



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Рубцовский индустриальный институт
(филиал) федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Алтайский государственный технический университет им. И.И. Ползунова»

А. С. ДЕМИДОВ
О.А. МИХАЙЛЕНКО
И.А. СОРОКИНА

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методическое пособие по дисциплине
«Строительная механика» для подготовки бакалавров направления
08.03.01 «Строительство» всех форм обучения

*Рекомендовано Рубцовским индустриальным институтом (филиалом)
ФГБОУ ВО «Алтайский государственный технический университет им.
И.И. Ползунова» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по направлению подготовки «Строительство»*

Рубцовск 2021

УДК 539.3/6

Демидов А.С. Строительная механика. Учебное пособие для студентов всех форм обучения направления 08.03.01 «Строительство». / А.С.Демидов, О.А. Михайленко, И.А. Сорокина; Рубцовский индустриальный институт. - Рубцовск, 2021. – 86 с.

Содержит практический материал по курсу «Строительная механика». Предназначено для студентов направления 08.03.01 «Строительство» всех форм обучения

Рассмотрено и одобрено
на заседании НМС
Рубцовского индустриального
института.
Протокол № 2 от 26.05.2021 г.

Рецензент: к.т.н., доцент,
доцент кафедры СиМ

А.А. Денисенко

© Рубцовский индустриальный институт, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ.....	5
2. РАСЧЕТ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ (ШКБ).....	21
3. РАСЧЕТ ФЕРМЫ С ОДНОЯРУСНЫМ ШПРЕНГЕЛЕМ.....	30
4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ.....	46
5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ.....	65
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	86

ВВЕДЕНИЕ

В данном пособии представлен методический материал, необходимый для проведения формирования практических навыков расчетов, используемых для выполнения расчетно-графических работ по курсу «Строительная механика» при подготовке бакалавров направления 08.03.01 Строительство всех форм обучения.

При составлении сборника использовались текстовый редактор *LibreOffice Writer* версий 7.x.x а также графические редакторы: векторный *Inkscape 1.0.x* и растровый *Gimp 2.10.x*.

1. КИНЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РАСЧЕТНЫХ СХЕМ

На этапе формирования схемы строительной конструкции при компоновке элементов, необходимо обеспечивать условия её геометрической неизменяемости. С этой целью проводится так называемый кинематический анализ (КА), примеры которого приведены ниже.

Пример №1

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 1

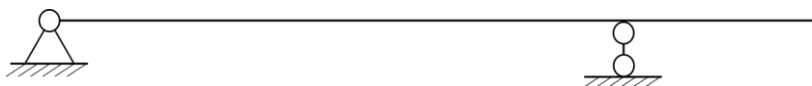


Рисунок 1

Для количественного анализа, как первого этапа КА (кинематического анализа) используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D – количество жестких дисков;
 $Ш$ – число простых шарниров;
 $C_{оп}$ – число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 2:

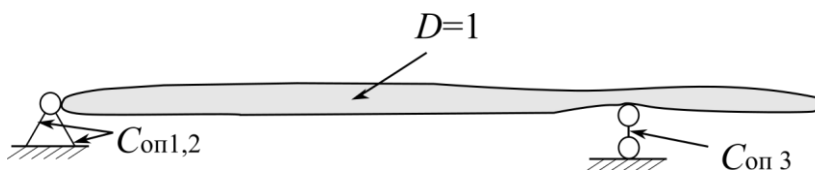


Рисунок 2

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 0 - 3 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется.

Качественный анализ расчетной схемы показывает следующее:

Жесткий диск соединен с «землей» тремя линейными не параллельными связями, линии действия которых не пересекаются в одной

точке. Поэтому делаем вывод, о том что наша система является ГНС, статически определимой ($W_k = 0$).

Для определения степени кинематической свободы можно так же использовать специальную формулу для плоских балок:

$$W_k = 3 + Ш - C_{оп}$$

Здесь:

Ш – число промежуточных шарниров;

$C_{оп}$ – число опорных линейных связей.

$$W_k = 3 + Ш - C_{оп} = 3 + 0 - 3 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш – число простых шарниров;

n – число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим образом, см. рис. 3.

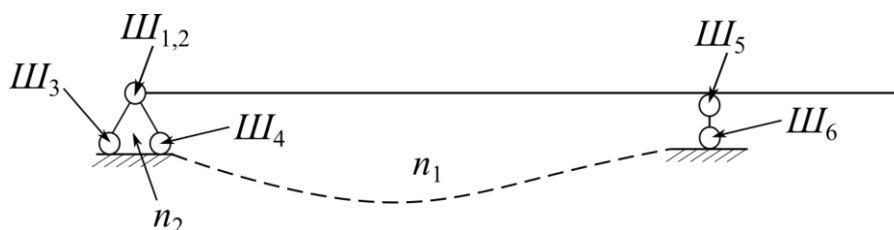


Рисунок 3

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 6 - 3 \cdot 2 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$

Пример №2

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 4.

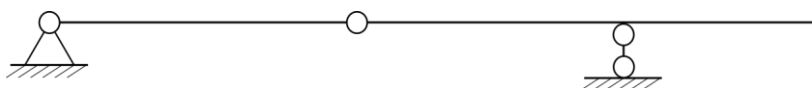


Рисунок 4

Для количественного анализа проведения КА используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D — количество жестких дисков;
 $Ш$ — число простых шарниров;
 $C_{оп}$ — число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 5:

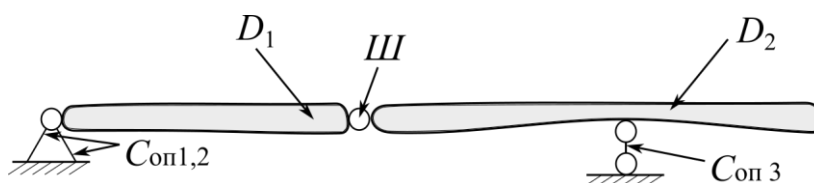


Рисунок 5

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 \Rightarrow W_k = 1 \geq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости не выполняется. Поэтому делаем вывод, о том что наша система является ГИС ($W_k = 1$).

Для определения степени кинематической свободы можно так же использовать специальную формулу для плоских балок:

$$W_k = 3 + Ш - C_{оп}$$

Здесь:

$Ш$ — число промежуточных шарниров;
 $C_{оп}$ — число опорных линейных связей.

В нашем случае:

$$W_k = 3 + Ш - C_{оп} = 3 + 1 - 3 = 0 \Rightarrow W_k = 1 \geq 0.$$

При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь $Ш$ — число простых шарниров;
 n — число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим

образом, см. рис. 6.

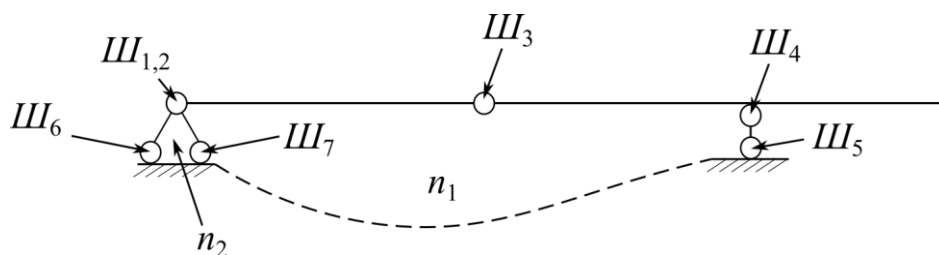


Рисунок 6

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 7 - 3 \cdot 2 = 1 \Rightarrow W_k = 1 \geq 0$.

Пример №3

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 7.

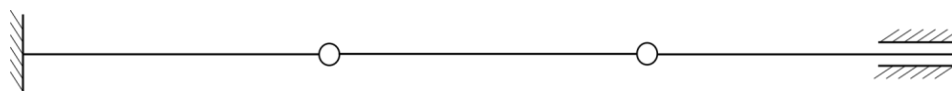


Рисунок 7

Для количественного анализа (первого этапа КА) используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D – количество жестких дисков;
 $Ш$ – число простых шарниров;
 $C_{оп}$ – число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 8:

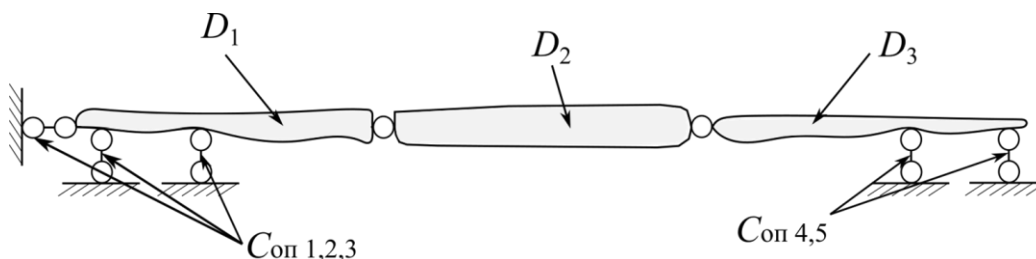


Рисунок 8

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Качественный анализ расчетной схемы показывает следующее:

Система является ГНС и статически определимой ($W_k = 0$).

Для определения степени кинематической свободы можно так же использовать специальную формулу для плоских балок:

$$W_k = 3 + Ш - C_{оп}$$

Здесь:

Ш – число промежуточных шарниров;

$C_{оп}$ – число опорных линейных связей.

В нашем случае: $W_k = 3 + Ш - C_{оп} = 3 + 2 - 5 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \geq 0.$

При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш – число простых шарниров;

n – число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим образом, см. рис. 9.

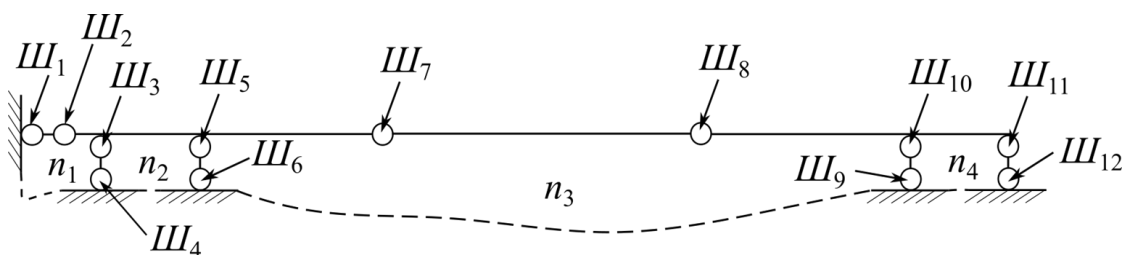


Рисунок 9

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 12 - 3 \cdot 4 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$

Пример №4

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 10.

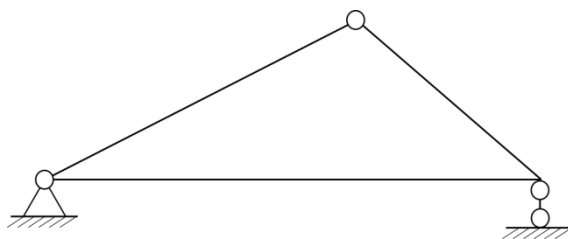


Рисунок 10

Для количественного анализа этапа КА используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D — количество жестких дисков;
 $Ш$ — число простых шарниров;
 $C_{оп}$ — число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 11:

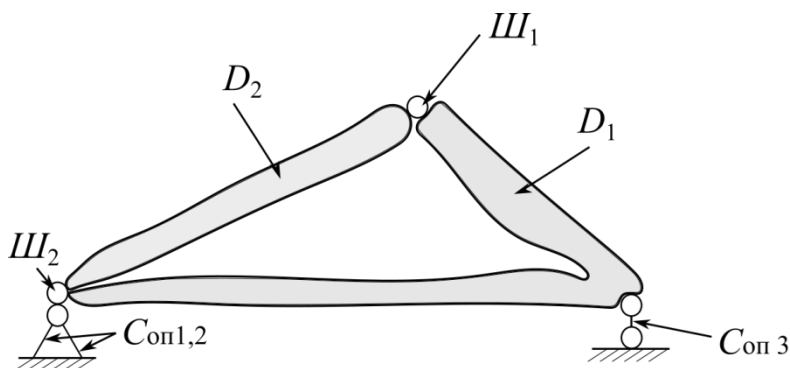


Рисунок 11

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 = -1 \Rightarrow W_k = -1 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется.

Качественный анализ расчетной схемы показывает следующее:

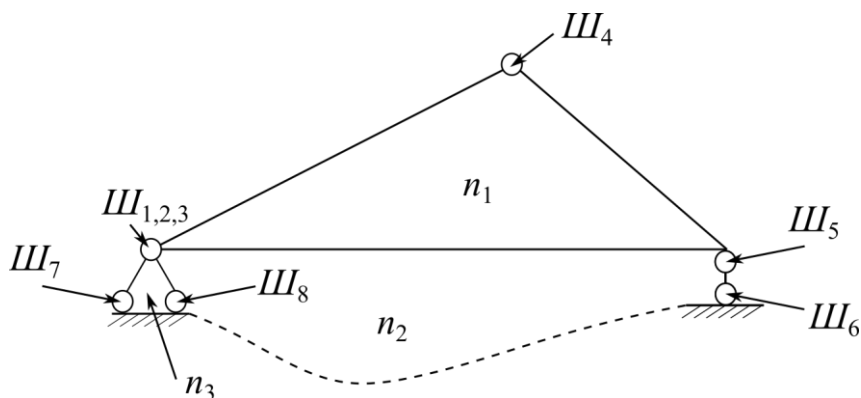
Используя правило диады дважды, убеждаемся что система является ГНС, статически неопределимой определимой один раз ($W_k = -1$).

При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш — число простых шарниров;
 n — число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим



образом, см. рис. 12.

Рисунок 12

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 8 - 9 \cdot 3 = -1 \Rightarrow W_k = -1 \leq 0$.

Пример №5

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 13.

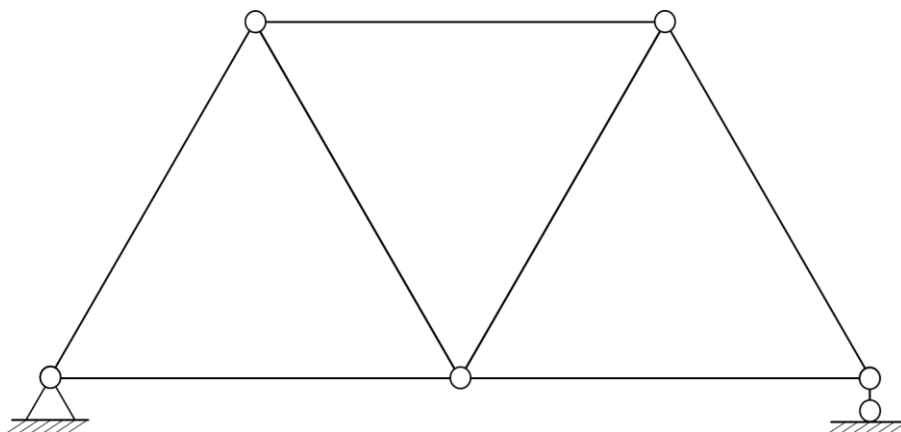


Рисунок 13

Для количественного анализа этапа КА используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D — количество жестких дисков;
 Ш — число простых шарниров;
 $C_{\text{оп}}$ — число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 14:

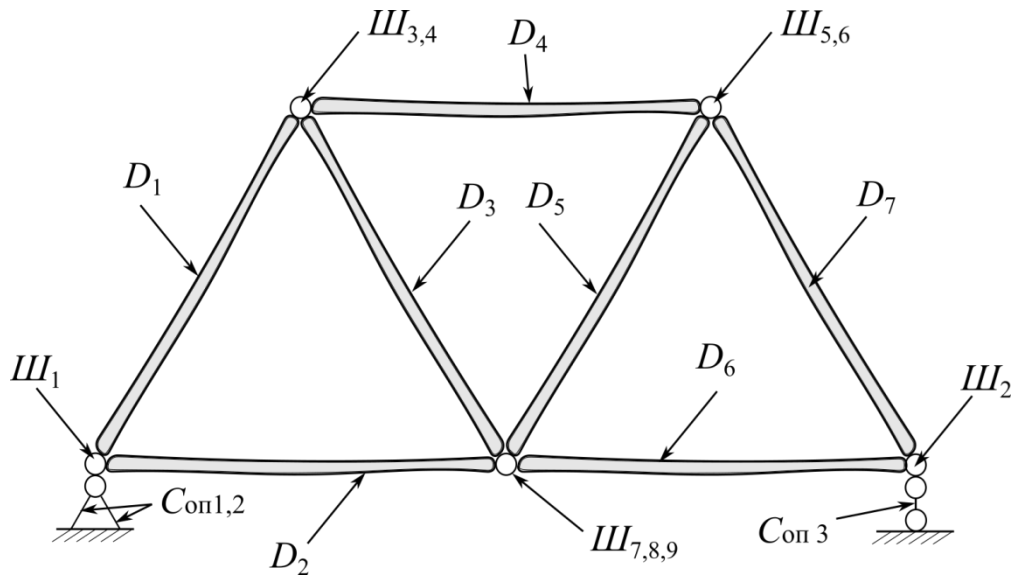


Рисунок 14

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2\text{Ш} - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 9 - 3 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется.

Качественный анализ расчетной схемы показывает следующее:

Используя правила триады и диады дважды, убеждаемся что система является ГНС, статически определимой ($W_k = 0$).

Эту же задачу решим, используя специальную формулу, предназначенную для плоских ферм:

$$W_k = 2U - C_{\text{ф}} - C_{\text{оп}}$$

Здесь: U — число узлов фермы;

$C_{\text{ф}}$ — число стержней фермы;

$C_{\text{оп}}$ — число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 15:

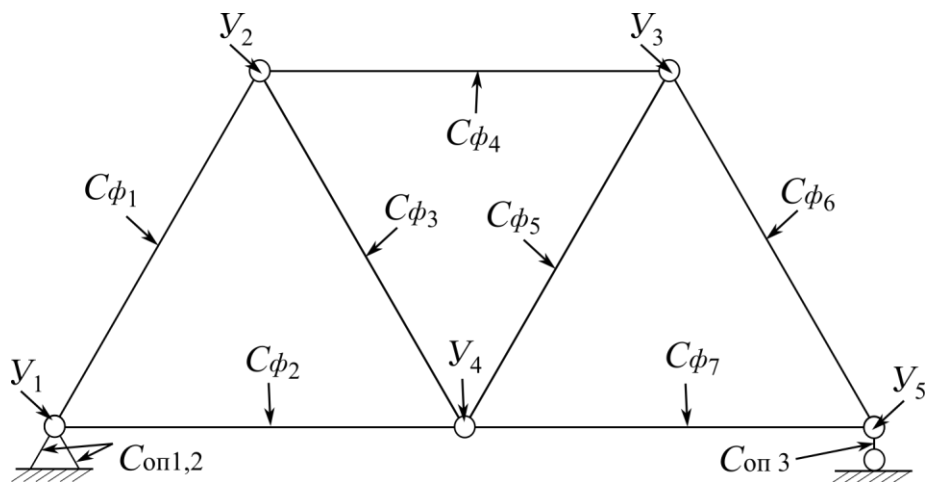


Рисунок 15

В нашем случае:

$$W_k = 2Y - C_\phi - C_{оп} = 2 \cdot 5 - 7 - 3 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Качественный анализ расчетной схемы показывает что система является ГНС, статически определимой ($W_k = 0$).

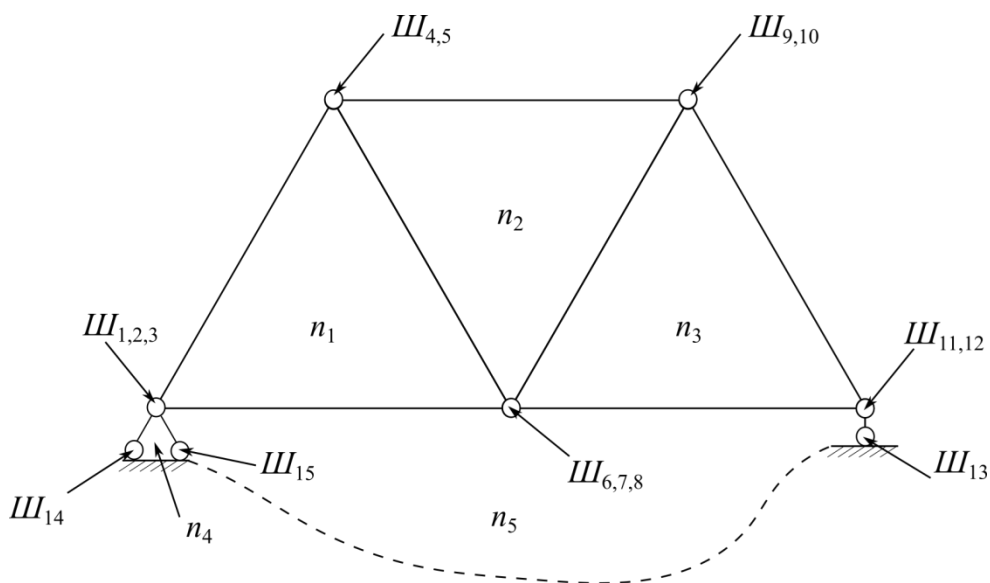
При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш — число простых шарниров;

n — число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть



следующим образом, см. рис. 16.

Рисунок 16

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 15 - 3 \cdot 5 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0$.

Пример №6

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 17.

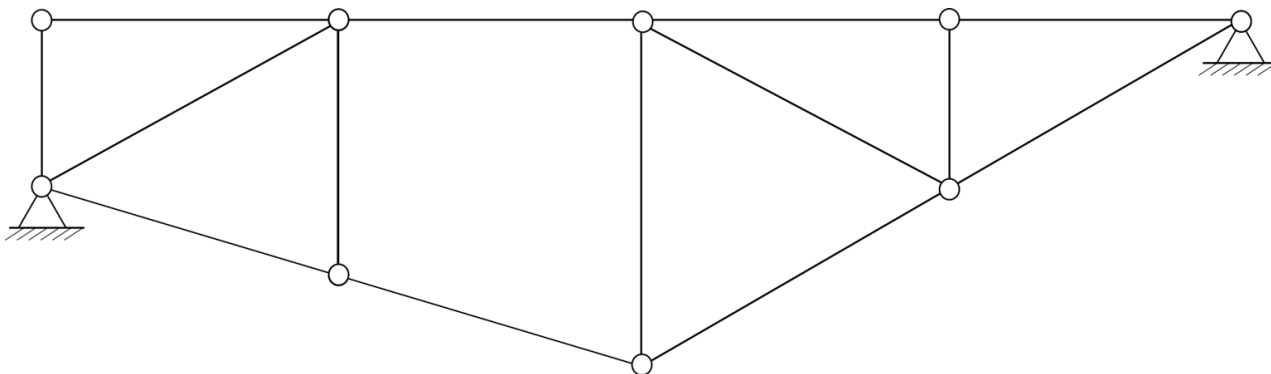


Рисунок 17

Для количественного анализа (первого этапа КА) используем формулу Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп}$$

Здесь: D — количество жестких дисков;

$Ш$ — число простых шарниров;

$C_{оп}$ — число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 18:

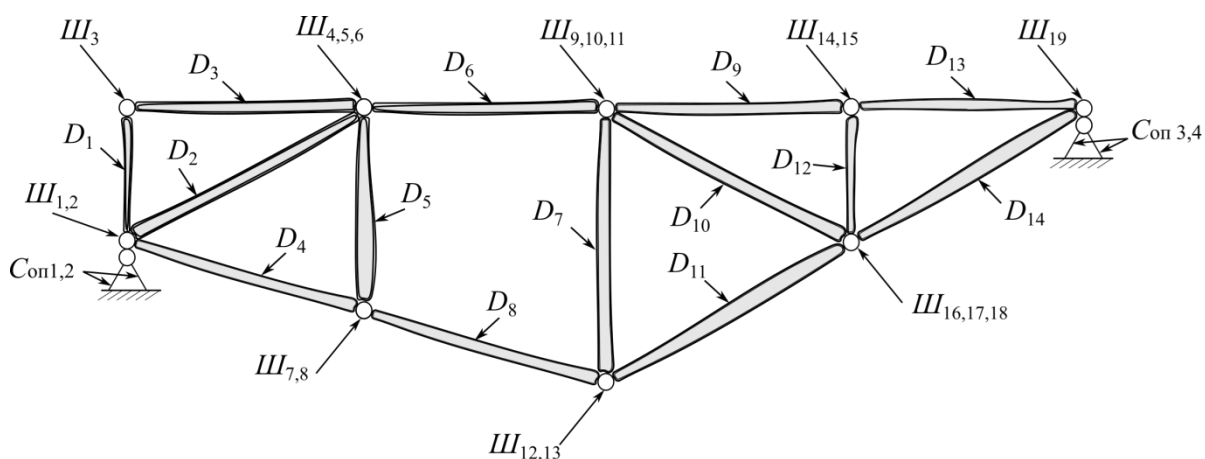


Рисунок 18

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 14 - 2 \cdot 19 - 4 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Качественный анализ расчетной схемы показывает следующее... Используя правило триады (3 раза) и диады (2 раза), убеждаемся что система является МИС, см. рис. 19 и статически определимой ($W_k = 0$).

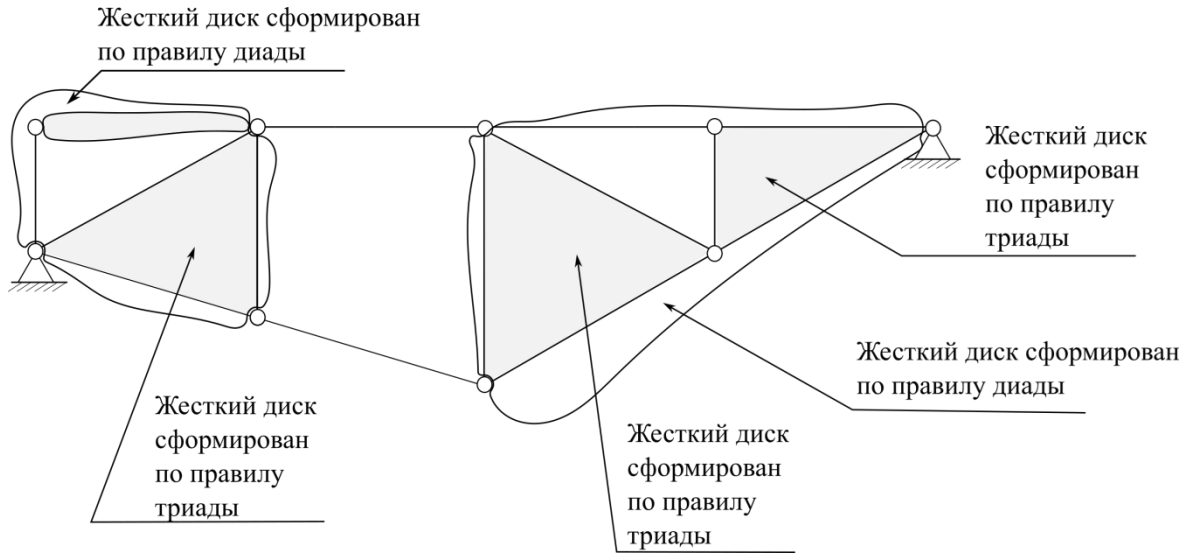


Рисунок 19

Можно подсчитать степень кинематической свободы, используя специальную формулу, предназначенную для плоских ферм:

$$W_k = 2U - C_{\phi} - C_{оп}$$

Здесь: U — число узлов фермы; C_{ϕ} — число стержней фермы
 $C_{оп}$ — число опорных линейных связей.

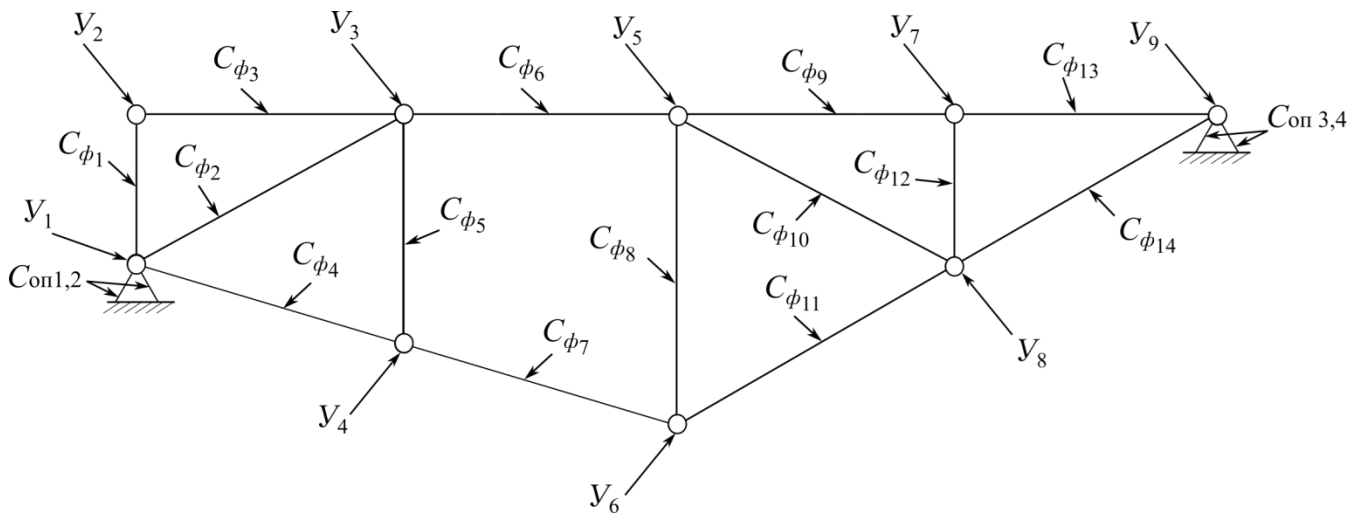


Рисунок 20

Инициализируем схему, см. рис. 20:

В нашем случае:

$$W_k = 2Y - C_\phi - C_{\text{оп}} = 2 \cdot 9 - 14 - 4 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0.$$

При подсчете степени кинематической свободы, так же можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш — число простых шарниров;

n — число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим образом, см. рис. 21.

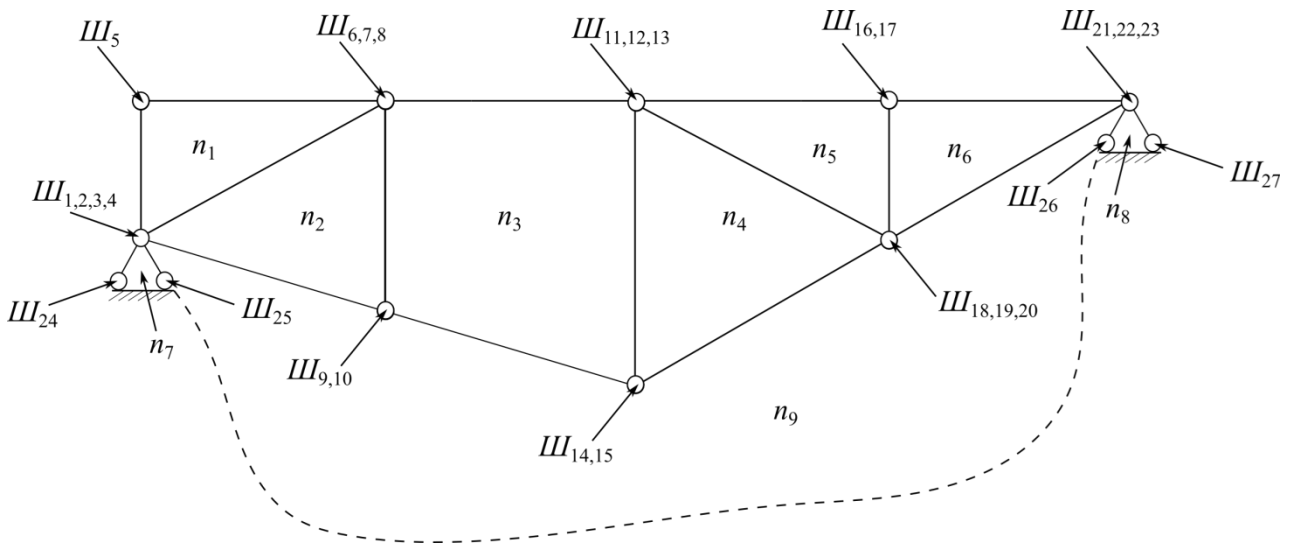


Рисунок 21

Тогда: $W_k = Ш - 3n = 27 - 3 \cdot 9 = 0 \Rightarrow W_k = 0 \leq 0$.

Пример №7

Провести кинематический анализ расчетной схемы, показанной на рисунке 22.

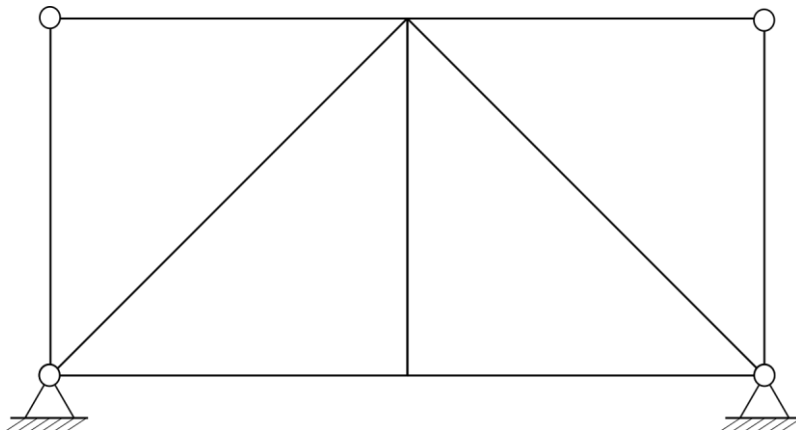


Рисунок 22

Для количественного анализа (первого этапа КА) используем более полный вариант формулы Чебышева для плоских систем:

$$W_k = 3D - 2Ш - 3Ж - C_{оп}$$

Здесь: D – количество жестких дисков;
 $Ш$ – число простых шарниров;
 $Ж$ – число жестких соединений (спаек)
 $C_{оп}$ – число опорных линейных связей.

Инициализируем схему, см. рис. 23:

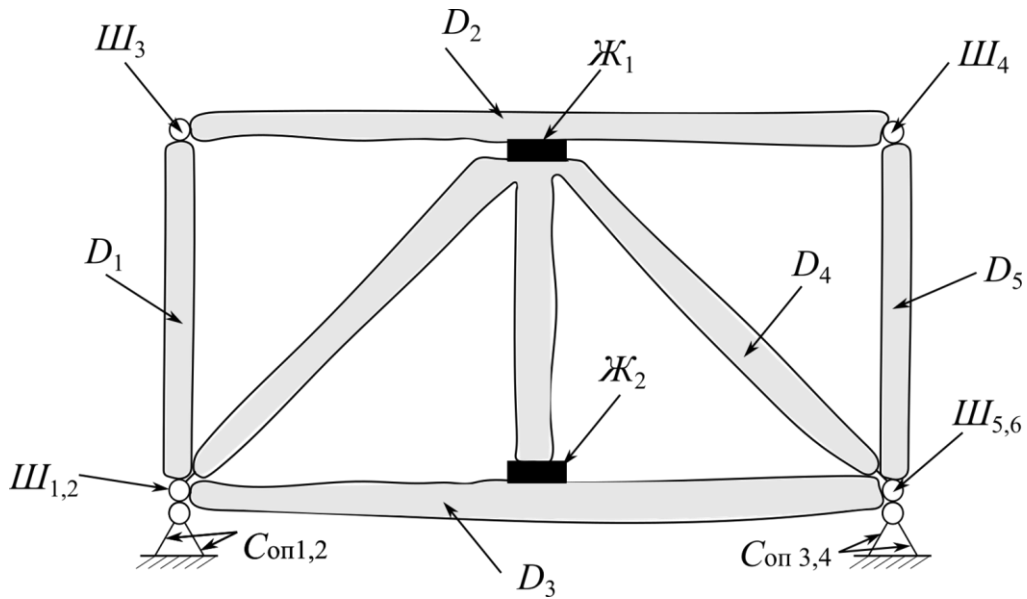


Рисунок 23

В нашем случае:

$$W_k = 3D - 2Ш - 3Ж - C_{оп} = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 4 = -7 \Rightarrow W_k = -7 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Качественный анализ расчетной схемы показывает, что система является ГНС, статически неопределимой семь раз ($W_k = -7$).

