



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Рубцовский индустриальный институт (филиал)
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»
(РИИ АлтГТУ)

ДЕНИСЕНКО А.А.

МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РАСЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

**Методические разработки по курсам «Основы технической механики»,
«Сопротивление материалов», «Строительная механика»
для студентов направления подготовки
08.03.01 «Строительство» всех форм обучения**

Рубцовск 2021

УДК 539.3

Денисенко А.А. Методы и способы расчета перемещений в упругих системах: методические разработки по курсам «Основы технической механики», «Сопротивление материалов», «Строительная механика» для студентов направления подготовки 08.03.01 «Строительство» всех форм обучения / А.А.Денисенко; Рубцовский индустриальный институт.- Рубцовск, 2021. – 26с.

Содержат указания по самостоятельному изучению студентами направления подготовки «Строительство» разделов дисциплин «Основы технической механики», «Сопротивление материалов», «Строительная механика». Даны основные теоретические сведения по расчету перемещений в упругих системах с использованием интегралов Мора, теоремы Кастилиано. Приведены примеры практического применения методов.

Рассмотрены и одобрены
на заседании каф. СиМ
РИИ АлтГТУ
Протокол № 8 от 26.04. 2021г.

Рецензент:

И.о. заведующего кафедрой СиМ
к.т.н. О.А.Михайленко

1. Работа нагрузки на деформациях, вызванных ею

Предполагаем в дальнейшем, что имеет место упругая работа материала, т.е. справедливость закона Гука.

1.1. Растяжение и сжатие

Рассмотрим стержень, нагруженный силой P , постепенно статически возрастающей от нуля до какой-то конечной величины. Зависимость между удлинением стержня и силой представлена диаграммой растяжения (рис.1). Закон Гука справедлив до точки В на диаграмме (сила $P_{уп}$) и имеет вид

$$\Delta l = \frac{P \cdot l}{EF} \quad (1)$$

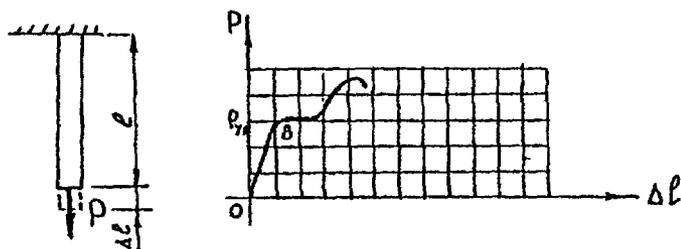


Рис.1

Пусть сила приняла значение P . Удлинение стержня определим по формуле (1). Точка приложения силы (конец стержня) опустилась на величину Δl . Следовательно, сила совершила работу на этом перемещении. Перемещение (деформация Δl) менялось от нуля до Δl , следуя за переменной силой P .

Если к промежуточному значению силы P добавилось приращение dP , то Δl получит приращение $d(\Delta l)$. Из-за малости dP можно полагать, что на $d(\Delta l)$ "работала" постоянная (на данном перемещении!) сила P . Эту работу можно выразить следующей формулой:

$$dA = P \cdot d(\Delta l) = P \cdot \frac{dP \cdot l}{EF} = \frac{P \cdot l}{EF} \cdot dP$$

Если сила P изменилась от нуля до своего окончательного значения P , то работа, совершенная ею на деформации Δl , выражается следующим образом:

$$A = \int_0^P (\rho) l \cdot dA = \int_0^P (\rho) \frac{P \cdot l}{EF} \cdot dP \quad \text{или}$$

$$A = \frac{P^2 l}{2EF}; \quad A = \frac{1}{2} P \cdot \Delta l \quad (2)$$

1.2. Кручение

Рассмотрим стержень, скручиваемый парой сил $M_{кр}$. Зависимость между углом закручивания при чистом кручении однородного стержня постоянного диаметра и скручивающей парой может быть выражена законом Гука

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p} \quad (3)$$

Закон Гука справедлив до точки В на диаграмме кручения [1], представленной на рис.2.

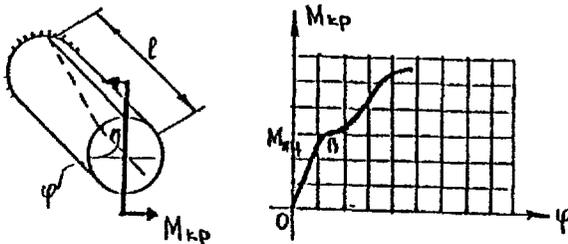


Рис. 2

Очевидно, повторив рассуждения предыдущего пункта, получим следующие выражения для работы момента $M_{кр}$ на угловом перемещении φ , этим моментом вызванном:

$$A = \frac{M_{кр}^2 \cdot l}{2G \cdot J_p} \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{2} M_{кр} \cdot \varphi. \quad (4)$$

1.3. Чистый изгиб

Рассмотрим стержень, нагруженный изгибающей парой сил с моментом M (рис.3). Как известно [1], приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$w'''' = \frac{M}{EJ}.$$

Проинтегрировав его один раз (постоянная интегрирования будет равна нулю из-за $\vartheta(0)=0$), получим

$$\vartheta(x) = w'(x) = \frac{M \cdot x}{EJ}, \quad \vartheta(l) = \frac{M \cdot l}{EJ}. \quad (5)$$

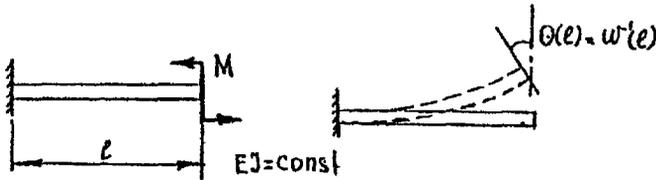


Рис.3

Выражение (5) есть закон Гука при чистом изгибе. Повторив рассуждения, можно сделать вывод о работе изгибающего момента на угловом перемещении, этим моментом вызванном. Итак,

$$A = \frac{M^2 \cdot l}{2EJ} \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{2} M \cdot \vartheta. \quad (6)$$

1.4. Чистый сдвиг

На рис.4 показан плоский элемент, находящийся в условиях чистого сдвига, и диаграмма сдвига.

