сплайна.
4. Составить программу вычисления приближенного значения в заданной точке интерполяционного кубического сплайна.
5. Определить значения полученных функций в заданных, в табл.9, точках a, b .

Таблица 8. Табличные значения функции по вариантам

Вариант							
1	X	0.1	0.3	0.4	0.6	0.7	0.8
	Y	0.25	0.5	0.65	0.55	0.42	0.3
2	X	-2.0	-1.8	-1.7	-1.6	-1.4	-1.3
	Y	5.1	4	3.2	3.9	4.8	6.1
3	X	1.3	1.4	1.6	1.7	2	2.1
	Y	2.4	1.8	1.2	1.4	2.3	2.9
4	X	0.4	0.7	0.9	1.1	1.4	1.6
	Y	0.15	0.83	1.65	1.52	0.9	0.31
5	X	2.0	2.5	2.7	2.9	3.2	3.4
	Y	-0.11	-0.81	-1.05	-0.9	-0.23	-0.05
6	X	-0.5	-0.3	-0.2	0.1	0.4	0.8
	Y	2.3	1.2	1.05	0.9	1.2	2.1
7	X	1.1	2	2.5	2.9	3.5	4
	Y	0.32	0.05	-0.1	-0.12	0.12	0.27
8	X	0.3	0.5	0.8	0.9	1.2	1.4
	Y	1.1	0.6	0.4	0.38	0.65	0.9
9	X	-0.4	-0.1	0.1	0.2	0.5	0.7
	Y	1.3	3.5	4.2	4	2.8	1.6
10	X	1.2	1.4	1.5	1.6	1.8	2.1
	Y	0.9	3.3	4.1	3.9	2.8	1.1
11	X	-0.9	-0.8	-0.5	-0.4	-0.2	-0.1
	Y	0.15	0.61	1.2	1.1	0.7	0.22
12	X	-1	-0.8	-0.7	-0.4	-0.3	-0.2
	Y	1.4	0.9	0.65	0.51	0.78	1.3

13	X	0.2	0.3	0.5	0.7	0.9	1.2
----	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----

	У	-2.1	-0.5	1.15	1.3	-0.6	-2.7
14	Х	2.2	2.5	2.6	2.8	3.1	3.2
	У	1.7	0.8	0.52	0.3	0.91	1.5
15	Х	-0.3	-0.1	0.2	0.3	0.7	0.9
	У	-2.1	1.3	3	2.4	-2.3	-8

Таблица 9. Данные по вариантам

	<i>a</i>	<i>b</i>		<i>a</i>	<i>B</i>
1	0.35	0.49	9	0	0.40
2	-1.75	-1.58	10	1.38	1.85
3	1.62	1.85	11	-0.85	-0.6
4	0.75	1.25	12	-0.6	-0.5
5	2.47	3.15	13	0.4	0.6
6	-0.55	0.53	14	2.37	2.80
7	1.64	2.61	15	0	0.10
8	0.56	0.69			

Контрольные вопросы:

1. Общая постановка задачи приближения табличных функций методом сплайнов.
2. Общая постановка задачи приближения табличных функций методом наименьших квадратов.
3. Особенности приближения по методу наименьших квадратов степенными функциями.
4. Особенности приближение по методу кубических интерполяционных сплайнов.
5. В чем преимущество и недостатки методов?
6. Требуется ли совпадения в узлах значений интерполирующей функции с заданной в узлах интерполяции?

Уровни заданий

Уровень 1. (50 баллов)

Написать программу построения кубического интерполяционного сплайна.

Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (50 баллов)

Написать программу построения приближения функции методом наименьших квадратов. Ответить на контрольные вопросы.

Лабораторная работа №8

Численное интегрирование

Необходимые сведения из теории (см. гл.10)

1. Общие интерполяционные квадратурные формулы.

2. Простейшие квадратурные формулы.
3. Строгая оценка погрешностей этих формул.
4. Определение шага разбиения отрезка интегрирования, при котором квадратурная формула обеспечивает заданную точность.

Задание

Вычислите значение интеграла из табл.10 по вариантам.