Можно решить данную задачу используя другую схему расчета, см. рис. 24

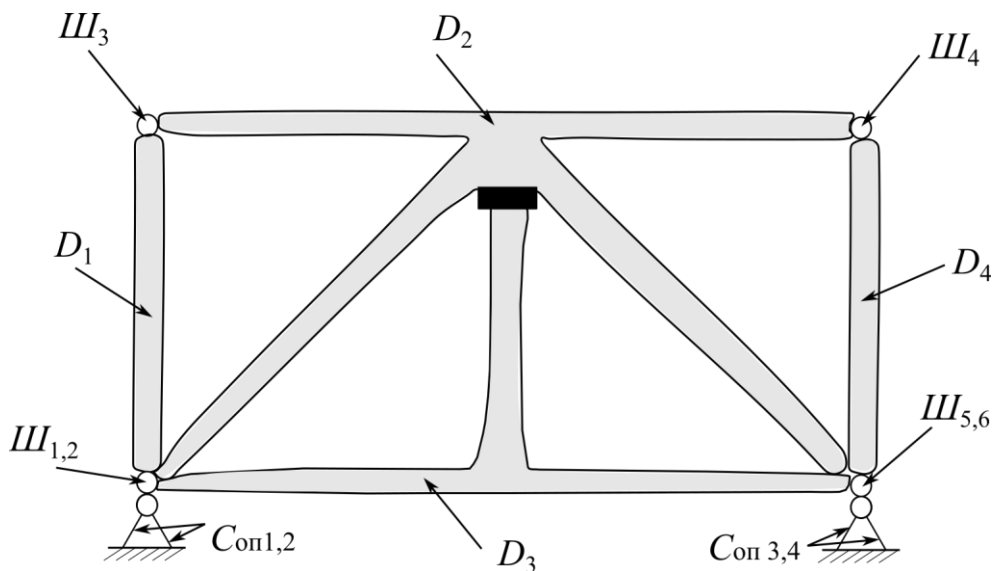


Рисунок 24

Тогда:

$$W_k = 3D - 2Ш - 3Ж - C_{оп} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 6 - 3 \cdot 1 - 4 = -7 \Rightarrow W_k = -7 \leq 0.$$

Таким образом, необходимое условие геометрической неизменяемости выполняется. Качественный анализ расчетной схемы показывает, что система является ГНС, статически неопределимой семь раз ($W_k = -7$).

При подсчете степени кинематической свободы, можно применить другую формулу, используемую для плоских стержневых систем:

$$W_k = Ш - 3n$$

Здесь Ш — число простых шарниров;

n — число замкнутых контуров.

Расчетная схема, используемая для этой формулы будет выглядеть следующим образом, см. рис. 25.

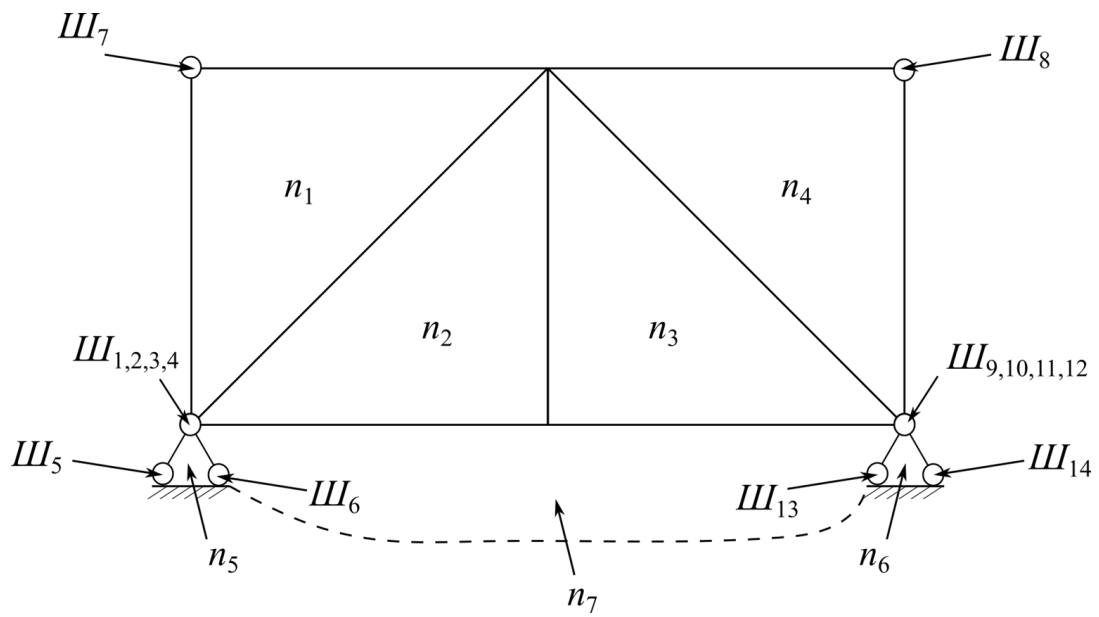


Рисунок 25

В нашем случае: $W_k = III - 3n = 14 - 3 \cdot 7 = -7 \Rightarrow W_k = -7 \leq 0$.

2. РАСЧЕТ ШАРНИРНО-КОНСОЛЬНОЙ БАЛКИ (ШКБ)

Рассмотрим пример расчета статически-определимой шарнирно-консольной балки, согласно данным следующего задания.

Задание

1. Изобразить в масштабе расчетную схему балки (рис. 26), в соответствии с данными табл.1.
2. Построить поэтажную схему балки.
3. Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q для второстепенной и главной балки.
4. Построить эпюры M и Q для балки в целом.
5. Построить линии влияния M и Q для двух сечений.
6. Сравнить величины M и Q , вычисленные по эпюрам и с помощью линий влияния.
7. Для одного из пролетов построить эпюру изгибающих моментов используя матрицу влияния моментов.

Решение

1. Берем следующие данные:

Таблица 1

$l_1, \text{м}$	$l_2, \text{м}$	$l_3, \text{м}$	$l_4, \text{м}$	$F, \text{кН}$	$q, \frac{\text{кН}}{\text{м}}$
4	5	6	2	12	2

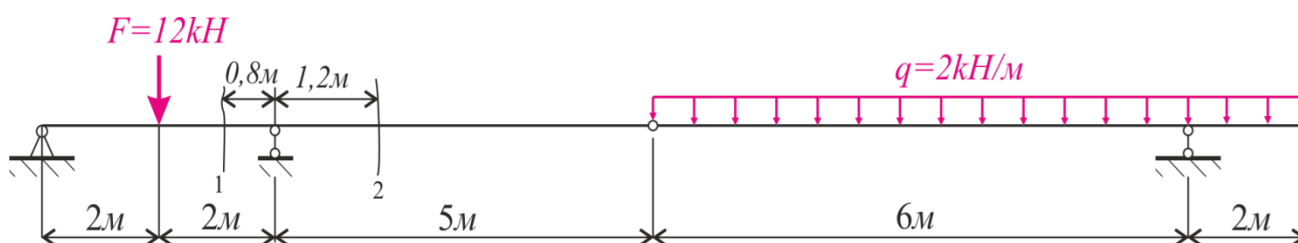


Рисунок 26 - Исходная схема

2. Учитывая очередность при монтаже конструкции представляем данную балку в поэтажном варианте.

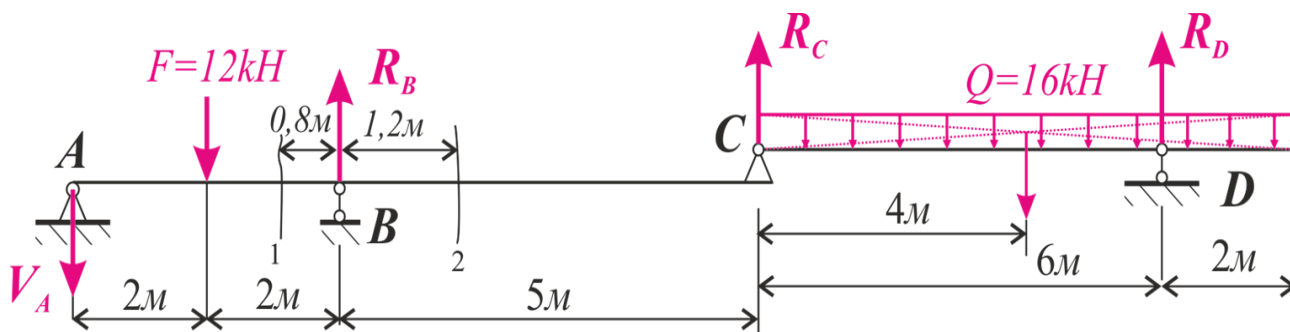


Рис 27 - Общая расчетная схема балки в поэтажном варианте

3. Строим эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q начиная с второстепенной балки CD , см. рис. 28

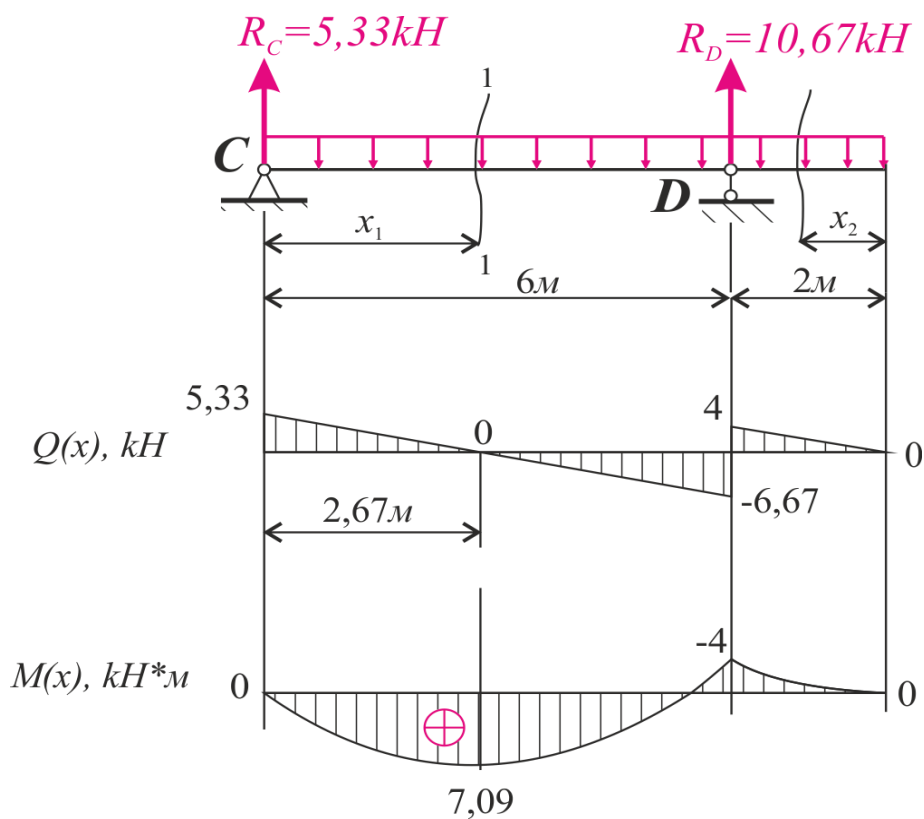


Рисунок 28

Строим эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q главной балки ABC , рис.29

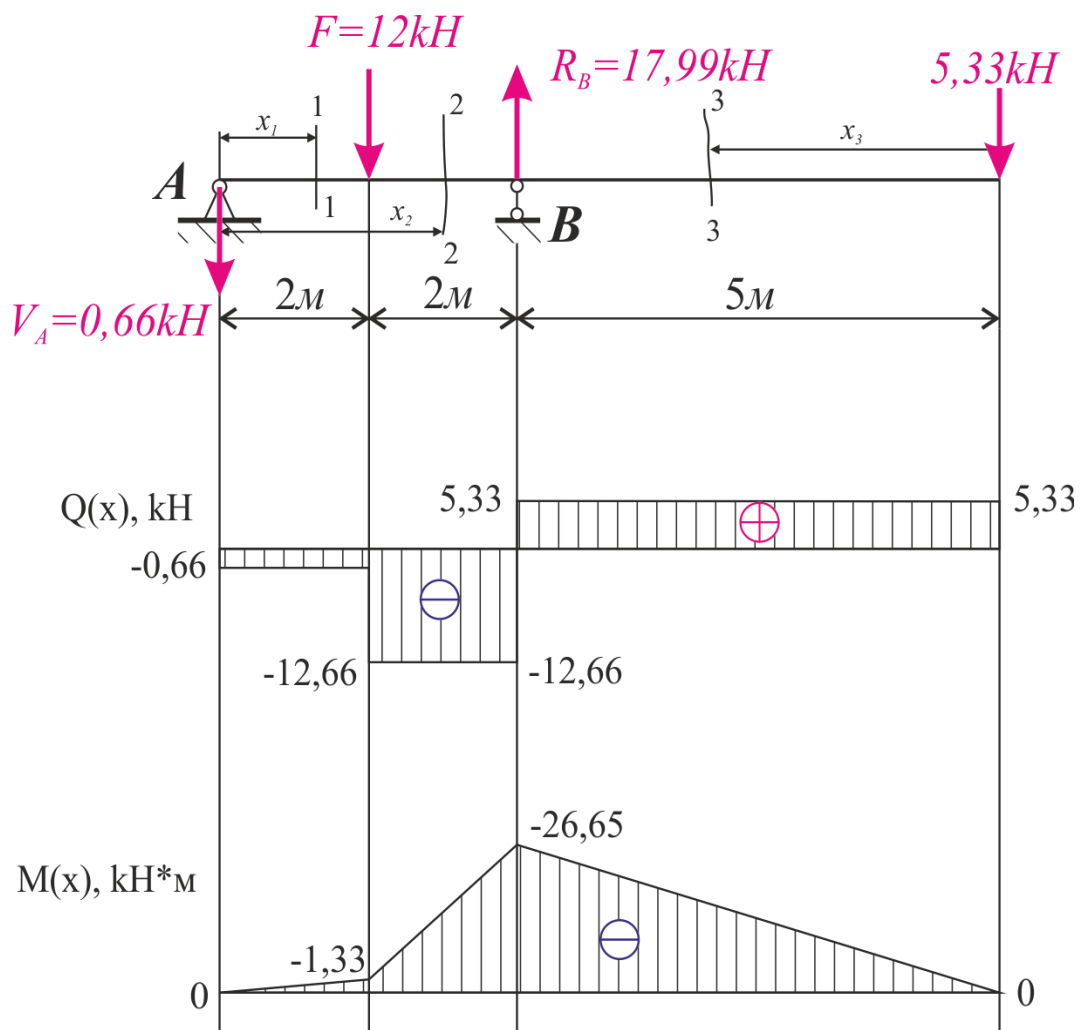


Рисунок 29

4. Изображаем эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q для всей расчетной схемы, рис.30.

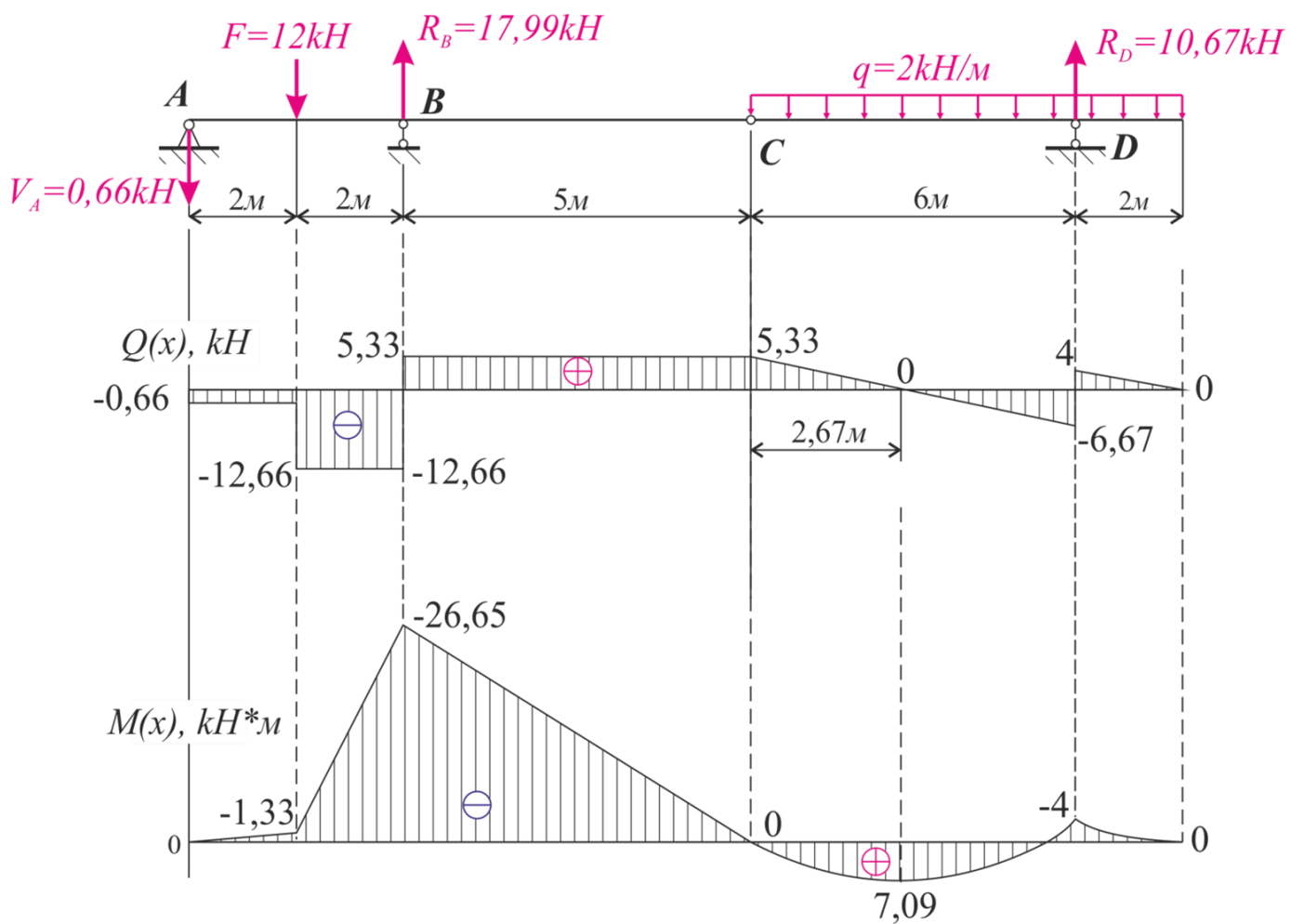


Рисунок 30

5. Строим линии влияния Q_1, M_1 для сечения 1, рис.31.

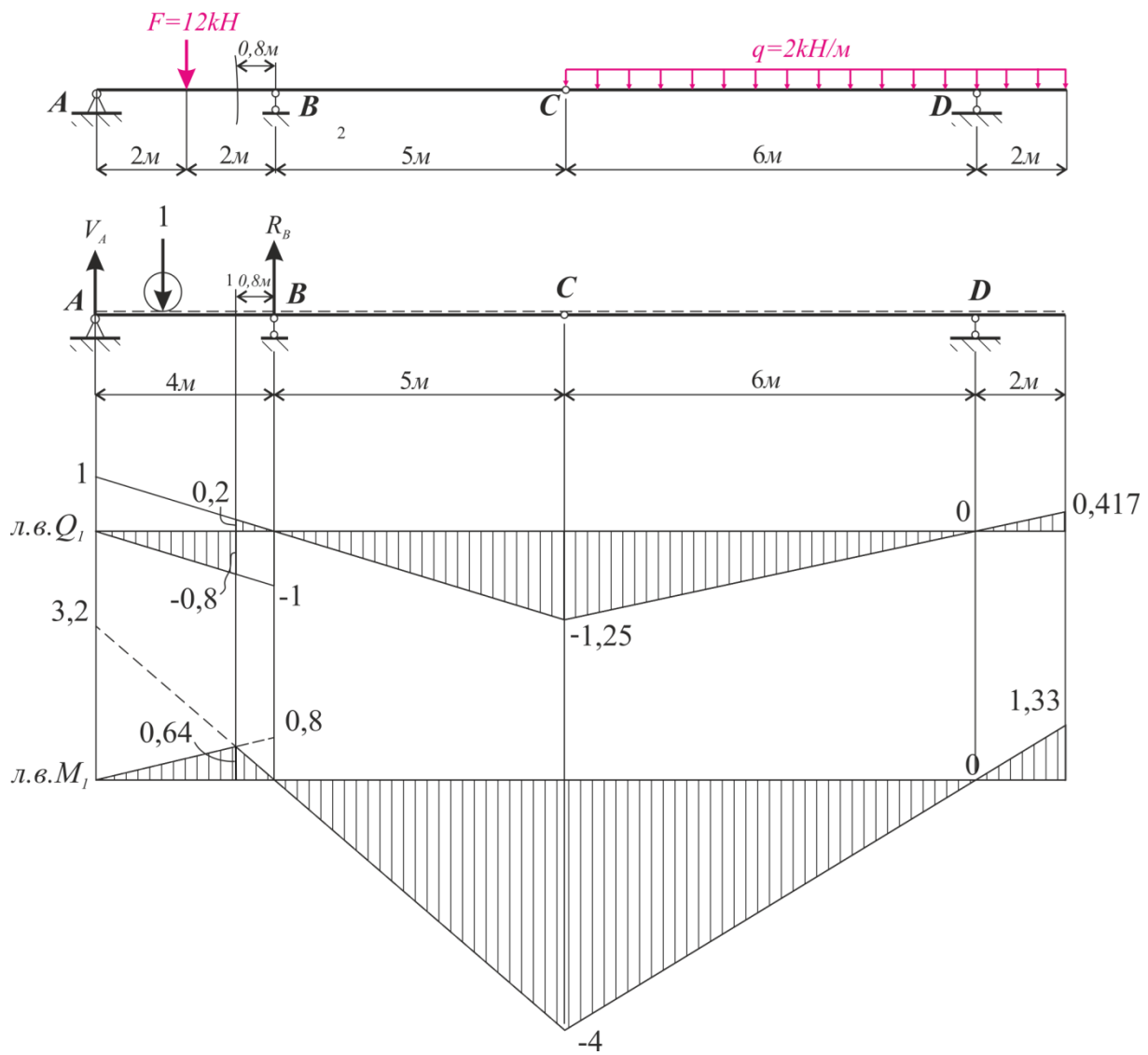


Рисунок 31

Далее, строим линии влияния Q_2, M_2 для сечения 2, рис.32.

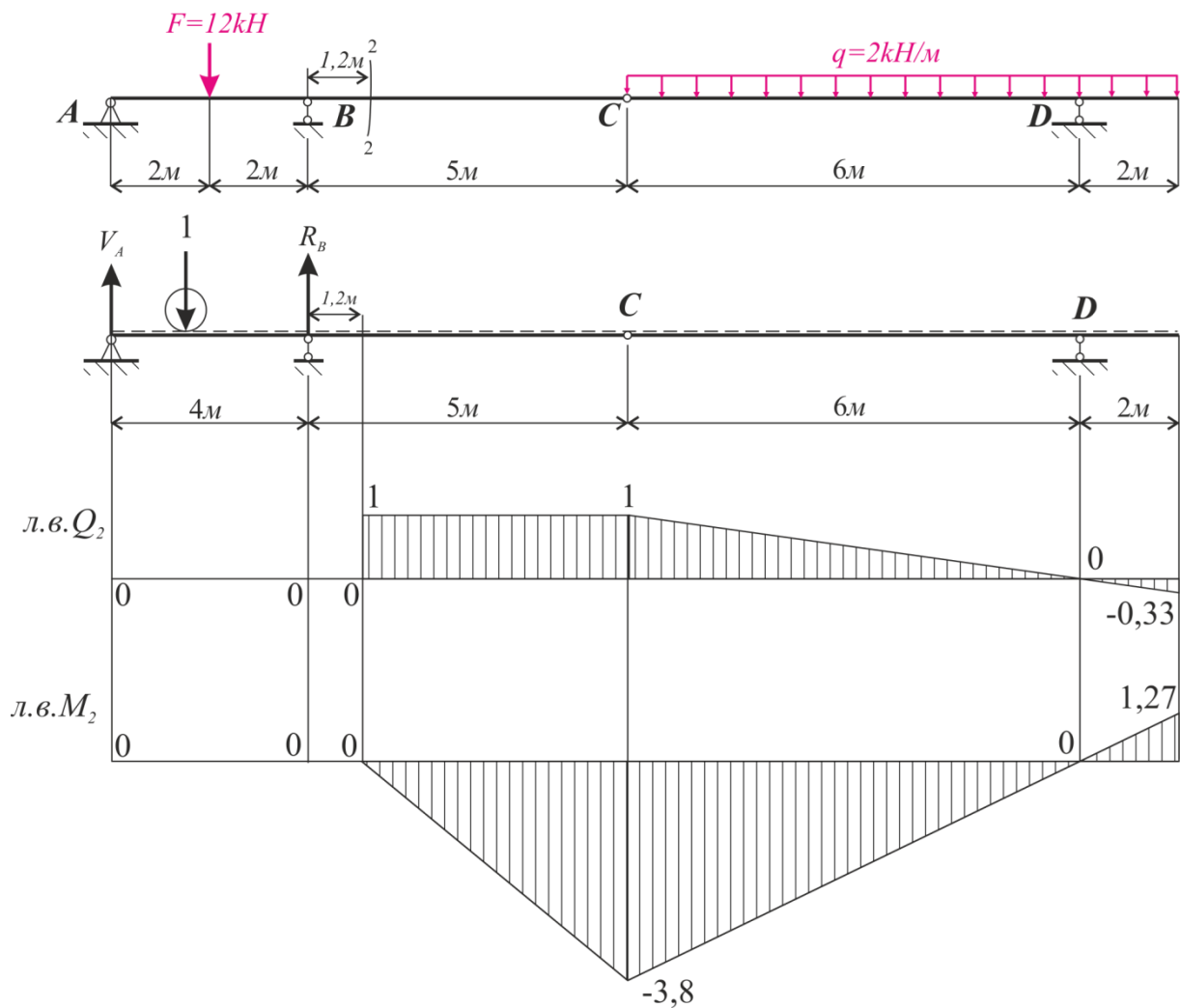


Рисунок 32

6. Определим используя линии влияния Q_1, M_1 (рис. 31) значения внутренних усилий в сечении 1.

$$Q_1 = 12 \cdot (-0,5) + \frac{1}{2}(-1,25) \cdot 6 \cdot 2 + 0,417 \cdot 2 \cdot 2 = -12,666 \text{ kH}.$$

$$M_1 = 12 \cdot 0,4 + \frac{1}{2}((-4) \cdot 6 \cdot 2 + 1,33 \cdot 2 \cdot 2) = -16,54 \text{ kH} \cdot \text{м}.$$

Определим используя линии влияния Q_2, M_2 (рис. 32) значения внутренних усилий в сечении 2.

$$Q_2 = \frac{1}{2}(1 \cdot 6 \cdot 2 + (-0,33) \cdot 2 \cdot 2) = 5,34 \text{ kH}.$$

$$M_2 = \frac{1}{2}(-3,8) \cdot 6 \cdot 2 + 1,27 \cdot 2 \cdot 2 = -20,26 \text{ kH} \cdot \text{м}.$$

Сопоставляя полученные величины внутренних усилий с значениями на построенных ранее эпюрах убеждаемся в их практической идентичности.

7. Построим эпюру изгибающих моментов для главной балки используя матрицу влияния моментов L_M . Вектор моментов в узловых точках балки определяется по формуле $\vec{M} = L_M \vec{P}$.

Немного теории...

Векторные величины могут представляться в матричном виде. Вспомним теорию матриц, согласно которой, произведением АВ матрицы А на матрицу В называется матрица С, каждый элемент которой c_{ij} есть сумма произведений соответственных элементов i – строки матрицы А и j – го столбца матрицы В.

Произведение содержит столько же строк, сколько их в первом сомножителе, и столько столбцов, сколько их во втором сомножителе.

$$\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 d_1 e_1 \\ c_2 d_2 e_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 c_1 + b_1 c_2 a_1 d_1 + b_1 d_2 a_1 e_1 + b_1 e_2 \\ a_2 c_1 + b_2 c_2 a_2 d_1 + b_2 d_2 a_2 e_1 + b_2 e_2 \\ a_3 c_1 + b_3 c_2 a_3 d_1 + b_3 d_2 a_3 e_1 + b_3 e_2 \end{vmatrix}$$

Таким образом, c_{ij} есть скалярное произведение i – строки матрицы А и j – го столбца матрицы В.

Учтем, что скалярное произведение матрицы А на столбец матрицы В возможно только при условии, что они имеют одинаковое число элементов, т.е. число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В. Заметим, что в общем случае произведение матриц не обладает переместительным свойством.

Разобьем балку девятью узлами, соответствующими девяти сечениям с ненулевыми координатами, отсчитанными от левой опоры. Последовательно перемещая единичную нагрузку по девяти узлам, получим ординаты линий влияния, соответствующих коэффициентам матрицы влияния моментов $\|M\|$. Каждое семейство ординат линии влияния моментов для одного положения единичной нагрузки на балке будет определять одну строку в данной матрице., см. рис.33.

Количество строк в матрице сил $\|P\|$ должно быть равно количеству столбцов матрицы влияния моментов, а количество столбцов определяется вариантами загрузений. В нашем случае число загрузений — одно, соответственно, столбец будет тоже один.

Последовательность коэффициентов в этом столбце отражают силы, действующие по соответствующим узлам, см. рис.33.

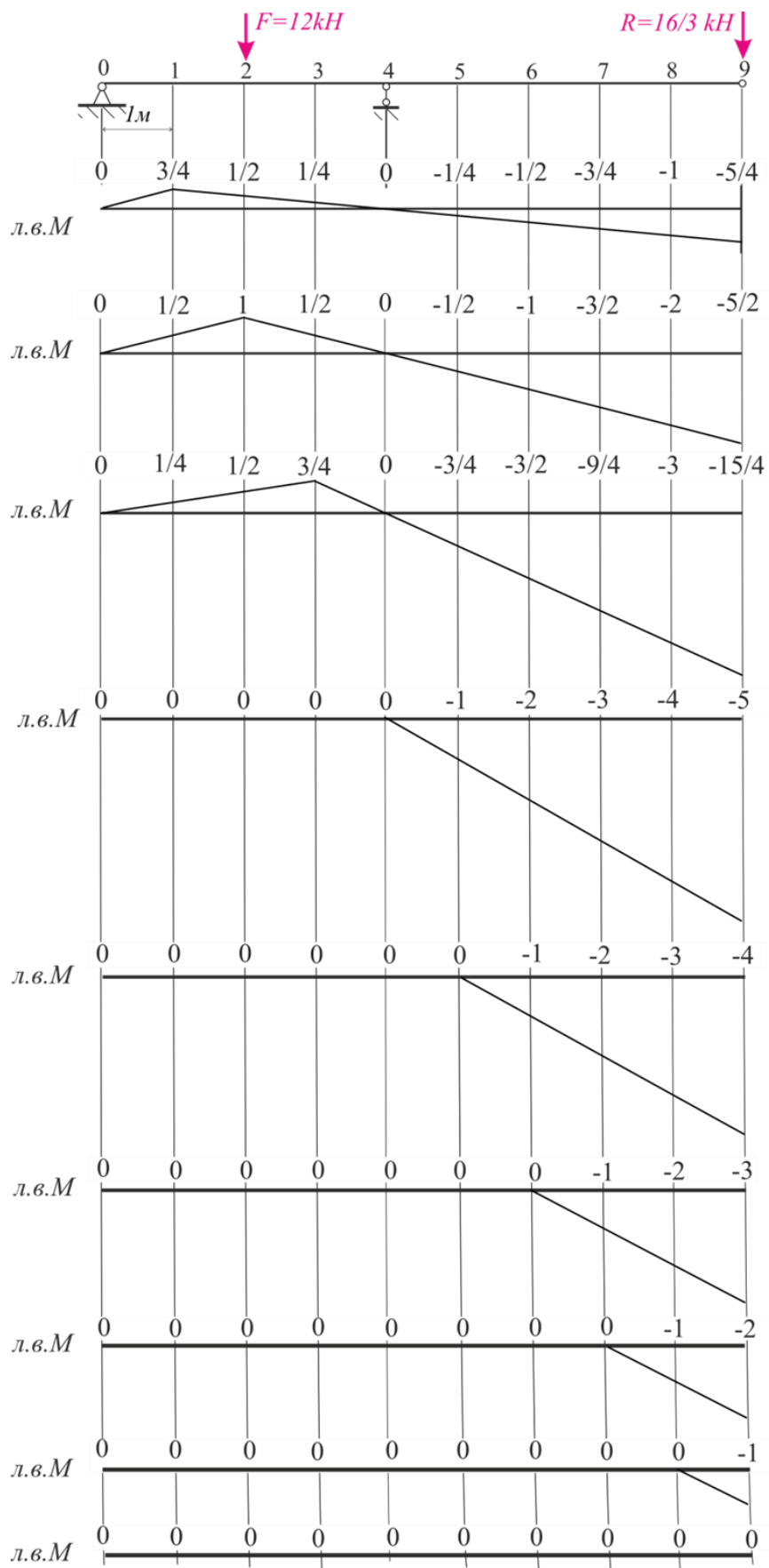


Рисунок 33

Таким образом:

$$\begin{aligned}
& \begin{matrix} 3/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16/3 \end{matrix} \\
\|M\| = \|L_M\| \cdot \|P\| = & \begin{matrix} (3/4) \cdot 0 + (1/2) \cdot 12 + (1/4) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1/4) \cdot 0 + (-1/2) \cdot 0 + (-3/4) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-5/4) \cdot 16/3 \\ (1/2) \cdot 0 + 1 \cdot 12 + (1/2) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1/2) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-3/2) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-5/2) \cdot 16/3 \\ (1/4) \cdot 0 + (1/2) \cdot 12 + (3/4) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-3/4) \cdot 0 + (-3/2) \cdot 0 + (-9/4) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + (-15/4) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + (-5) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 0 + (-4) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot 0 + (-3) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 16/3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 12 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 16/3 \end{matrix} \\
\|M\| = & \begin{matrix} -0,663 \\ -1,33 \\ -14 \\ -26,67 \\ \Rightarrow \|M\| = \|-21,33\| \\ -16 \\ -10,67 \\ -5,33 \\ 0 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Убеждаемся в соответствии полученных значений коэффициентов матрицы моментов значениям эпюры изгибающих моментов для главной балки, полученным нами ранее.

3. РАСЧЕТ ФЕРМЫ С ОДНОЯРУСНЫМ ШПРЕНГЕЛЕМ

Рассмотрим пример расчета шпренгельной фермы согласно, следующего задания:

1. Аналитически определить усилия в указанных стержнях фермы, рисунок 34.
2. Построить линии влияния в тех же стержнях
3. Определить по линиям влияния усилия в указанных стержнях
4. Сравнить усилия в стержнях, полученные аналитически и по линиям влияния.