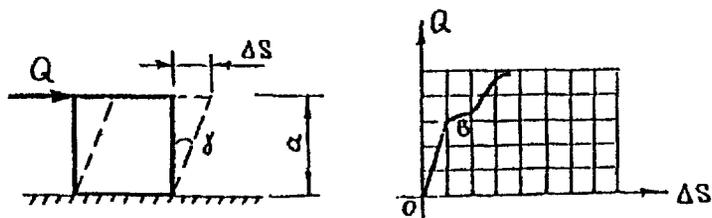


Рис. 4

До точки В на диаграмме справедлив закон Гука в форме

$$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot F} \quad (7)$$

Абсолютный сдвиг следует за переменной силой Q по ее направлению. Повторив рассуждения, получим выражение работы этой силы на сдвиге ΔS .

$$A = \frac{Q^2 \cdot a}{2GF} \quad \text{или} \quad A = \frac{1}{2} Q \cdot \Delta S \quad (8)$$

2. Потенциальная энергия, накопленная стержнем в процессе деформации

2.1. Закон сохранения энергии в применении к упругим системам

В предыдущем параграфе были рассмотрены "чистые" случаи: растяжение (сжатие), кручение, изгиб, сдвиг. В практических расчетах может встретиться любая комбинация этих "базовых" случаев.

Нагрузка, действующая на стержень, вызывает перемещения, следующие за ней по направлению. Поэтому работа нагрузки (внешних сил), (ф.2, 4, 6, 8) – величина положительная. В дальнейшем будем обозначать эту работу A_p .

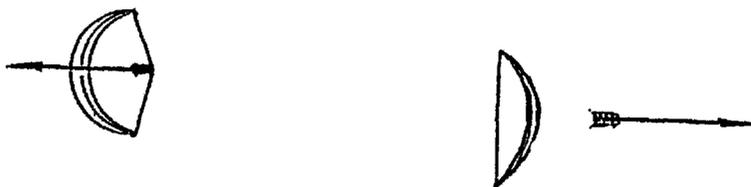
Возникающие в стержне внутренние усилия: продольная сила N , крутящий момент $M_{кр}$, изгибающий момент M , поперечная сила Q – это "ответ" стержня на действие

нагрузки. Эти усилия препятствуют соответственно удлинению, закручиванию, изгибу или сдвигу и, следовательно, совершают отрицательную работу на деформациях, вызванных нагрузкой. Работу внутренних усилий обозначим A .

Очевидно, можно применить закон сохранения энергии, написав $A_p = -A$.

Энергия, которая расходуется на совершение работы A_p , накапливается в стержне в виде потенциальной энергии упругой деформации. Если убрать нагрузку, то стержень восстановит свою первоначальную форму именно за счет этой накопленной внутренней энергии. Обозначим эту внутреннюю энергию буквой U .

Сказанное можно проиллюстрировать следующим простым примером (рис.5).



Совершаем работу A_p ,
накапливаем энергию U

Тратим энергию U , она
переходит в энергию
полета стрелы

Рис. 5

Таким образом, можно полагать, что потенциальная энергия деформации U численно равна работе нагрузки на деформациях, вызванных самой этой нагрузкой

$$U = A_p \quad (9)$$

2.2. Выражение потенциальной энергии через внутренние усилия

На рис.6 показан ломаный стержень, подверженный действию пространственной системы сил, и эпюры внутренних усилий, которые отвечают этой нагрузке.