Таблица 10. Интегралы по вариантам

1	$\int_0^{\pi/2} \cos(1-2x)dx,$	6	$\int_0^{1.5} (1+x+x^4)dx,$	11	$\int_{-1}^1 (x-e^{2x})dx,$
2	$\int_0^{1.5} \cos(x)dx,$	7	$\int_0^3 e^{-3x}dx,$	12	$\int_{-1}^1 (3x+\cos x)dx,$
3	$\int_0^2 e^{2x}dx,$	8	$\int_0^2 \ln(2x+3)dx,$	13	$\int_0^2 \sin(x+1)dx,$
4	$\int_0^2 \sqrt{1+xdx},$	9	$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos 3xdx,$	14	$\int_1^{\pi} (\sin x+x^2)dx,$
5	$\int_{-1}^2 e^{x/2}dx,$	10	$\int_0^{\pi/2} \sin 2xdx,$	15	$\int_0^3 \sqrt{x-1}dx,$

Порядок выполнения работы

1. Составить методику решения.
2. Составить программу вычисления интеграла по формуле трапеции при $n=3$ и $n=6$, вычислить погрешность вычисления.
3. Составить программу вычисления интеграла по формуле Симпсона с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.
4. Сравните результаты.

Контрольные вопросы:

1. Общие интерполяционные квадратурные формулы.
2. Формулы Ньютона-Котеса.
3. Простейшие квадратурные формулы.
4. Оценка погрешностей простейших квадратурных формул.
5. Как определить шаг разбиения отрезка интегрирования, при котором квадратурная формула обеспечивает заданную точность?

Уровни заданий

Уровень 1. (25 баллов)

Написать программу вычисления интеграла по формуле прямоугольника при $n=3$ и $n=6$.

Составить программу вычисления интеграла по формуле прямоугольника с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.

Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 2. (40 баллов)

Написать программу вычисления интеграла по формуле трапеции при $n=3$ и $n=6$.

Составить программу вычисления интеграла по формуле трапеции с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.

Ответить на контрольные вопросы.

Уровень 3. (50 баллов)

Написать программу вычисления интеграла по формуле Симсона $n=3$ и $n=6$.

Написать программу вычисления интеграла по формуле Симпсона с точностью до $\varepsilon=10^{-4}$.

Ответить на контрольные вопросы.

Задания для практических занятий

Задание № 1

1. Отделить корни уравнения аналитическим методом. Решить уравнение методом простой итерации. Выполнить первые 2 шага итерации. Составить программу.

$$x^3 - 2x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$4x^3 - 4x^2 + x - 4 = 0.$$

2. Решить систему линейных уравнений методом Зейделя. Выполнить первые 2 шага итерации.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \\ 10 & 1 & -3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

3. Отделить корни графическим методом в уравнении:

$$\cos(x + 0.5) - x = 2,$$

$$\sin(x + 1) = 0.2x.$$

4. Решить систему нелинейных уравнений методом Ньютона.

$$\begin{cases} 2x_1^3 - x_2^2 - 1 = 0, \\ x_1 x_2^3 - x_2 - 4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2^2 + 1 = 0, \\ -x_1^2 + 2x_2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Задание № 2

Дана таблица значений функции $f(x)$:

x	2	4	5	10
f(x)	3	7	3	0

1. Построить полином Лагранжа. Вычислить значение полинома Лагранжа в точке $x=1.5$, $f(1.5)$ -?

2. Построить полином Ньютона через разделенные разности. Вычислить значение полинома в точке $x=3$, $f(3)$ -?

3. Составить подробную методику интерполирования по методу кубического сплайна с граничными условиями: $y_0''=0$, $y_n''=1$. Вычислить значение полученной функции в точке $x=5/2, f(5/2)$ -?

4. Построить методом наименьших квадратов аппроксимирующую функцию. Вычислить значение функции в точке $x=2.5, f(2.5)$ -?

5. Составить подробную методику вычисления интеграла по формуле Симпсона при $n=8$: $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx$.

Список литературы

1. Колдаев, В.Д. Численные методы и программирование [Электронный ресурс]: Учеб. пособие [текст]/ В.Д. Колдаев. - Электрон. дан.. - М.: ФОРУМ, ИНФРА-М, 2009. - 336 с.
2. Киреев В.И., Пантелеев А.В. Численные методы в примерах и задачах: Учебное пособие. – М.: Изд-во МАИ, 2000. – 376 с.
3. Исаков В.Н. Элементы численных методов: Учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2003. – 192 с.
4. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс): Учеб. пособие: Для вузов. – М.: Изд-во МФТИ, 2000. – 224 с.
5. Щуп Т.Е. Прикладные численные методы в физике и технике. М.: Высшая школа, 1980. – 400 с.
6. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 400 с.

Методическую литературу можно найти по данной дисциплине на сайтах:

http://www.uchites.ru/chislennye_metody/posobie

http://www.vargin.mephi.ru/book_pc_chisl.html

<http://www.studfiles.ru/dir/cat14/subj94/page2.html>