Таблица 3

d, м	2,0
F, кН	10

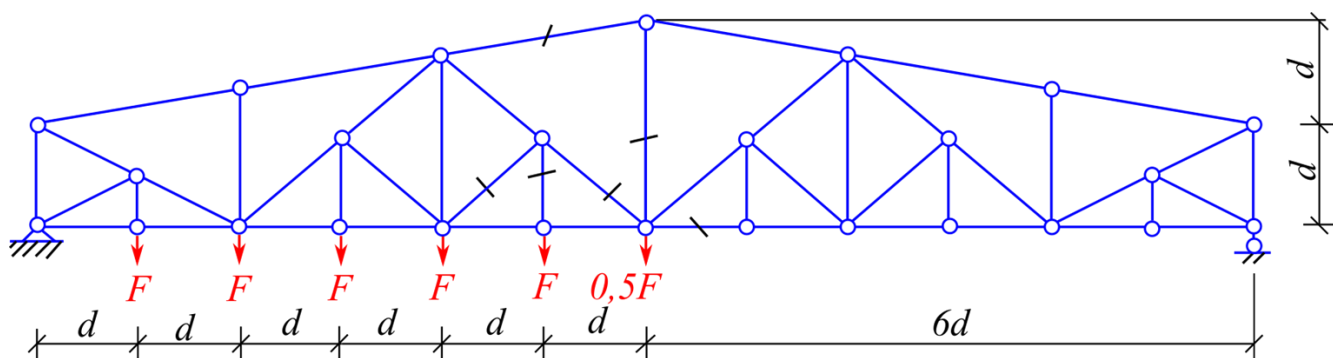


Рисунок 34 - Исходная схема

1. Ферма является шпренгельной с одноярусными шпренгелями. Произведем кинематический анализ. Определим степень кинематической свободы W данной конструкции:

$W = 2U - C_{\phi} - C_{оп}$, где $U = 26$ - общее число узлов фермы; $C_{\phi} = 49$ - число стержней фермы; $C_{оп} = 3$ - число опорных стержней.

$W = 2 \cdot 26 - 49 - 3 = 0$. Таким образом необходимое условие геометрической неизменяемости системы удовлетворяется. Дополнительный анализ конструкции однозначно определяет геометрическую неизменяемость системы.

Индексируем узлы исходной схемы, и инициализируем ее элементы, рис. 35.

С учетом индексации, по условию задачи необходимо определить усилия $O_{3-4}, D_{5'-9}, D_{5'-10}, V_{5'-6'}, V_{4-10}, U_{8'-10}$.

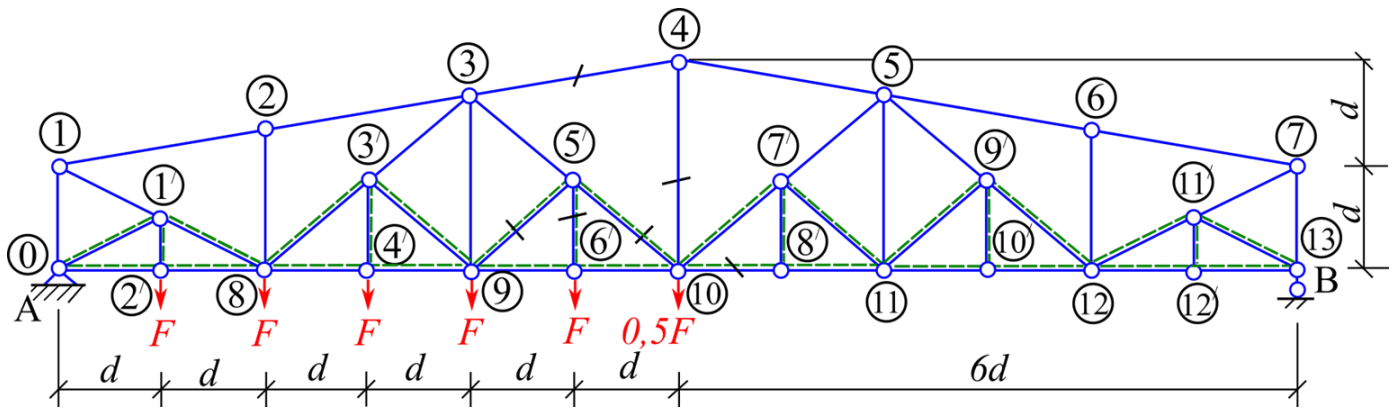


Рисунок 35 - Индексация узлов

Установим типы элементов, соответствующих указанным усилиям. Стержни с усилиями O_{3-4}, V_{4-10} являются элементами первой категории (относится только к основной системе), стержни с усилиями V_{5-6} и D_{5-9} относятся ко 2 категории (принадлежат только шпренгелям). Стержни с усилиями D_{5-10} и U_{8-10} относятся к 3 категории — одновременно принадлежат как шпренгельной, так и основной частям фермы. Для получения составляющих данных расчета, отбрасывая из исходной схемы шпренгельную часть, получим основную схему, рисунок 36.

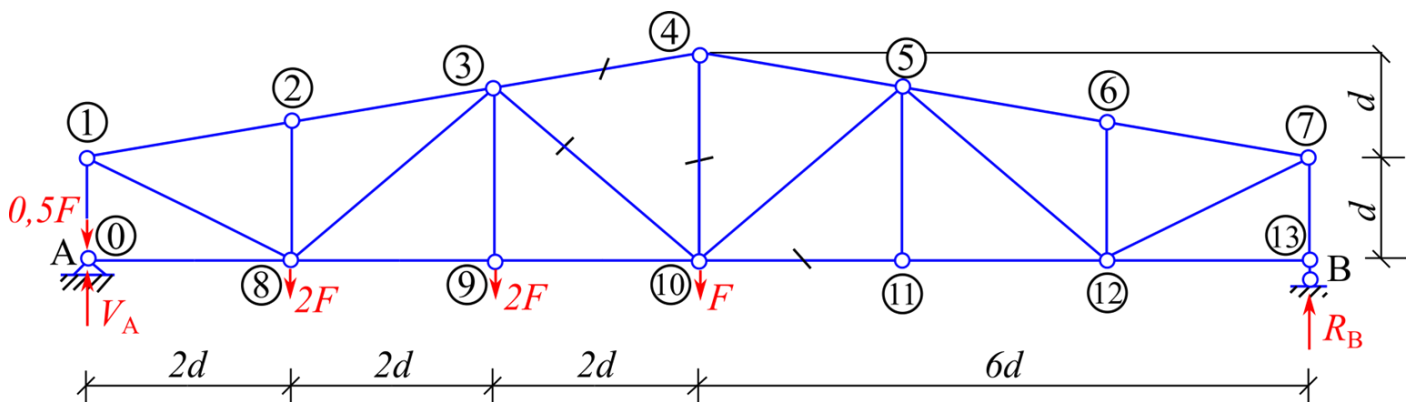


Рисунок 36 - Основная схема

Определим опорные реакции в основной схеме. Для этого используем уравнения статического равновесия:

$$\sum M_A = 0: 2F \cdot 2d + 2F \cdot 4d + F \cdot 6d - R_B \cdot 12d = 0 \Rightarrow R_B = 1,5F = 1,5 \cdot 10$$

$$\Rightarrow R_B = 15 \text{ kH.}$$

$$\sum M_B = 0: (V_A - 0,5F) \cdot 12d - 2F \cdot 10d - 2F \cdot 8d - F \cdot 6d = 0 \Rightarrow V_A = 4F$$

$$= 4 \cdot 10 \Rightarrow V_A = 40 \text{ kH.}$$

Проверка: $\sum Y = 0: V_A + R_B - 5,5F = 0 \Rightarrow 40 + 15 - 55 = 0$ истинно.

1.1 Разрежем третью панель рисунок 37 а) и определим аналитически усилия O_{3-4}^o, D_{3-10}^o , рассматривая условия равновесия части фермы, лежащей левее сечения 1-1, рисунок 37 б).

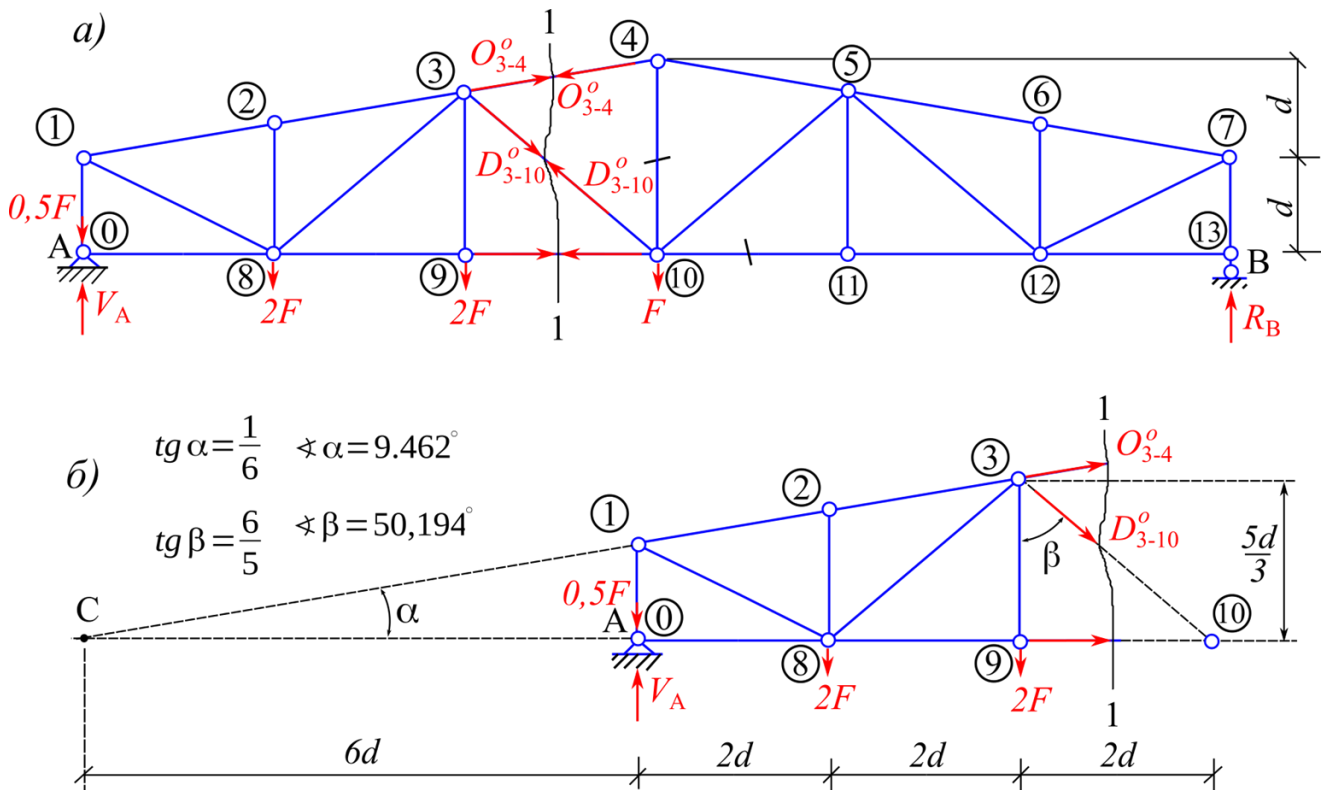


Рисунок 37

$$\sum_{\text{слева}} M_C(\vec{F}_i) = 0: (0,5F - V_A) \cdot 6d + 2F(6d + 2d) + 2F(6d + 4d) + \dots$$

$$\dots + D_{3-10}^o(\cos\beta \cdot 10d + \sin\beta \cdot 3,333) = 0 \Rightarrow$$

$$D_{3-10}^o = -19,5256kH.$$

$$\sum_{\text{слева}} M_{10}(\vec{F}_i) = 0: (V_A - 0,5F) \cdot 6d - 2F \cdot 4d - 2F \cdot 2d + \dots$$

$$\dots + O_{3-4}^o(\cos\alpha \cdot 3,333 + \sin\alpha \cdot 2d) = 0 \Rightarrow$$

$$O_{3-4}^o = O_{3-4} = -45,62kH.$$

1.2 Для определения усилия V_{4-10} в основной системе (рис. 38 а) вырежем узел 4 сечением 2-2 и рассмотрим условия его равновесия, рис.38 б):

$$\sum X = 0: -O_{3-4}^o \cdot \cos\alpha + O_{4-5}^o \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow O_{3-4}^o = O_{4-5}^o.$$

$$\sum Y = 0: O_{3-4}^o \cdot \sin\alpha + O_{4-5}^o \cdot \sin\alpha - V_{4-10}^o = 0 \Rightarrow$$

$$V_{4-10}^o = V_{4-10} = 15kH.$$

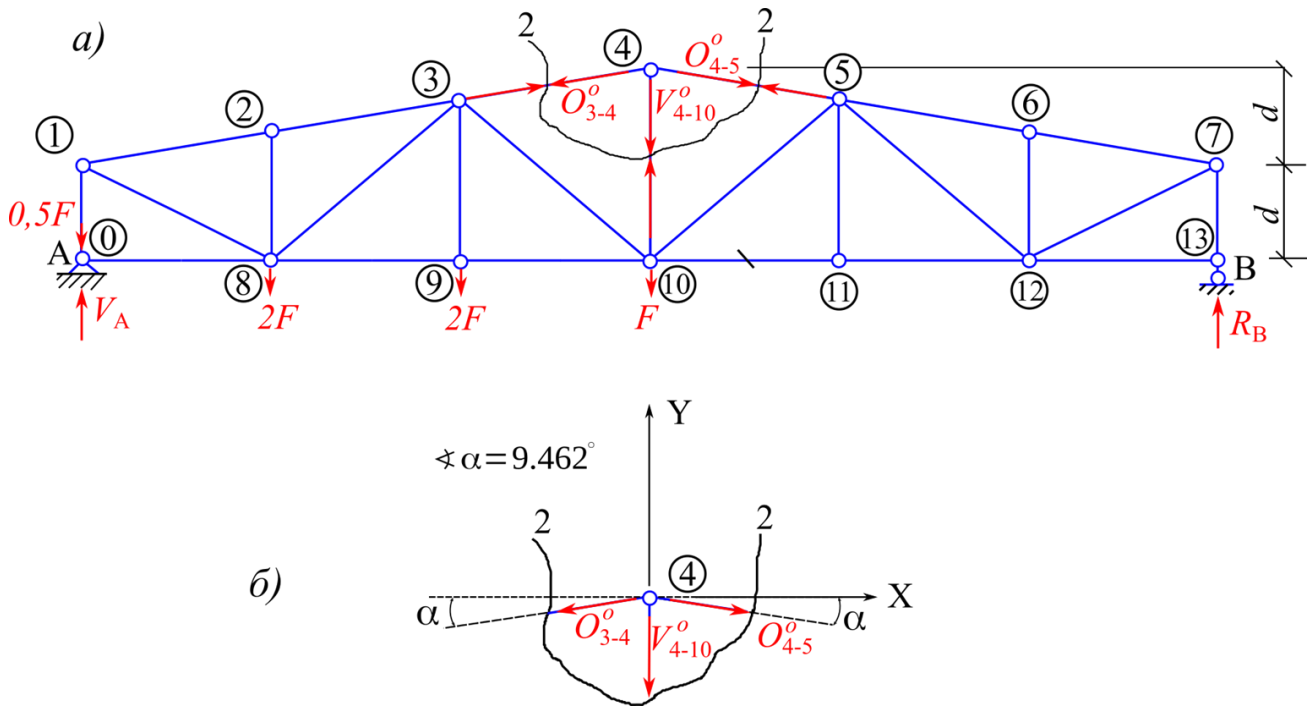


Рисунок 38

1.3 Разрежем четвертую панель рисунок 39 а) и определим аналитически усилие U_{10-11}^o , рассматривая условия равновесия части фермы, лежащей правее сечения 3-3, рисунок 39 б).

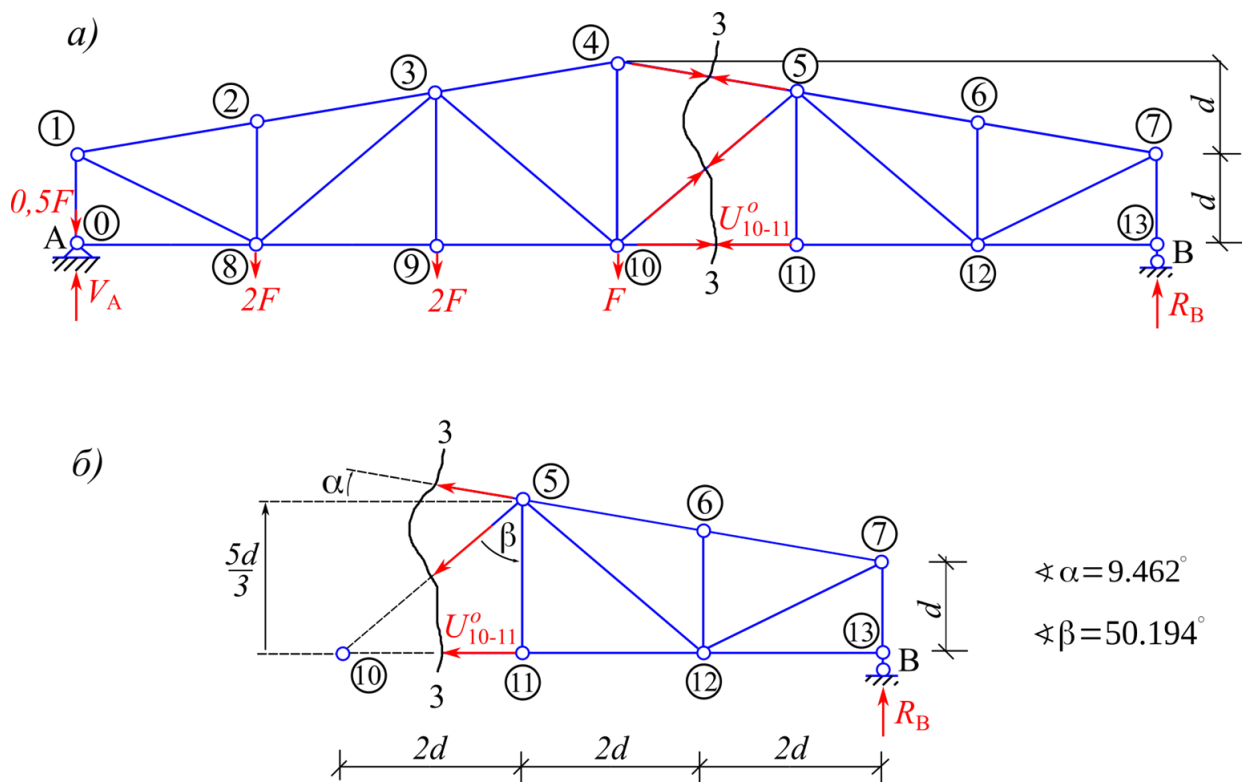


Рисунок 39

справа

$$\sum M_5(\vec{F}_i) = 0: U_{10-11}^o \cdot \frac{5d}{3} - R_B \cdot 4d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^o = 36kH.$$

1.4 Рассчитаем необходимые усилия в шпренгельной части третьей панели, рисунок 40.

Изображаем расчетную схему шпренгеля, рисунок 40 а).

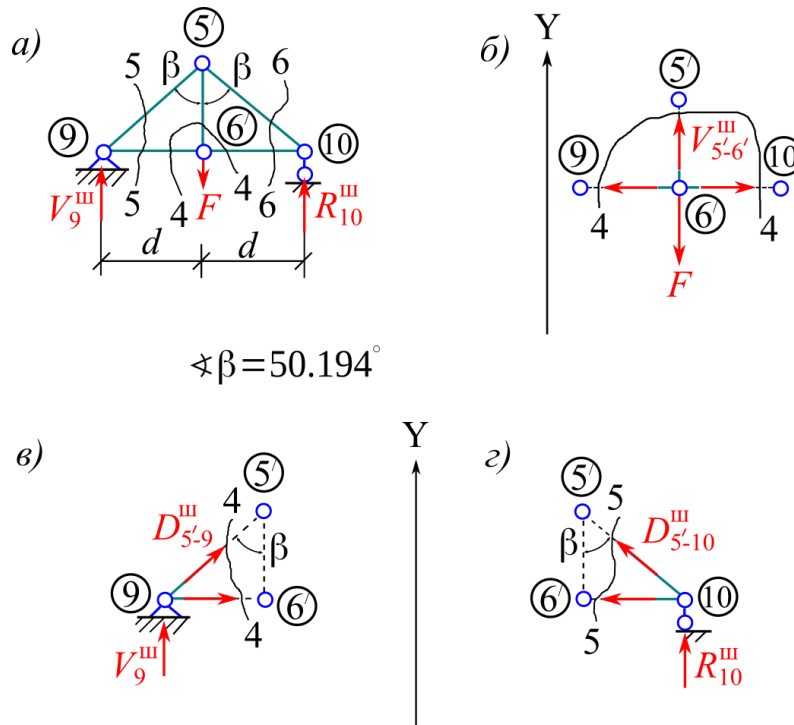


Рисунок 40

В силу симметричного характера действия внешней нагрузки, вертикальные реакции в опорах фермочки равны между собой: $V_9^{\text{III}} = R_{10}^{\text{III}} = 0,5F = 5kH$, рис.40 а).

Вырежем узел 6 и рассмотрим его условие равновесия, рис.40 б):

$$\sum Y = 0: V_{5-6}^{\text{III}} - F = 0 \Rightarrow V_{5-6}^{\text{III}} = 10kH.$$

Значение усилия D_{5-9}^{III} определим, рассматривая условие равновесия систем трех сходящихся сил, рисунок 40 в):

$$\sum Y = 0: D_{5-9}^{\text{III}} \cdot \cos\beta + V_9^{\text{III}} = 0 \Rightarrow D_{5-9}^{\text{III}} = -7,81kH.$$

По аналогии, определим усилие D_{5-10}^{III} рассматривая условия равновесия систем трех сходящихся сил, рисунок 40 г):

$$\sum Y = 0: D_{5-10}^{\text{III}} \cdot \cos\beta + R_{10}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow D_{5-10}^{\text{III}} = -7,81kH.$$

1.5 Рассмотрим шпренгельную часть четвертой панели, см. рис. 35.

Так как отсутствует местная нагрузка (не приложена внешняя сила в узле 8'), то шпренгельная фермочка четвертой панели оказывается ненагруженной, поэтому $U_{8'-10}^{\text{III}} = 0$.

1.6 С учетом типа стержней, рассчитаем их усилия в окончательном варианте:

Усилия в исследуемых стержнях первой категории (принадлежащие к основной системе) переписываются без изменения, т.е.:

$$\begin{aligned} O_{3-4}^o &= O_{3-4} = -45,62 \text{ kH}. \\ V_{4-10}^o &= V_{4-10} = 15 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Усилия в исследуемых стержнях 2 категории (принадлежащие только к шпренгелям) переписываются также без изменений, т.е.:

$$\begin{aligned} D_{5'-9}^{\text{III}} &= D_{5'-9} = -7,81 \text{ kH}. \\ V_{5'-6'}^{\text{III}} &= V_{5'-6'} = 10 \text{ kH}. \end{aligned}$$

Усилия в стержнях 3 категории (принадлежащие одновременно к основной и шпренгельной системам) записываются как алгебраические суммы их составляющих усилий в этих системах:

$$\begin{aligned} D_{5'-10} &= D_{3-10}^o + D_{5'-10}^{\text{III}} = -19,526 - 7,81 \Rightarrow D_{5'-10} = -27,336 \text{ kH}. \\ U_{8'-10} &= U_{10-11}^o + U_{8'-10}^{\text{III}} = 36 + 0 \Rightarrow U_{8'-10} = 36 \text{ kH}. \end{aligned}$$

2. Построим линии влияния исследуемых стержней.

2.1 Строим линию влияния для стержня с усилием O_{3-4} , рисунок 41. Так как этот стержень относится к элементам первой категории, то для построения его линии влияния достаточно построить линию влияния O_{3-4}^o для основной системы, рисунок 41 а).

Для этого вновь разрежем третью панель сечением 1-1 и рассмотрим условия равновесия относительно моментной точки данного усилия 10 слева и справа, рисунок 41 б).

При положении единичной подвижной нагрузки слева от разрезанной панели:

справа

$$\sum M_{10}(\vec{F}_i) = 0: -O_{4-5}^o \cdot (\cos\alpha \cdot 3,333 + \sin\alpha \cdot 2d) - R_B \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$$O_{4-5}^o = -3,041R_B - \text{уравнение левой ветвил. в. } O_{4-5}^o.$$

При положении единичной подвижной нагрузки справа от разрезанной панели:

слева

$$\sum M_{10}(\vec{F}_i) = 0: O_{4-5}^o \cdot \cos\alpha \cdot 2d - V_A \cdot 6d = 0 \Rightarrow$$

$O_{4-5}^o = -3,041V_A$ - уравнение правой ветви л.в. O_{4-5}^o . Выполняем построения этих ветвей, рисунок 41 в). Убеждаемся в том, что передаточная прямая для данного усилия латентна.

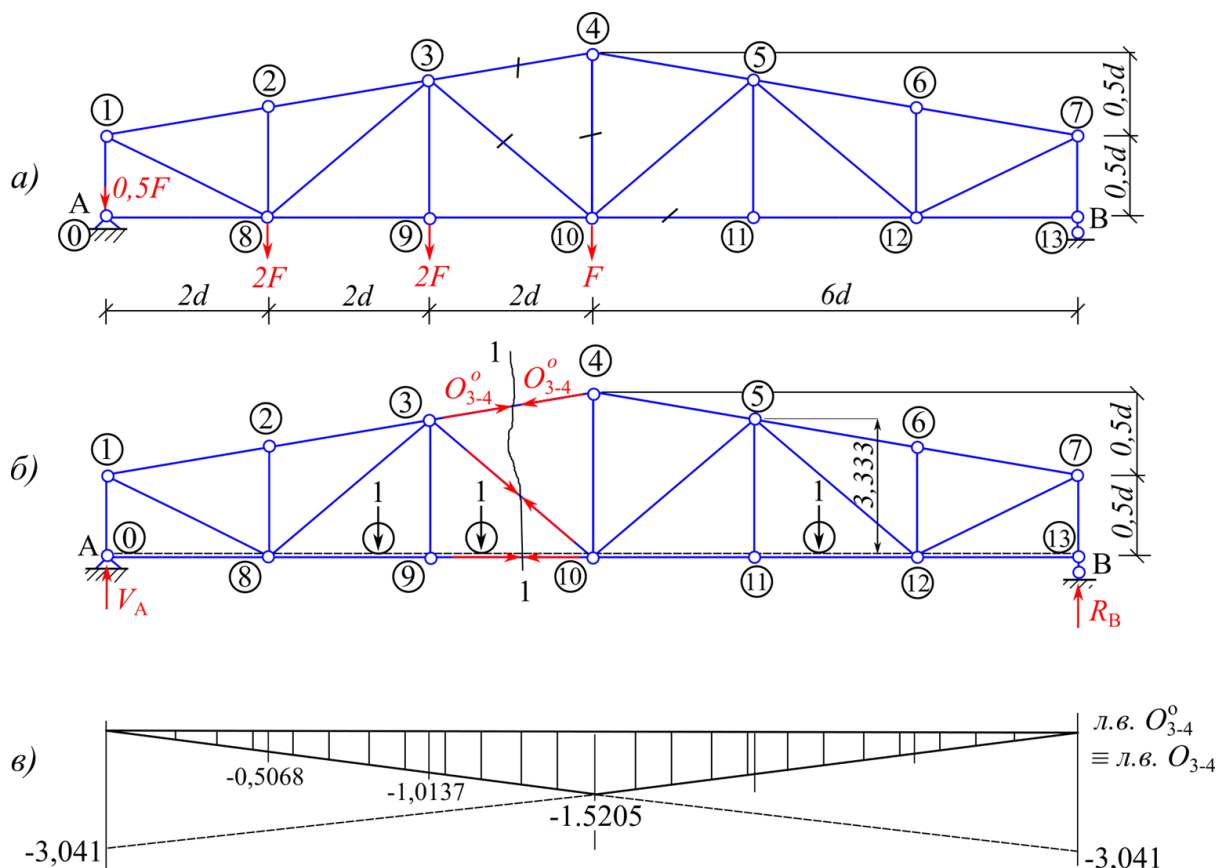


Рисунок 41: а) — исходная схема; б) -основная схема;
в) линия влияния $O_{4-5}^o \equiv O_{3-4}^o$

2.2 Построим линию влияния усилия в стойке V_{4-10} . Так как этот стержень относится к элементам первой категории, то в таком случае, достаточно построить линию влияния V_{4-10}^o для основной системы.

Для этого вырежем узел 4 сечением 2-2 из основной системы, рис. 42 и рис.43 а, б). Рассмотрим условие его равновесия при движении единичной подвижной нагрузки по нижнему ездовому поясу, рис.43 б).

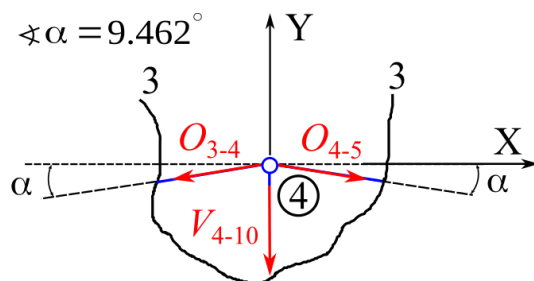


Рисунок 42

$$\sum X = 0: -O_{3-4}^o \cdot \sin \alpha + O_{4-5}^o \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow O_{3-4}^o = O_{4-5}^o.$$

$$\sum Y = 0: -2\sin\alpha \cdot O_{3-4}^0 - V_{4-10}^0 = 0 \Rightarrow V_{4-10}^0 = -0,32878 \cdot O_{3-4}^0$$

Из последнего уравнения следует, что для построения линии влияния V_{4-10} используется ранее построенная л. в. O_{3-4}^0 , рис. 43 в), все ординаты которой умножаются на коэффициент $-0,32878$, рис. 43 з).

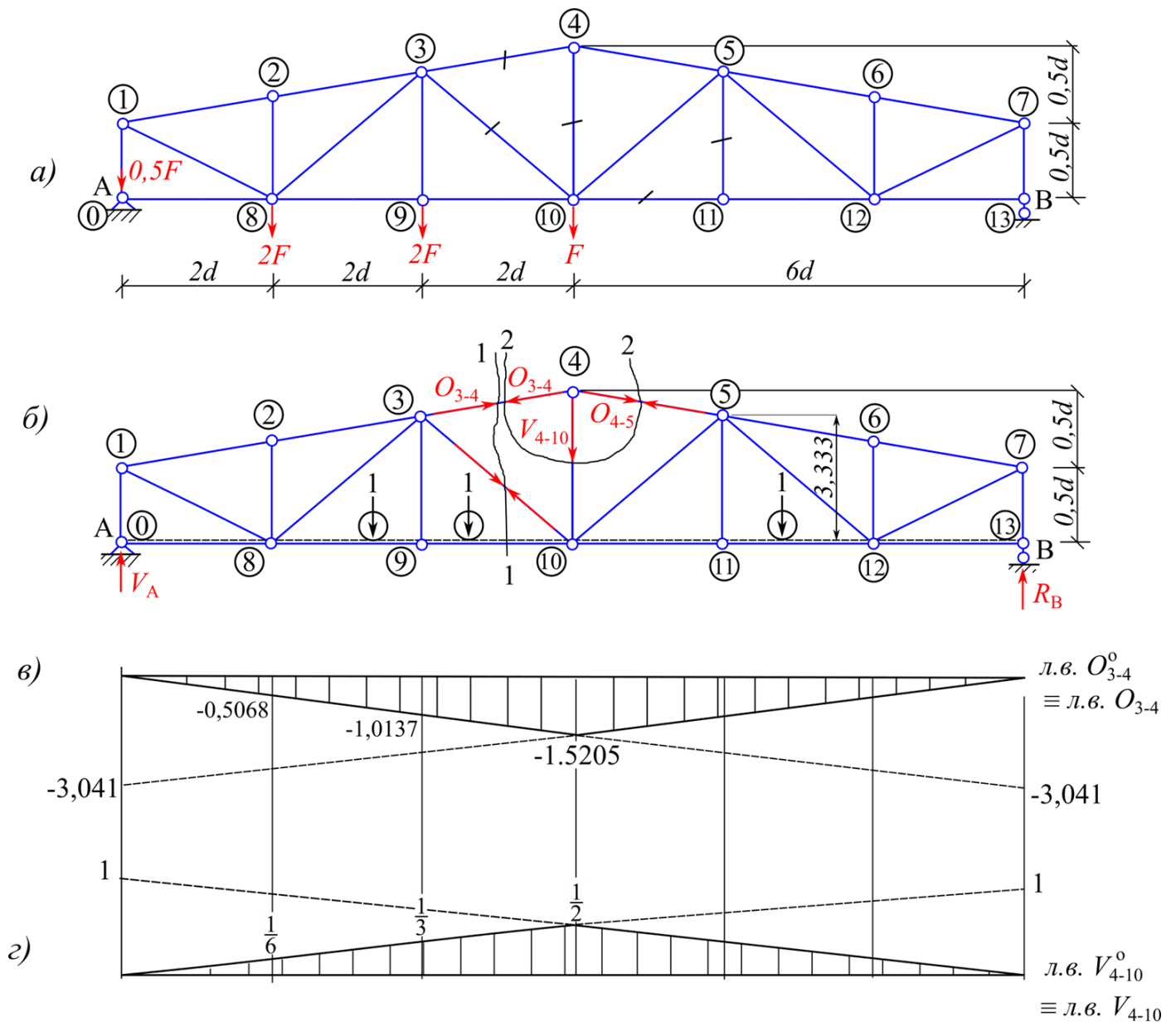


Рисунок 43

2.3 Построим линии влияния для элементов, входящих в шпренгель 3 панели, см. рисунок 44, а).

Определим аналитические выражения для построения линий влияния усилий $V_{5'-6'}$, $D_{5'-9}$, $D_{5'-10}$. Вырежем сечением 4-4 узел 6' шпренгельной фермочки, рис. 44. б) и рассмотрим его условия равновесия.

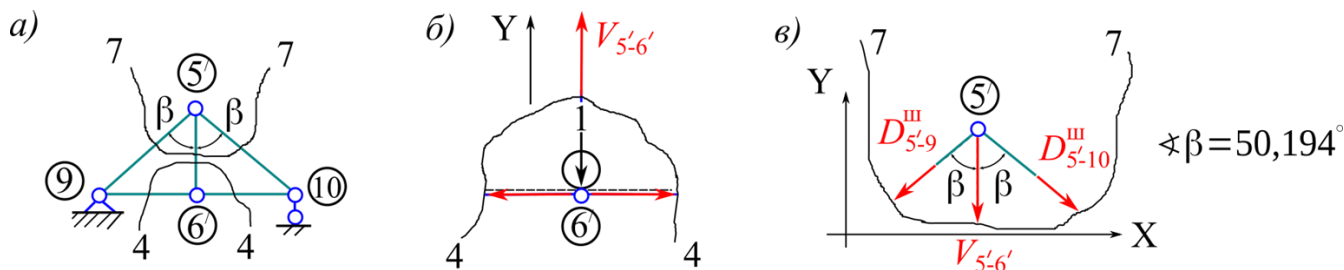


Рисунок 44

Аналитическое выражение для линии влияния элемента второй категории л. в. $V_{5'-6'}^{\text{III}}$, при нахождении единичной подвижной нагрузки вне узла 6':

$$V_{5'-6'}^{\text{III}} = V_{5'-6'} = 0.$$

Аналитическое выражение для линии влияния элемента второй категории л. в. $V_{5'-6'}^{\text{III}}$, при нахождении единичной подвижной нагрузки над узлом 6':

$$\sum Y = 0: -1 + V_{5'-6'}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow V_{5'-6'}^{\text{III}} = V_{5'-6'} = 1.$$

Графически данная линия влияния представлена на рис. 46 д).

Вырежем сечением 7-7 узел 5' шпренгельной фермочки, рис. 34 в) и рассмотрим его условия равновесия.

Аналитическое выражение для линий влияний $D_{5'-9}^{\text{III}}$, $D_{5'-10}^{\text{III}}$ определяются как:

$$\sum X = 0: -D_{5'-9}^{\text{III}} \cdot \sin\beta + D_{5'-10}^{\text{III}} \cdot \sin\beta = 0 \Rightarrow D_{5'-9}^{\text{III}} = D_{5'-10}^{\text{III}}.$$

$$\sum Y = 0: -2D_{5'-9}^{\text{III}} \cdot \cos\beta - V_{5'-6'}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow D_{5'-9}^{\text{III}} = D_{5'-10}^{\text{III}} = -0,781V_{5'-6'}^{\text{III}}.$$

Из последнего выражения следует, что для построения линий влияния л. в. $D_{5'-9}^{\text{III}}$ и $D_{5'-10}^{\text{III}}$ используется ранее построенная л. в. $V_{5'-6'}^{\text{III}}$, рис. 46 д), все ординаты которой умножаются на коэффициент $-0,781$, рис. 46 е).