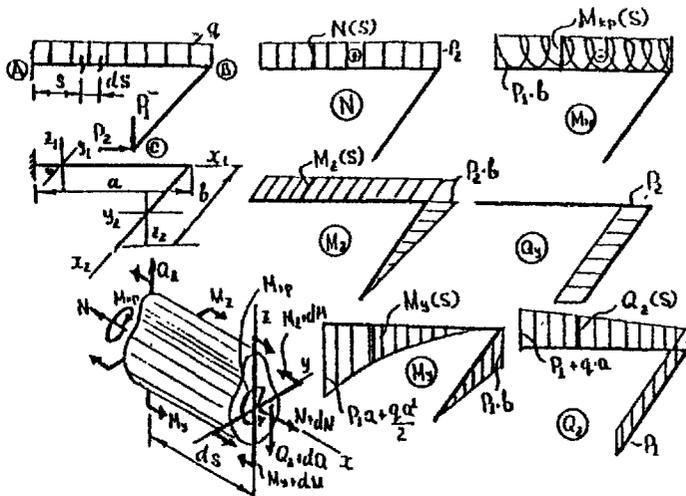


Рис. 6

В каком-то сечении с дуговой координатой S (начало координат в точке А) могут действовать в общем случае шесть внутренних усилий. В рассматриваемом случае на участке АВ - пять ($Q_y=0$), на участке ВС - четыре ($N=0$, $M_{кр}=0$). Если координате дать приращение dS , то все внутренние силы, вообще говоря, тоже получают приращения: dN , $dM_{кр}$ и т.д. В рассматриваемом стержне $dN=0$, $dM_{кр}=0$, $dM_z=0$ (на АВ) и т.д. Обнаружить внутренние усилия на элементе dS можно, вырезав элемент из стержня; очевидно, что для этого вырезанного элемента все внутренние усилия ($N, M_{кр}$ и т.д.) можно рассматривать как нагрузку. Тогда их работу на деформациях этого элемента можно определять по формулам (2,4,6,8). Причем каждое усилие "работает" только на своем направлении. Так, сила $N(S)$ - на удлинении, сила $Q_z(S)$ - на сдвиге вдоль оси Z , крутящий момент - на угле закручивания и т.д. Следовательно, можно применить принцип независимости действия сил. Сечение S можно считать условно неподвижным. Кроме того при определении работы усилий, расположенных на правом торце элемента, можно пренебречь приращениями этих усилий. Получим для потенциальной энергии в элементе dS :

- за счет продольной силы

$$dU = \frac{N^2(S)dS}{2E(S) \cdot F(S)}; \quad (10)$$

- за счет крутящего момента

$$dU = \frac{M_{кр}^2(S) dS}{2G(S) \cdot J_{кр}(S)} \quad (11)$$

$J_{кр}$ принимают в общем случае для стержня некруглого сечения. Для стержня круглого сечения принимают J_p :

- за счет изгибающих моментов

$$dU = \frac{M_y^2(S) \cdot dS}{2E(S) \cdot J_y(S)} ; \quad dU = \frac{M_z^2(S) \cdot dS}{2E(S) \cdot J_z(S)} \quad (12)$$

При кручении стержня все рассматриваемое поперечное сечение поворачивается вокруг продольной оси на некоторый угол; при изгибе все плоское сечение целиком поворачивается около нейтральной оси на определенную величину; при удлинении стержня все точки поперечного сечения перемещаются вдоль оси стержня на некоторое одинаковое расстояние. При действии же поперечной силы абсолютные сдвиги в окрестностях точек сечения будут существенно изменяться вдоль высоты сечения, так как меняются касательные напряжения. Поэтому для учета различия этих сдвигов по высоте сечения к выражению (8) добавляют поправочный коэффициент k_y или k_z [2, с.171]. Значения этих коэффициентов зависят от формы сечения.

32

Например, для круга $k = \frac{32}{27}$, для прямоугольника $k_y = k_z = 1,2$

{1, с.322}.

Потенциальная энергия деформации элемента dS в общем случае получит вид

$$dU = \frac{N^2(S) \cdot dS}{2E(S)F(S)} + \frac{M_{кр}^2(S) \cdot dS}{2G(S) \cdot J_{кр}(S)} + \frac{M_y^2(S) dS}{2E(S)J_y(S)} + \frac{M_z^2(S) dS}{2E(S)J_z(S)} + k_y \frac{Q_y^2(S) \cdot dS}{2G(S) \cdot F(S)} + k_z \frac{Q_z^2(S) dS}{2G(S) \cdot F(S)} \quad (13)$$

В выражении (13) и модули упругости (E и G), и площадь поперечного сечения стержня (F), и внутренние усилия могут быть переменными по длине стержня, поэтому они обозначены как функции от координаты S . Далее будем опускать эти обозначения.

Чтобы найти потенциальную энергию, накопленную всем стержнем, необходимо проинтегрировать выражение (13) по длине стержня.

$$U = \int_0^l \frac{N^2 dS}{2EF} + \int_0^l \frac{M_{кр}^2 dS}{2GJ_{кр}} + \int_0^l \frac{M_y^2 dS}{2EJ_y} + \int_0^l \frac{M_z^2 dS}{2EJ_z} + \int_0^l k_y \frac{Q_y^2 dS}{2GF} + \int_0^l k_z \frac{Q_z^2 dS}{2GF}. \quad (14)$$

3. Энергетические методы определения перемещений

3.1. Теорема Кастильяно

Внутренние усилия, входящие в (13,14), есть функции не только координаты S , но и функции заданной нагрузки.

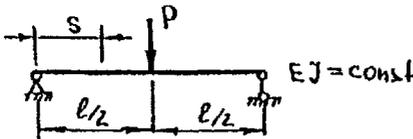
При условии упругой работы стержня и статическом приложении нагрузки справедлива теорема Кастильяно [2, с.172].

Частная производная от потенциальной энергии системы по усилию (внешнему) равна перемещению точки приложения усилия по направлению этого усилия.

Если усилие – сосредоточенная сила, то перемещение будет линейным (типа прогиба или удлинения); если момент, то перемещение будет угловым.

Пример 1

Определять прогиб балки в середине пролета. Влияние поперечной силы не учитывать.



а) записываем выражение для изгибающего момента

$$M(S) = \begin{cases} \frac{P}{2} \cdot S; & 0 \leq S < \frac{l}{2} \\ -\frac{P}{2} \cdot S + \frac{P}{2} \cdot l; & \frac{l}{2} \leq S \leq l; \end{cases}$$

б) составляем выражение для потенциальной энергии

$$U = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} \cdot S \right)^2 dS + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{2} \left(\frac{P}{2} \cdot S + \frac{P \cdot 1}{2} \right)^2 dS;$$

в) дифференцируем полученное выражение по параметру P

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{P^2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{P^2}{4} \int_{1/2}^1 (1-S) d(1-S) \right] \cdot \frac{1}{2EJ} =$$

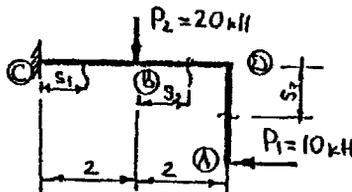
$$= \frac{\partial P^2 \cdot 1^3}{\partial P \cdot 8 \cdot 12 \cdot EJ};$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{P \cdot 1^3}{48EJ}.$$

Итак, прогиб составит $f = \frac{P \cdot 1^3}{48EJ}$.

Пример 2

Определить горизонтальное перемещение сечения А. Момент инерции сечения постоянен и равен 3000 см^4 ; модуль упругости равен $2 \times 10^5 \text{ МПа}$. Учитывать только действие изгибающих моментов.



Вспользуемся теоремой Кастильяно:

а) записываем выражение для изгибающего момента:

участок CB : $0 \leq S_1 < 2$, $M(S_1) = -P_2 \cdot S_1 + 2P_2 + 2P_1$;

участок BD : $0 \leq S_2 < 2$, $M(S_2) = 2P_1$;

участок DA : $0 \leq S_3 \leq 2$, $M(S_3) = 2P_1 - P_1 \cdot S_3$;

б) составляем выражение для потенциальной энергии

$$U = \int_0^2 \frac{M^2(S_1) dS}{2EJ} + \int_0^2 \frac{M^2(S_2) dS}{2EJ} + \int_0^2 \frac{M^2(S_3) dS}{2EJ};$$

в) дифференцируем полученное выражение по параметру P_1 и находим перемещение. Для упрощения вычислений можно изменить порядок интегрирования и дифференцирования, т.е. сначала взять частную производную по параметру P_1 от подынтегрального выражения, а затем произвести интегрирование. Это для интеграла, зависящего от параметра, делать можно [3, с.390], так как интегрирование производится по переменной S , а дифференцирование – по P_1 .

Продифференцируем по параметру P_1 все подынтегральные функции:

$$\frac{\partial}{\partial P_1} \frac{M^2(S_1; P_1)}{2EJ} = \frac{1}{EJ} [4P_1 + 4P_2 - 2P_2 \cdot S_1];$$

$$\frac{\partial}{\partial P_1} \frac{M^2(S_2; P_1)}{2EJ} = \frac{4P_1}{EJ};$$

$$\frac{\partial}{\partial P_1} \frac{M^2(S_3; P_1)}{2EJ} = \frac{1}{EJ} [4P_1 - 2P_1 \cdot S_3 + P_1 \cdot S_3^2].$$

Проинтегрируем выражение потенциальной энергии с учетом полученных выражений подынтегральных функций

Участок СВ:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^2 (4P_1 + 4P_2 - 2P_2 \cdot S_1) dS = \frac{8P_1 + 4P_2}{EJ}.$$

Участок BD:

$$[(4P_1)/(EJ)] \cdot \int_0^2 dS = \frac{8P_1}{EJ}.$$

Участок DA:

$$\frac{1}{EJ} \int_0^2 (4P_1 - 4P_1 \cdot S_3 + P_1 \cdot S_3^2) dS = \frac{8P_1}{EJ} - \frac{8P_1}{EJ} + \frac{8P_1}{3EJ}.$$

$$\Delta_A = \frac{56P_1}{3EJ} + \frac{4P_2}{EJ};$$

$$EJ = 6 \cdot 10^6 \text{ Н} \cdot \text{м}^2;$$

$$\Delta_A = 4,44 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

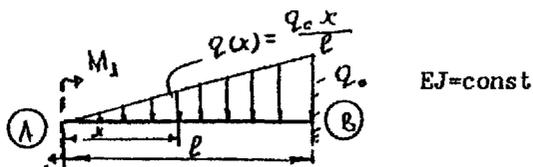
Знак "плюс", полученный для Δ_A , означает, что при возрастании силы P_1 потенциальная энергия увеличивается. Значит, сила совершает положительную работу и направление перемещения совпадает с направлением силы P_1 .

Итак, сечение А сместится влево на 4,44 см.

В рассмотренных примерах перемещения определялись только для тех сечений, где имеется сосредоточенная сила (или момент). Если требуется при помощи теоремы Кастильяно определить перемещение сечения, к которому не приложен ни момент, ни сосредоточенная сила, то поступают следующим образом. Искусственно прикладывают к рассматриваемому сечению в предполагаемом направлении силу или момент (для углового перемещения), записывают уравнения внутренних усилий с учетом введенного параметра, записывают выражение для потенциальной энергии и интегрируют его по введенному параметру. После этого полагают введенный параметр равным нулю.

Пример 3

Определить угол поворота сечения А балки, изображенной на рисунке. Учитывать только действие изгибающего момента.



1. Введем искусственно момент в сечении А (на рисунке показан пунктиром и обозначен M_1). При этом предполагаем поворот сечения А по часовой стрелке.