Учитывая, что элемент усилия $D_{5'-9}^{\text{III}}$ принадлежит ко второй категории, то

$$D_{5' - 9}^{\text{III}} = D_{5' - 9} = -0,781V_{5' - 6'}^{\text{III}}.$$

Графически данная линия влияния представлена на рис. 46 е).

2.4 Построим линии влияния для элементов, входящих в шпренгель четвертой панели, см. рисунок 45, а).

2.4.1 Определим аналитические выражения для построения линии влияния усилия $U_{8' - 10}^{\text{III}}$. Перед этим придется построить вспомогательные линии влияния усилий $V_{7' - 8'}^{\text{III}}, D_{7' - 10}^{\text{III}}$.

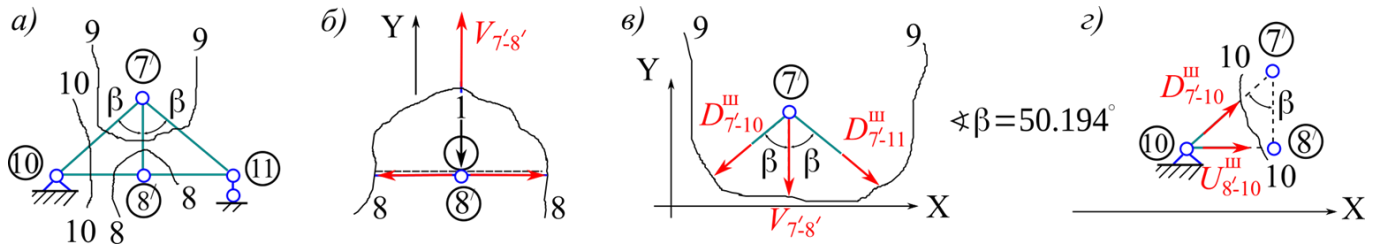


Рисунок 45

Вырежем сечением 8-8 узел 8' шпренгельной фермочки, рис. 45 б) и рассмотрим его условия равновесия.

Аналитическое выражение для линии влияния элемента второй категории л. в. $V_{7' - 8'}^{\text{III}}$, при нахождении единичной подвижной нагрузки вне узла 8':

$$V_{7' - 8'}^{\text{III}} = V_{7' - 8'} = 0.$$

Аналитическое выражение для линии влияния элемента второй категории л. в. $V_{7' - 8'}^{\text{III}}$, при нахождении единичной подвижной нагрузки над узлом 8':

$$\sum Y = 0: -1 + V_{7' - 8'}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow V_{7' - 8'}^{\text{III}} = V_{7' - 8'} = 1.$$

Графически данная линия влияния представлена на рис. 47 д).

2.4.2. Вырежем сечением 9-9 узел 7' шпренгельной фермочки, рис. 45 в) и рассмотрим его условия равновесия.

Аналитическое выражение для линии влияния л. в. $D_{7' - 10}^{\text{III}}$ определяются как:

$$\sum X = 0: -D_{7' - 10}^{\text{III}} \cdot \sin\beta + D_{7' - 11}^{\text{III}} \cdot \sin\beta = 0 \Rightarrow D_{7' - 10}^{\text{III}} = D_{7' - 11}^{\text{III}}.$$

$$\sum Y = 0: -2D_{7' - 10}^{\text{III}} \cdot \cos\beta - V_{7' - 8'}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow D_{7' - 10}^{\text{III}} = -0,781V_{7' - 8'}^{\text{III}}.$$

Из последнего выражения следует, что для построения линии влияния $D_{7/-10}^{\text{III}}$ используется ранее построенная л. в. $V_{7/-8'}$, рис. 47 д), все ординаты которой умножаются на коэффициент $-0,781$, рис. 47 е).

2.4.3. Вырежем сечением 10-10 узел 10 шпренгельной фермочки, рис. 45 з) и составим для него уравнение равновесия:

$$\sum X = 0: D_{7/-10}^{\text{III}} \cdot \sin\beta + U_{7/-11}^{\text{III}} = 0 \Rightarrow U_{8/-10}^{\text{III}} = -0,7682 D_{7/-10}^{\text{III}}.$$

Из последнего выражения следует, что для построения линии влияния $U_{8/-10}^{\text{III}}$ используется ранее построенная л. в. $D_{7/-10}^{\text{III}}$, рис. 47 е), все ординаты которой умножаются на коэффициент $-0,7682$, рис. 14 з).

2.5 Построим линию влияния в элементах третьей категории $D_{5/-10}, U_{8/-10}$. Линии влияния в элементах третьей категории строятся путем суммирования по ординатам линий влияния соответствующих элементов основных и шпренгельных систем.

2.5.1 Построим линию влияния л. в. $D_{5/-10}$, рисунок 46.

Сначала выполним построение линии влияния D_{3-10}^0 , для основной системы, рис. 46 б). Используя снова сечение 1-1, рассмотрим условия равновесия относительно моментной точки С данного усилия в основной системе, рисунок 46 б).

При положении единичной подвижной нагрузки слева от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{справа}} M_C(\vec{F}_i) = 0: -D_{3-10}^0 \cdot \cos\beta \cdot 12d - R_B \cdot 18d = 0 \Rightarrow$$

$$O_{3-4}^0 = -2,343R_B - \text{уравнение левой ветвил. в. } D_{3-10}^0.$$

При положении единичной подвижной нагрузки справа от разрезанной панели:

$$\sum_{\text{слева}} M_C(\vec{F}_i) = 0: -V_A \cdot 6d + D_{3-10}^0 \cdot (\cos\beta \cdot 10d + \sin\beta \cdot 3,333) = 0 \Rightarrow$$

$$D_{3-10}^0 = 0,7810V_A - \text{уравнение правой ветви л. в. } D_{3-10}^0.$$

Выполняем построения этих ветвей, рисунок 46 в).

При положении единичной нагрузки в пределах разрезаемой панели, форма линии влияния определится передаточной прямой.

Передаточная прямая проводится через точки пересечения соответствующих границ и ветвей линии влияния.

Наличие шпренгельной системы в рассматриваемой панели (рис. 46 *г*), учитывается алгебраическим сложением ординат линии влияния $D_{5/-10}^{\text{ш}}$, рисунок 46 *е*) и ординат линии влияния основной системы D_{3-10}^0 , рисунок 46 *в*).

Искомая линия влияния элементар. в. $D_{5/-10}$ показана на рисунке 46 *ж*).

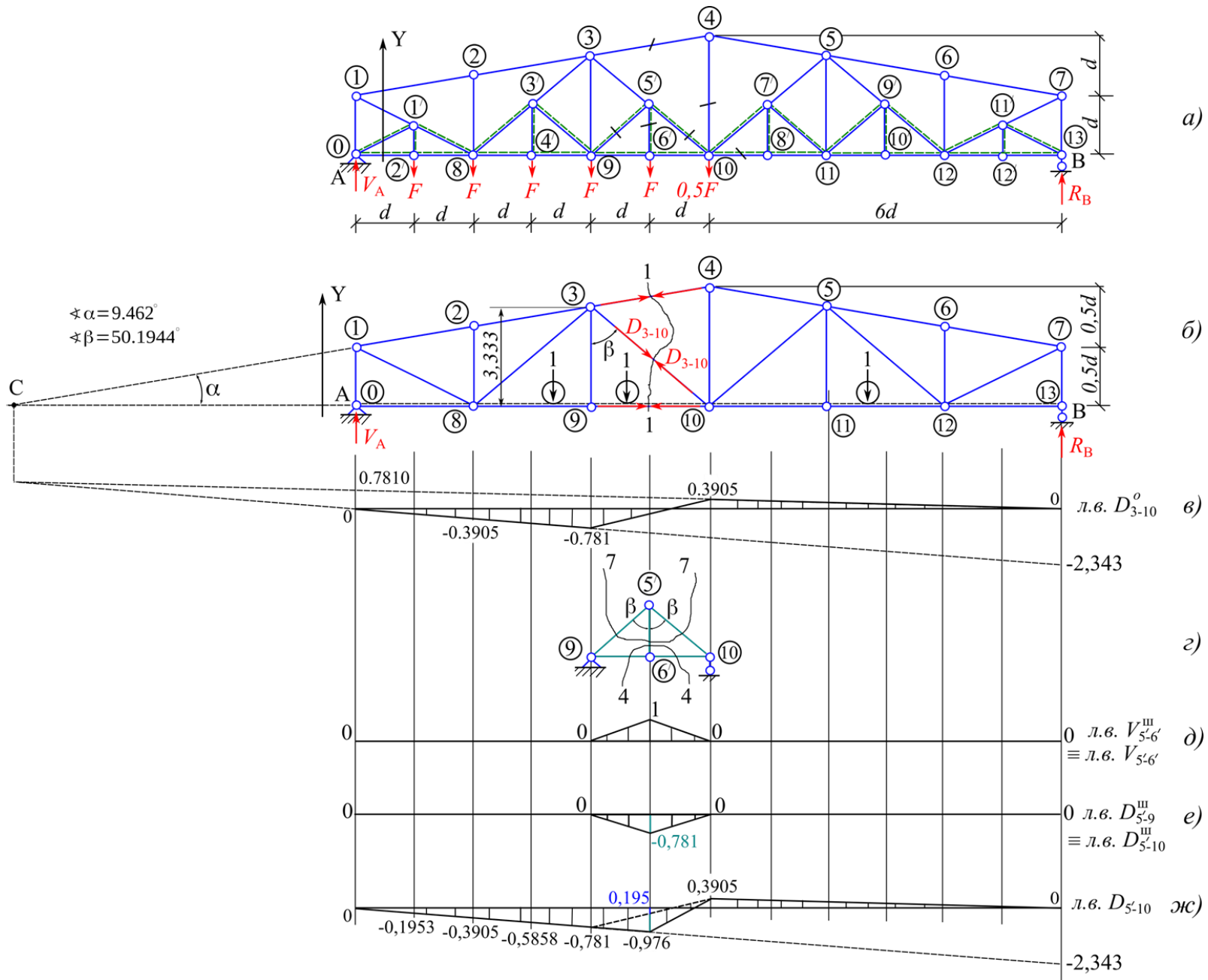


Рисунок 46

2.5.2 Построим линию влияния л. в. $U_{8/-10}$, рисунок 47.

Сначала выполним построение линию влияния U_{10-11}^o , для основной системы, рис. 47 б). Используя снова сечение 3-3, составим уравнения равновесия относительно моментной точки 5 этого усилия в основной системе.

При нахождении подвижной единичной нагрузки слева от разрезаемой сечением 3-3 панели— составляем уравнение равновесия:

$$\sum_{\text{справа}} M_5(\vec{F}_i) = 0:$$

$$U_{10-11}^o \cdot \frac{5d}{3} - R_B \cdot 4d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^o = 2,4R_B.$$

Мы получили уравнение левой ветви л. в. U_{10-11}^o .

При нахождении подвижной единичной нагрузки справа от разрезаемой сечением 4-4 панели— составляем уравнение равновесия:

$$\sum_{\text{слева}} M_5(\vec{F}_i) = 0:$$

$$-U_{10-11}^o \cdot \frac{5d}{3} + V_A \cdot 8d = 0 \Rightarrow U_{10-11}^o = 4,8V_A.$$

Мы получили уравнение правой ветви л. в. U_{10-11}^o .

Убеждаемся в том, что передаточная прямая линии влияния данного усилия латентна.

Изображаем линию влияния л. в. U_{10-11}^o , см. рис. 47 в).

Наличие шпренгельной системы в рассматриваемой панели, рис. 47 з), учитывается алгебраическим сложением ординат линии влияния основной системы U_{10-11}^o , рис. 47 в) и ординат линии влияния $U_{8/-10}^{\text{III}}$, рис. 47 ж) .

Искомая линия влияния элементар. в. $U_{8/-10}$ показана на рисунке 47 к).

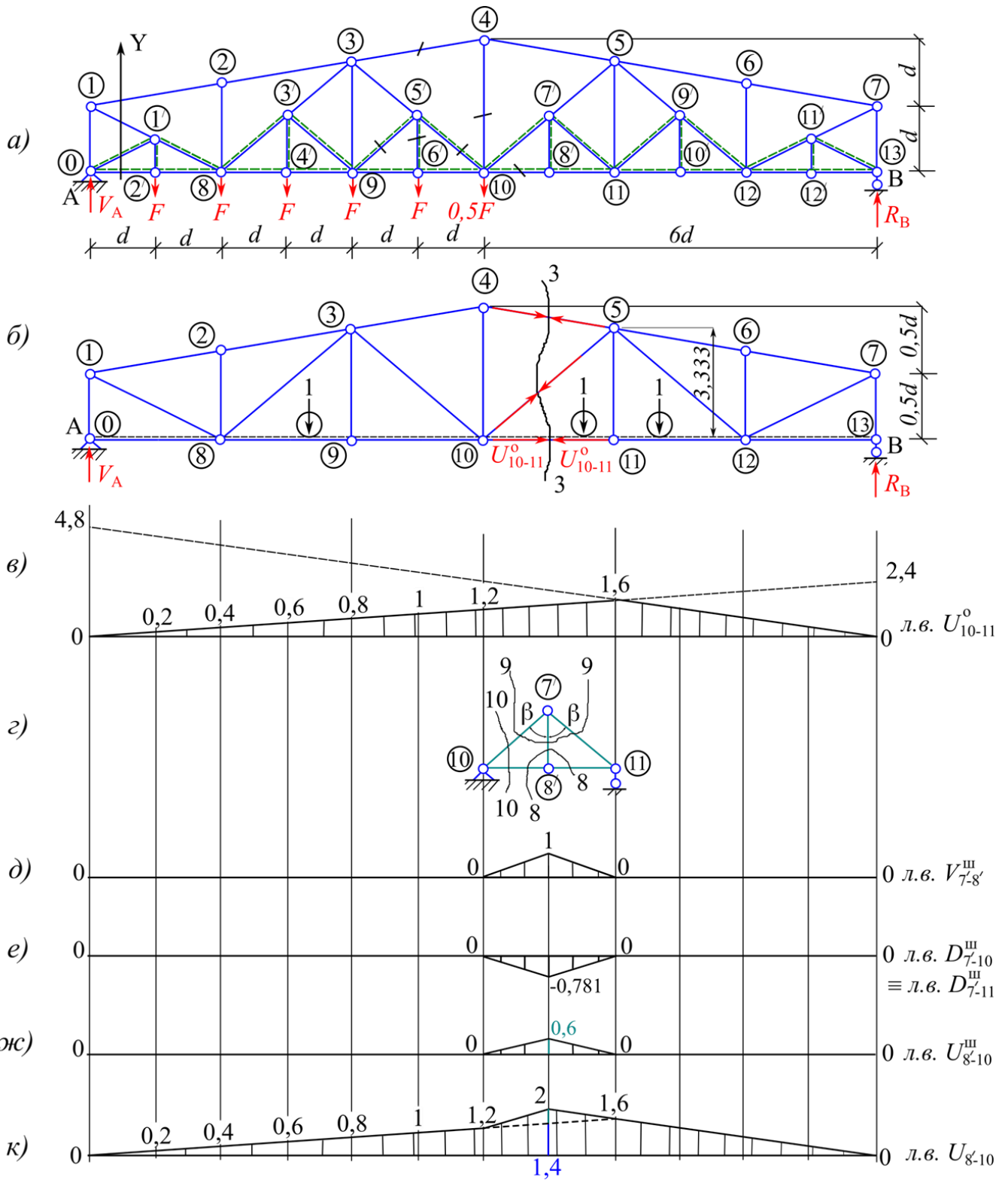


Рисунок 47

3. Определим используя линии влияния усилия в указанных стержнях.

По условию задачи необходимо определить усилия $O_{3-4}, D_{5'-9}, D_{5'-10}, V_{5'-6'}, V_{4-10}, U_{8'-10}$.

3.1 Определим усилие O_{3-4} . Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 43 а) и данные ординат линии влияния O_{3-4} , рисунок 43 в).

$$O_{3-4} = 20 \cdot (-0,5068) + 20 \cdot (-1,0137) + 10 \cdot (-1,5205) \Rightarrow O_{3-4} = -45,615 \text{ кН}.$$

3.2 Определим усилие $D_{5/-9}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 46 а) и данные ординат линии влияния $D_{5/-9}$, рисунок 46 е).

$$D_{5/-9} = 10 \cdot (-0,781) \Rightarrow D_{5/-9} = -7,81 \text{ кН}.$$

3.3 Определим усилие $D_{5/-10}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 46 а) и данные ординат линии влияния $D_{5/-10}$, рисунок 46 ж).

$$D_{5/-10} = 10 \cdot (-0,1953) + 10(-0,3905) + 10(-0,5858) + 10(-0,781) + \dots + 10 \cdot (-0,976) + 5 \cdot 0,3905 \Rightarrow D_{5/-10} = -27,334 \text{ кН}.$$

3.4 Определим усилие $V_{5/-6'}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 46 а) и данные ординат линии влияния $V_{5/-6'}$, рисунок 46 д).

$$V_{5/-6'} = 10 \cdot (1) \Rightarrow V_{5/-6'} = 10 \text{ кН}.$$

3.5 Определим усилие V_{4-10} . Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 43 а) и данные ординат линии влияния V_{4-10} , рисунок 43 з).

$$V_{4-10} = 20 \cdot \left(\frac{1}{6}\right) + 20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow V_{4-10} = 15 \text{ кН}.$$

3.6 Определим усилие $U_{8/-10}$. Для этого используем данные по нагрузке, рисунок 47 а) и данные ординат линии влияния $U_{8/-10}$, рисунок 47 к).

$$U_{8/-10} = 10 \cdot (0,2) + 10 \cdot (0,4) + 10 \cdot (0,6) + 10 \cdot (0,8) + 10 \cdot (1) + \dots + 5 \cdot (1,2) \Rightarrow U_{8/-10} = 36 \text{ кН}.$$

4. Сравним усилия в стержнях, полученные аналитически и по линиям влияния.

Таблица 4

Усилие, кН	O_{3-4}	$D_{5/-9}$	$D_{5/-10}$	$V_{5/-6'}$	V_{4-10}	$U_{8/-10}$
F_a	-45,62	-7,81	-27,336	10	15	36
$F_{л.в.}$	-45,615	-7,81	-27,334	10	15	36
Отклонение $\delta, \%$	<0,01	0	<0,008	0	0	0

4. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ СИЛ

Рассмотрим пример расчета плоской статически неопределимой рамы методом сил, схема которой изображена на рис.48.

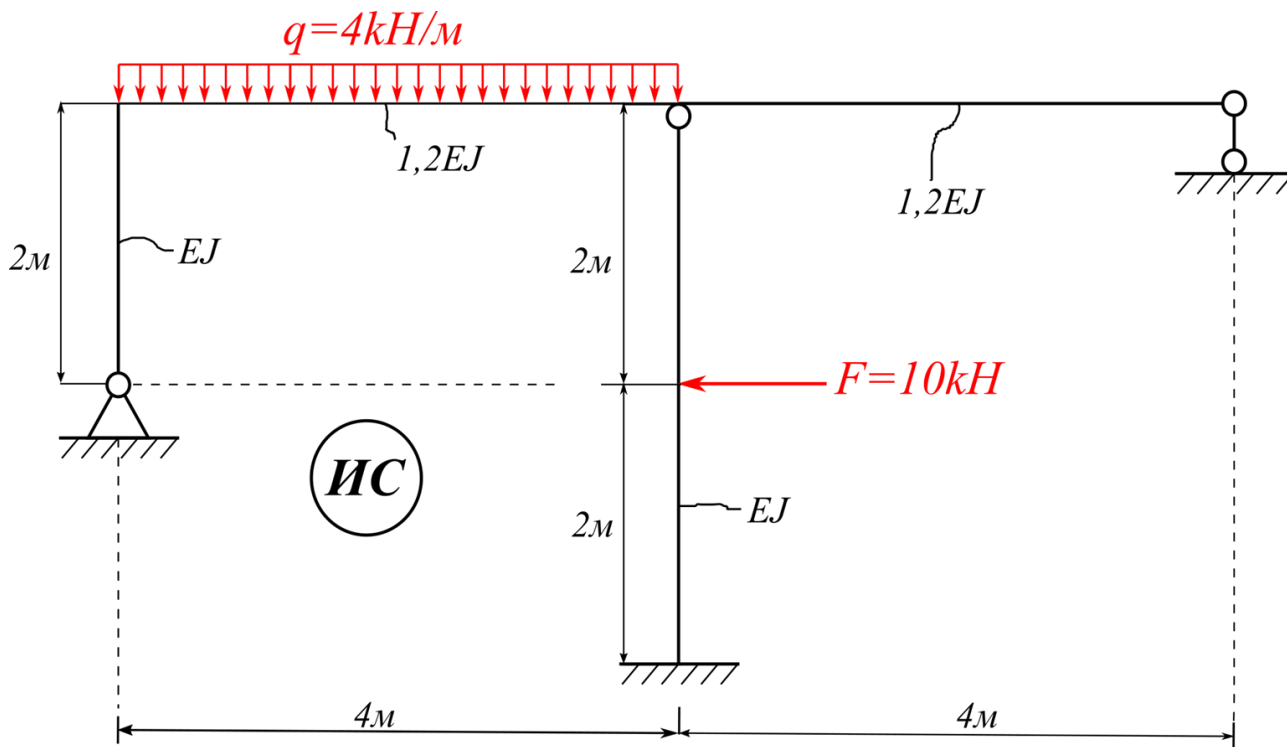


Рисунок 48 - Исходная схема

1. Определяем степень статической неопределимости n_s :

$$n_s = 3K - \text{Ш},$$

где K - число замкнутых контуров;

Ш- число простых шарниров.

В нашем случае: $n_s = 3 \cdot 2 - 4 = 2$.

Таким образом, представленная на рис.1 исходная схема (ИС) является дважды статически неопределимой системой.

2. Перейдем к выбору основной схемы (ОС). Основная схема, являясь геометрически неизменяемой и статически определимой (рис.49), получается путем отбрасывания лишних связей исходной схемы (ИС). Условием эквивалентности основной схемы (ОС) исходной (ИС) будет являться приложение неизвестных усилий в направлении отброшенных связей. Значения этих усилий определяются из канонических уравнений метода сил. Количество этих уравнений соответствует степени статической неопределимости системы. В нашем случае система канонических уравнений примет вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \Delta_{1p} &= 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \Delta_{2p} &= 0 \end{aligned}$$

В нашем случае, мы прерываем 2 связи в шарнире, и по направлению отброшенных связей прикладываем неизвестные усилия X_1, X_2 . Убеждаемся в геометрической неизменяемости полученной схемы (ОС). Производим нумерацию характерных сечений (номера в кружечках, см. рис. 49).

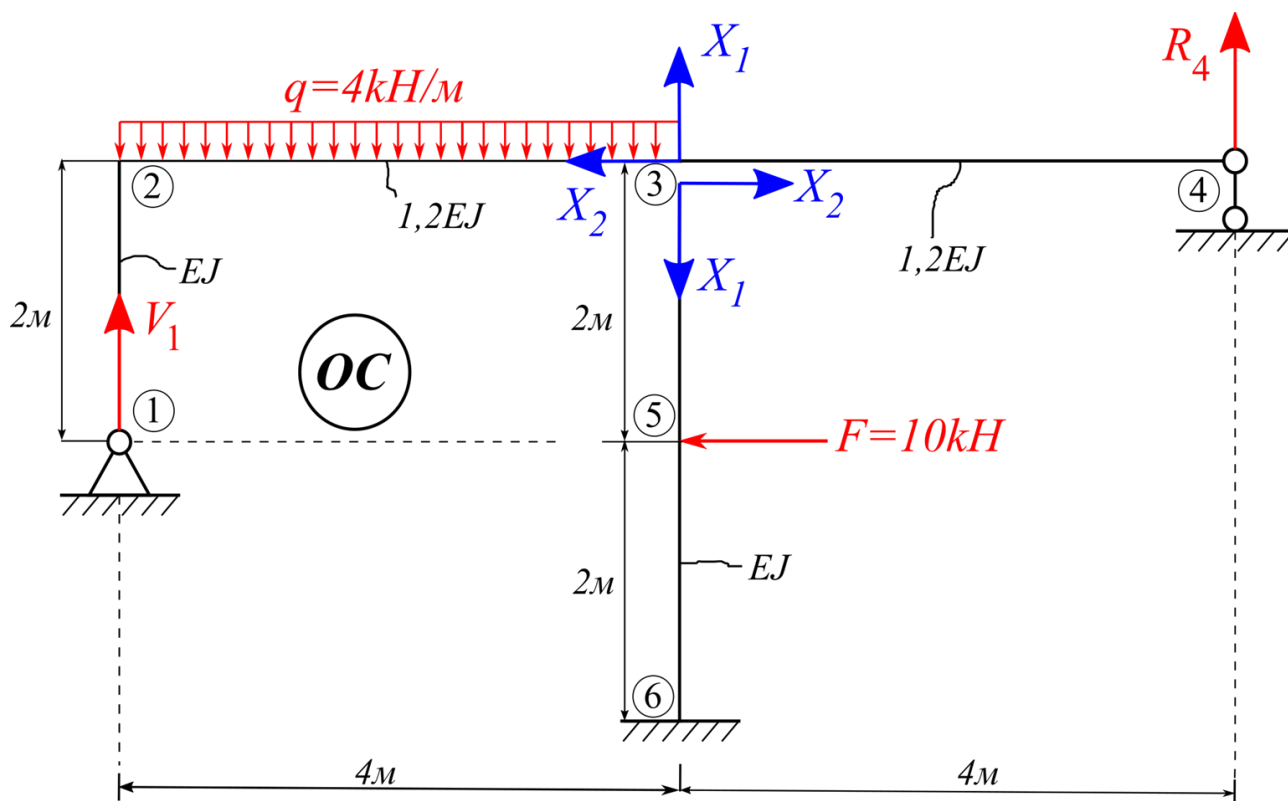


Рисунок 49 - Основная схема

3. Определяем коэффициенты, входящие в канонические уравнения.

В связи с тем, что для определения коэффициентов используется графоаналитический способ решения интеграла Мора, то необходимо построить две единичные и грузовую эпюры изгибающих моментов.

3.1 Определим первый главный коэффициент δ_{11} . Согласно формулы Мора:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^k \int_l \frac{\overline{M}_1^2}{EJ} dx.$$

Для графоаналитического способа определения δ_{11} необходимо использовать вспомогательную расчетную схему (рис.50), получаемую путем отбрасывания из основной схемы (ОС) всей внешней нагрузки, включая неизвестные силы X_1, X_2 и приложения по направлению первой неизвестной силы единичной силы, см. рис.50. Заметим, что геометрические и жесткостные

характеристики вспомогательной схемы полностью идентичны основной схеме

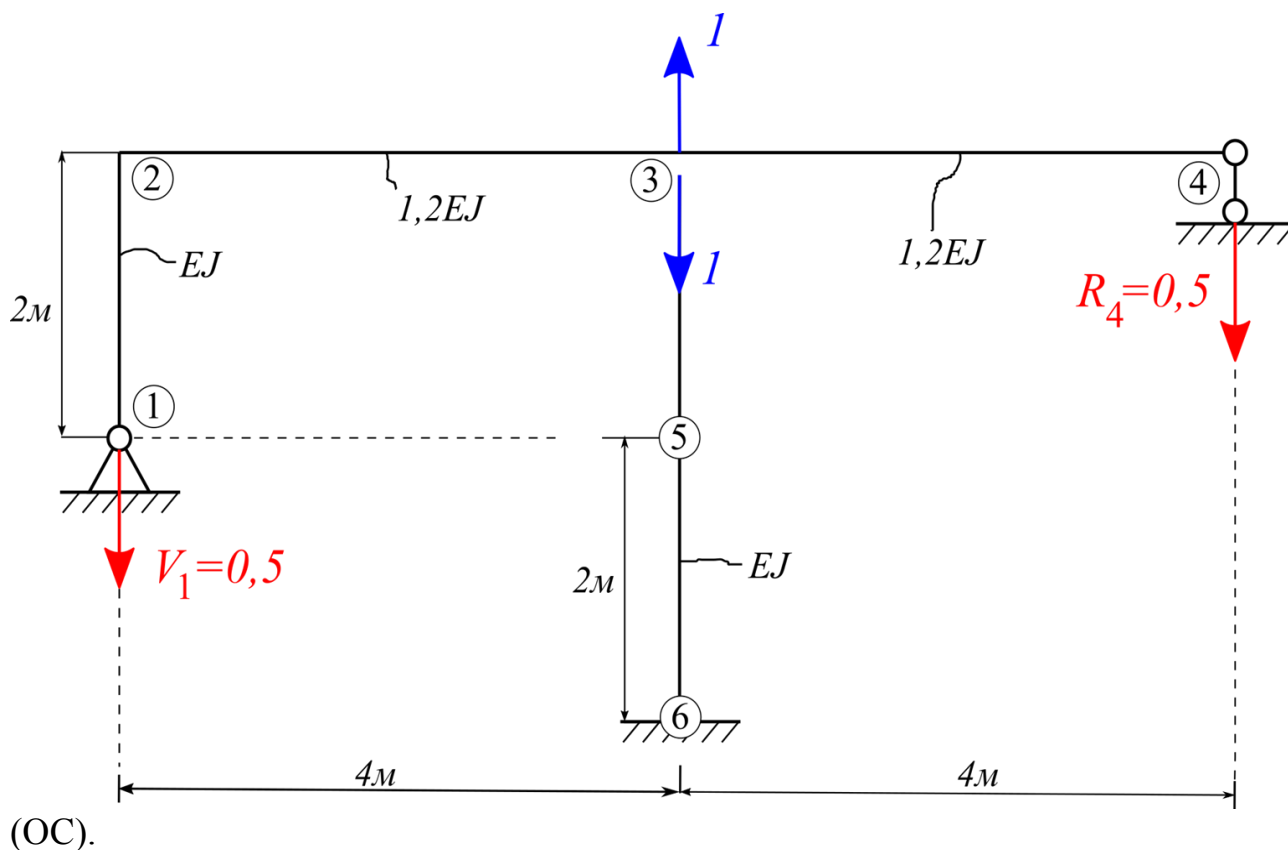


Рисунок 50 - Первая вспомогательная схема

Составляя уравнения статического равновесия, определяем необходимые опорные реакции (см. рис.50)

$$\sum M_1(\bar{F}_i) = 0: -1 \cdot 4 + R_4 \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_4 = 0,5.$$

$$\sum M_4(\bar{F}_i) = 0: -V_1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_1 = 0,5.$$

Применяя методы сопротивления материалов строим эпюру первого единичного момента \bar{M}_1 , рис.51.

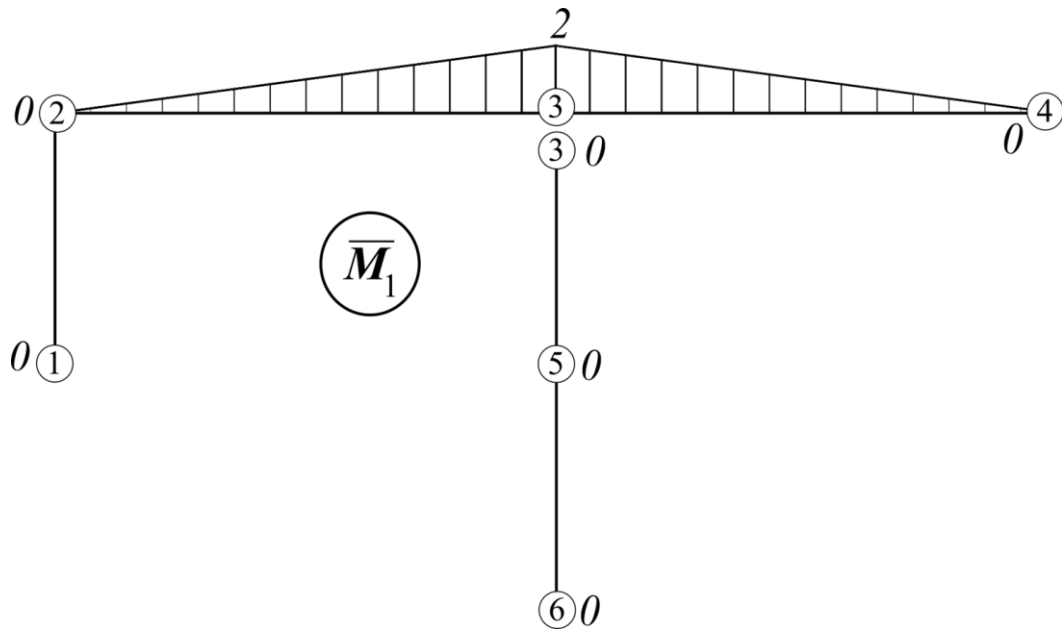


Рисунок 51 - Эпюра первого единичного момента

Определим первый главный коэффициент δ_{11} графоаналитическим путем. С этой целью перемножим единичную эпюру (см. рис.51) саму на себя.

В случае простого очертания при этом, целесообразно использовать формулу Верещагина:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_i^0 \cdot M_i^0}{EJ_i}$$

Здесь - ω_i^0 -площадь -участка единичной эпюры; M_i^0 -величина единичного изгибающего момента взятая по центру тяжести площади i -участка единичной эпюры; EJ_i - жесткость i -участка единичной эпюры.

В нашем случае:

$$\delta_{11} = \sum \frac{\omega_i^0 \cdot M_i^0}{EJ_i} = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4) \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2)}{1,2EJ} + \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4) \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2)}{1,2EJ} \Rightarrow \delta_{11} = \frac{8,888}{EJ}$$

3.2 Определим второй главный коэффициент δ_{22} . Согласно формулы Мора:

$$\delta_{22} = \sum_{i=1}^k \int_l \frac{\overline{M}_2^2}{EJ} dx.$$

Для графоаналитического способа определения δ_{11} необходимо использовать вспомогательную расчетную схему (рис.52), получаемую путем отбрасывания из основной схемы (ОС) всей внешней нагрузки, включая неизвестные силы X_1, X_2 и приложения по направлению второй неизвестной силы единичной силы, см. рис.52. Заметим, что геометрические и жесткостные характеристики вспомогательной схемы полностью идентичны основной схеме (ОС).

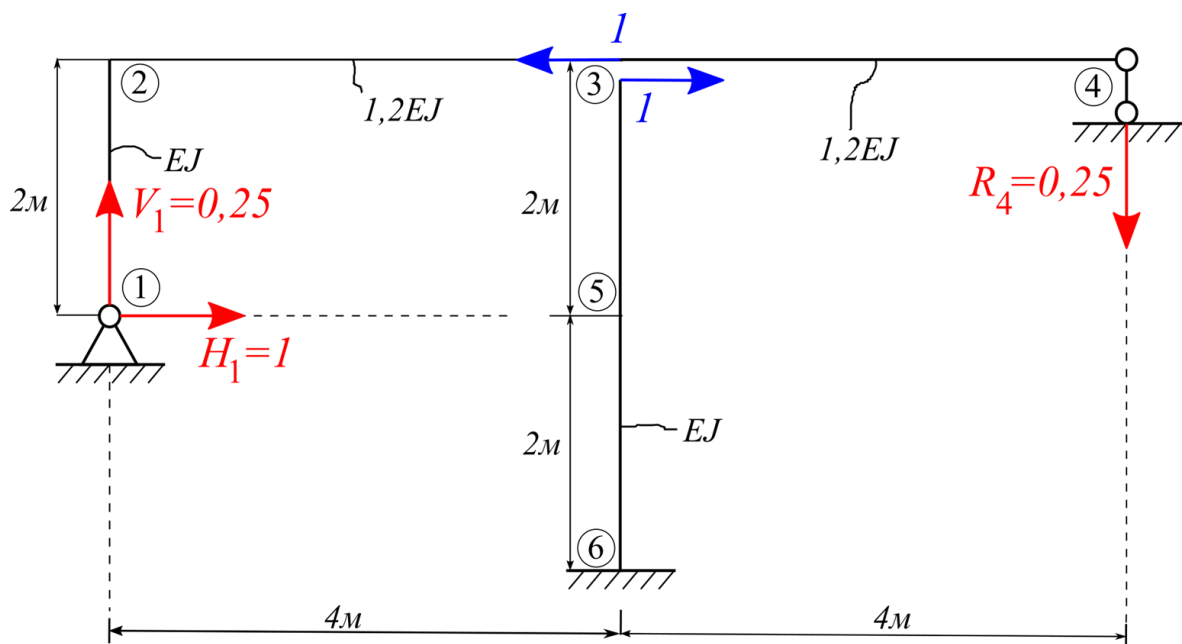


Рисунок 52 - Вторая вспомогательная схема

Составляя уравнения статического равновесия, определяем необходимые опорные реакции, (см. рис.52).

$$\sum X = 0: H_1 - 1 = 0 \Rightarrow H_1 = 1.$$

$$\sum M_1(\bar{F}_l) = 0: -1 \cdot 2 + R_4 \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_4 = 0,25.$$

$$\sum M_4(\bar{F}_l) = 0: V_1 \cdot 8 - H_1 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_1 = 0,25.$$

Применяя методы сопротивления материалов строим эпюру второго единичного момента \bar{M}_2 , рис.53.