2. Записываем выражение для изгибающего момента

$$M(x; M_1) = M_1 - \frac{q_0 \cdot x^3}{6l}.$$

3. Составляем выражение для потенциальной энергии и дифференцируем его по введенному параметру

$$\begin{aligned} \sigma_A &= \frac{\partial U}{\partial M_1} = \frac{\partial}{\partial M_1} \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ} = \int_0^l \frac{M}{EJ} \cdot \frac{\partial M}{\partial M_1} dx = \\ &= \frac{1}{EJ} \left[M_1 \cdot l - \frac{q_0 l^4}{24l} \right]. \end{aligned}$$

4. Полагаем $M_1 = 0$, получим

$$\sigma_A = - \frac{q_0 \cdot l^3}{24EJ}.$$

Знак "минус" показывает, что сечение A поворачивается не по часовой стрелке, как M_1 , а против.

3.2. Интегралы Мора

Как показано, например, в [2, с.178], на основе теоремы Кастильяно и приема, рассмотренного в примере 3, можно получить следующие универсальные выражения для вычисления перемещений:

$$\begin{aligned} \Delta_A &= \int_1 \frac{M_{крp} \bar{M}_{крp} dS}{G J_{кр}} + \int_1 \frac{M_{ур} \bar{M}_y dS}{EJ_y} + \int_1 \frac{M_{zp} \bar{M}_z dS}{EJ_z} + \\ &+ \int_1 \frac{N_p \bar{N}}{EF} dS + k_y \int_1 \frac{Q_{ур} \bar{Q}_y dS}{G \cdot F} + k_z \int_1 \frac{Q_{zp} \bar{Q}_z dS}{GF}. \end{aligned} \quad (15)$$

В этих выражениях, называемых интегралами Мора:

Δ_A - перемещение сечения A по какому-то направлению;

$M_{крp}$, $M_{ур}$, M_{zp} , N_p , $Q_{ур}$, Q_{zp} - выражения для

внутренних усилий в поперечных сечениях стержня, вызванных внешней нагрузкой, т.е. те выражения, которые составляют для построения эпюр;

$\bar{M}_{крp}$, \bar{M}_y , \bar{M}_z , \bar{N} , \bar{Q}_y , \bar{Q}_z - это выражения для внутренних усилий, которые вызваны силой (или моментом), равной единице и приложенной к сечению в предполагаемом

направлении разскиваемого перемещения;

k_y и k_z – см. пояснения перед ф.13.

Таким образом, чтобы найти, например, угол поворота какого-то сечения стержня (например, А), необходимо:

– составить выражения для внутренних усилий в стержне от заданной нагрузки ($M_{кр}(S)$, $N_p(S)$ и т.д.);

– убрать нагрузку и приложить к рассматриваемому сечению момент, равный единице, полагая поворот сечения, например, против часовой стрелки;

– составить выражения для внутренних усилий от единичной нагрузки ($\bar{M}_{кр}(S)$, $\bar{N}(S)$ и т.д.);

– записать интегралы Мора и вычислить перемещение.

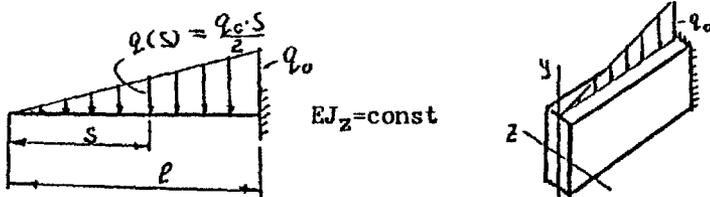
Если в результате получится отрицательное число, то направление перемещения противоположно направлению, предполагаемому единичной нагрузкой (т.е., например, поворот сечения будет происходить по часовой стрелке).

Заметим, что в общем случае E и J_z , входящие в интегралы, тоже могут быть функциями координаты S .

Интегралы (15) имеют в разных случаях существенно разные величины и некоторыми из них часто можно пренебречь.

Пример 4

Решить задачу примера 3, пользуясь интегралами Мора. Считаем, что основную часть перемещения вызывает изгибающий момент M_z .



Оси y и z – главные оси поперечного сечения; изгиб-прямой в вертикальной плоскости.

1. $N_p = Q_{zp} = M_{yp} = 0$; $Q_y \neq 0$, но в заданном примере ею пренебрегаем. Записываем уравнение для изгибающего

момента $0 \leq S \leq l$; $M_{zp}(S) = -\frac{q_0 \cdot S^3}{6l}$.

2. Прикладываем к сечению А единичный момент против часовой стрелки, предполагая, что сечение повернется в этом направлении, и записываем выражение для момента от единичной нагрузки.

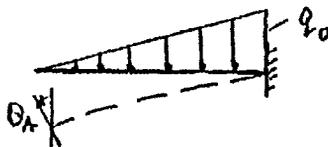
$$0 \leq S \leq l,$$

$$\bar{M}_z(S) = 1.$$

3. Подставляем полученные выражения в формулу (15), оставляя в ней только третий интеграл.

$$\varphi_A = \frac{1}{EJ_z} \cdot \int_0^l \frac{1 + q \cdot S^3 - 1}{6 \cdot l} \cdot dS = \frac{+q_0 S^4}{24lEJ_z} \Big|_0^l = \frac{+q_0 \cdot l^3}{24EJ_z}.$$

Таким образом, поворот сечения происходит против часовой стрелки.



Заметим, что, если подынтегральная функция разрывна, то интегрирование надо производить на участках непрерывности и суммировать результаты на этих участках.

Когда рассматривается влияние одного только изгибающего момента, можно не указывать название оси.