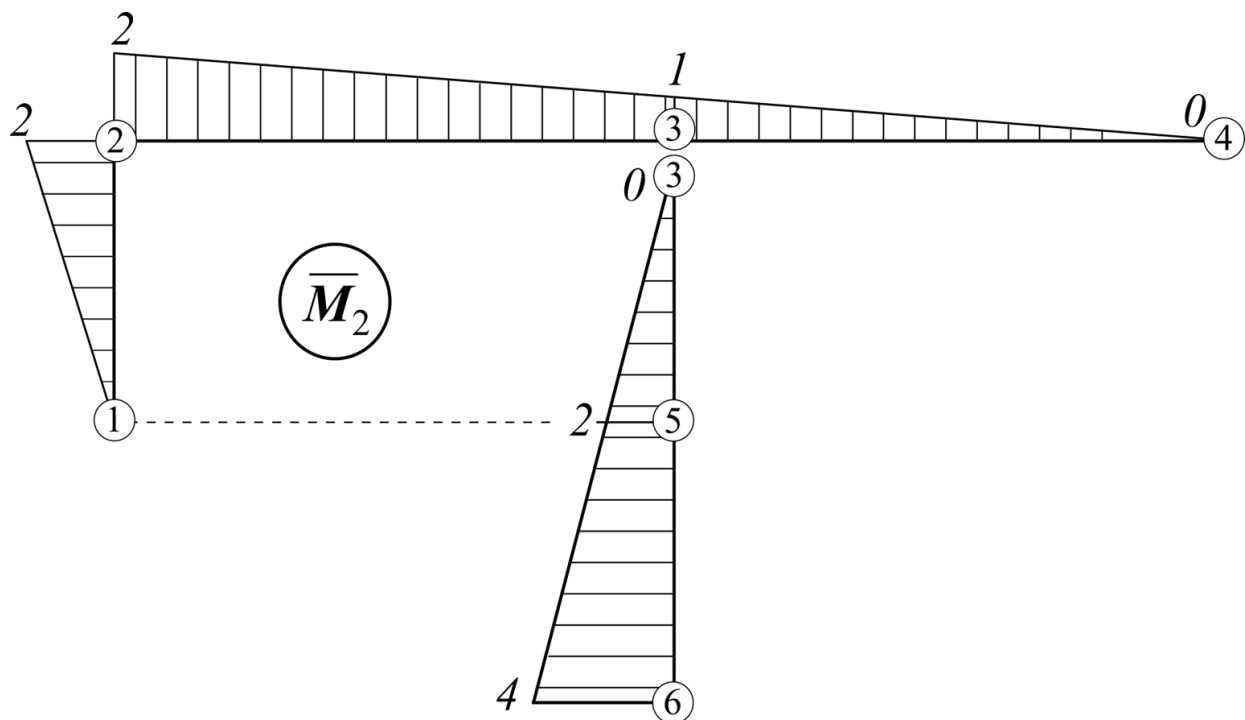


Рисунок 53 - Эпюра второго единичного момента

Определим второй главный коэффициент δ_{22} графоаналитическим путем. С этой целью перемножим единичную эпюру (см. рис.53) саму на себя.

В случае простого очертания, целесообразно использовать формулу Верещагина:

$$\delta_{22} = \sum \frac{\omega_i^0 \cdot M_i^0}{EJ_i}$$

Здесь - ω_i^0 - площадь -участка единичной эпюры; M_i^0 - величина единичного изгибающего момента взятая по центру тяжести площади i -участка единичной эпюры.

В нашем случае:

$$\delta_{22} = \sum \frac{\omega_i^0 \cdot M_i^0}{EJ_i} = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2) \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2)}{EJ} + \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 8) \cdot (\frac{2}{3} \cdot 2)}{1,2EJ} + \frac{(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4) \cdot (\frac{2}{3} \cdot 4)}{EJ}$$

$$\Rightarrow \delta_{22} = \frac{32,889}{EJ}$$

3.3. Определим побочные коэффициенты $\delta_{12} = \delta_{21}$.

С этой целью перемножим ненулевые участки единичных эпюр \bar{M}_1 и \bar{M}_2 . Из анализа эпюр (рис.51 и рис.53) следует, что два ненулевых участка расположены на ригеле (рис. 54).

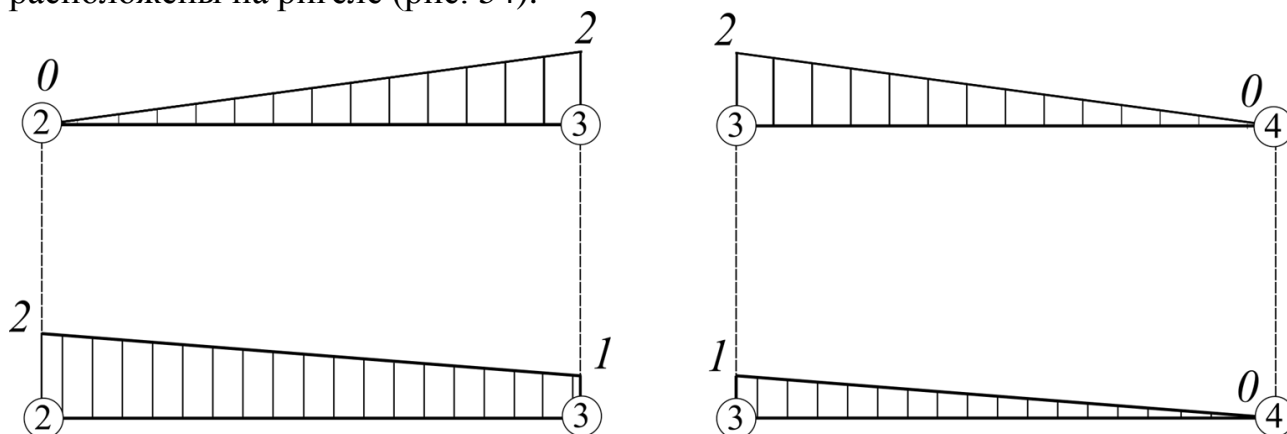


Рисунок 54

При перемножении эпюр дважды применим формулу трапеций.

$$\delta = \frac{l}{6 \cdot EJ} (2 \cdot A \cdot a + 2 \cdot B \cdot b + A \cdot b + B \cdot a).$$

Здесь: l - длина перемножаемого участка. A - значение момента в левом сечении первой единичной (верхней) эпюры. a - значение момента в левом сечении второй единичной (нижней) эпюры. B - значение момента в правом сечении первой единичной (верхней) эпюры. b - значение момента в правом сечении

второй единичной (нижней) эпюры. EJ - изгибная жесткость поперечного сечения перемножаемого участка.

В нашем случае:

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 2) + \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1) \Rightarrow$$
$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{6,667}{EJ}.$$

При перемножении учтем, что все соответствующие участки эпюр расположены по одну сторону от нулевой линии, поэтому все составляющие суммы произведений будут не отрицательны.

3.4. Строим грузовую эпюру изгибающих моментов M_p .

Расчетная схема для построения эпюры, получается из основной (ОС), см. рис. 49, путем отбрасывания неизвестных усилий X_1 и X_2 , (рис.55).

Составляя уравнения статического равновесия, определяем необходимые опорные реакции, (см. рис.55).

$$\sum M_1(\bar{F}_i) = 0: q \cdot 4 \cdot 2 - R_4 \cdot 8 = 0 \Rightarrow R_4 = 4kH.$$
$$\sum M_4(\bar{F}_i) = 0: V_1 \cdot 8 - q \cdot 4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_1 = 12kH.$$

Применяя методы сопротивления материалов строим грузовую эпюру изгибающего момента M_p , рис.56.

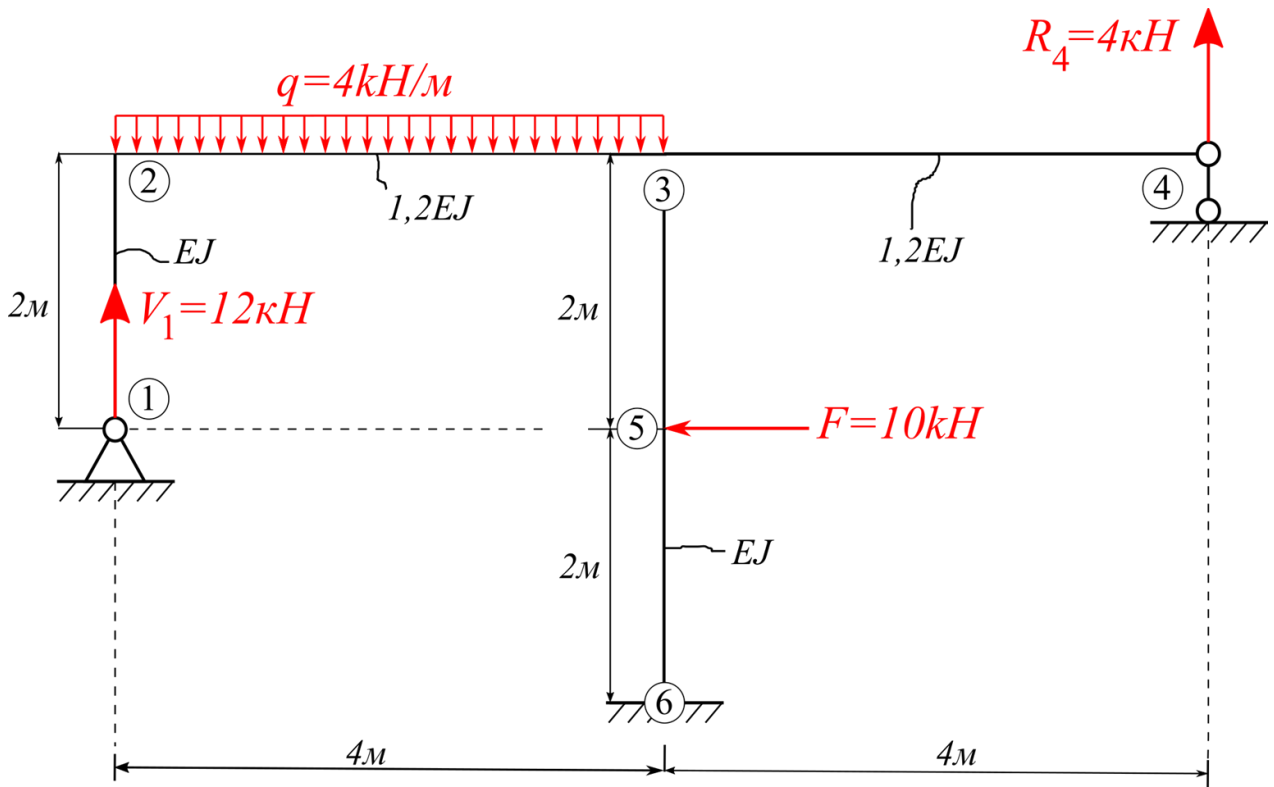


Рисунок 55

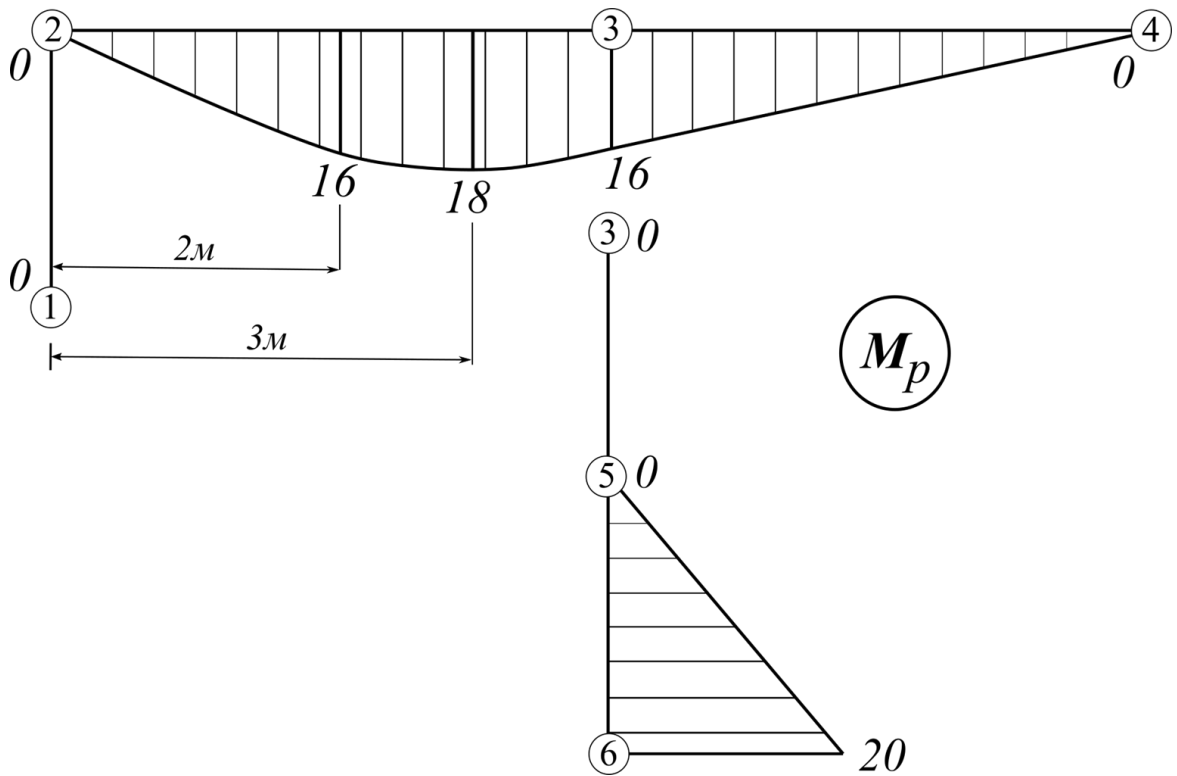


Рисунок 56

3.5 Определим грузовой коэффициент Δ_{1p} . С этой целью перемножим ненулевые участки грузовой эпюры M_p и единичной \bar{M}_1 . Из анализа эпюр (рис.51 и рис.56) следует, что два ненулевых участка расположены на ригеле (рис. 57).

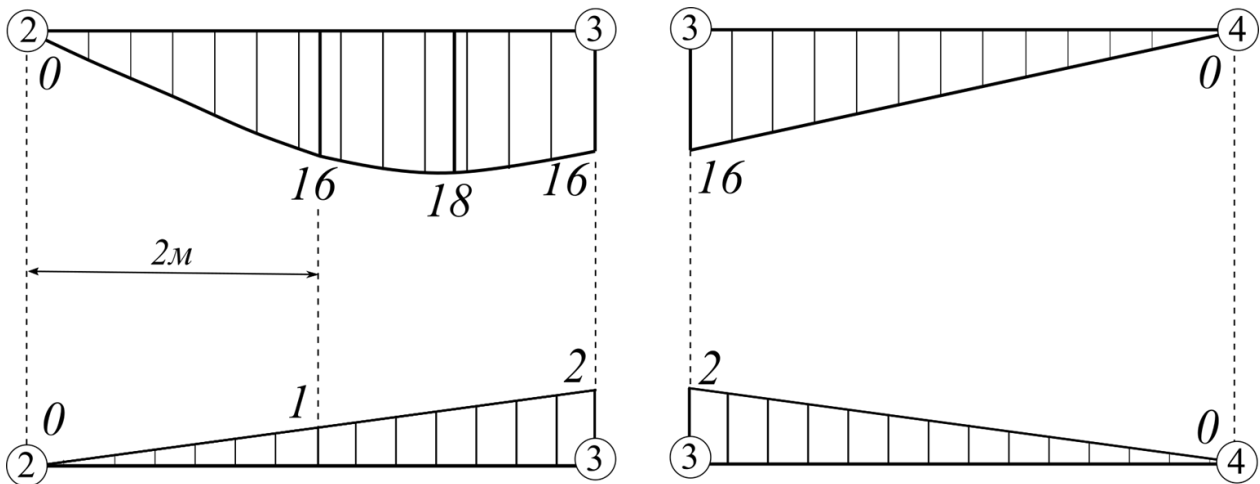


Рисунок 57

При перемножении участка 2 – 3 используем формулу Симпсона:

$$\Delta = \frac{l}{6EJ} (A \cdot a + 4 \cdot C \cdot c + B \cdot b).$$

Здесь: l - длина перемножаемого участка. A - значение момента в левом сечении грузовой (верхней) эпюры. a - значение момента в левом сечении первой единичной (нижней) эпюры; C - значение момента в среднем сечении грузовой (верхней) эпюры; c - значение момента в среднем сечении первой единичной (нижней) эпюры. B - значение момента в правом сечении грузовой (верхней) эпюры. b - значение момента в правом сечении первой единичной (нижней) эпюры. EJ - изгибная жесткость поперечного сечения перемножаемого участка.

При перемножении участка 3 – 4 воспользуемся формулой трапеций:

$$\Delta = \frac{l}{6 \cdot EJ} (2 \cdot A \cdot a + 2 \cdot B \cdot b + A \cdot b + B \cdot a).$$

Здесь: l - длина перемножаемого участка. A - значение момента в левом сечении первой единичной (верхней) эпюры. a - значение момента в левом сечении второй единичной (нижней) эпюры. B - значение момента в правом сечении первой единичной (верхней) эпюры. b - значение момента в правом сечении второй единичной (нижней) эпюры. EJ - изгибная жесткость поперечного сечения перемножаемого участка.

В таком случае:

$$\Delta_{1p} = -\frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (0 \cdot 0 + 4 \cdot 16 \cdot 1 + 16 \cdot 2) - \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 16 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 2) \Rightarrow$$

$$\Delta_{1p} = -\frac{88,889}{EJ}.$$

При перемножении учтем, что все соответствующие участки эпюр расположены по разные стороны от нулевой линии, поэтому все составляющие суммы произведений будут отрицательны.

3.6 Определим грузовой коэффициент Δ_{2p} . С этой целью перемножим ненулевые участки грузовой эпюры M_p и единичной \bar{M}_2 . Из анализа эпюр (рис.53 и рис.56) следует, что два ненулевых участка расположены на ригеле и один ненулевой участок на нижней части правой стойки (рис. 58).

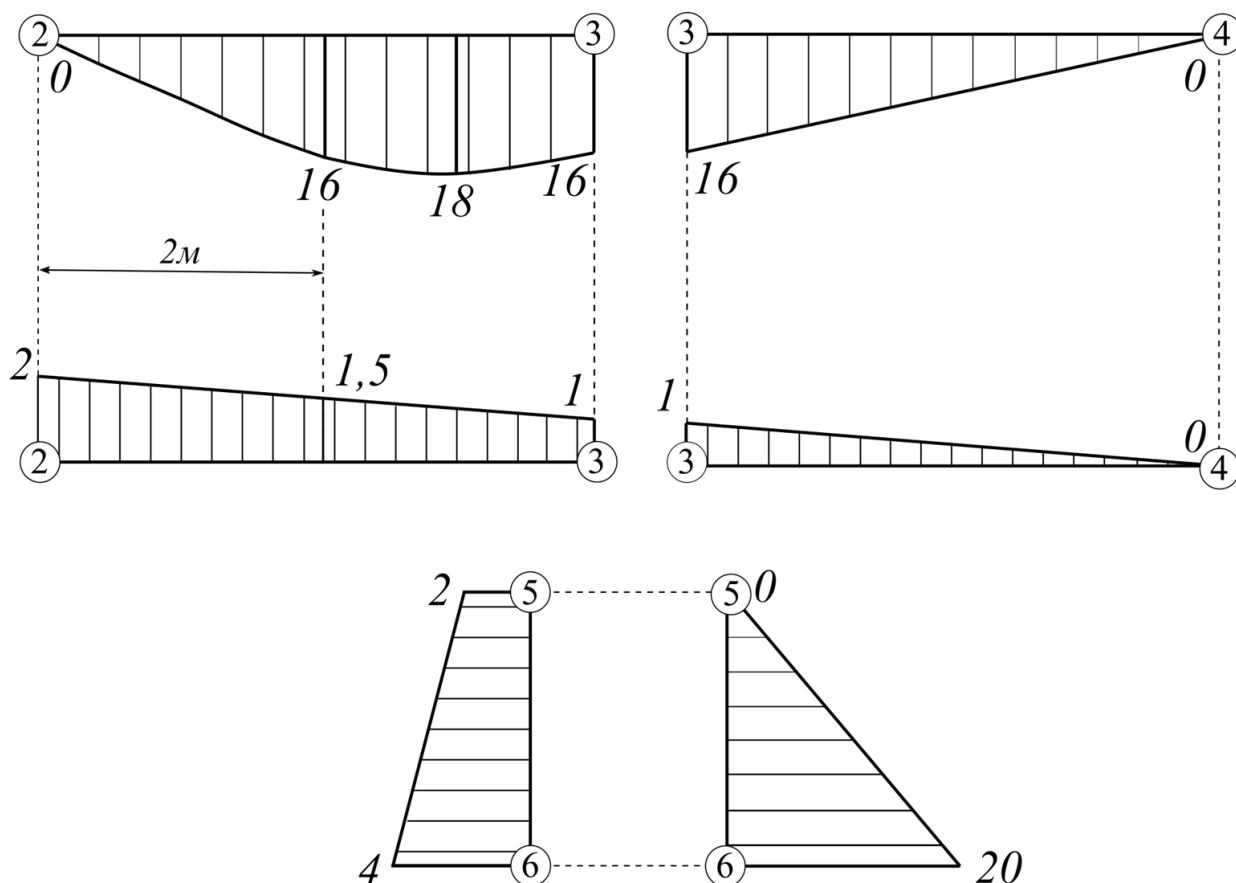


Рисунок 58

При перемножении участка 2 – 3 используем формулу Симпсона, для перемножения участка 3 – 4 и на участке 5 – 6 применяем формулу трапеций.

$$\Delta_{2p} = -\frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (0 \cdot 2 + 4 \cdot 16 \cdot 1,5 + 16 \cdot 1) - \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 16 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 0) - \frac{2}{6 \cdot EJ} (2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 20 \cdot 2) \Rightarrow \Delta_{2p} = -\frac{146,667}{EJ}.$$

При перемножении учтем, что все соответствующие участки эпюр расположены по разные стороны от нулевой линии, поэтому все составляющие сумм произведений будут отрицательны.

3.7 Построим суммарную единичную эпюру изгибающего момента \bar{M}_C . Для этого сложим по характерным сечениям две единичные эпюры \bar{M}_1 и \bar{M}_2 , рис.59.

Определим главный коэффициент δ_{cc} путем перемножения суммарной единичной эпюры изгибающего момента \bar{M}_C самой на себя. Участки 1 – 2; 3 – 4; 3 – 6 перемножим, используя правило Верещагина. При перемножении участка 2 – 3 используем формулу трапеций.

$$\delta_{cc} = \frac{(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2) \cdot \frac{2}{3} \cdot 2}{EJ} + \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) + \frac{(\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4) \cdot \frac{2}{3} \cdot 3}{1,2EJ} + \frac{(\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4) \cdot \frac{2}{3} \cdot 4}{EJ} \Rightarrow$$

$$\delta_{cc} = \frac{55,111}{EJ}.$$

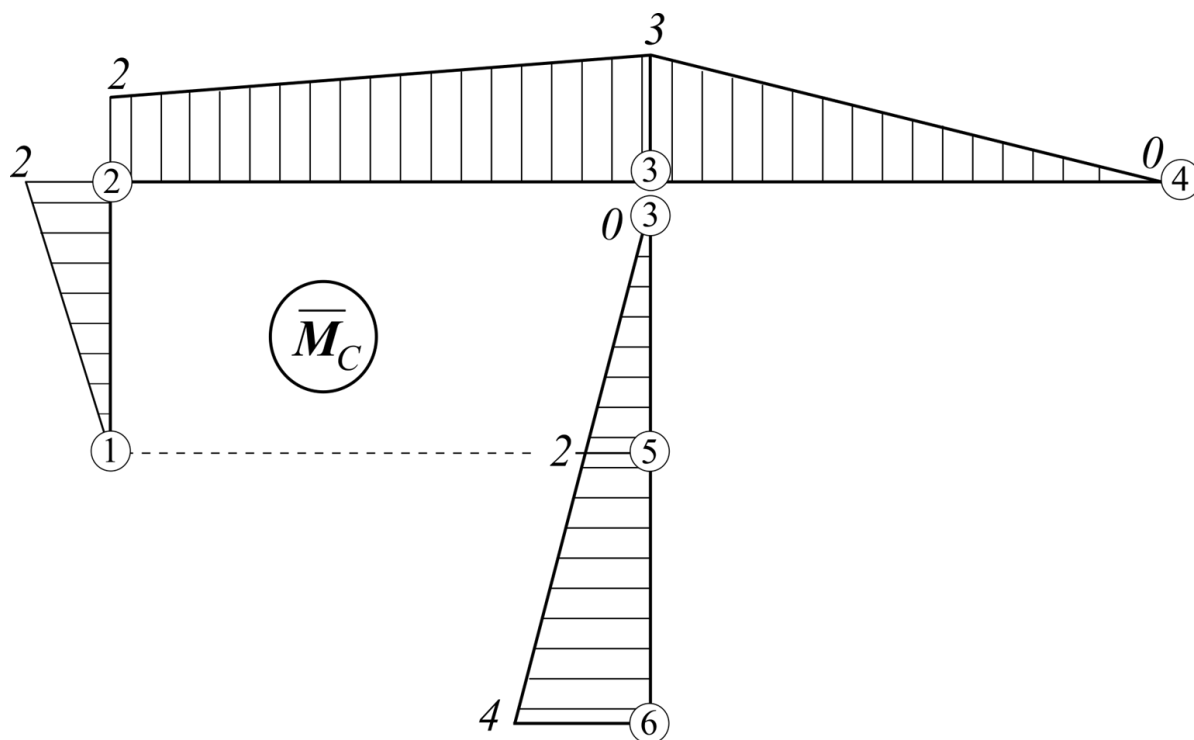


Рисунок 59

3.8. Определим средний грузовой коэффициент Δ_{cp} . Для этого перемножим грузовую эпюру M_p , см. рис.56 с суммарной единичной эпюрой изгибающего момента \bar{M}_C , рис. 59.

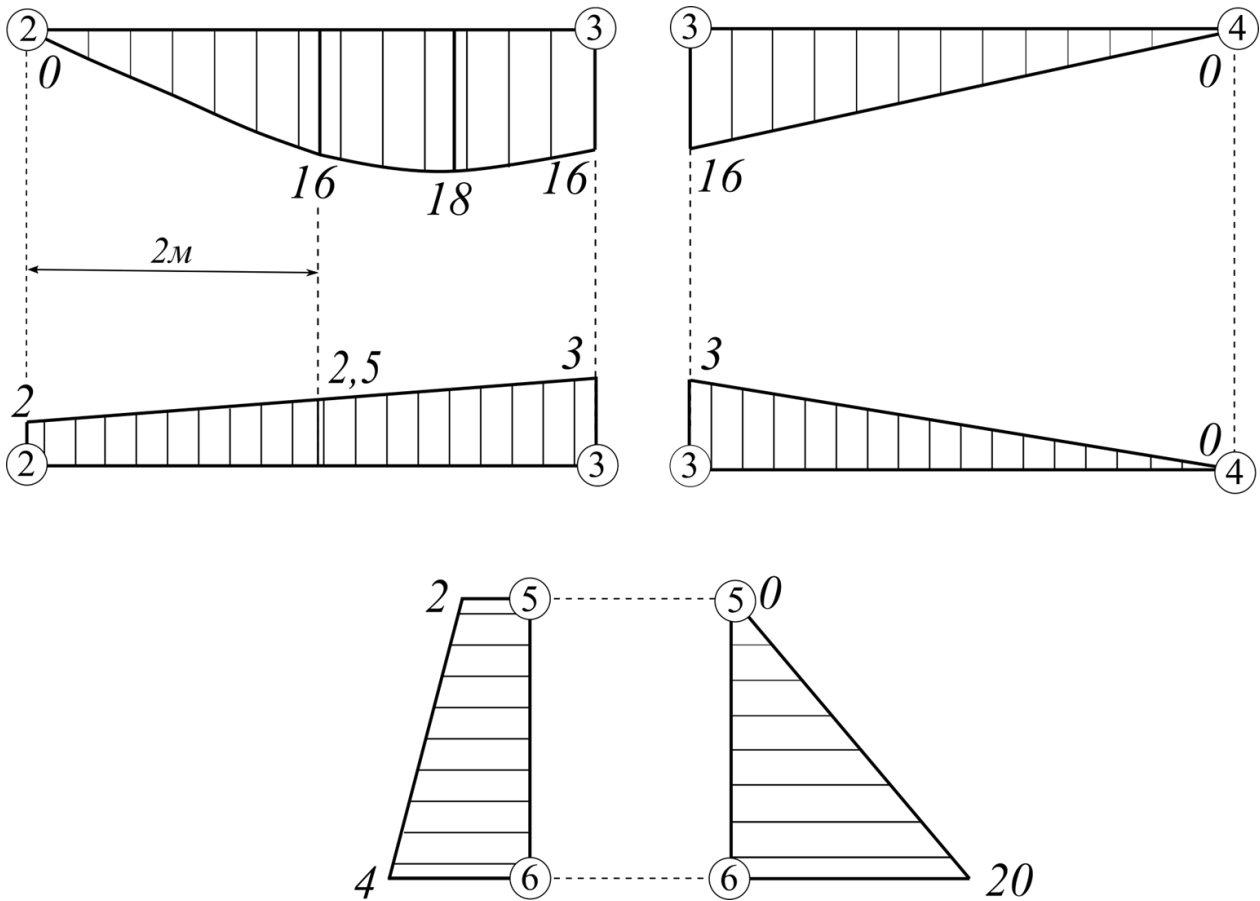


Рисунок 60

При перемножении участка 2 – 3 используем формулу Симпсона, для перемножения участка 3 – 4 и на участке 5 – 6 применяем формулу трапеций.

$$\Delta_{cp} = -\frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (0 \cdot 2 + 4 \cdot 16 \cdot 2,5 + 16 \cdot 3) - \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 16 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 0 \cdot 3) - \dots$$

$$\dots - \frac{2}{6 \cdot EJ} (2 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot 20 \cdot 4 + 0 \cdot 4 + 20 \cdot 2) \Rightarrow \Delta_{cp} = -\frac{235,555}{EJ}.$$

При перемножении учтем, что все соответствующие участки эпюр расположены по разные стороны от нулевой линии, поэтому все составляющие сумм произведений будут отрицательны.

4. Выполним проверку коэффициентов канонических уравнений. Коэффициенты определены правильно, если выполняются условия:

$$\delta_{cc} = \sum \delta_{ik}; \Delta_{cp} = \sum \Delta_{ip}.$$

$$\delta_{cc} = \delta_{11} + \delta_{22} + 2 \cdot \delta_{12} \Rightarrow \frac{55,111}{EJ} = \frac{8,889}{EJ} + \frac{32,889}{EJ} + 2 \cdot \frac{6,667}{EJ}. \text{ Истинно.}$$

$$\Delta_{cp} = \Delta_{1p} + \Delta_{2p} \Rightarrow -\frac{235,555}{EJ} = -\frac{88,889}{EJ} - \frac{146,667}{EJ}. \text{ Истинно.}$$

Проверка показала правильность определения коэффициентов.

5. После проверки коэффициентов, решаем канонические уравнения:

$$8,889 \cdot X_1 + 6,667 \cdot X_2 - 88,889 = 0$$

$$6,667 \cdot X_1 + 32,889 \cdot X_2 - 146,667 = 0$$

Таким образом, $X_1 = 7,849 \text{ kH}$; $X_2 = 2,869 \text{ kH}$.

6. Построение окончательной эпюры изгибающего момента M будем осуществлять по формуле: $M = \bar{M}_1 \cdot X_1 + \bar{M}_2 \cdot X_2 + M_p$.

6.1. Построим первую вспомогательную эпюру $\bar{M}_1 \cdot X_1$. Для этого все ординаты первой единичной эпюры \bar{M}_1 , см. рис.51 умножим на $X_1 = 7,849 \text{ kH}$, рис.61.

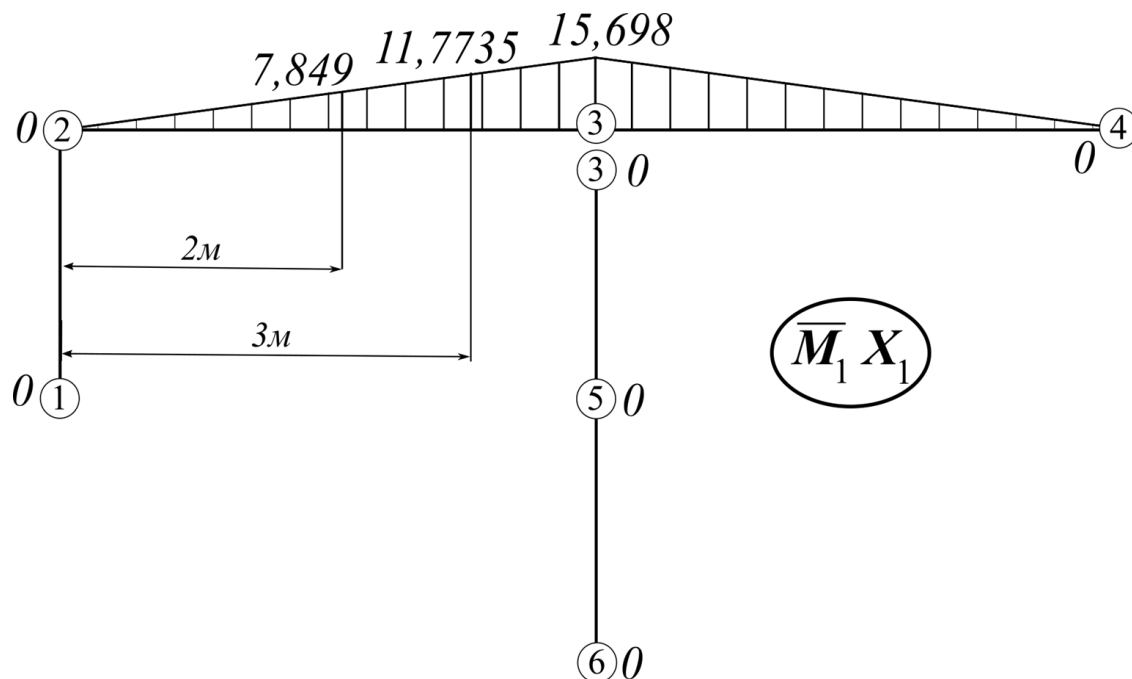


Рисунок 61

6.2. Построим вторую вспомогательную эпюру $\bar{M}_2 \cdot X_2$. Для этого все ординаты второй единичной эпюры \bar{M}_2 , см. рис.53 умножим на $X_2 = 2,869 \text{ kH}$, рис.62.