3.2.1. Способ Верещагина для вычисления интегралов Мора

Как показано, например, в [1], можно, не составляя аналитических выражений для подынтегральных функций, вычислить любой из интегралов Мора (15). Для этого используют следующий способ, носящий название правила Верещагина:

а) строят эпюры внутренних усилий от заданной нагрузки - "грузовые" эпюры $M_{крp}$, и т.д.;

б) убирают нагрузку и прикладывают к рассматриваемому сечению в предполагаемом направлении единичную силу или момент;

в) строят "единичные" эпюры внутренних усилий $\bar{M}_{кр}$, \bar{N} и т.д.;

г) умножают грузовые и единичные эпюры одноименных усилий друг на друга, для чего:

- разбивают стержень на участки, в пределах которых обе эпюры, выражения которых находятся под одним интегралом (15), не меняют знака, т.е. не пересекают нулевую линию; жесткость участка постоянна; одна или обе эпюры - прямая (не ломаная!) линия;

- располагают участки друг против друга;

- на одной эпюре (если есть на участке кривая или ломаная, то обязательно на этой эпюре!) определяют площадь фигуры и положение ее центра тяжести;

- на другой эпюре находят ординату против центра тяжести первой эпюры;

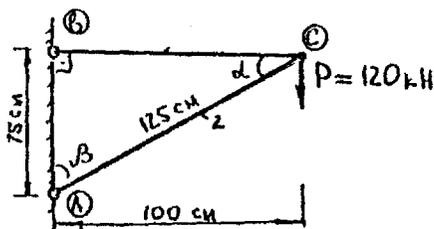
- находят произведение площади на ординату, при этом произведение отрицательно, если эпюры (например, M_p и \bar{M}) лежат с разных сторон от нулевой линии;

- делят полученное произведение на жесткость участка;

- складывают полученные значения по всем участкам. Это и будет разыскиваемое перемещение. Если значение отрицательно, то направление перемещения противоположно направлению единичной силы.

Пример 5

Определить величину вертикального перемещения узла, к которому приложена сила. Оттяжка выполнена из стали и имеет поперечное сечение 10см^2 , а подкос - из сосны и имеет сечение 250см^2 .

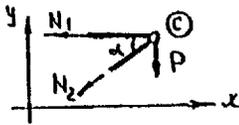


$$E_{ст} = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$$

$$E_{сосн} = 1 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

Замечаем, что в стержнях могут возникнуть только продольные силы.

1. Строим грузовую эпюру продольных сил N_p .

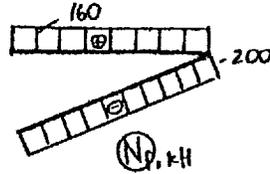


$$\sum x = -N_1 - N_2 \cdot \cos \alpha = 0 ;$$

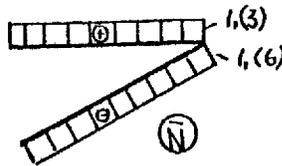
$$\sum y = -P - N_2 \cdot \sin \alpha = 0 .$$

$$N_2 = -\frac{P}{\sin \alpha} ;$$

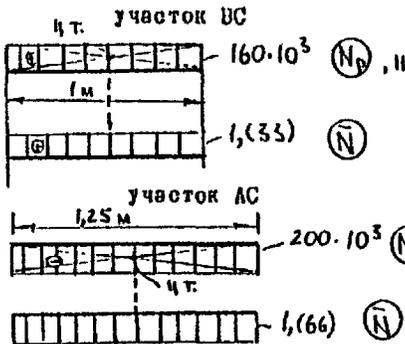
$$N_1 = \frac{P}{\operatorname{tg} \alpha} .$$



2. Строим единичную эпюру \bar{N} .



3. Вычисляем перемещение.



$$\Delta_c = \frac{160 \cdot 10^3 \cdot 1 \cdot \frac{1}{33}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{-3}} + \frac{(-200 \cdot 10^3) \cdot 1,25 \cdot \frac{1}{66}}{1 \cdot 10^{10} \cdot 2,5 \cdot 10^{-2}} =$$

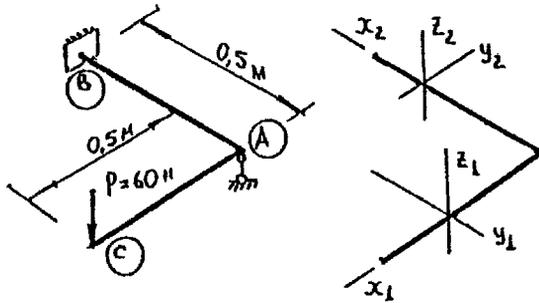
$$= 2,73 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Таким образом, точка С опустится на 2,73мм.

Пример 6

Ломаный брус заделан одним концом и шарнирно оперт в узле А; плоскость оси бруса горизонтальна. Определить

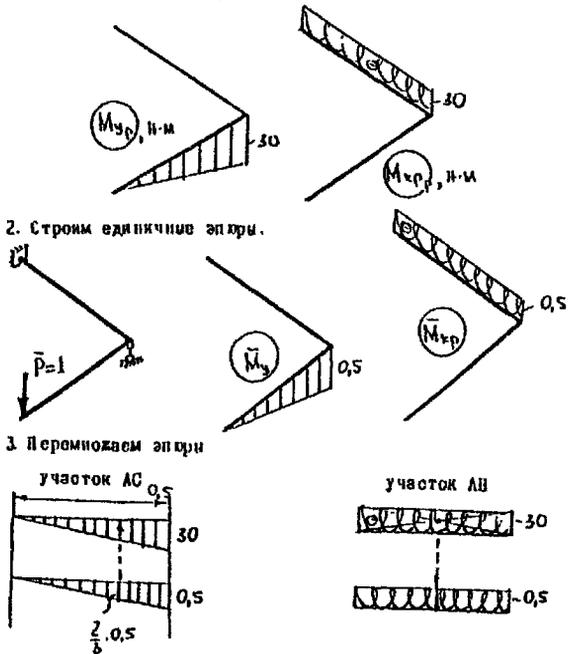
прогиб f на свободном конце бруса, несущем нагрузку 60Н . Поперечное сечение бруса постоянное: квадрат со стороной 1см . $E=2,2 \cdot 10^5 \text{МПа}$; $G=0,4E=8,8 \cdot 10^4 \text{МПа}$.



местные системы координат

Считаем, что основная доля перемещения точки С по вертикали вызвана изгибом и кручением. Опора А не препятствует передаче крутящего момента.

1. Строим грузовые эпюры изгибающего момента M_{yP} и крутящего момента $M_{крP}$, заметив, что участок СА только изогнут в вертикальной плоскости, а участок АВ – только скручивается моментом от силы Р.



$$f_A = \frac{1}{EJ_y} \cdot \frac{30 \cdot 0,5}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,5 + \frac{1}{G \cdot J_K} \cdot 30 \cdot 0,5 \cdot 0,5 =$$

$$= \frac{2,5}{EJ_y} + \frac{7,5}{GJ_K}$$

Учтем, что

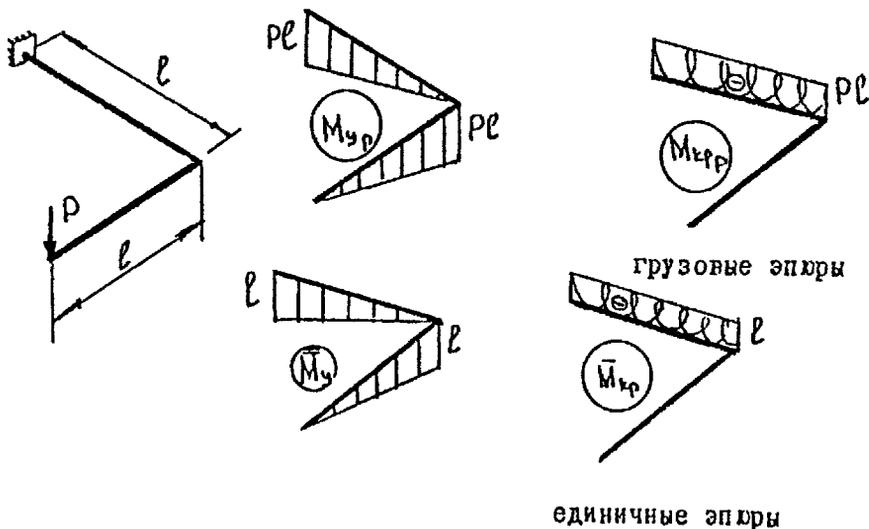
$$J_y = \frac{a^4}{12} \approx 8, (3) \cdot 10^{-10} \text{ м}^4; \quad J_K = 0,141 a^4 [] \approx 1,406 \cdot 10^{-9} \text{ м}^4.$$

Получим $f_A = 1,364 \cdot 10^{-2} + 6,062 \cdot 10^{-2} \approx 7,426 \cdot 10^{-2} \text{ м}$.

Как видим, оба слагаемых имеют одинаковый порядок.

Пример 7

Решить предыдущую задачу, полагая, что опоры А нет.



$$f_A = \frac{1}{EJ_y} \cdot 2 \cdot \frac{Pl \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot l + \frac{1}{GJ_K} \cdot Pl \cdot l \cdot l \approx 8,77 \cdot 10^{-2} \text{ м}$$

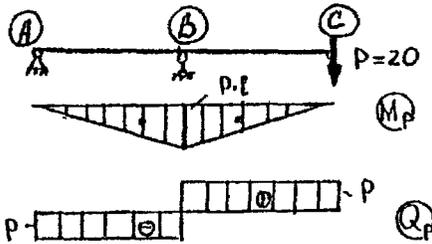
Пример 8

Определить прогиб на конце консоли С с учетом деформации сдвига.

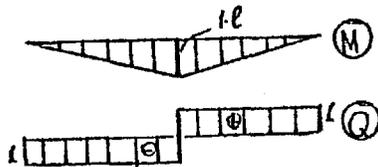
$$J = 244 \text{ см}^2; \quad F = 14,2 \text{ см}^2; \quad E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \mu = 0,3.$$



1. Строим грузовые эпюры M_p и Q_p .



2. Строим единичные эпюры \bar{M} и \bar{Q} .