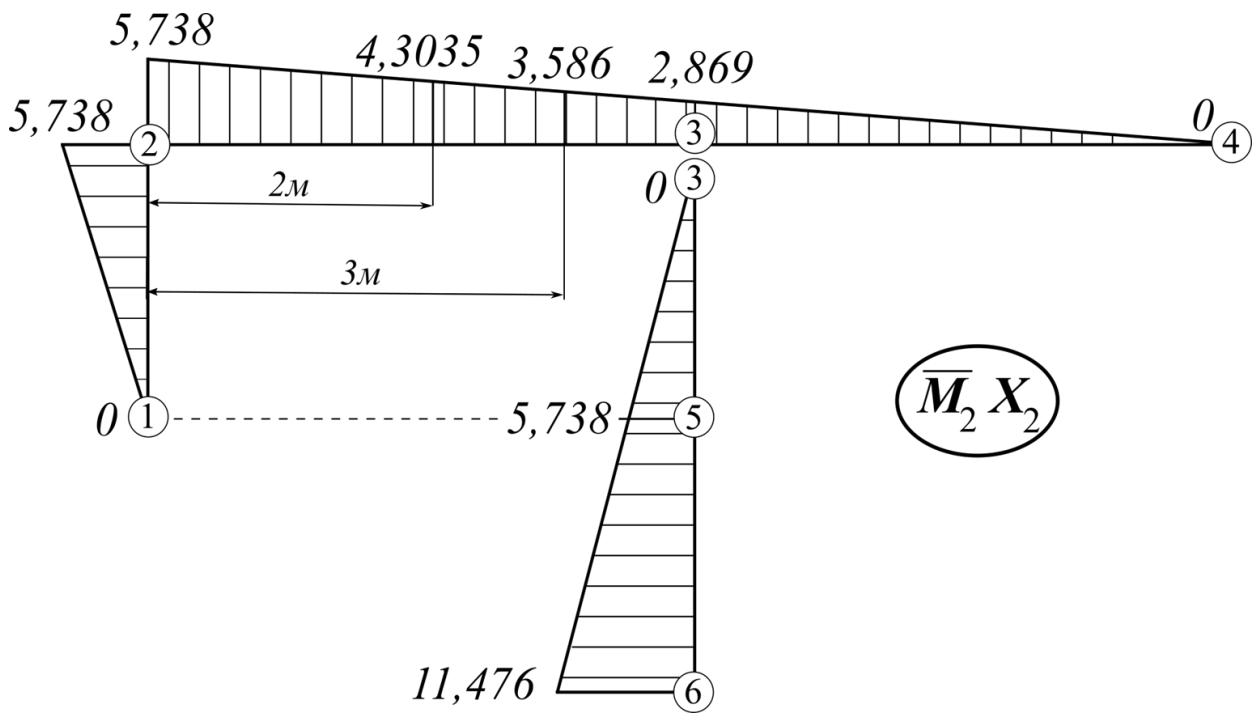


Рисунок 62

6.3. Строим эпюру изгибающего момента M (рис.63), путем геометрического сложения соответствующих ординат эпюр $\bar{M}_1 \cdot X_1$, (см. рис. 61); $\bar{M}_2 \cdot X_2$, (см. рис. 62); M_p , (см. рис. 56).

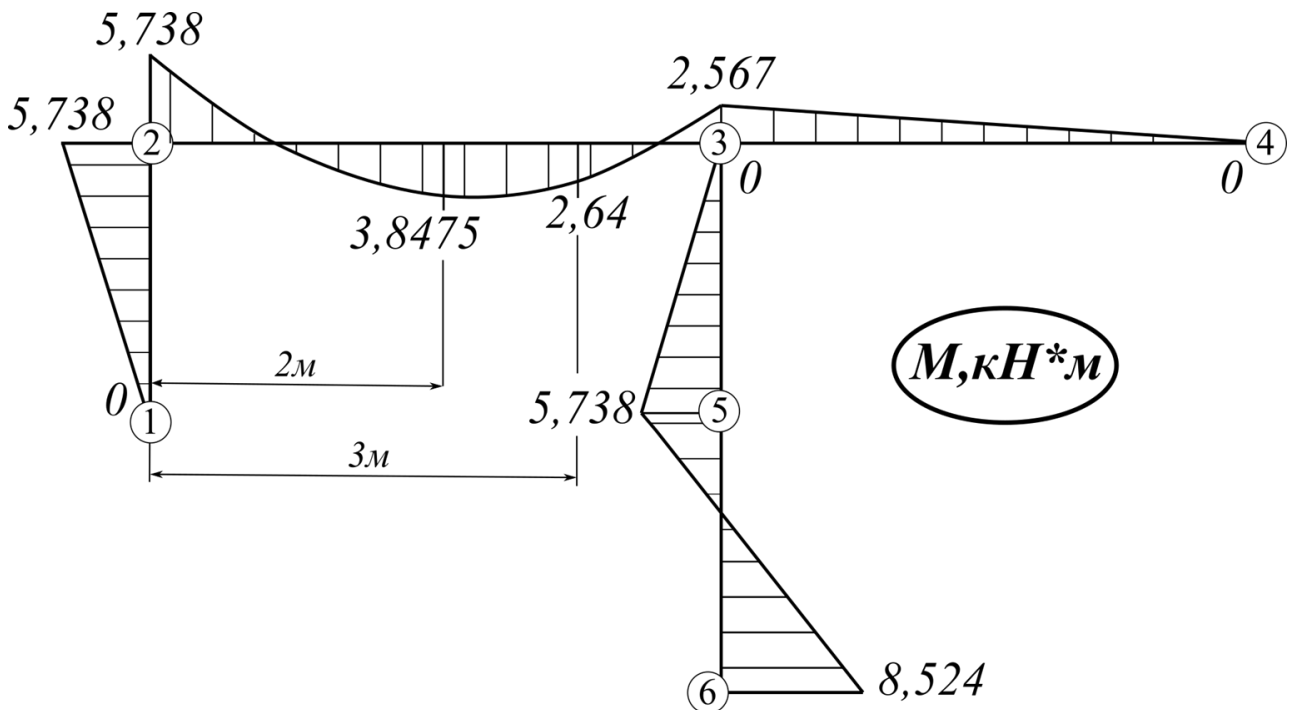


Рисунок 63

7. Проведём кинематическую проверку, являющуюся первой проверкой правильности расчета рамы. Она заключается в проверке равенства нулю условного перемещения заданной системы по направлению отброшенных связей от действия на раму всех неизвестных усилий и внешней нагрузки. Для этого перемножим суммарную единичную эпюру \bar{M}_C , (см. рис.59) на окончательную эпюру изгибающих моментов M (рис.63).

$$\Delta = \sum \int_l \frac{\bar{M}_C \cdot M}{EJ} dx = 0 \Rightarrow$$

При перемножении участка 2 – 3 используем формулу Симпсона, для перемножения участков 1 – 2; 3 – 4; 3 – 5; 5 – 6 применяем формулу трапеции.

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{2}{6 \cdot EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5,738 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 5,738 \cdot 0) + \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (5,738 \cdot 2 - 4 \cdot 3,8475 \cdot 2,5 + 2,567 \cdot 3) + \dots \\ &\dots + \frac{4}{6 \cdot 1,2EJ} (2 \cdot 2,567 \cdot 3 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 2,567 \cdot 0 + 0 \cdot 3) + \frac{2}{6 \cdot EJ} (2 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 5,738 \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 5,738 \cdot 0) + \dots \\ &\dots + \frac{2}{6 \cdot EJ} (2 \cdot 5,738 \cdot 2 - 2 \cdot 8,524 \cdot 4 + 5,738 \cdot 4 - 8,524 \cdot 2) \Rightarrow \Delta = -\frac{23,8331}{EJ} + \frac{23,856}{EJ} = 0,0235 \approx 0. \end{aligned}$$

Определим невязку (допускается до 5%)

$$\frac{23,856 - 23,8331}{23,8331} \cdot 100\% = 0,096\% \ll 5\%.$$

Следовательно окончательная эпюра изгибающих моментов построена правильно.

8. Строим эпюру Q . Применяем метод вырезания стержней. Последовательно вырезаем все участки рамы. К концам прикладываем известные значения моментов, с учетом их направления, а так же неизвестные поперечные силы в сечениях, которые определяем рассматривая условия равновесия стержней, см. рис.64. Поперечная сила в сечении считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый стержень по часовой стрелке.

Рассмотрим равновесие стержня 1 – 2. см. рис. 64 а).

$$\begin{aligned} \sum M_1(\bar{F}_i) &= 0: \\ Q_2 \cdot 2 + 5,738 &= 0 \Rightarrow Q_2 = -2,869 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum M_2(\bar{F}_i) &= 0: \\ Q_1 \cdot 2 + 5,738 &= 0 \Rightarrow Q_1 = -2,869 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Рассмотрим равновесие стержня 2 – 3. см. рис. 64 б).

$$\begin{aligned} \sum M_2(\bar{F}_i) &= 0: \\ Q_3 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - 5,738 + 2,567 &= 0 \Rightarrow Q_3 = -7,207 \text{ кН}. \end{aligned}$$

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_2 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - 5,738 + 2,567 = 0 \Rightarrow Q_2 = 8,793 \text{ kH.}$$

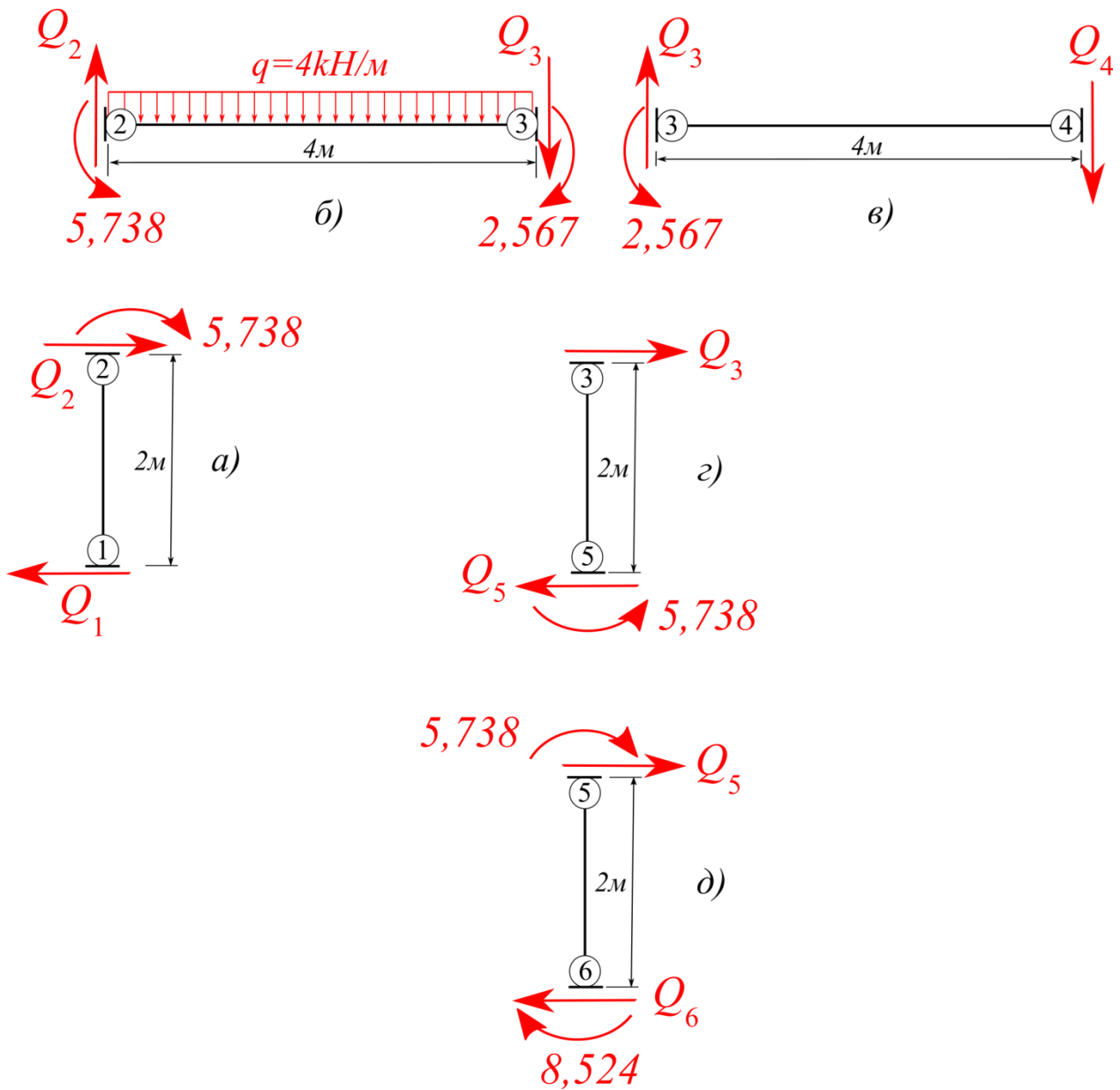


Рисунок 64

Рассмотрим равновесие стержня 3 – 4.см. рис. 64 в).

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_4 \cdot 4 - 2,567 = 0 \Rightarrow Q_4 = 0,642 \text{ kH.}$$

$$\sum M_4(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_3 \cdot 4 - 2,567 = 0 \Rightarrow Q_3 = 0,642 \text{ kH.}$$

Рассмотрим равновесие стержня 3 – 5.см. рис. 64 з).

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_5 \cdot 2 - 5,738 = 0 \Rightarrow Q_5 = 2,869 \text{ kH.}$$

$$\sum M_5(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_3 \cdot 2 - 5,738 = 0 \Rightarrow Q_3 = 2,869 \text{ kH.}$$

Рассмотрим равновесие стержня 5 – 6.см. рис. 64 д).

$$\sum M_5(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_6 \cdot 2 + 5,738 + 8,524 = 0 \Rightarrow Q_6 = -7,131 \text{ kH.}$$

$$\sum M_6(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_5 \cdot 2 + 5,738 + 8,524 = 0 \Rightarrow Q_5 = -7,131 \text{ kH.}$$

С учетом полученных значений строим эпюру поперечных сил Q , рис.65.

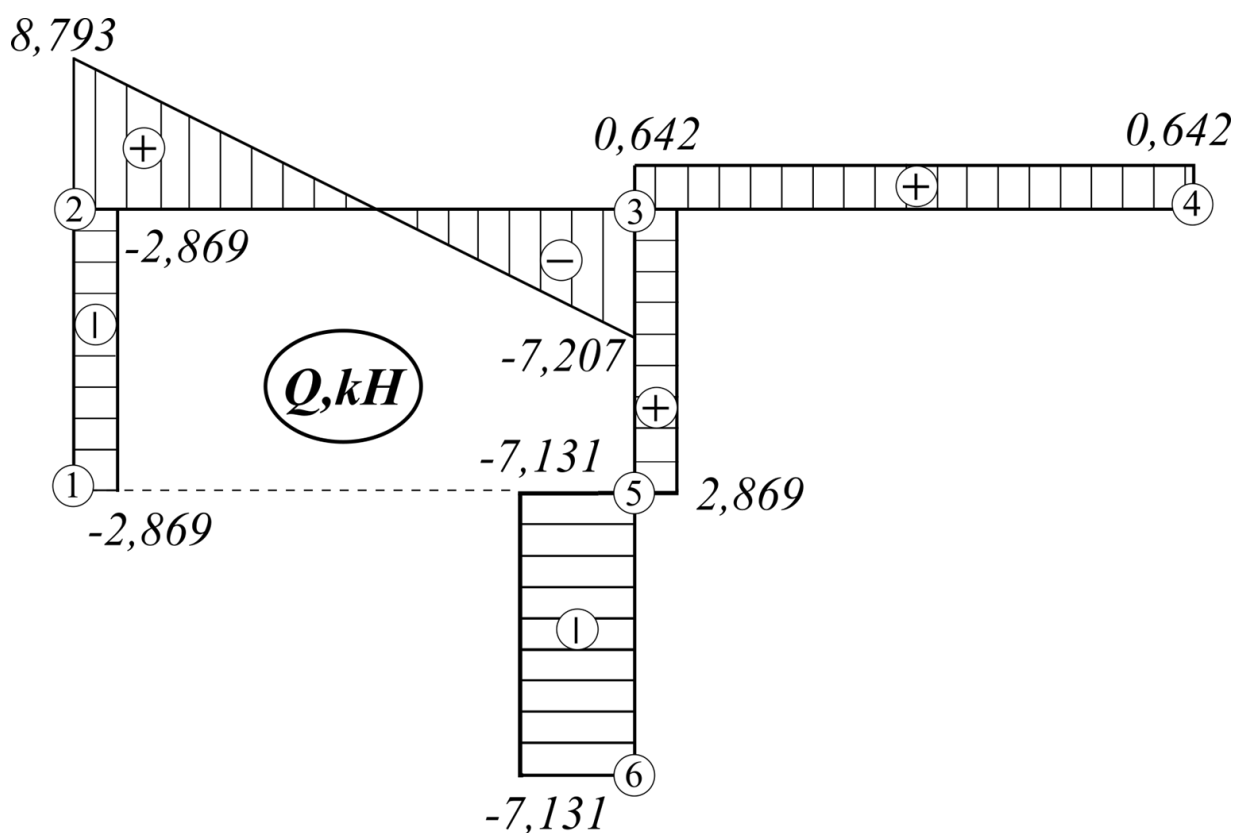


Рисунок 65

9. Строим эпюру внутренних продольных сил N . Вырезаем поочередно все необходимые узлы. К узлам прикладывают внешнюю сосредоточенную нагрузку, известные внутренние поперечные силы и неизвестные внутренние продольные силы, подлежащие определению (рис.66).

Внутренняя продольная сила направленная от узла считается положительной (растягивающей), к узлу - отрицательной (сжимающей).

Рассмотрим условие равновесия узла 2, рис.66 а).

$$\sum X = 0:$$

$$2,869 + N_{23} = 0 \Rightarrow N_{23} = -2,869 \text{ kH.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$-8,793 - N_{12} = 0 \Rightarrow N_{12} = -8,793 \text{ kH.}$$

Рассмотрим условие равновесия узла 4, рис.66 б).

$$\sum X = 0:$$

$$-N_{34} = 0 \Rightarrow N_{34} = 0 \text{ kH.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$0,642 - R_4 = 0 \Rightarrow R_4 = 0,642 \text{ kH.}$$

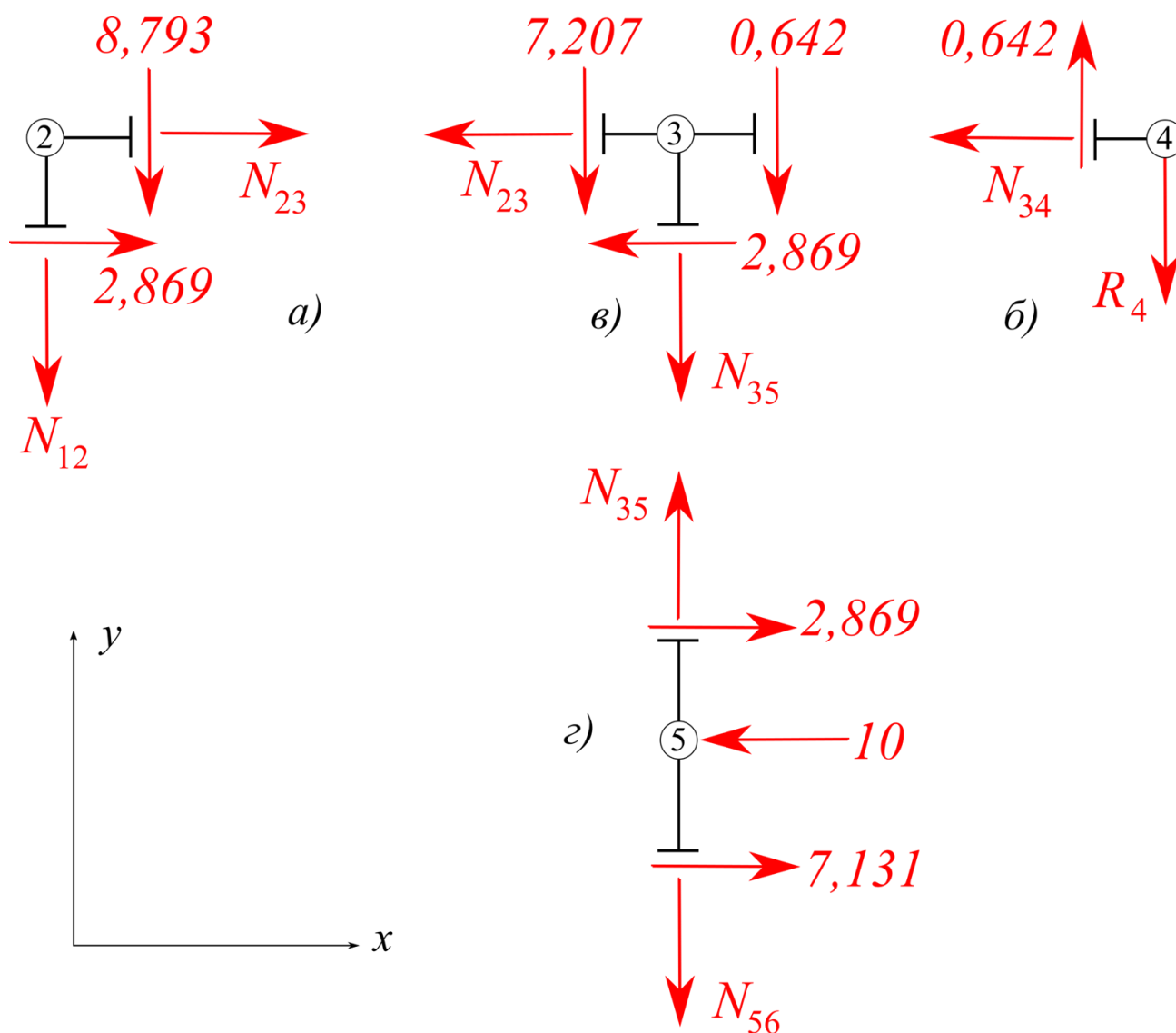


Рисунок 66

Рассмотрим условие равновесия узла 3, рис.66 в).

$$\sum X = 0:$$

$$-N_{23} - 2,896 = 0 \Rightarrow N_{23} = -2,896 \text{ kH} \text{ истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$-7,207 - 0,642 - N_{35} = 0 \Rightarrow N_{35} = -7,849 \text{ kH.}$$

Рассмотрим условие равновесия узла 5, рис.66 в).

$$\sum X = 0:$$

$$-10 + 2,869 + 7,131 = 0 \Rightarrow \text{истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$N_{35} - N_{56} = 0 \Rightarrow N_{56} = -7,849 \text{ kH.}$$

С учетом полученных значений строим эпюру поперечных сил N , рис.67.

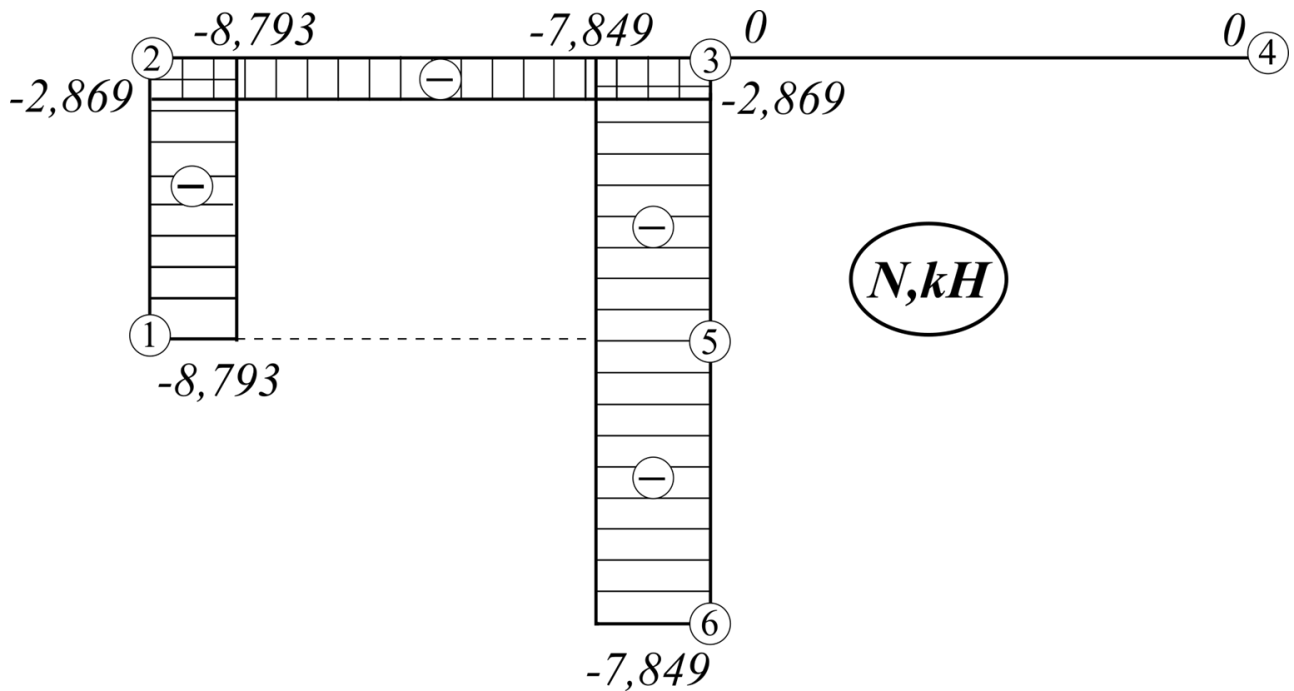


Рисунок 67

10. Проведем статическую проверку. Для этого проверим равновесие заданной рамы от внешней нагрузки и реакций опор, определенных по эпюрам поперечных и продольных сил.

Согласно построенных эпюр:

$$V_1 = 8,793 \text{ kH} (\text{направление снизу-вверх});$$

$$H_1 = 2,869 \text{ kH} (\text{направление слева-направо});$$

$$R_4 = 0,642 \text{ kH} (\text{направление сверху-вниз});$$

$$V_6 = 7,849 \text{ kH} (\text{направление снизу-вверх});$$

$$H_6 = 7,131 \text{ kH} (\text{направление слева-направо});$$

Выполним статическую проверку:

$$\sum X = 0:$$

$$H_1 + H_6 - 10 = 0 \Rightarrow 2,869 + 7,131 - 10 = 0 \text{ истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$V_1 + V_6 - q \cdot 4 - R_4 = 0 \Rightarrow 8,793 + 7,849 - 4 \cdot 4 - 0,642 = 0 \text{ истинно.}$$

5. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ МЕТОДОМ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Рассчитаем плоскую раму, используя метод перемещений, см. рис.68.

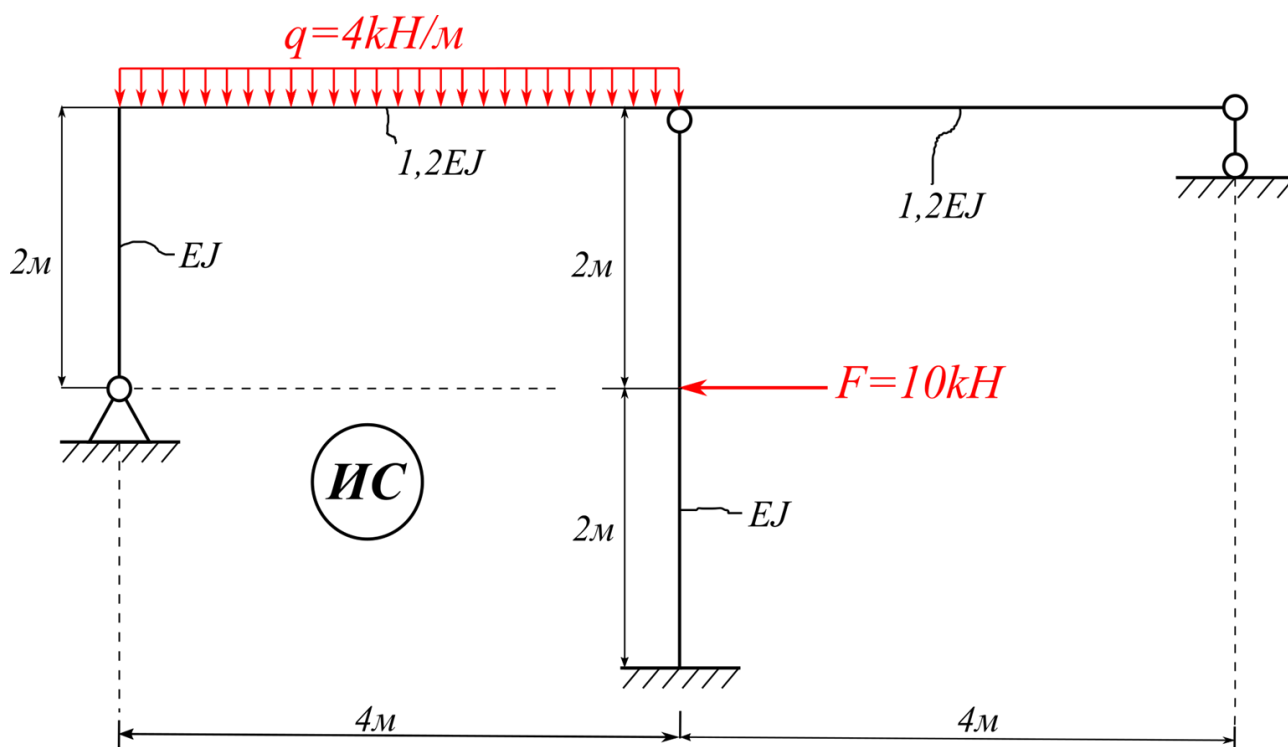


Рисунок 68 - Исходная схема

1. Определяем степень кинематической неопределимости n :

$$n = n_y + n_d,$$

где n_y - число жестких узлов рамы.

n_d - число неизвестных линейных перемещений.

Некоторые комментарии к данной формуле.

«Жестким» узлом считается:

1. Сечение сопряжения двух или нескольких стержней, в котором нет сквозного (полного) шарнира.

2. Сечение сопряжения двух или нескольких стержней, в котором расположен примыкающий шарнир.

Отметим, что в число n_y не входят узлы, в которых известны угловые перемещения (жесткие заделки) и заданные (при расчете по заданным перемещениям)

Очевидно, см. рис.68 (ИС), в нашем случае $n_y = 2$.

Число неизвестных линейных перемещений определяется с помощью шарнирной схемы (ШС). Шарнирная схема (ШС) строится путем введения сквозных шарниров во все узлы и жесткие заделки, рис.69.

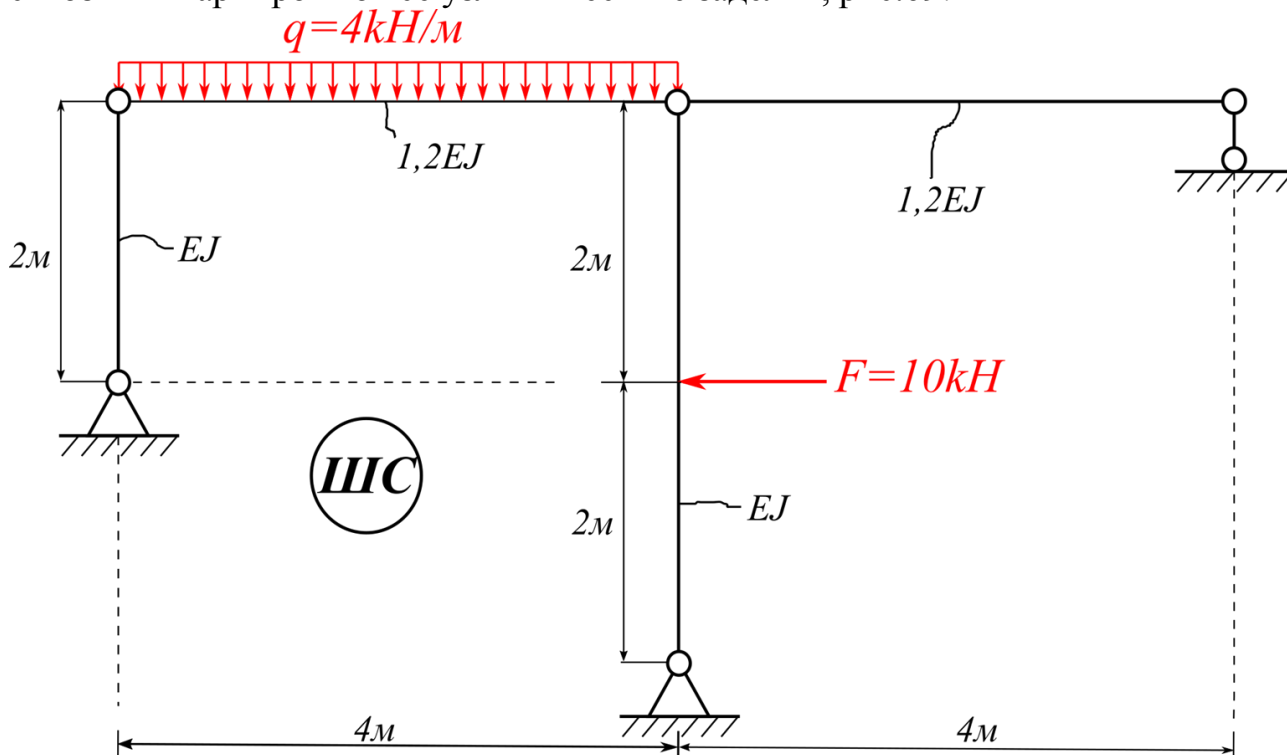


Рисунок 69 - Шарнирная схема

В таком случае, число $n_{\text{л}}$ определится степенью кинематической свободы W полученного шарнирного механизма схемы (ШС):

В нашем случае:

$$W = 3Д - 2Ш - C_{\text{оп}} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 5 = 1 \Rightarrow W = 1 \Rightarrow n_{\text{л}} = 1.$$

Соответственно, степень кинематической неопределимости:

$$n = n_{\text{y}} + n_{\text{л}} = 2 + 1 = 3.$$

Таким образом наша система трижды кинематически неопределима.

2. Перейдем к выбору основной схемы (ОС). Основная схема, являясь геометрически неизменяемой и статически определимой (рис.70), получается путем введения во все жесткие узлы исходной системы плавающие заделки, препятствующие повороту узлов, и стержни, препятствующие линейным перемещениям узлов. При этом, наша стержневая система примет вид совокупности однопролетных, статически неопределимых балок.

Условием эквивалентности основной схемы (ОС) исходной (ИС) будет являться приложение в систему неизвестных в виде реактивных моментов Z_1, Z_2 во вводимых жестких заделках, препятствующих повороту жестких узлов и усилия Z_3 , препятствующего линейному перемещению по направлению вводимой линейных связи, рис.70.

В основной схеме жесткость элементов выражена через относительную i , где $i = \frac{EJ}{l}$.

$$\begin{aligned} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} &= 0 \\ \{r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} &= 0 \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь $Z_1 \dots Z_n$ - искомые перемещения или неизвестные системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

$r_{11} \dots r_{nn}$ - реакции во введенных связях от единичных перемещений или коэффициенты при неизвестных системы СЛАУ.

$R_{1p} \dots R_{np}$ - реакции во введенных связях от заданной нагрузки или свободные члены СЛАУ.

Реакции в системе СЛАУ метода перемещений имеют двойной нижний индекс. Первый номер указывает номер связи и ее направление, а второй – номер единичного перемещения (нагрузку), которая вызывает эту реакцию, т.е. второй индекс реакции соответствует обозначению (номеру) эпюры вспомогательных изгибающих моментов, на которой расположена данная реакция.

Отдельно поговорим о размерности элементов, входящих в СЛАУ метода перемещений.

В нашем случае, первое уравнение выражает равенство нулю суммы реакций в направлении Z_1 вводимой угловой связи. Так как перемещение Z_1 - угловое, оно будет измеряться в [рад], а размерность всех реакций (слагаемых) в первом уравнении должно иметь размерность момента - [кН · м]. Соответственно, размерность коэффициента жесткости $r_{11} = \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right]$. Так как перемещение Z_2 - так же, угловое - оно будет измеряться в [рад], а реакция $r_{12} = \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right]$. Так как перемещение Z_3 - линейное, то оно измеряется в [м], а реакция $r_{13} = [кН]$.

Размерность свободного коэффициента первого уравнения $R_{1p} = [кН \cdot м]$.

Второе уравнение, по аналогии, выражает равенство нулю суммы реакций, по в направлении Z_2 вводимой угловой связи. Так как перемещение Z_2 - угловое - оно будет измеряться в [рад], а размерность всех реакций (слагаемых) во втором уравнении должно иметь размерность момента - [кН · м]. В таком случае, размерность коэффициента жесткости $r_{22} = \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right]$. Так как перемещение Z_1 , [рад] - то размерность реакции $r_{21} = \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right]$. Так как перемещение Z_3 - линейное, то оно измеряется в [м], а реакция $r_{23} = [кН]$. Размерность свободного коэффициента второго уравнения $R_{2p} = [кН \cdot м]$.

Третье уравнение, по аналогии, выражает равенство нулю суммы реакций, по в направлении Z_3 вводимой линейной связи. Так как перемещение Z_3 - линейное, то оно измеряется в [м], а размерность всех реакций (слагаемых) в третьем уравнении должно иметь размерность силы - [кН]. В таком случае, размерность

коэффициента жесткости $r_{33} = \left[\frac{kH}{м}\right]$. Так как перемещение $Z_1, [рад]$ и $Z_2, [рад]$ - то размерность реакций r_{31} и $r_{32} = \left[\frac{kH}{рад}\right]$. Размерность свободного коэффициента третьего уравнения $R_{3p} = [кН]$.

Реактивное усилие считается положительным, если его направление совпадает с принятым направлением поворота или линейного смещения узла.

3. Построение вспомогательных эпюр изгибающих моментов.

Для построения единичных эпюр используется основная схема (ОС) от которой отбрасывается внешняя нагрузка. Единичные эпюры строятся от поочередного действия искомым перемещений, равных безразмерной единице по выбранному направлению.

Для построения грузовой эпюры M_p используется основная схема (ОС) с приложенной внешней нагрузкой. Грузовая эпюра M_p будет определять единицы измерений длины и силы, принятые в расчете.

3.1. Построение единичных эпюр.

Построим единичную эпюру изгибающего момента \bar{M}_1 от действия единичного перемещения по первому направлению Z_1 . При построении используется библиотека эпюр изгибающих моментов от различных единичных перемещений и единичных нагрузок для вариантов однопролетных статически неопределимых балок, из которых состоит основная система метода перемещений.

На рис. 71 а) изображена первая вспомогательная расчетная схема, а на рис. 71 б) – первая единичная эпюра.

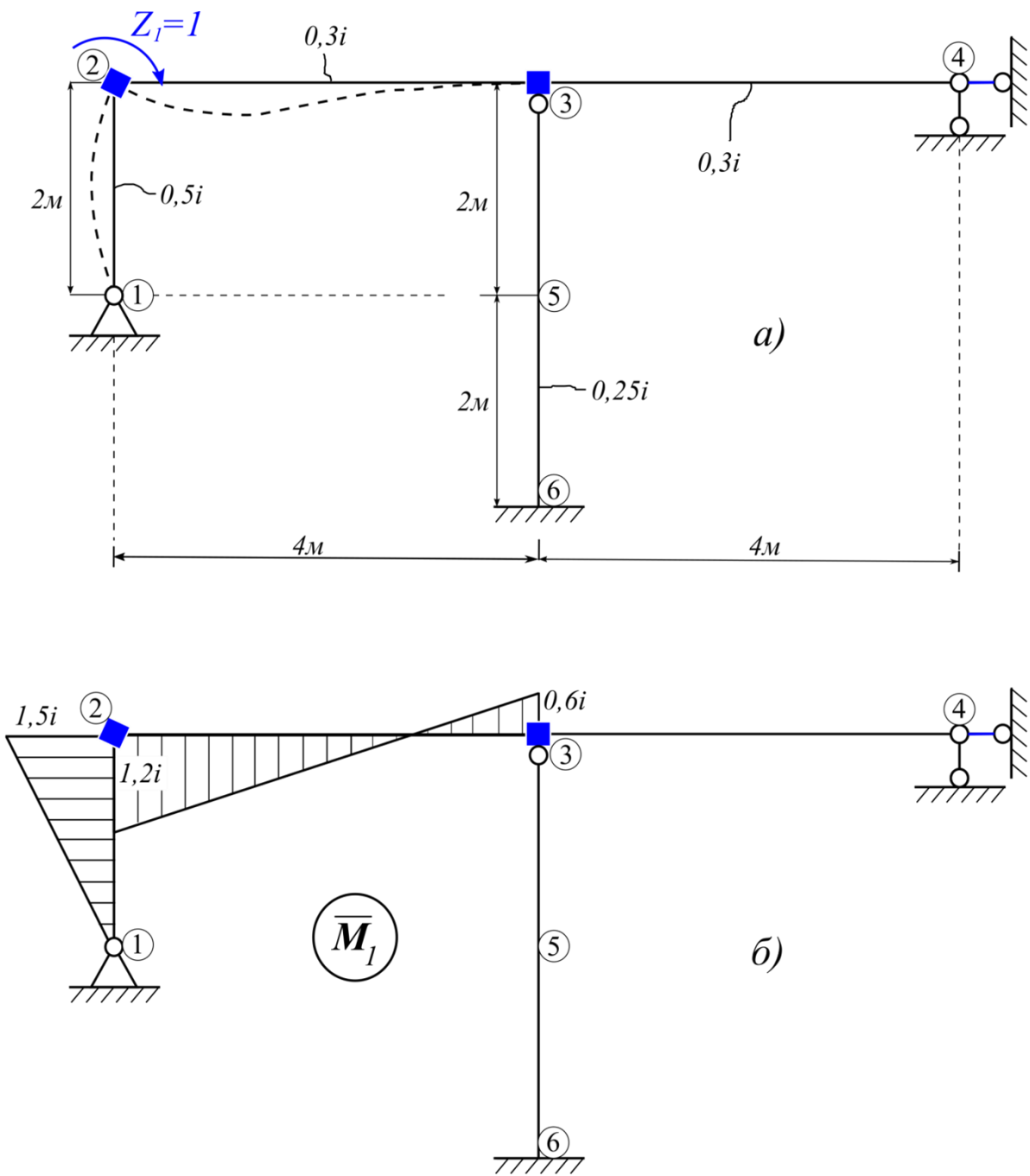


Рисунок 71

Построим единичную эпюру изгибающего момента \bar{M}_2 от действия единичного перемещения по второму направлению Z_2 .
 На рис. 72 а) изображена вторая вспомогательная расчетная схема, а на рис. 72 б) – вторая единичная эпюра \bar{M}_2 .

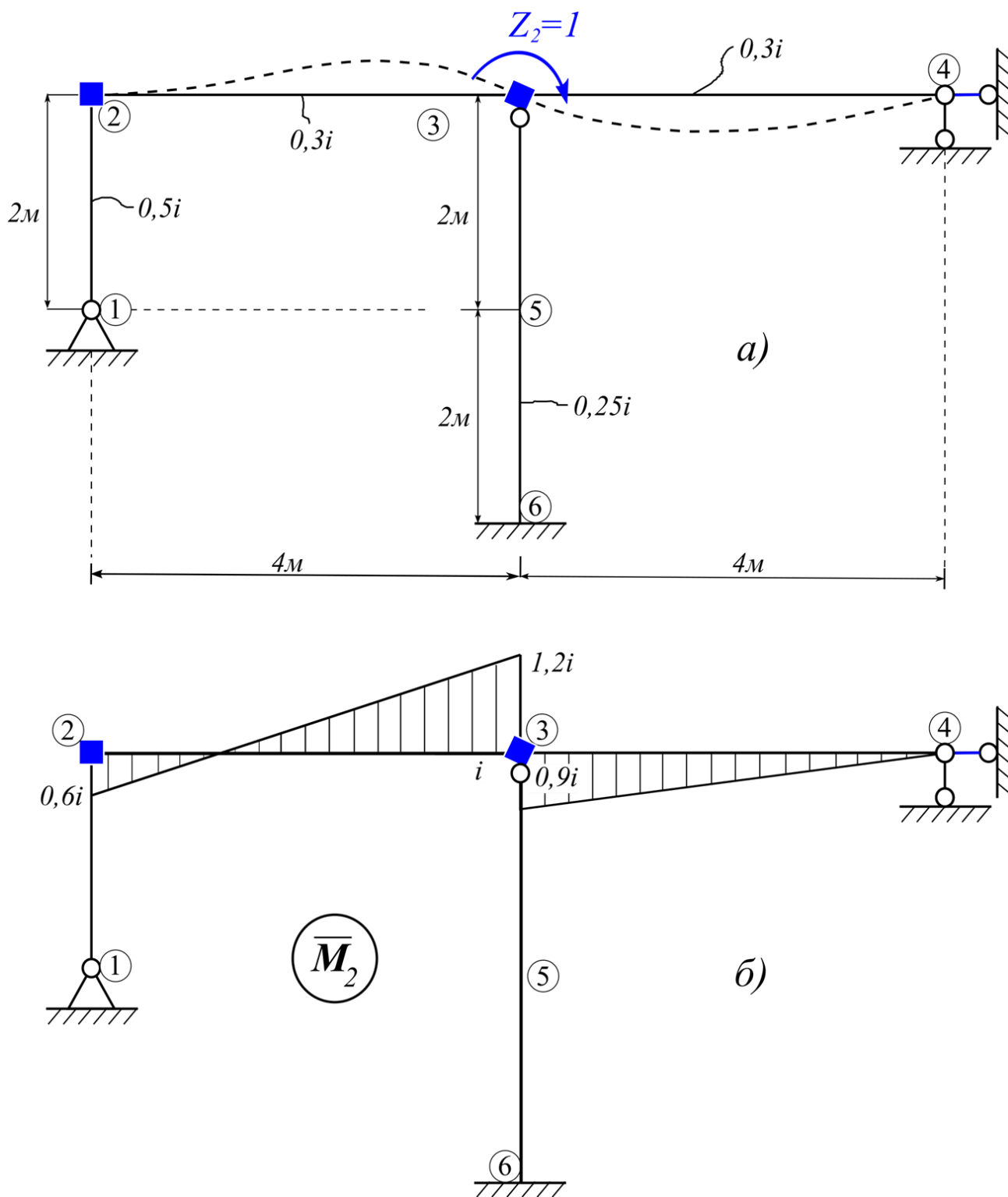


Рисунок 72

Построим единичную эпюру изгибающего момента \bar{M}_3 от действия единичного перемещения по третьему направлению Z_3 . На рис. 73 а) изображена третья вспомогательная расчетная схема, а на рис.73 б) – третья единичная эпюра \bar{M}_3 .

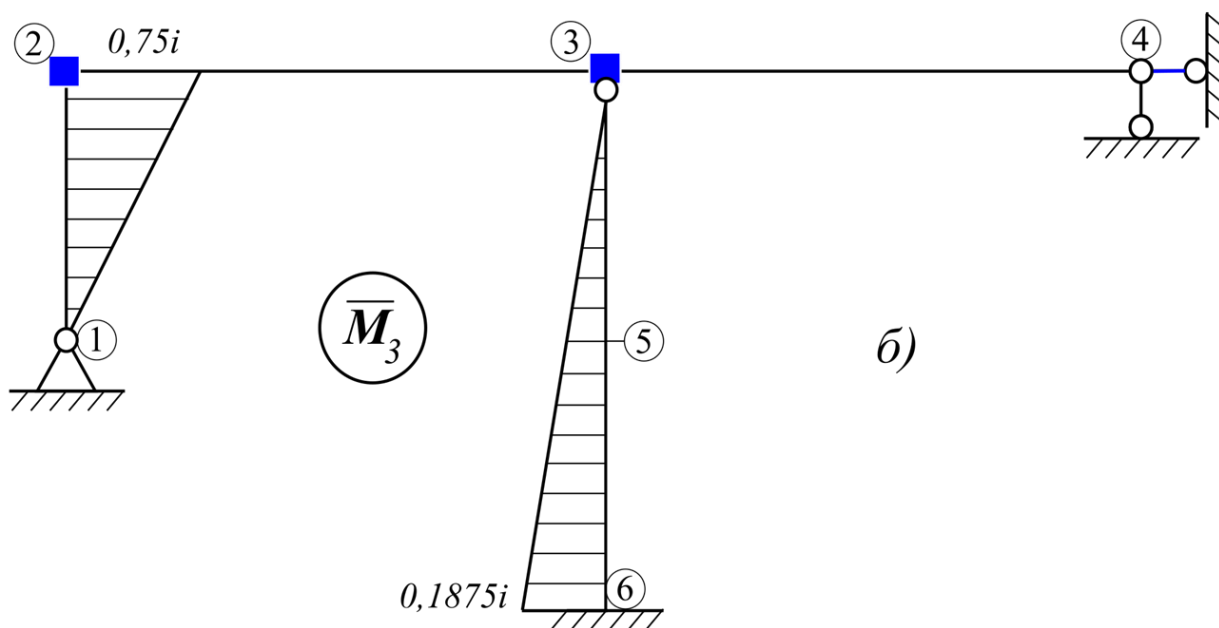
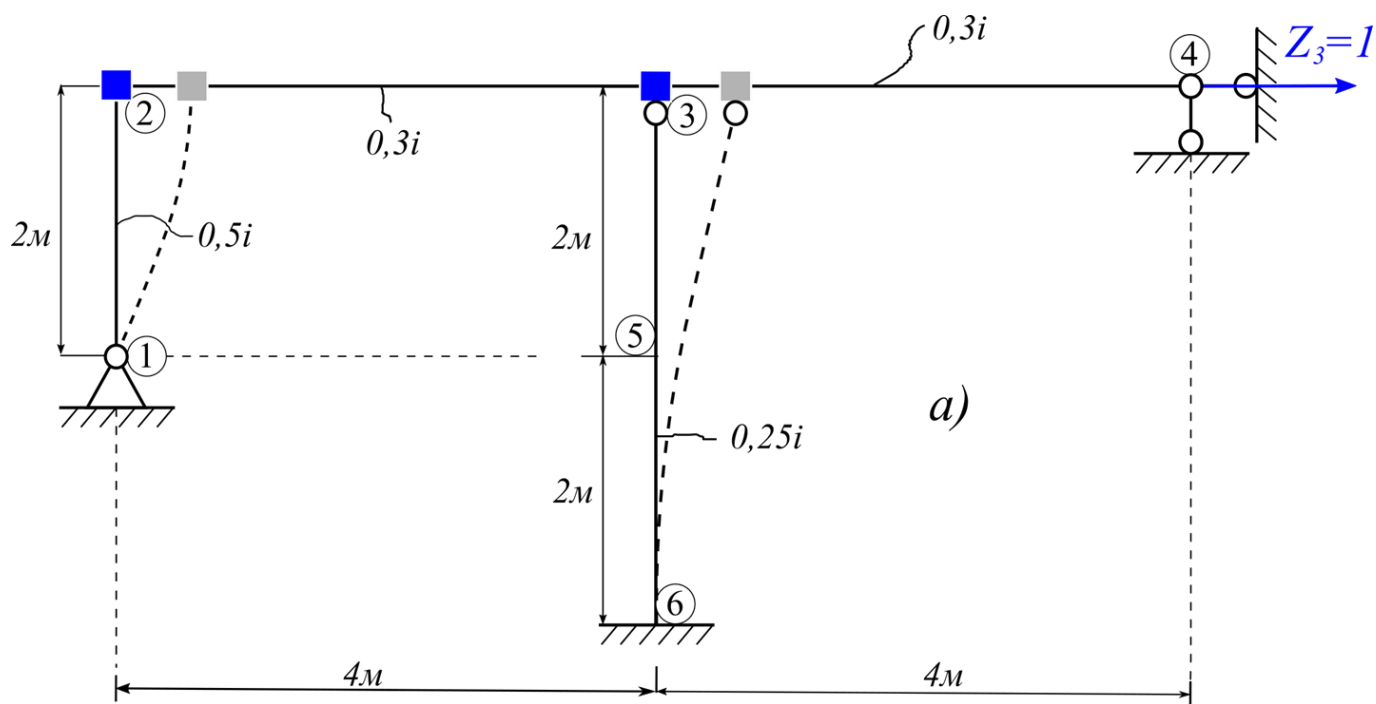


Рисунок 73

3.2. Построение грузовой эпюры. При построении грузовой эпюры M_p используется библиотека эпюр изгибающих моментов от различных вариантов расположения нагрузок для однопролетных статически неопределимых балок, из которых состоит основная система метода перемещений.

На рис. 74 а) изображена четвертая вспомогательная расчетная схема, а на рис.74 б) – грузовая эпюра M_p .

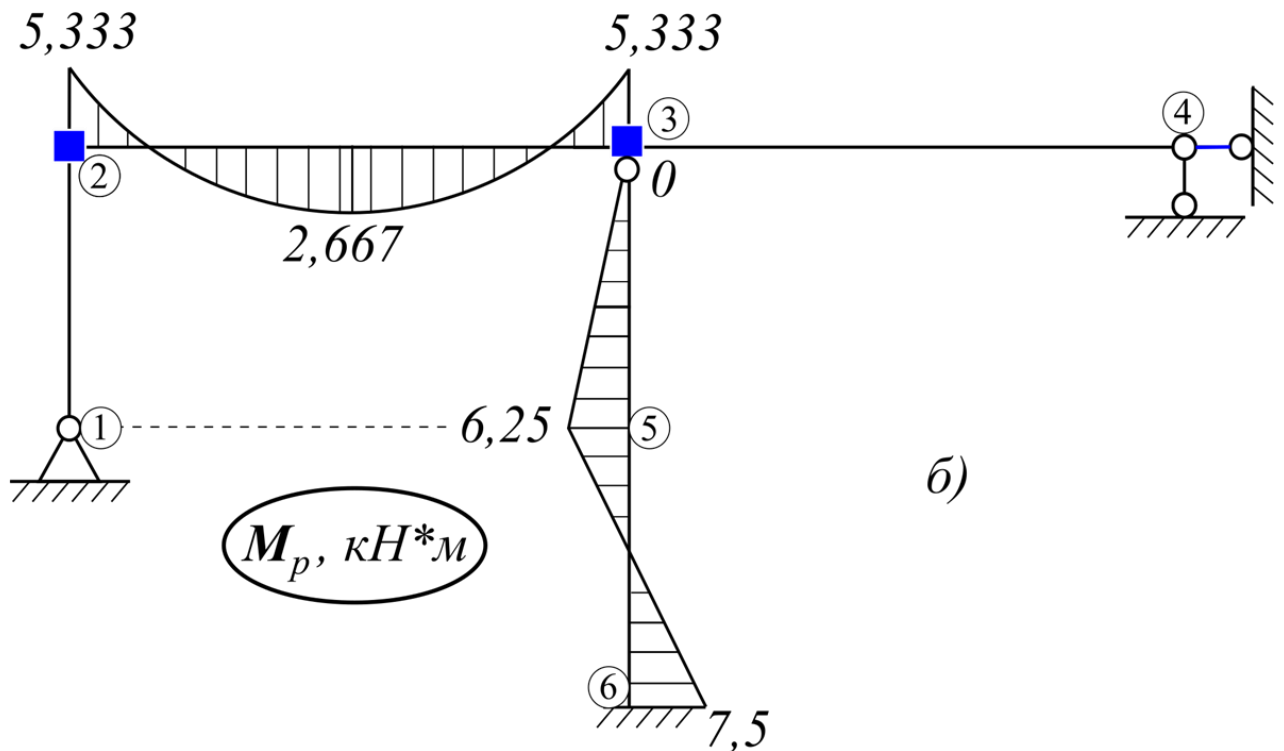
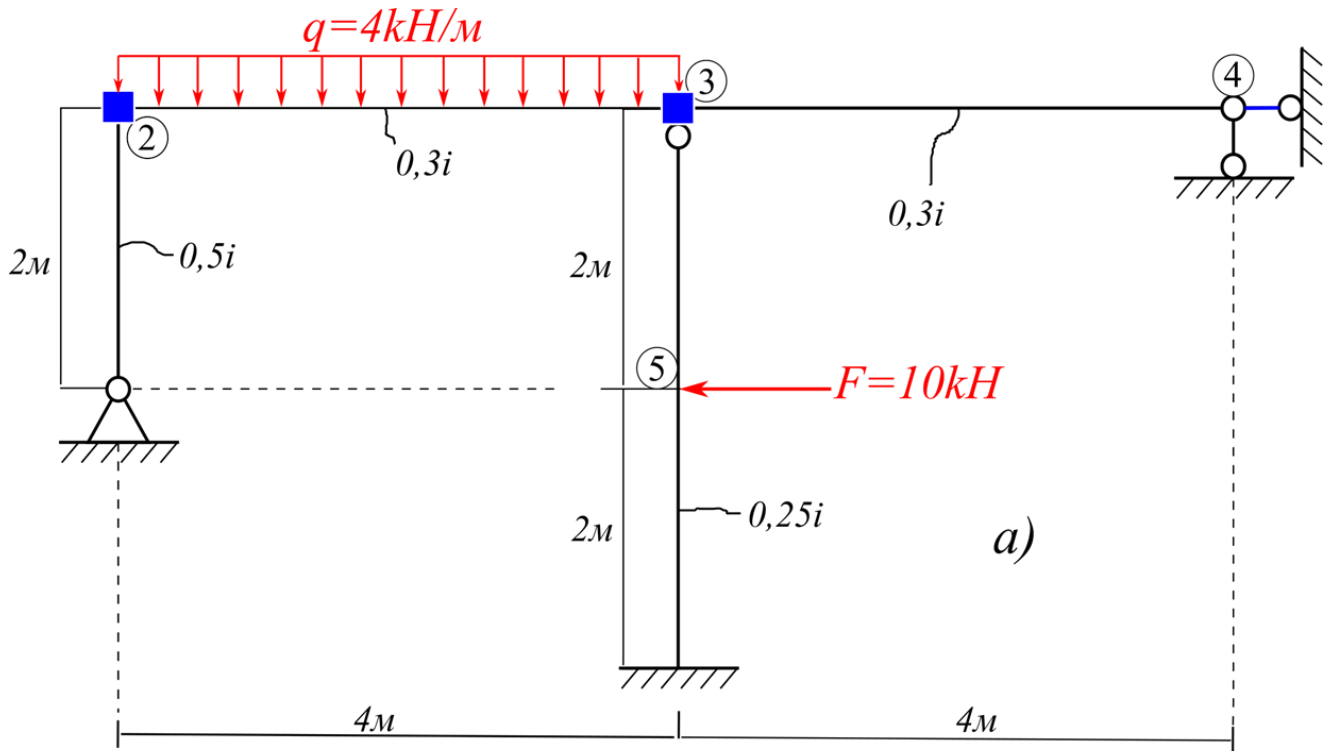


Рисунок 74

4. Определим в узлах реактивные силы и моменты. Для этого поочередно будем вырезать узлы рамы, и рассматривать условия их равновесия.

4.1. Рассмотрим первую единичную эпюру \bar{M}_1 .

Определим реакцию r_{11} в связи Z_1 по ее направлению от перемещения $Z_1 = 1$, расположенную на эпюре \bar{M}_1 , для этого вырежем узел 2 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, рис.75.

$$\sum M_2 = 0: -1,2i - 1,5i + r_{11} = 0 \Rightarrow r_{11} = 2,7 \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right].$$

Реактивный момент r_{11} будет положительным, так как направлен по часовой стрелке (совпадает с принятым направлением поворота).

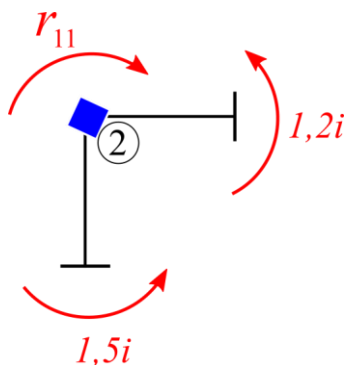


Рисунок 75

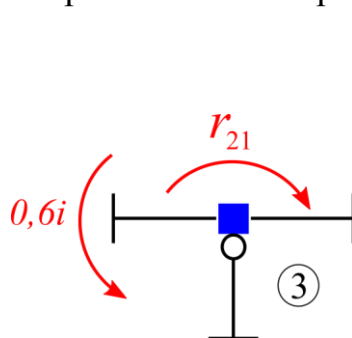


Рисунок 76

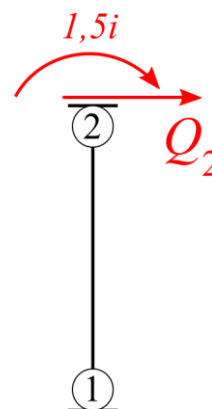


Рисунок 77

Определим реакцию r_{21} в связи Z_2 по ее направлению от перемещения $Z_1 = 1$, расположенный на эпюре \bar{M}_1 , для этого вырежем узел 3 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, рис.76.

$$\sum M_3 = 0: -0,6i + r_{21} = 0 \Rightarrow r_{21} = 0,6 \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right].$$

Реактивный момент r_{21} будет положительным, так как направлен по часовой стрелке (совпадает с принятым направлением поворота).

Определим реакцию r_{31} в связи Z_3 по ее направлению от перемещения $Z_1 = 1$, расположенную на эпюре \bar{M}_1 . Для её определения вначале определим поперечную силу Q_2 в окрестности точки 2 со стороны левой стойки путем вырезания стержня 1-2, рис.77.

$$\sum_{1-2} M_1 = 0: Q_2 \cdot 2 + 1,5i = 0 \Rightarrow Q_2 = -0,75 \text{ кН}.$$

После определения поперечной силы вырезаем весь ригель и рассматриваем его условие равновесия, рис. 78.

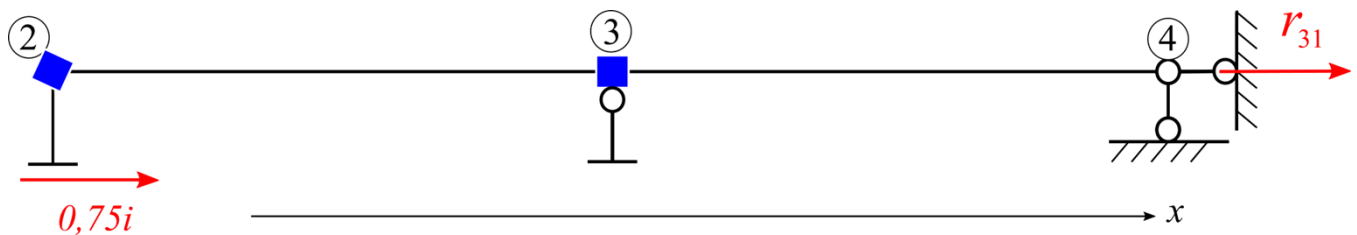


Рисунок 78

$$\sum X = 0: 0,75i + r_{31} = 0 \Rightarrow r_{31} = -0,75 \left[\frac{\text{кН}}{\text{рад}} \right].$$

Реакция будет отрицательной, так как она направлена влево.

4.2. Рассмотрим вторую единичную эпюру \bar{M}_2 .

Определим реакцию r_{22} в связи Z_2 по ее направлению от перемещения $Z_2 = 1$, расположенную на эпюре \bar{M}_2 . Для этого вырежем узел 3 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, см. рис.79.

$$\sum M_3 = 0: -1,2i - 0,9i + r_{22} = 0 \Rightarrow r_{22} = 2,1 \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right].$$

Реактивный момент r_{22} будет положительным, так как направлен по часовой стрелке (совпадает с принятым направлением поворота).

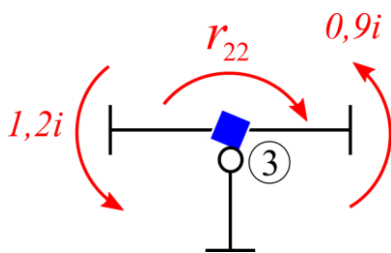


Рисунок 79

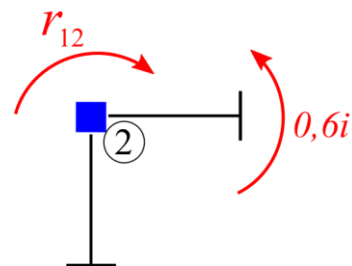


Рисунок 80

Определим реакцию r_{12} в связи Z_1 по ее направлению от перемещения $Z_2 = 1$, расположенный на эпюре \bar{M}_2 , для этого вырежем узел 2 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, см. рис.80.

$$\sum M_2 = 0: -0,6i + r_{12} = 0 \Rightarrow r_{12} = 0,6 \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right].$$

Реактивный момент r_{12} будет положительным, так как направлен по часовой стрелке (совпадает с принятым направлением поворота).

Сопоставляя, с ранее полученным значением r_{21} , убеждаемся в тождестве:

$$r_{21} = r_{12} = 0,6 \left[\frac{\text{кН} \cdot \text{м}}{\text{рад}} \right].$$

Определим реакцию r_{32} в связи Z_3 по ее направлению от перемещения $Z_2 = 1$, расположенный на эпюре \bar{M}_2 . вырезаем весь ригель и рассматриваем его условие равновесия, рис. 81.

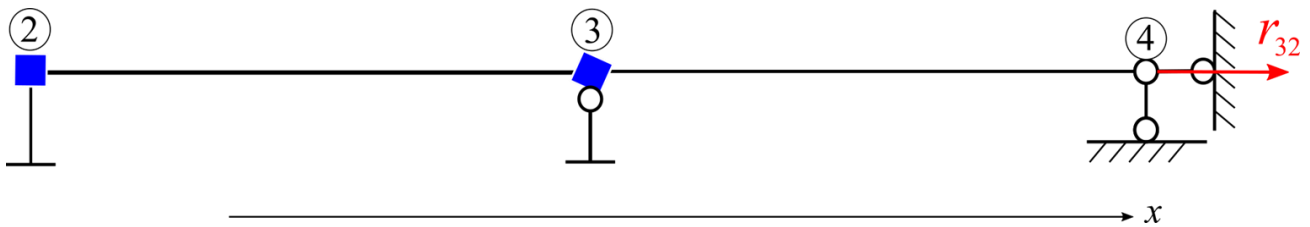


Рисунок 81

$$\sum X = 0: r_{32} = 0.$$

4.3. Рассмотрим третью единичную эпюру \bar{M}_3 . Определим реакцию r_{33} в связи Z_3 по ее направлению от перемещения $Z_3 = 1$, расположенную на эпюре \bar{M}_3 , для этого предварительно вырежем стержни 1-2 и 3-6 и определим на них необходимые поперечные силы, см. рис. 82.

$$\sum_{1-2} M_1 = 0: Q_2 \cdot 2 - 0,75i = 0 \Rightarrow Q_2 = 0,375i [\text{kH}].$$

$$\sum_{3-6} M_6 = 0: Q_3 \cdot 4 - 0,1875i = 0 \Rightarrow Q_3 = 0,046875i [\text{kH}].$$

Далее, вырежем весь ригель с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, см. рис.83.

$$\sum X = 0: -0,375i - 0,046875i + r_{33} = 0 \Rightarrow r_{33} = 0,421875 \left[\frac{\text{kH}}{\text{M}} \right].$$

Реакция r_{33} будет положительной, так как она направлена вправо.

Определим реакцию r_{13} в связи Z_1 по ее направлению от перемещения $Z_3 = 1$, расположенную на эпюре \bar{M}_3 , для этого вырежем узел 2 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, рис.84. $\sum M_3 = 0: 0,75i + r_{13} = 0 \Rightarrow r_{13} = -0,75 [\text{kH}].$

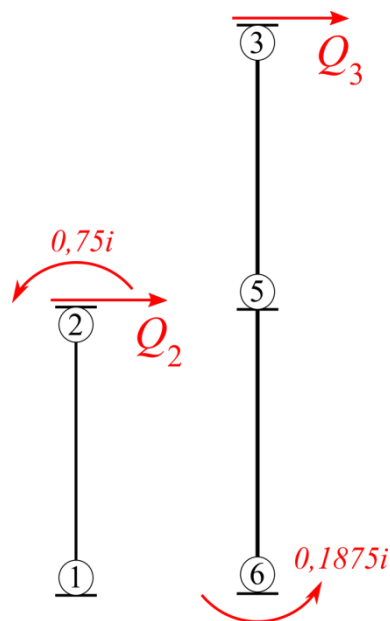


Рисунок 82

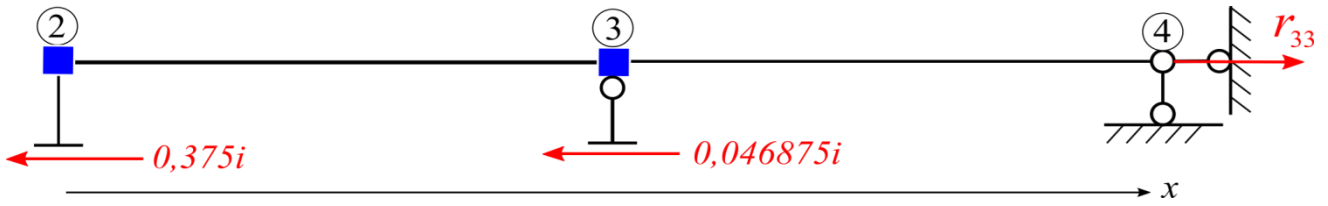


Рисунок 83

Реактивный момент r_{13} будет отрицательным, так как направлен против часовой стрелки (не совпадает с принятым направлением поворота). Сопоставляя, с ранее полученным значением r_{31} , убеждаемся в тождестве: $r_{31} = r_{13} = -0,75$. Определим реакцию r_{23} в связи Z_2 по ее направлению от перемещения $Z_3 = 1$, расположенный на эпюре \bar{M}_3 , для этого вырежем узел 3 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, см. рис.85.

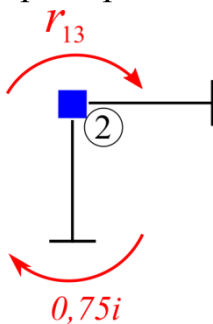


Рисунок 84

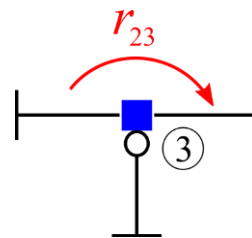


Рисунок 85

$\sum M_3 = 0: r_{23} = 0$. Сопоставляя, с ранее полученным значением r_{32} , убеждаемся в тождестве: $r_{32} = r_{23} = 0$.

4.4. Рассмотрим грузовую эпюру M_p .

Определим реакцию R_{1p} в связи Z_1 от внешней нагрузки, расположенную на эпюре M_p , для этого вырежем узел 2 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, рис. 86.

$$\sum M_2 = 0: 5,333i - R_{1p} = 0 \Rightarrow R_{1p} = -5,333kH \cdot m.$$

Реактивный момент R_{1p} будет отрицательным, так как направлен против часовой стрелки (не совпадает с принятым направлением поворота).

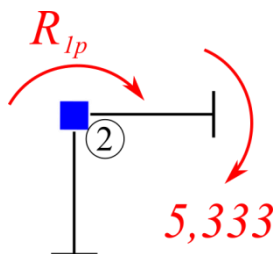


Рисунок 86

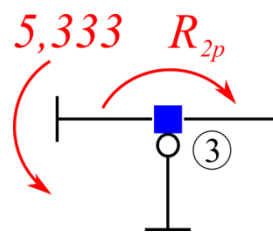


Рисунок 87

Определим реакцию R_{2p} в связи Z_2 от внешней нагрузки, расположенную на эпюре M_p , для этого вырежем узел 3 с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, рис. 87.

$$\sum M_3 = 0: -5,333 + R_{2p} = 0 \Rightarrow R_{2p} = 5,333 \text{ kH} \cdot \text{м.}$$

Реактивный момент R_{2p} будет положительным, так как направлен по часовой стрелки (совпадает с принятым направлением поворота).