3. Перемножаем эпюры (M_p на \bar{M} ; Q_p на \bar{Q}), разбив их на два участка и учитывая коэффициент формы сечения (см. пояснения к ф.13), который для двутавра равен $k=2,9[4, с. 498]$.

$$f = 2 \cdot \frac{1}{EJ} \cdot \frac{P \cdot l \cdot l}{2} \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{GF} \cdot k \cdot P \cdot l \cdot 1 \approx 1,05 \cdot 10^{-3} m =$$

$$= 7,378 \cdot 10^{-4} + 3,187 \cdot 10^{-4}.$$

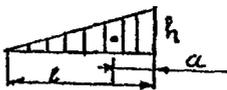
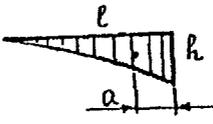
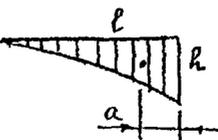
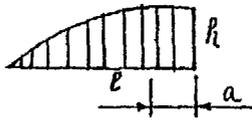
$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

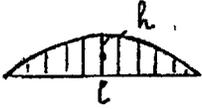
Как видно из сопоставления слагаемых, величина прогиба за счет сдвига поперечной силой для короткой балки сопоставима с величиной прогиба за счет изгибающего

момента.

В таблице 1 представлены площади часто встречающихся при перемножении эпюр фигур и положения их центров тяжести.

Таблица 1

Название фигуры	Изображение и параметры
1	2
прямоугольный треугольник	 $\omega = \frac{l \cdot h}{2};$ $a = \frac{1}{3} l$
квадратичная парабола	 $\omega = \frac{l h}{3}$ $a = \frac{1}{4} \cdot l$
кубическая парабола	 $\omega = \frac{l h}{4}$ $a = \frac{1}{5} l$
половина квадратичной параболы	 $\omega = \frac{2}{3} l h$ $a = \frac{3}{8} l$

1	2
квадратичная парабола	 $\omega = \frac{2}{3} l \cdot h$

3.2.2. Численное определение интегралов Мора

Для вычисления перемещений с использованием интегралов Мора (15) можно обойтись без точного аналитического решения и без графического умножения эпюр, поступив следующим образом:

- разбиваем стержень на некоторое достаточно большое число равных частей;
- вычисляем значения $M_{крp}$; $\bar{M}_{кр}$ и т.д. в точках деления;
- вычисляем значения жесткости (если стержень переменного сечения) в точках деления;
- применяем формулу трапеций [3, с.371]

$$\int_a^b y dx = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right),$$

h - шаг (16)

или формулу Симпсона [3, с.372]

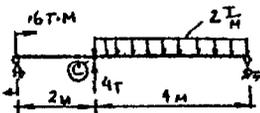
$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3} \left[(y_0 + y_{2n}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) \right]$$

(17)

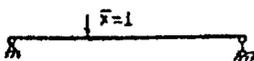
и вычисляем нужный интеграл.

Пример 9

Определить прогиб в сечении С для балки, выполненной из двутавра N27^a.



$$M_p(s) = \begin{cases} 6-s & ; 0 \leq s < 2 \\ (6-s)(s+1) & ; 2 \leq s \leq 6 \end{cases}$$



$$\bar{M}(s) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot s & ; 0 \leq s < 2 \\ \frac{1}{3} (6-s) & ; 2 \leq s \leq 6 \end{cases}$$

Учитываем только действие изгибающего момента.

Разбиваем стержень на 18 участков с шагом $h=0,333\text{м}$.

Вычисляем S , $M_p(S)$, $\bar{M}(S)$, $M_p \cdot \bar{M}$ в точках деления, заполняя таблицу.

Таблица 2

№ точки	0	1	2	3	4	5	6	7
S	0	0,333	0,67	1,0	1,33	1,67	2,0	2,33
$M_p(S)$	0	5,67	5,33	5,0	4,67	4,33	4,0	4,09
$\bar{M}(S)$	0	0,222	0,44	0,67	0,89	1,11	1,33	1,22
$M_p \cdot \bar{M}$	0	1,26	2,37	3,33	4,15	4,82	5,33	5,98

Продолжение таблицы 2

№ точки	8	9	10	11	12	13
S	2,67	3,0	3,333	3,67	4,000	4,33
$M_p(S)$	5,57	6,0	6,22	6,22	6,0	5,57
$\bar{M}(S)$	1,11	1,0	0,89	0,78	0,67	0,57
$M_p \cdot \bar{M}$	6,17	6,0	5,53	4,84	4,0	3,09

Окончание таблицы 2

№ точки	14	15	16	17	18
S	4,67	5,0	5,33	5,67	6,0
$M_p(S)$	4,09	4,0	2,89	1,57	0
$\bar{M}(S)$	0,44	0,33	0,22	0,11	0
$M_p \cdot \bar{M}$	2,17	1,33	0,64	0,17	0

Используем формулу трапеций (16), учитывая, что $J=5500\text{см}^4$,

$$E=2 \cdot 10^{11} \text{Па}; f_c = \frac{0, (33) \cdot 61, 185 \cdot 9, 81 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0, 0182 \text{м}.$$

Точное решение дает 0,0186м, погрешность около 2%.

Численное интегрирование применяется в расчетах на ЭВМ или на программируемых микрокалькуляторах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по сопротивлению материалов / Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. - Киев, 1988. - 736с.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М., 1962. - 536с.
3. Мышкин А.Д. Лекции по высшей математике. - М., 1969. - 640с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов / под ред. А.А. Уманского. - М., 1964. - 552с.

Алексей Алексеевич Денисенко

МЕТОДЫ И СПОСОБЫ РАСЧЕТА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

Методические разработки по курсам «Основы технической механики»,
«Сопротивление материалов», «Строительная механика»
для студентов направления подготовки
08.03.01 «Строительство» всех форм обучения

Электронные данные. Кафедра СиМ Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.