Определим реакцию R_{3p} в связи Z_3 от внешней нагрузки, расположенную на эпюре M_p , для этого предварительно вырежем стержни 1-2 и 3-5 и определим на них необходимые поперечные силы, см. рис. 88.

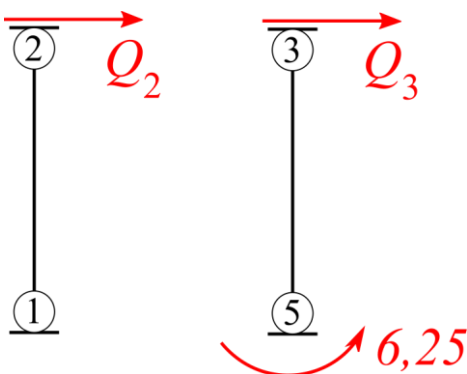


Рисунок 88

$$\sum_{1-2} M_1 = 0: Q_2 \cdot 2 = 0 \Rightarrow Q_2 = 0. \quad \sum_{3-5} M_6 = 0: Q_3 \cdot 2 - 6,25 = 0 \Rightarrow Q_3 = 3,125.$$

Далее, вырежем весь ригель с этой эпюры и рассмотрим условие его равновесия, см. рис.89.

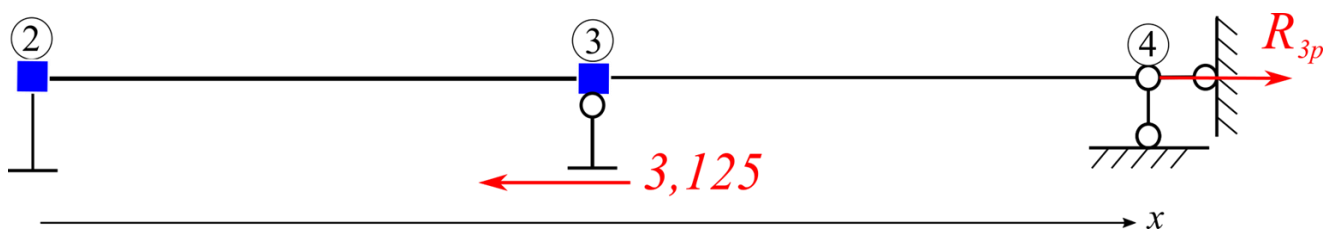


Рисунок 89

$$\sum X = 0: R_{3p} - 3,125 = 0 \Rightarrow R_{3p} = 3,125 \text{ kH.}$$

Реакция R_{3p} будет положительной, так как она направлена вправо.

5. После проверки всех единичных и грузовых коэффициентов решается система канонических уравнений и определяются значения неизвестных СЛАУ.

$$\begin{cases} r_{11} \cdot Z_1 + r_{12} \cdot Z_2 + r_{13} \cdot Z_3 + R_{1p} = 0 \\ r_{21} \cdot Z_1 + r_{22} \cdot Z_2 + r_{23} \cdot Z_3 + R_{2p} = 0 \\ r_{31} \cdot Z_1 + r_{32} \cdot Z_2 + r_{33} \cdot Z_3 + R_{3p} = 0 \end{cases}$$

В нашем случае:

$$\begin{cases} 2,7i \cdot Z_1 + 0,6i \cdot Z_2 - 0,75i \cdot Z_3 - 5,333 = 0 \\ 0,6i \cdot Z_1 + 2,1i \cdot Z_2 + 0 \cdot Z_3 + 5,333 = 0 \\ -0,75i \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 + 0,421875i \cdot Z_3 + 3,125 = 0 \end{cases}$$

Решая данную СЛАУ например, методом Гаусса, находим корни:

$$Z_1 = \frac{1,0886}{i} [\text{рад}]; Z_2 = \frac{-2,8505}{i} [\text{рад}]; Z_3 = \frac{-5,4721}{i} [\text{м}].$$

6. Построение окончательной эпюры M осуществляем используя формулу, согласно которой: $M = \bar{M}_1 \cdot Z_1 + \bar{M}_2 \cdot Z_2 + \bar{M}_3 \cdot Z_3 + M_p$. Таким образом необходимо сложить по ординатам (характерным точкам) скорректированные единичные эпюры

$\bar{M}_1 \cdot Z_1, \bar{M}_2 \cdot Z_2, \bar{M}_3 \cdot Z_3$ и грузовую эпюру M_p .

6.1 Строим скорректированную эпюру $\bar{M}_1 \cdot Z_1$. Для построения данной эпюры используется исходная единичная эпюра \bar{M}_1 все ординаты которой (по характерным точкам) умножаем на $Z_1 = 1,0886/i$ [рад], рис.90.

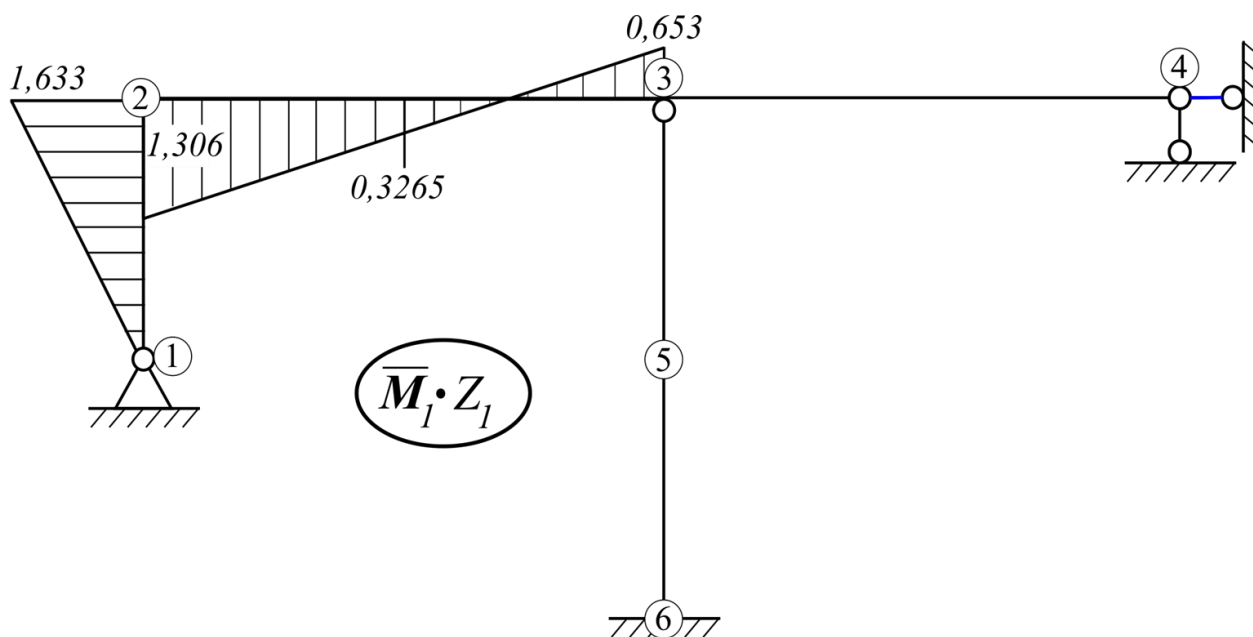


Рисунок 90

6.2 Строим скорректированную эпюру $\bar{M}_2 \cdot Z_2$. Для построения данной эпюры используется исходная единичная эпюра \bar{M}_2 все ординаты которой (по характерным точкам) умножаем на $Z_2 = -2,8505/i$ [рад], рис.91.

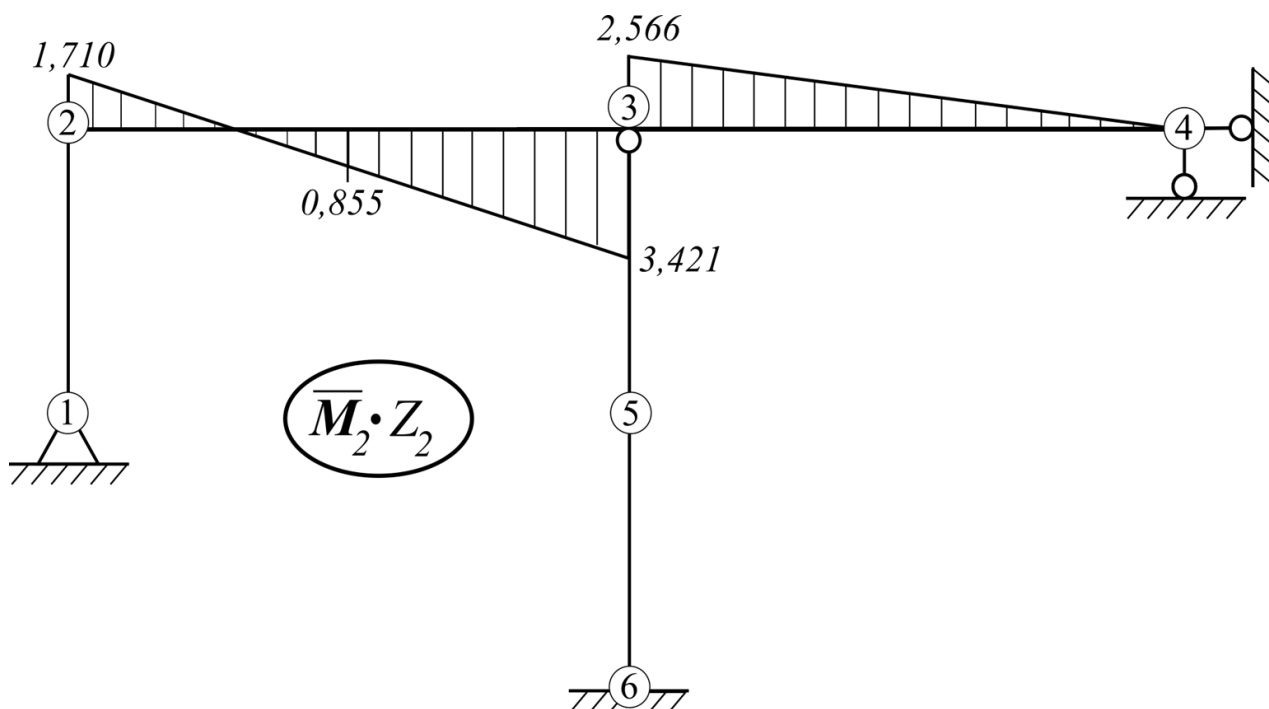


Рисунок 91

6.3 Строим скорректированную эпюру $\bar{M}_3 \cdot Z_3$. Для построения данной эпюры используется исходная единичная эпюра \bar{M}_3 все ординаты которой (по характерным точкам) умножаем на $Z_3 = -5,4721/i$ [м], рис.92.

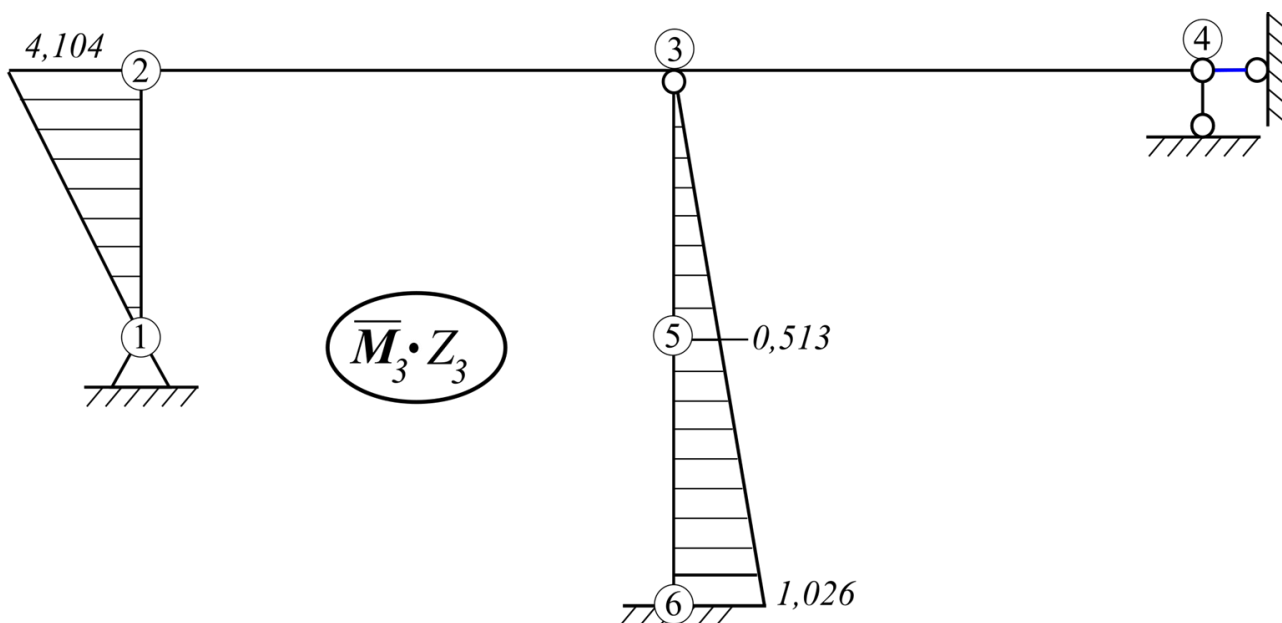


Рисунок 92

Полученные скорректированные единичные эпюры (рис.90-92) складываем по характерным точкам с грузовой эпюрой M_p . В результате получим окончательную эпюру изгибающих моментов, рис.93.

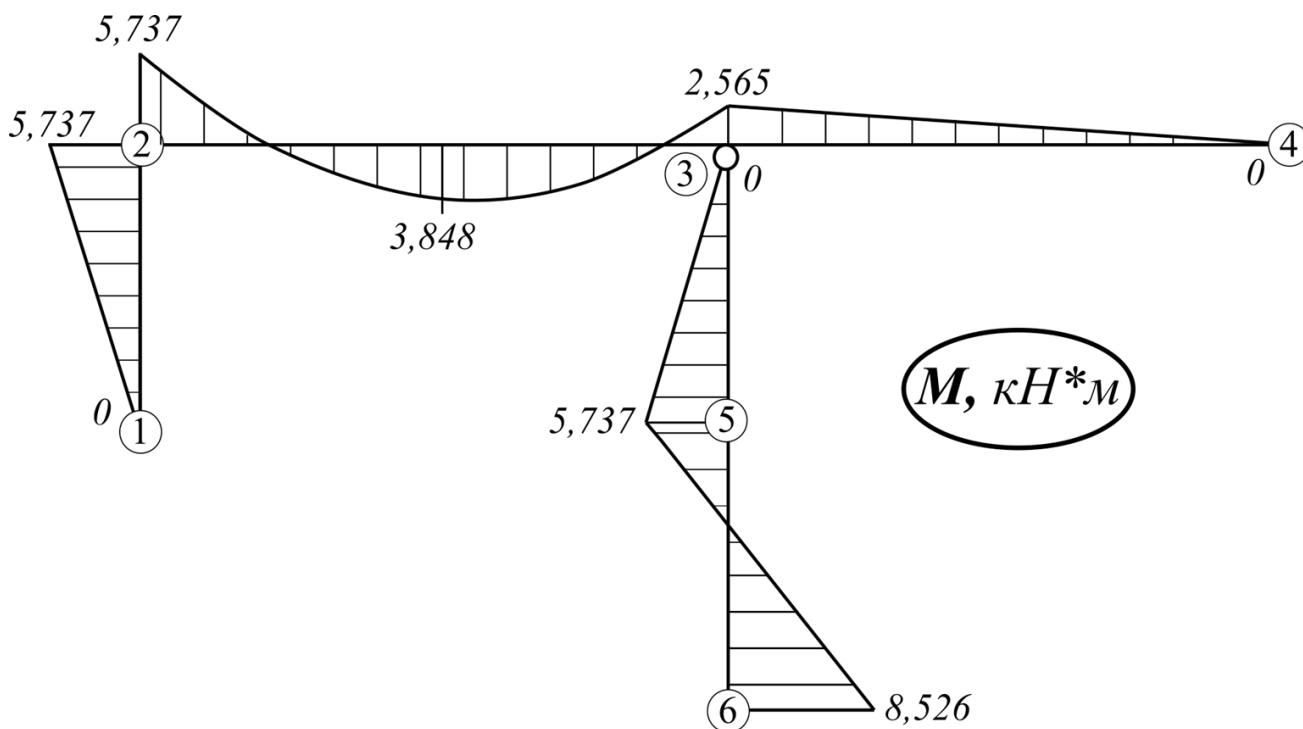


Рисунок 93

7. Строим эпюру Q . Применяем метод вырезания стержней. Последовательно вырезаем все участки рамы. К концам прикладываем известные значения моментов, с учетом их направления, а также неизвестные поперечные силы в сечениях, которые определяем рассматривая условия равновесия стержней, см. рис.94. Поперечная сила в сечении считается положительной, если она стремится повернуть рассматриваемый стержень по часовой стрелке.

Рассмотрим равновесие стержня 1 – 2.(см. рис. 94 а).

$$\sum M_1(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_2 \cdot 2 + 5,737 = 0 \Rightarrow Q_2 = -2,869 \text{ кН}.$$

$$\sum M_2(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_1 \cdot 2 + 5,737 = 0 \Rightarrow Q_1 = -2,869 \text{ кН}.$$

Рассмотрим равновесие стержня 2 – 3.(см. рис. 94 б).

$$\sum M_2(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_3 \cdot 4 + q \cdot 4 \cdot 2 - 5,737 + 2,565 = 0 \Rightarrow Q_3 = -7,207 \text{ kH}.$$

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_2 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 - 5,737 + 2,565 = 0 \Rightarrow Q_2 = 8,793 \text{ kH}.$$

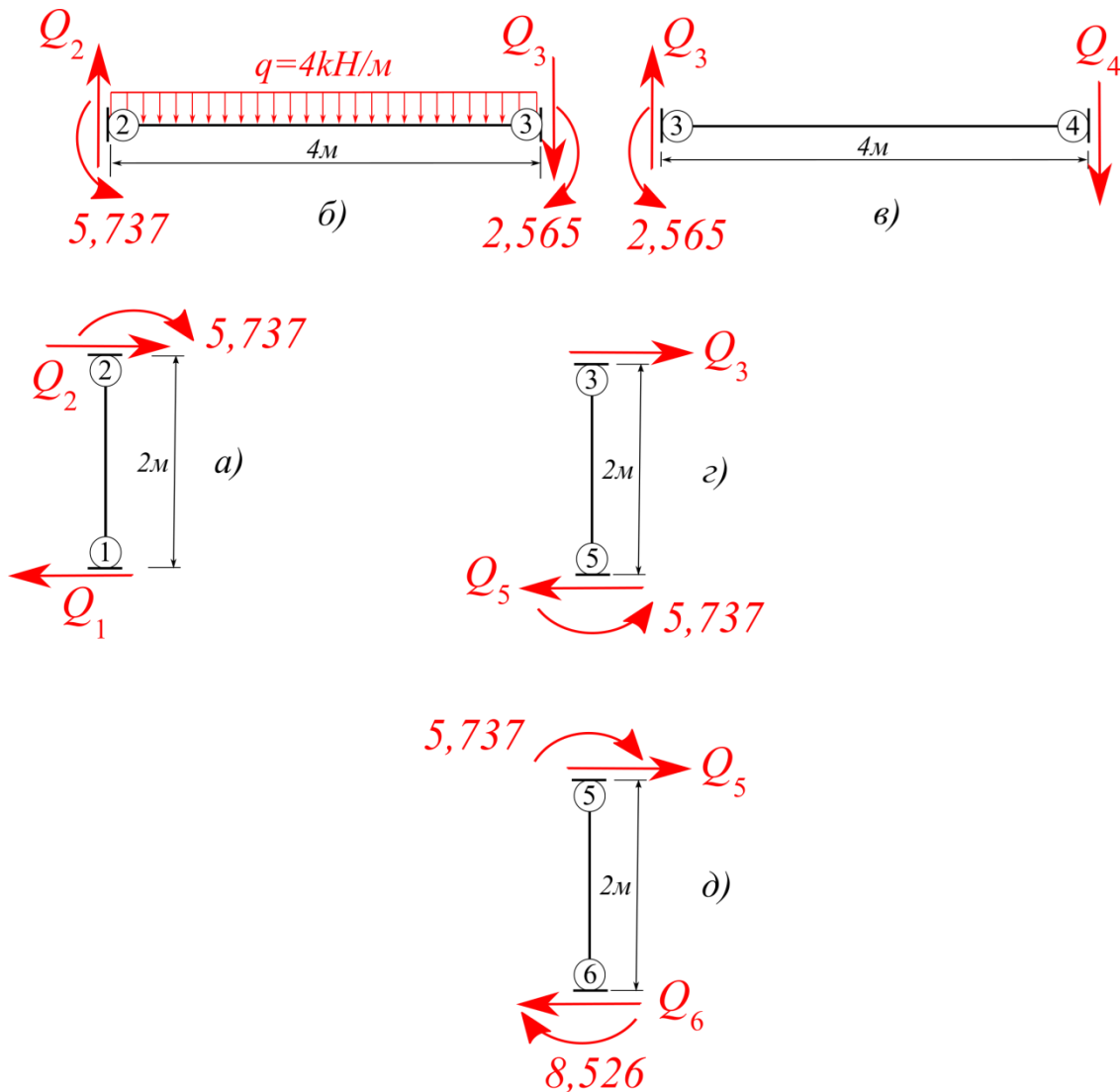


Рисунок 94

Рассмотрим равновесие стержня 3 – 4.(см. рис. 94 в).

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_4 \cdot 4 - 2,565 = 0 \Rightarrow Q_4 = 0,641 \text{ kH}.$$

$$\sum M_4(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_3 \cdot 4 - 2,565 = 0 \Rightarrow Q_3 = 0,641 \text{ kH}.$$

Рассмотрим равновесие стержня 3 – 5.(см. рис. 94 г).

$$\sum M_3(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_5 \cdot 2 - 5,737 = 0 \Rightarrow Q_5 = 2,869 \text{ kH}.$$

$$\sum M_5(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_3 \cdot 2 - 5,737 = 0 \Rightarrow Q_3 = 2,869 \text{ kH.}$$

Рассмотрим равновесие стержня 5 – 6.(см. рис. 94 д).

$$\sum M_5(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_6 \cdot 2 + 5,737 + 8,526 = 0 \Rightarrow Q_6 = -7,132 \text{ kH.}$$

$$\sum M_6(\bar{F}_i) = 0:$$

$$Q_5 \cdot 2 + 5,737 + 8,526 = 0 \Rightarrow Q_5 = -7,132 \text{ kH.}$$

С учетом полученных значений строим эпюру поперечных сил Q , рис.95.

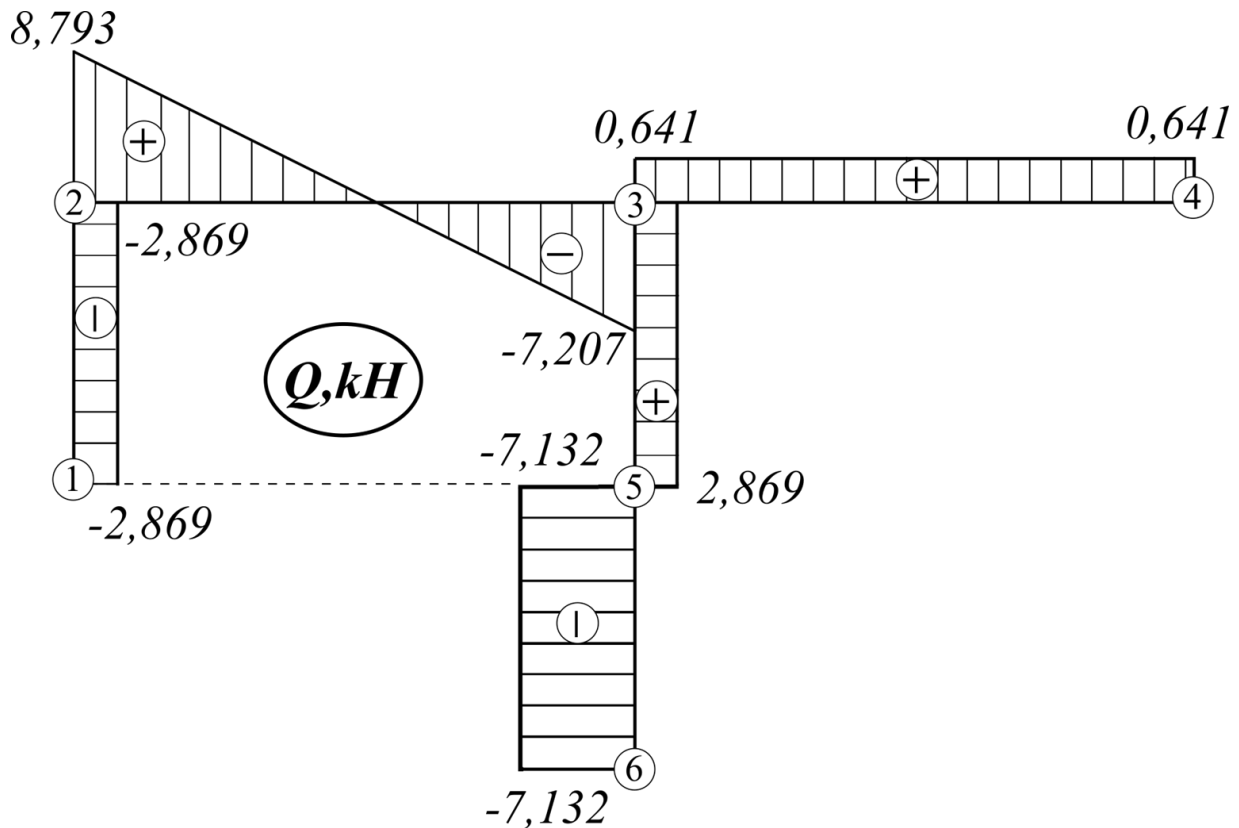


Рисунок 95

8. Строим эпюру внутренних продольных сил N . Вырезаем поочередно все необходимые узлы. К узлам прикладывают внешнюю сосредоточенную нагрузку, известные внутренние поперечные силы и неизвестные внутренние продольные силы, подлежащие определению (рис.96).

Внутренняя продольная сила направленная от узла считается положительной (растягивающей), к узлу - отрицательной (сжимающей).

Рассмотрим условие равновесия узла 2, рис.96 а).

$$\sum X = 0:$$

$$2,869 + N_{23} = 0 \Rightarrow N_{23} = -2,869 \text{ kH.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$-8,793 - N_{12} = 0 \Rightarrow N_{12} = -8,793 \text{ kH.}$$

Рассмотрим условие равновесия узла 4, рис.96 б).

$$\sum X = 0:$$

$$-N_{34} = 0 \Rightarrow N_{34} = 0 \text{ kH.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$0,641 - R_4 = 0 \Rightarrow R_4 = 0,641 \text{ kH.}$$

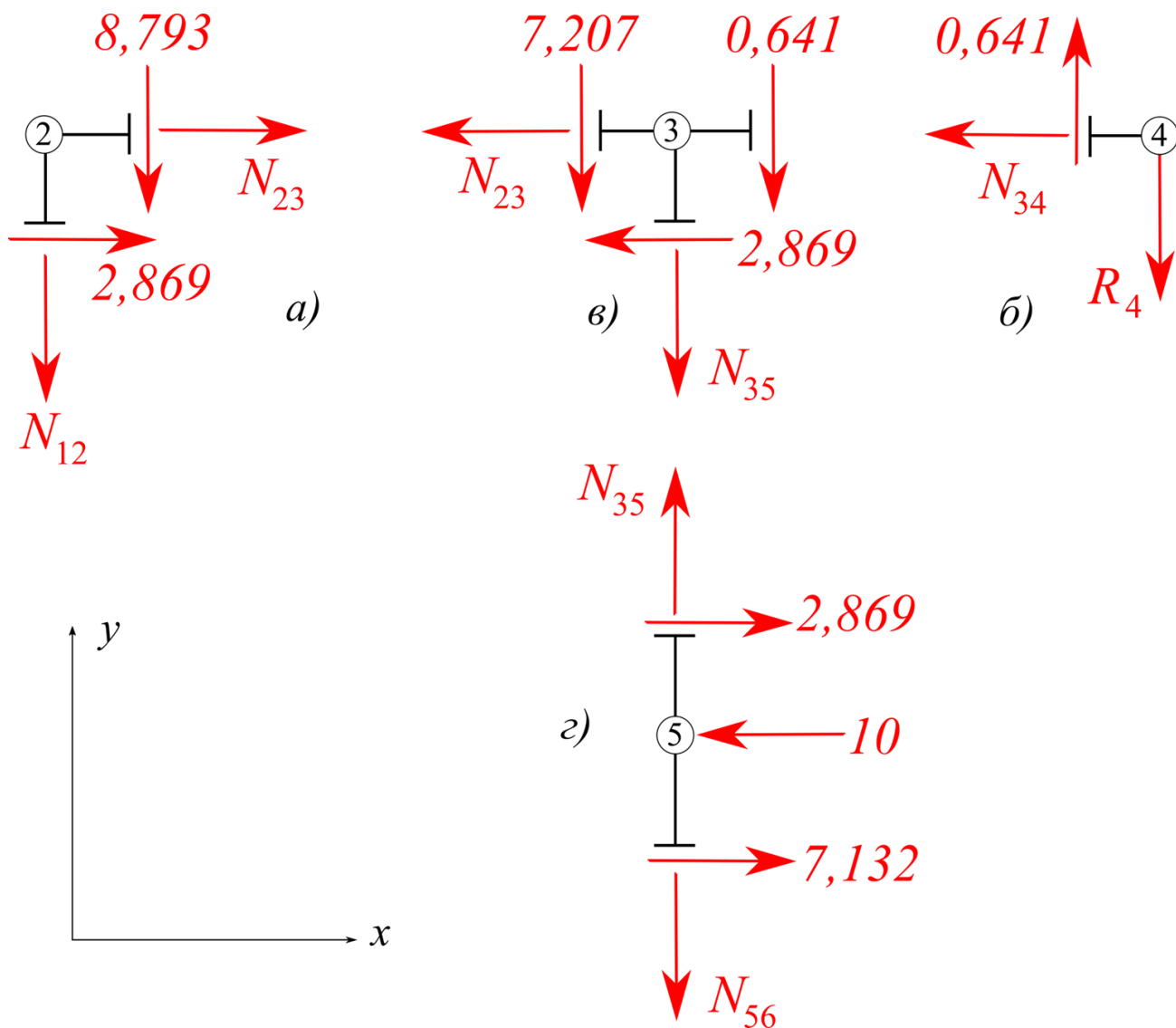


Рисунок 96

Рассмотрим условие равновесия узла 3, (см.рис.96 в).

$$\sum X = 0:$$

$$-N_{23} - 2,869 = 0 \Rightarrow N_{23} = -2,869 \text{ kH истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$-7,207 - 0,641 - N_{35} = 0 \Rightarrow N_{35} = -7,848 \text{ kH.}$$

Рассмотрим условие равновесия узла 5, (см.рис.96 в).

$$\sum X = 0:$$

$$-10 + 2,869 + 7,132 = 0,01 \approx 0 \Rightarrow \text{истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$N_{35} - N_{56} = 0 \Rightarrow N_{56} = -7,848 \text{ kH}.$$

С учетом полученных значений строим эпюру поперечных сил N , рис.97.

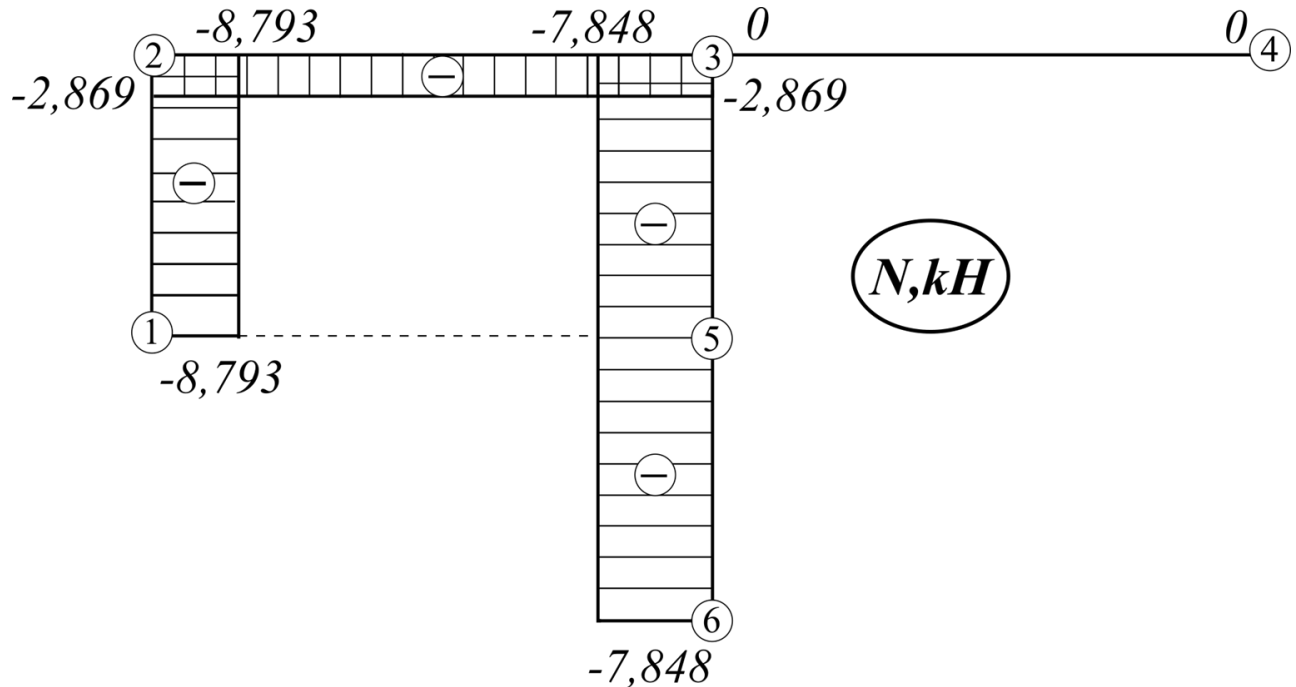


Рисунок 97

9. Проведем статическую проверку. Для этого проверим равновесие заданной рамы от внешней нагрузки и реакций опор, определенных по эпюрам поперечных и продольных сил.

Согласно построенных эпюр:

$$V_1 = 8,793 \text{ kH} (\text{направление снизу-вверх});$$

$$H_1 = 2,869 \text{ kH} (\text{направление слева-направо});$$

$$R_4 = 0,641 \text{ kH} (\text{направление сверху-вниз});$$

$$V_6 = 7,848 \text{ kH} (\text{направление снизу-вверх});$$

$$H_6 = 7,132 \text{ kH} (\text{направление слева-направо});$$

Выполним статическую проверку:

$$\sum X = 0:$$

$$H_1 + H_6 - 10 = 0 \Rightarrow 2,869 + 7,132 - 10 = 0,01 \approx 0 \text{ истинно.}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$V_1 + V_6 - q \cdot 4 - R_4 = 0 \Rightarrow 8,793 + 7,848 - 4 \cdot 4 - 0,641 = 0 \text{ истинно.}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Основы строительной механики стержневых систем: учеб. пособие / Леонтьев И. Н. – М.: изд-во Ассоциации строительных вузов, 1996. – 536 с.
2. Строительная механика : учеб. для вузов / Смирнов А. Ф., Александров А. В. и др. – М.: Стройиздат, 1981. – 510 с.
3. Строительная механика : учеб. для строит. вузов / А. В. Дарков, Н. Н. Шапошников. – 8-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1986. – 607 с.: ил.

Демидов Александр Станиславович
Михайленко Олег Анатольевич
Сорокина Ирина Алексеевна

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Методическое пособие по дисциплине «Строительная механика» для подготовки бакалавров направления 08.03.01 «Строительство» всех форм обучения

Подписано к печати. 27.05.21. Формат 60X84 1/16
Усл. печ. л. 5,4. Тираж 10 экз. Зак. 2117120. Рег № 69.

Отпечатано в ИТО Рубцовского индустриального института
658207, Рубцовск, ул. Тракторная, 2/6.